

Van der Waals 气体 Euler 方程的活塞问题*

陈洪花¹ 盛万成¹

摘要 研究了修正的 Van der Waals 气体 Euler 方程的活塞问题. 利用 Maxwell 提出的等面积法则, 将 Van der Waals 气体状态方程修正为与实际相符合, 从而将方程从混合型转会化为双曲型. 利用特征分析法, 给出修正的 Van der Waals 气体 Euler 方程的 Riemann 问题前向波的所有解, 从而进一步给出了推拉活塞时气体的所有运动.

关键词 Euler 方程, Van der Waals 气体, 活塞问题

MR (2000) 主题分类 35L65, 35L80, 35R35, 35L60, 35L50

中图法分类 O175.29

文献标志码 A

文章编号 1000-8314(2020)03-0263-16

1 引 言

可压缩流等熵 Euler 方程组为

$$\begin{cases} \rho_t + (\rho u)_x = 0, \\ (\rho u)_t + (\rho u^2 + p)_x = 0, \end{cases} \quad (1.1)$$

其中 ρ, u 分别表示气体的密度、速度. $\tau = \frac{1}{\rho}$ 为比容, $p = p(\tau)$ 为压强. 等熵 Van der Waals 气体的状态方程为 (见图 1)

$$p = \frac{A}{\tau - b} - \frac{a}{\tau^2}. \quad (1.2)$$

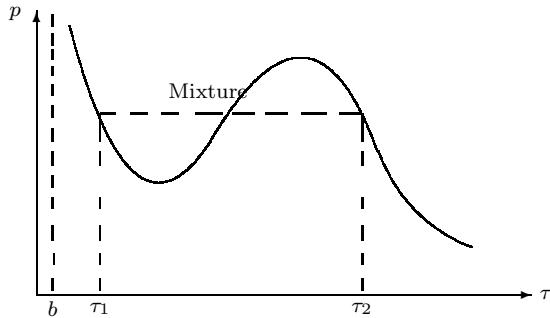


图 1 Van der Waals 气体的状态方程

这里 a 和 b 是气体的特征常数, A 是常数. 如图 1 所示, 当常数 A 不太大时, 在 $p'(\tau) > 0$ 那段, 方程组 (1.1) 是椭圆型的, 而在其他处, $p'(\tau) < 0$, 方程组 (1.1) 是双曲型的. Maxwell

本文 2019 年 4 月 10 日收到.

¹ 上海大学数学系, 上海 200444. E-mail: hhchen@shu.edu.cn; mathwcsheng@shu.edu.cn

*本文受到国家自然科学基金项目 (No. 11371240, No. 11771274) 的资助.

指出 $p'(\tau) > 0$ 违背了热力学稳定性定律。根据热力学稳定性定律 $p'(\tau)$ 必须是非正的，为了提供物理上有意义的数据，Maxwell 构造了一个等面积法则（见图 1），引入两个常比容 $\tau_1, \tau_2 (b < \tau_1 < \tau_2)$ 来限定混合区域。在混合区域中假设压强是常数， $[\tau_1, \tau_2]$ 段函数图像可以用直线来取代（见图 1）。

1972 年，Wendroff^[1] 在 $p'(\tau) < 0, p''(\tau)$ 仅有两个零点的条件下，得到了 (1.1)Riemann 问题的解。刘^[2]提出了广义的熵条件，来确定可容许解。1982 年，Shearer^[3] 得到了一类混合系统的 Riemann 问题。Yanagi^[4] 从纯数学角度解决了一类 Van der Waals 气体的 Riemann 问题，使用激波、稀疏波和静止的激波构造了 Riemann 问题的解。关于相关的 Riemann 问题的研究可参见文 [5–8]。Hattori^[9] 在熵比率相容性条件下得到了等熵的 Van der Waals 气体守恒律方程的 Riemann 问题的解。盛等^[10]，Godlewski 等^[11] 详细介绍了 Van der Waals 气体的 Riemann 问题以及波的相互作用。

1948 年，Courant 和 Friedrichs^[12] 介绍了活塞运动时多方气体的运动变化。1998 年，周^[13] 给出了活塞运动时多方气体变化的实际范例。本文的主要工作就是研究活塞运动时，Van der Waals 气体的运动情况。

由于 $p(\tau)$ 在 τ_1, τ_2 两点处不可微，我们通过磨光算子，使得在这两点处连续可微。为了方便，假设 $p(\tau)$ 满足以下条件（见图 2）：

(1) $p(\tau)$ 二次连续可微；

$$(2) p'(\tau) = \begin{cases} < 0, & b < \tau < \tau_1 \text{ 或 } \tau_2 < \tau, \\ = 0, & \tau_1 \leq \tau \leq \tau_2, \end{cases} \quad p''(\tau) = \begin{cases} > 0, & b < \tau < \tau_1 \text{ 或 } \tau_3 < \tau, \\ = 0, & \tau_1 \leq \tau \leq \tau_2 \text{ 或 } \tau = \tau_3, \\ < 0, & \tau_2 < \tau < \tau_3; \end{cases}$$

$$(3) \lim_{\tau \rightarrow b^+} p(\tau) = +\infty, \quad \lim_{\tau \rightarrow +\infty} p(\tau) = 0;$$

$$(4) \int_{\tau_3}^{+\infty} \sqrt{-p'(x)} dx = +\infty, \quad \int_b^{\tau_1} \sqrt{-p'(x)} dx = +\infty.$$

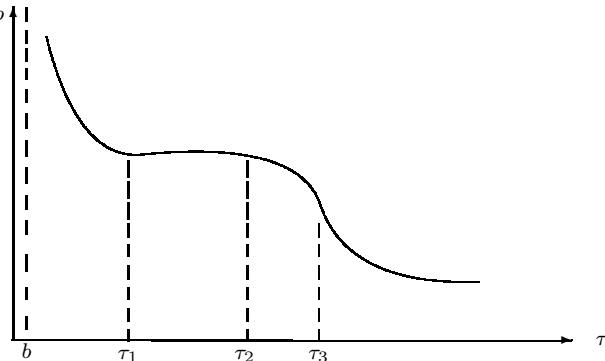


图 2 修正的 Van der Waals 气体状态方程

本文研究的 Van der Waals 气体的活塞问题，就是可压流 Euler 方程 (1.1) 状态方程满足上述条件，带有下列初边值的活塞问题：

$$\begin{cases} u = R'(t), & x = R(t), \\ U(x, 0) = (\tau_R, 0), & x > 0, \end{cases} \quad (1.3)$$

其中 $U = (\tau, u)$ 。在下一节，我们首先给出一些预备知识，介绍 Van der Waals 气体 Euler 方程的特征分析。在第 3 节，我们给出右状态决定的前向基本波线，由 $p(\tau)$ 的非凸性可知，

会出现混合波的情况^[1]. 最后第 4 节, 我们给出活塞问题的所有解.

2 预备知识

由于修正的 Van der Waals 气体方程并非完全凸的, 包含常数区. 为此, 我们将半平面 $D : \tau > b$ 分为三个部分 $D = D_1 \cup D_2 \cup D_0$, 这里

$$\begin{cases} D_1 = \{(\tau, u) \mid b < \tau < \tau_1, -\infty < u < +\infty\}, \\ D_2 = \{(\tau, u) \mid \tau_2 < \tau, -\infty < u < +\infty\}, \\ D_0 = \{(\tau, u) \mid \tau_1 < \tau < \tau_2, -\infty < u < +\infty\}. \end{cases} \quad (2.1)$$

(1) 当 $U \in D_1 \cup D_2$ 时, 方程组 (1.1) 为严格双曲的, 两个特征值为

$$\lambda_1(u) = u - \tau \sqrt{-p'(\tau)}, \quad \lambda_2(u) = u + \tau \sqrt{-p'(\tau)}. \quad (2.2)$$

相互独立的特征向量为

$$r_1(u) = \left(1, \sqrt{-p'(\tau)}\right), \quad r_2(u) = \left(1, -\sqrt{-p'(\tau)}\right). \quad (2.3)$$

在这两个区域中, 方程组 (1.1) 是真正非线性的.

(2) 当 $U \in D_0$ 时, 方程组 (1.1) 为非严格双曲的, 有 $\lambda_1(u) = \lambda_2(u) = u$, 并且特征向量 $r_1(u)$ 和 $r_2(u)$ 线性相关. 在这一区域方程组 (1.1) 是线性退化的. 这时要考虑刘^[2]给出的广义熵条件. 先给定弱解间断的 Rankine-Hugoniot 条件:

$$\begin{cases} \rho_L(u_L - \sigma) = \rho_R(-\sigma), \\ \rho_L(u_L - \sigma)^2 + p_L = \rho_R(-\sigma)^2 + p_R, \end{cases} \quad (2.4)$$

其中 σ 为间断传播速度, $U_L = (\tau_L, u_L)$ 和 $U_R = (\tau_R, 0)$ 为给定的左右状态. 通过简单计算, 得到

$$\sigma(U_L, U_R) = \tau_R \sqrt{-\frac{p(\tau_R) - p(\tau_L)}{\tau_R - \tau_L}}. \quad (2.5)$$

定义 2.1 ^[11] 如果连接两状态的间断满足

$$\sigma(U_L, U_R) \geq \sigma(U_R, U), \quad (2.6)$$

其中 $\tau \in (\min(\tau_L, \tau_R), \max(\tau_L, \tau_R))$, 则称此间断为可容许间断.

引理 2.1 ^[11] 对给定的左右状态 $U_L, U_R \in D$, 其中 $\tau_L \neq \tau_R$. $U_L, U_R \in D$ 可以通过可容许间断连接 (满足 (2.6)), 当且仅当

$$\sigma(U_L, U_R) \left(\frac{p(\tau_R) - p(\tau_L)}{\tau_R - \tau_L} - \frac{p(\tau_R) - p(\tau)}{\tau_R - \tau} \right) \leq 0. \quad (2.7)$$

这里 $\tau \in (\min(\tau_L, \tau_R), \max(\tau_L, \tau_R))$.

证 在本文中只考虑前向波, 由 (2.5) 知

$$\sigma(U_L, U_R) = \tau_R \sqrt{-\frac{p(\tau_R) - p(\tau_L)}{\tau_R - \tau_L}} \geq 0. \quad (2.8)$$

同样地

$$\sigma(U_R, U) = \tau_R \sqrt{-\frac{p(\tau_R) - p(\tau)}{\tau_R - \tau}} \geq 0. \quad (2.9)$$

因此, 由 (2.6) 知

$$\frac{p(\tau_R) - p(\tau_L)}{\tau_R - \tau_L} \leq \frac{p(\tau_R) - p(\tau)}{\tau_R - \tau}. \quad (2.10)$$

简而言之, 其几何意义为: 如果 $\tau_L < \tau_R$, 则 $p(\tau)$ 的函数图像在 $(\tau_L, P(\tau_L))$ 与 $(\tau_R, P(\tau_R))$ 两点连线的下方; 如果 $\tau_L > \tau_R$, 则 $p(\tau)$ 的函数图像在 $(\tau_L, P(\tau_L))$ 与 $(\tau_R, P(\tau_R))$ 两点连线的上方.

3 基本波线

利用特征分析法, 我们可以得到连接给定的两个状态 $(\tau_R, 0)$ 和 (τ, u) 之间的前向波.

(1) 当 $U_R = (\tau_R, 0) \in D_1 \cup D_2$ 时, 根据 $U = (\tau, u)$ 所处的位置不同, 它可被一个激波或疏散波连接到状态 $(\tau_R, 0)$. 分别用 \vec{S}, \vec{R} 表示前向激波、前向疏散波这类经典前向波:

$$\begin{aligned} \vec{R} : u &= - \int_{\tau_R}^{\tau} \sqrt{-p'(x)} dx, \\ \vec{S} : u &= -(\tau - \tau_R) \sqrt{-\frac{p(\tau_R) - p(\tau)}{\tau_R - \tau}}. \end{aligned} \quad (3.1)$$

用 $\overrightarrow{JRJ}, \overrightarrow{JR}$ 分别表示前向双接触间断和前向接触间断这类非经典波:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{JR} : u &= - \int_{\tau_R}^{\bar{\tau}_R} \sqrt{-p'(\tau)} d\tau - (\tau - \bar{\tau}_R) \sqrt{-\frac{p(\bar{\tau}_R) - p(\tau)}{\bar{\tau}_R - \tau}}, \\ \overrightarrow{JRJ} : u &= -(\bar{\tau}_R - \tau_R) \sqrt{-\frac{p(\bar{\tau}_R) - p(\tau_R)}{\bar{\tau}_R - \tau_R}} - \int_{\bar{\tau}_R}^y \sqrt{-p'(\tau)} d\tau - (\tau - y) \sqrt{-p'_{\tau y}}, \end{aligned} \quad (3.2)$$

这里

$$p'(\bar{\tau}_R) = \frac{p(\bar{\tau}_R) - p(\tau_R)}{\bar{\tau}_R - \tau_R}, \quad p'_{\tau y} = \frac{p(\tau) - p(y)}{\tau - y}.$$

同样地, 我们也可以得到其他的非经典基本波.

(2) 当 $U_R = (\tau_R, 0) \in D_0$ 时, $\lambda_2(u) = 0$, (τ, u) 与 $(\tau_R, 0)$ 之间通过一个间断连接:

$$\overline{J} : u = 0. \quad (3.3)$$

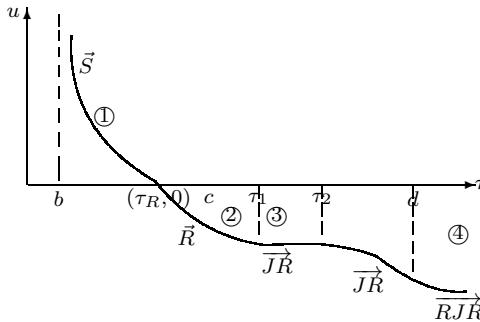
为了确定方程组 (1.1) 的广义波线, 我们将 (τ, u) 平面分为五个区域:

$$b < \tau_R < c, \quad c < \tau_R < \tau_1, \quad \tau_1 < \tau_R < \tau_2, \quad \tau_2 < \tau_R < \tau_3, \quad \tau_R > \tau_3.$$

其中 c, d 满足

$$p'(c) = p'(d) = \frac{p(c) - p(d)}{c - d}.$$

情形 1 $b < \tau_R < c$. 分为以下五种子情形 (见图 3).

图 3 情形 1 $b < \tau_R < c$

情形 1.1 当 $\tau < \tau_R$ 时, $\lambda_2(\tau)$ 随着 τ 的增大而减小, 即

$$\lambda_2(\tau) > \sigma(U_R, U) > \lambda_2(\tau_R), \quad \sigma(U_R, U) = \tau_R \sqrt{-\frac{p(\tau_R) - p(\tau)}{\tau_R - \tau}}.$$

由此 (τ, u) 必须通过激波连接到 $(\tau_R, 0)$, 即

$$\vec{S} : u = -(\tau - \tau_R) \sqrt{-\frac{p(\tau_R) - p(\tau)}{\tau_R - \tau}}.$$

情形 1.2 当 $\tau_R < \tau < \tau_1$ 时, (τ, u) 与 $(\tau_R, 0)$ 可以通过扇形波连接, 有

$$\vec{R} : u = - \int_{\tau_R}^{\tau} \sqrt{-p'(x)} dx.$$

情形 1.3 当 $\tau_1 < \tau < \tau_2$ 时, 从 (τ, u) 可以直接跳跃到 $(\tau_1, u(\tau_1))$, 再连续变化到 $(\tau_R, 0)$. 有

$$\vec{JR} : u = u(\tau_1) = - \int_{\tau_R}^{\tau_1} \sqrt{-p'(\tau)} d\tau.$$

情形 1.4 当 $\tau_2 < \tau < d$ 时, 此时存在 $y = y(\tau)$, 使得

$$p'(y) = \frac{p(\tau) - p(y)}{\tau - y}, \quad c < y < \tau_1.$$

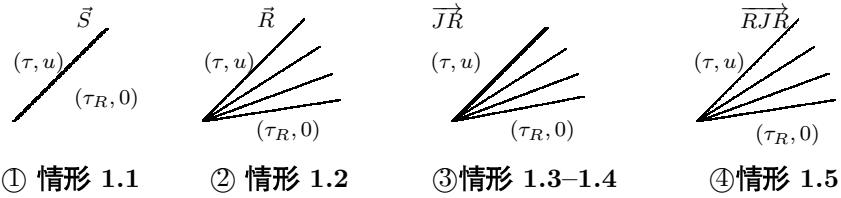
(τ, u) 可以通过接触间断连接到 $(y, u(y))$, 然后 $(y, u(y))$ 通过扇形波连接到 $(\tau_R, 0)$. 故

$$\vec{JR} : u = u(y) - (\tau - y) \sqrt{-\frac{p(\tau) - p(y)}{\tau - y}} = - \int_{\tau_R}^y \sqrt{-p'(\tau)} d\tau - (\tau - y) \sqrt{-\frac{p(\tau) - p(y)}{\tau - y}}.$$

情形 1.5 当 $\tau > d$ 时, (τ, u) 通过扇形波连接到 $(d, u(d))$, 再通过双接触间断连接到 $(c, u(c))$. 然后从 $(c, u(c))$ 连续变化到 $(\tau_R, 0)$. 因此

$$\begin{aligned} \vec{RJR} : u &= u(d) - \int_d^{\tau} \sqrt{-p'(x)} dx = u(c) - (d - c) \sqrt{-\frac{p(d) - p(c)}{d - c}} - \int_d^{\tau} \sqrt{-p'(x)} dx \\ &= - \int_{\tau_R}^c \sqrt{-p'(\tau)} d\tau - (d - c) \sqrt{-\frac{p(d) - p(c)}{d - c}} - \int_d^{\tau} \sqrt{-p'(x)} dx. \end{aligned}$$

下面相应地给出连接 $(\tau_R, 0)$ 与 (τ, u) 的前向波在 (x, t) 平面的示意图像, 为了区分连续解和间断解, 我们用粗线来表示激波或接触间断 (见图 4).

图 4 连接 $(\tau_R, 0)$ 与 (τ, u) 的前向波

情形 2 $c < \tau_R < \tau_1$. 分为以下六种子情形 (见图 5).

此时, 取 $\tau_4, \bar{\tau}_R$ 满足

$$p'(\tau_R) = \frac{p(\tau_R) - p(\tau_4)}{\tau_R - \tau_4}, \quad p'(\bar{\tau}_R) = \frac{p(\tau_R) - p(\bar{\tau}_R)}{\tau_R - \bar{\tau}_R}.$$

下文中出现的 $\tau_4, \bar{\tau}_R$ 的定义与之相同, 不再一一赘述.

情形 2.1 若 $\tau < \tau_R$, (τ, u) 通过激波连接到 $(\tau_R, 0)$, 有

$$\vec{S} : u = -(\tau - \tau_R) \sqrt{-\frac{p(\tau_R) - p(\tau)}{\tau_R - \tau}}.$$

情形 2.2 若 $\tau_R < \tau < \tau_1$, (τ, u) 通过一个前向疏散波连接到 $(\tau_R, 0)$,

$$\vec{R} : u = - \int_{\tau_R}^{\tau} \sqrt{-p'(x)} dx.$$

情形 2.3 若 $\tau_1 < \tau < \tau_2$, (τ, u) 通过一个接触间断连接到 $(\tau_1, u(\tau_1))$, $(\tau_1, u(\tau_1))$ 通过一个前向疏散波连接到 $(\tau_R, 0)$,

$$\vec{JR} : u = u(\tau_1) = - \int_{\tau_R}^{\tau_1} \sqrt{-p'(\tau)} d\tau.$$

情形 2.4 若 $\tau_2 < \tau < \tau_4$, 可取 $y(\tau) \in [\tau_R, \tau_1]$, 满足

$$p'(y) = \frac{p(\tau) - p(y)}{\tau - y}.$$

可以构造一个接触间断连接 (τ, u) 和 $(y, u(y))$, $(y, u(y))$ 通过一个前向疏散波连接到 $(\tau_R, 0)$,

$$\vec{JR} : u = u(y) - (\tau - y) \sqrt{-\frac{p(\tau) - p(y)}{\tau - y}} = - \int_{\tau_R}^y \sqrt{-p'(\tau)} d\tau - (\tau - y) \sqrt{-\frac{p(\tau) - p(y)}{\tau - y}}.$$

情形 2.5 若 $\tau_4 < \tau < \bar{\tau}_R$, (τ, u) 通过一个前向激波连接到 $(\tau_R, 0)$, 有

$$\vec{S} : u = -(\tau - \tau_R) \sqrt{-\frac{p(\tau_R) - p(\tau)}{\tau_R - \tau}}.$$

情形 2.6 若 $\tau > \bar{\tau}_R$, 从 (τ, u) 通过扇形波连接到 $(\bar{\tau}_R, u(\bar{\tau}_R))$, 然后 $(\bar{\tau}_R, u(\bar{\tau}_R))$ 通过接触间断连接到 $(\tau_R, 0)$, 因此

$$\vec{RJ} : u = u(\bar{\tau}_R) - \int_{\bar{\tau}_R}^{\tau} \sqrt{-p'(x)} dx = -(\bar{\tau}_R - \tau_R) \sqrt{-\frac{p(\tau_R) - p(\bar{\tau}_R)}{\tau_R - \bar{\tau}_R}} - \int_{\bar{\tau}_R}^{\tau} \sqrt{-p'(x)} dx.$$

综上, 在 (τ, u) 平面的示意图见图 5.

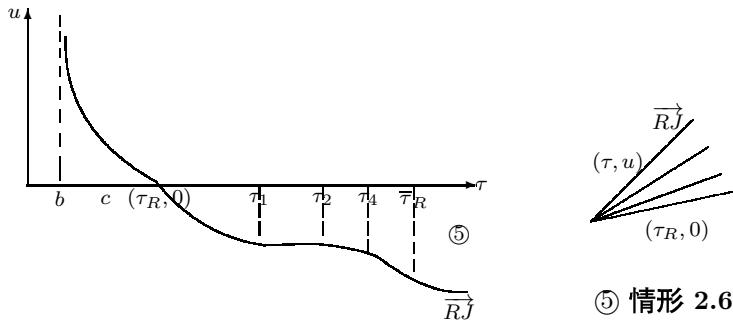


图 5 左: 情形 2 $c < \tau_R < \tau_1$. 右: 连接 $(\tau_R, 0)$ 与 (τ, u) 的前向波

情形 3 $\tau_1 < \tau_R < \tau_2$. 分为以下两种子情形 (见图 6).

情形 3.1 如果 $\tau < \bar{\tau}_R$, (τ, u) 通过一个前向激波连接到 $(\tau_R, 0)$, 有

$$\vec{S} : u = -(\tau - \tau_R) \sqrt{-\frac{p(\tau_R) - p(\tau)}{\tau_R - \tau}}.$$

情形 3.2 如果 $\tau > \bar{\tau}_R$, (τ, u) 通过一个前向疏散波连接到 $(\bar{\tau}_R, u(\bar{\tau}_R))$, $(\bar{\tau}_R, u(\bar{\tau}_R))$ 通过一个接触间断连接到 $(\tau_R, 0)$, 有

$$\vec{RJ} : u = u(\bar{\tau}_R) - \int_{\bar{\tau}_R}^{\tau} \sqrt{-p'(x)} dx = -(\bar{\tau}_R - \tau_R) \sqrt{-\frac{p(\tau_R) - p(\bar{\tau}_R)}{\tau_R - \bar{\tau}_R}} - \int_{\bar{\tau}_R}^{\tau} \sqrt{-p'(x)} dx.$$

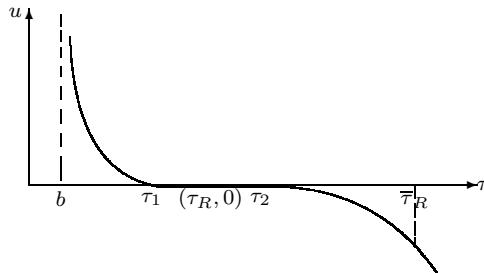


图 6 情形 3 $\tau_1 < \tau_R < \tau_2$

情形 4 $\tau_2 < \tau_R < \tau_3$ 分为以下五种子情形 (见图 7).

情形 4.1 当 $\tau < \tau_4$ 时, (τ, u) 通过一个前向激波连接到 $(\tau_R, 0)$,

$$\vec{S} : u = -(\tau - \tau_R) \sqrt{-\frac{p(\tau_R) - p(\tau)}{\tau_R - \tau}}.$$

情形 4.2 当 $\tau_4 < \tau < \tau_2$ 时, 存在 $y(\tau) \in [\tau_2, \tau_R]$, 使得

$$p'(y) = \frac{p(\tau) - p(y)}{\tau - y}.$$

(τ, u) 通过一个接触间断连接到 $(y, u(y))$. $(y, u(y))$ 通过一个前向疏散波连接到 $(\tau_R, 0)$,

$$\overrightarrow{JR} : u = u(y) - (\tau - y) \sqrt{-\frac{p(\tau) - p(y)}{\tau - y}} = - \int_{\tau_R}^y \sqrt{-p'(\tau)} d\tau - (\tau - y) \sqrt{-\frac{p(\tau) - p(y)}{\tau - y}}.$$

情形 4.3 当 $\tau_2 < \tau < \tau_R$ 时, (τ, u) 通过一个前向疏散波连接到 $(\tau_R, 0)$,

$$\vec{R} : u = - \int_{\tau_R}^{\tau} \sqrt{-p'(x)} dx.$$

情形 4.4 当 $\tau_R < \tau < \bar{\tau}_R$ 时, (τ, u) 通过一个前向激波连接到 $(\tau_R, 0)$,

$$\vec{S} : u = -(\tau - \tau_R) \sqrt{-\frac{p(\tau_R) - p(\tau)}{\tau_R - \tau}}.$$

情形 4.5 当 $\tau > \bar{\tau}_R$ 时, (τ, u) 通过一个前向疏散波连接到 $(\bar{\tau}_R, u(\bar{\tau}_R))$. $(\bar{\tau}_R, u(\bar{\tau}_R))$ 通过一个接触间断连接到 $(\tau_R, 0)$,

$$\overrightarrow{RJ} : u = u(\bar{\tau}_R) - \int_{\bar{\tau}_R}^{\tau} \sqrt{-p'(x)} dx = -(\bar{\tau}_R - \tau_R) \sqrt{-\frac{p(\tau_R) - p(\bar{\tau}_R)}{\tau_R - \bar{\tau}_R}} - \int_{\bar{\tau}_R}^{\tau} \sqrt{-p'(x)} dx.$$

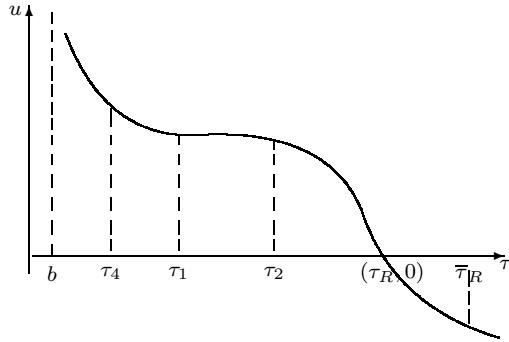


图 7 情形 4 $\tau_2 < \tau_R < \tau_3$

情形 5 $\tau_3 < \tau_R$ 分为以下五种子情形 (见图 8).

在这里取 τ_5 满足

$$p'(\bar{\tau}_R) = \frac{p(\tau_5) - p(\bar{\tau}_R)}{\tau_5 - \bar{\tau}_R}.$$

情形 5.1 若 $\tau < \tau_5$, (τ, u) 通过一个前向激波连接到 $(\tau_R, 0)$,

$$\vec{S} : u = -(\tau - \tau_R) \sqrt{-\frac{p(\tau_R) - p(\tau)}{\tau_R - \tau}}.$$

情形 5.2 若 $\tau_5 < \tau < \tau_2$, 我们不能直接用扇形波连接, 此时存在 $y(\tau) \in [\tau_2, \tau_3]$, 使得

$$p'(y) = \frac{p(\tau) - p(y)}{\tau - y}.$$

从 $(y, u(y))$ 构造一个扇形连接到 $(\bar{\tau}_R, u(\bar{\tau}_R))$. 然后, $(\bar{\tau}_R, u(\bar{\tau}_R))$ 通过一个接触间断连接到 $(\tau_R, 0)$, 故得到

$$\begin{aligned}\overrightarrow{JRJ} : u &= u(y) - (\tau - y) \sqrt{-\frac{p(\tau) - p(y)}{\tau - y}} \\ &= -(\bar{\tau}_R - \tau_R) \sqrt{-\frac{p(\tau_R) - p(\bar{\tau}_R)}{\tau_R - \bar{\tau}_R}} - \int_{\bar{\tau}_R}^y \sqrt{-p'(\tau)} d\tau - (\tau - y) \sqrt{-\frac{p(\tau) - p(y)}{\tau - y}}.\end{aligned}$$

情形 5.3 若 $\tau_2 < \tau < \bar{\tau}_R$, (τ, u) 通过一个前向疏散波连接到 $(\bar{\tau}_R, u(\bar{\tau}_R))$, $(\bar{\tau}_R, u(\bar{\tau}_R))$ 再通过一个接触间断连接到 $(\tau_R, 0)$,

$$\overrightarrow{RJ} : u = u(\bar{\tau}_R) - \int_{\bar{\tau}_R}^{\tau} \sqrt{-p'(x)} dx = -(\bar{\tau}_R - \tau_R) \sqrt{-\frac{p(\tau_R) - p(\bar{\tau}_R)}{\tau_R - \bar{\tau}_R}} - \int_{\bar{\tau}_R}^{\tau} \sqrt{-p'(x)} dx.$$

情形 5.4 若 $\bar{\tau}_R < \tau < \tau_R$, (τ, u) 通过一个前向激波连接到 $(\tau_R, 0)$,

$$\vec{S} : u = -(\tau - \tau_R) \sqrt{-\frac{p(\tau_R) - p(\tau)}{\tau_R - \tau}}.$$

情形 5.5 若 $\tau > \tau_R$, (τ, u) 通过一个前向疏散波连接到 $(\tau_R, 0)$,

$$\vec{R} : u = - \int_{\tau_R}^{\tau} \sqrt{-p'(x)} dx.$$

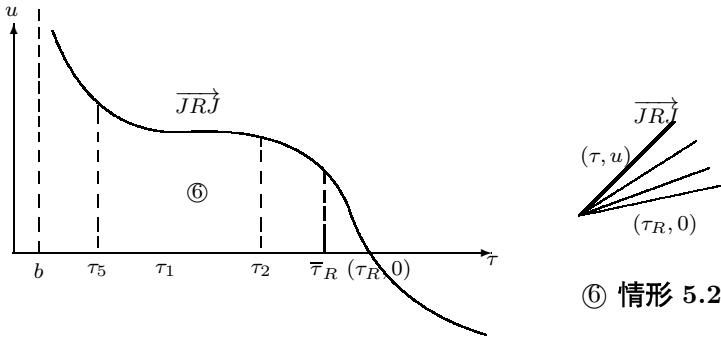


图 8 左: 情形 5 $\tau_R > \tau_3$. 右: 连接 $(\tau_R, 0)$ 与 (τ, u) 的前向波

4 活塞问题

活塞问题是流体力学中的一个重要问题. 在一个一端开口而另一端以活塞封闭的细长管子中充满静止气体, 则活塞的运动必然引起管内气体的相应运动(见图 9).

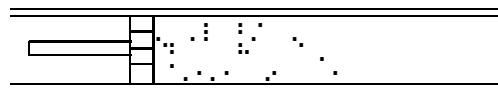


图 9 活塞模型

假定在初始时刻, 气体的状态是静止的, 其速度和压力分别为 $u = 0, p = p(\tau_R)$. 而活塞的位置在原点, 从 $t = 0$ 开始, 活塞以只依赖于时间 t 的速度向外扩张. 因此, 可以用坐标 t 和 x 来刻画活塞前面气体的状态. 在本文中我们只考虑一种特殊的情况, 即活塞的运动速度是一个常数的情况. 这时活塞的运动曲线变成直线 $x = u_p t$. 由上文的讨论, 我们将要讨论这五个区域: $b < \tau_R < c, c < \tau_R < \tau_1, \tau_1 < \tau_R < \tau_2, \tau_2 < \tau_R < \tau_3, \tau_R > \tau_3$ 中活塞前面气体的运动情况.

情形 1 $b < \tau_R < c$.

若 $u_p > 0$, 即活塞推向气体. 由情形 1.1 可知, (τ_p, u_p) 与 $(\tau_R, 0)$ 通过一个激波连接. 因此, 我们可以得到活塞和气体的运动曲线 (见图 10).

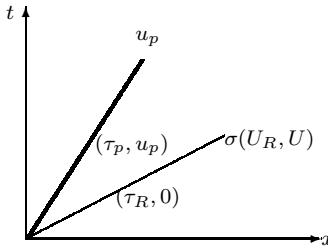


图 10 情形 $u_p > 0$

若 $u_p < 0$, 显然此时是活塞拉离气体. 由于拉活塞的速度 u_p 的不同, 产生不同的结果.

(1) 如果 $u(\tau_1) < u_p < 0$, 由情形 1.2 得 (τ_p, u_p) 可以通过扇形波连接到 $(\tau_R, 0)$ (见图 11(1)), 其中,

$$\lambda_2(U_p) = u_p + \tau_p \sqrt{-p'(\tau_p)} > u_p.$$

(2) 如果 $u(\tau_1) = u_p$, 根据情形 1.3, 首先 (τ_p, u_p) 与 $(\tau_1, u(\tau_1))$ 通过接触间断相连接, 然后 $(\tau_1, u(\tau_1))$ 通过扇形波连接到 $(\tau_R, 0)$ (见图 11(2)). 此时我们由修正的 Van der Waals 气体的状态图可知 (见图 2), $p'(\tau_p) = 0$, 以及

$$\lambda_2(U_p) = u_p + \tau_p \sqrt{-p'(\tau_p)} = u_p.$$

(3) 若 $u(d) < u_p < u(\tau_1)$, 由情形 1.4 知, (τ_p, u_p) 与 $(y, u(y))$ 通过接触间断相连接, $(y, u(y))$ 通过扇形波连接到 $(\tau_R, 0)$ (见图 11(3)). 同时, 有

$$\begin{aligned} u_p &= - \int_{\tau_R}^y \sqrt{-p'(\tau)} d\tau - (\tau_p - y) \sqrt{-p'(y)} < u(y) + y \sqrt{-p'(y)} = - \int_{\tau_R}^y \sqrt{-p'(\tau)} d\tau + y \sqrt{-p'(y)} \\ &< u_p + \tau_p \sqrt{-p'(\tau_p)} = - \int_{\tau_R}^y \sqrt{-p'(\tau)} d\tau + y \sqrt{-p'(y)} + \tau_p \left(\sqrt{-p'(\tau_p)} - \sqrt{-p'(y)} \right). \end{aligned}$$

(4) 若 $-\infty < u_p < u(d)$, 由情形 1.5 得, (τ_p, u_p) 通过扇形波连接到 $(d, u(d))$, $(d, u(d))$ 再通过接触间断连接到 $(c, u(c))$, 最终连续变化到 $(\tau_R, 0)$ (见图 11(4)), 并且

$$\lambda_2(U_p) = u_p + \tau_p \sqrt{-p'(\tau_p)} > u_p.$$

情形 2 $c < \tau_R < \tau_1$.

如果 $u_p > 0$, 与上述有相同结果, 就不再加以说明 (见图 10).

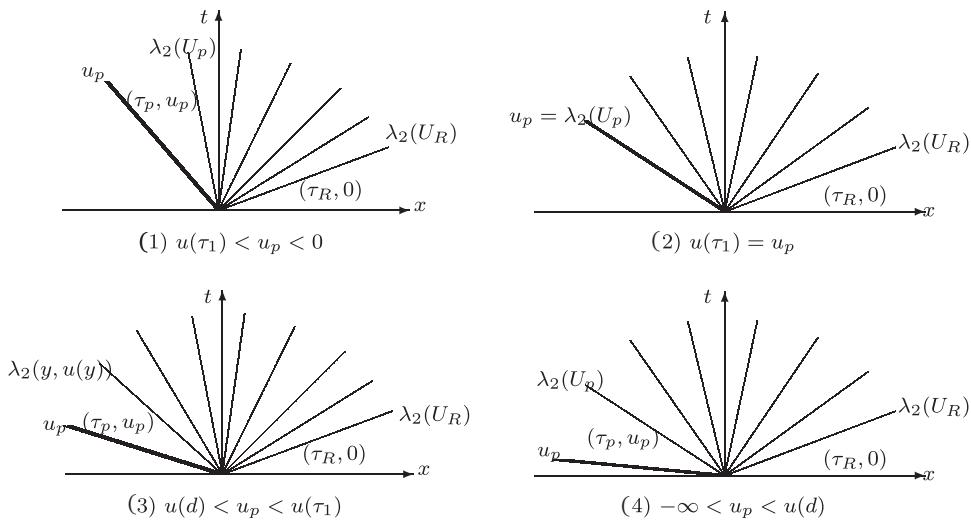


图 11 活塞抽离气体运动

如果 $u_p < 0$, 同样产生不同结果.

(1) 当 $u(\tau_1) < u_p < 0$ 时, 由情形 2.2 知, (τ_p, u_p) 通过扇形波连接到 $(\tau_R, 0)$ (见图 12(1)), 且

$$\lambda_2(U_p) = u_p + \tau_p \sqrt{-p'(\tau_p)} > u_p.$$

(2) 当 $u(\tau_1) = u_p$ 时, 由情形 2.3 得, (τ_p, u_p) 先通过接触间断与 $(\tau_1, u(\tau_1))$ 连接, 再连续变化到 $(\tau_R, 0)$ (见图 12(2)), 这时 $p'(\tau_p) = 0$,

$$\lambda_2(U_p) = u_p + \tau_p \sqrt{-p'(\tau_p)} = u_p.$$

(3) 当 $u(\tau_4) < u_p < u(\tau_2)$ 时, 由情形 2.4 可知, (τ_p, u_p) 与 $(y, u(y))$ 通过接触间断连接, 然后 $(y, u(y))$ 通过扇形波连接到 $(\tau_R, 0)$ (见图 12(3)). 同时, 可以得到

$$\begin{aligned} u_p &= - \int_{\tau_R}^y \sqrt{-p'(\tau)} d\tau - (\tau_p - y) \sqrt{-p'(y)} < u(y) + y \sqrt{-p'(y)} = - \int_{\tau_R}^y \sqrt{-p'(\tau)} d\tau + y \sqrt{-p'(y)} \\ &< u_p + \tau_p \sqrt{-p'(\tau_p)} = - \int_{\tau_R}^y \sqrt{-p'(\tau)} d\tau + y \sqrt{-p'(y)} + \tau_p \left(\sqrt{-p'(\tau_p)} - \sqrt{-p'(y)} \right). \end{aligned}$$

(4) 当 $u(\bar{\tau}_R) < u_p < u(\tau_4)$ 时, 由情形 2.5 得, (τ_p, u_p) 通过激波连接到 $(\tau_R, 0)$ (见图 12(4)).

(5) 当 $-\infty < u_p < u(\bar{\tau}_R)$ 时, 根据情形 2.6, (τ_p, u_p) 先通过前向稀疏波连接到 $(\bar{\tau}_R, u(\bar{\tau}_R))$, $(\bar{\tau}_R, u(\bar{\tau}_R))$ 再通过接触间断连接到 $(\tau_R, 0)$ (见图 12(5)).

情形 3 $\tau_1 < \tau_R < \tau_2$.

当 $u_p > 0$ 时, 显然与上述结果相同 (见图 10).

当 $u_p < 0$ 时, 产生的不同结果为:

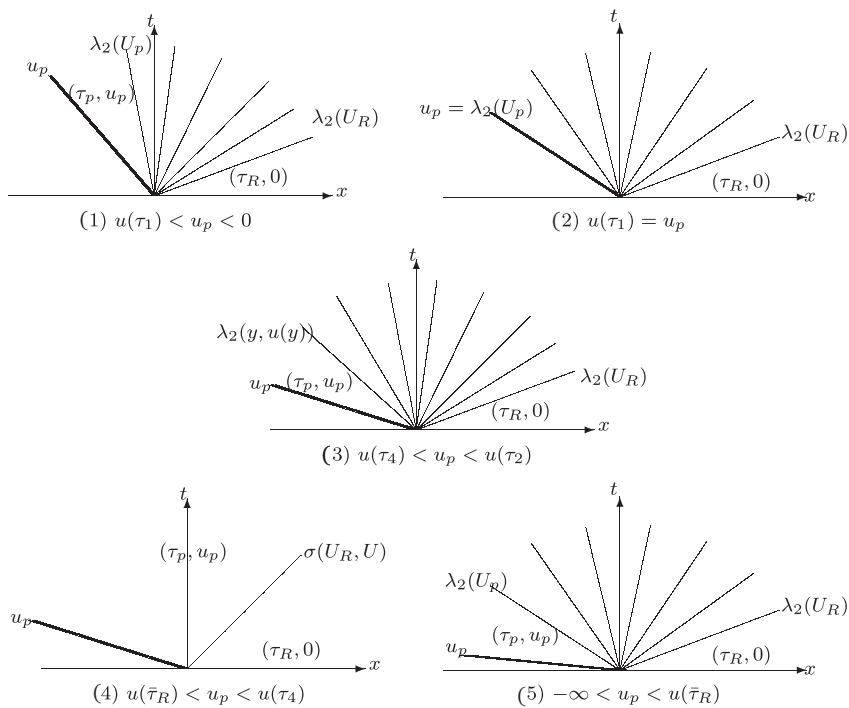


图 12 活塞抽离气体运动

(1) 如果 $u(\bar{\tau}_R) < u_p < 0$, 由情形 3.2 知, (τ_p, u_p) 通过激波与 $(\tau_R, 0)$ 相连接 (见图 13(1)).

(2) 如果 $-\infty < u_p < u(\bar{\tau}_R)$, 由情形 3.3 得, (τ_p, u_p) 先通过扇形波连接到 $(\bar{\tau}_R, u(\bar{\tau}_R))$, 然后 $(\bar{\tau}_R, u(\bar{\tau}_R))$ 与 $(\tau_R, 0)$ 通过接触间断连接 (见图 13(2)).

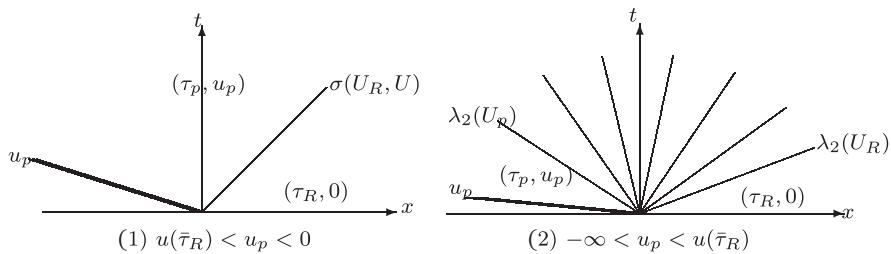


图 13 活塞抽离气体运动

情形 4 $\tau_2 < \tau_R < \tau_3$.

如果 $u_p > 0$, 由于推活塞的速度 u_p 的不同, 会产生不同的结果.

- (1) 如果 $u_p > u(\tau_4)$, 由情形 4.1 得, (τ_p, u_p) 通过激波连接到 $(\tau_R, 0)$ (见图 14(1)).
- (2) 如果 $u(\tau_2) < u_p < u(\tau_4)$, 由情形 4.2 知, (τ_p, u_p) 与 $(y, u(y))$ 通过间断与之相连接, 再连续变化到 $(\tau_R, 0)$ (见图 14(2)).
- (3) 如果 $u(\tau_2) = u_p$, 由情形 4.2 得, (τ_p, u_p) 可与 $(\tau_2, u(\tau_2))$ 接触间断相连接, 然后 $(\tau_2, u(\tau_2))$ 再通过扇形波连接到 $(\tau_R, 0)$ (见图 14(3)).
- (4) 如果 $0 < u_p < u(\tau_2)$, 由情形 4.3 知, (τ_p, u_p) 通过扇形波连接到 $(\tau_R, 0)$ (见图 14(4)).

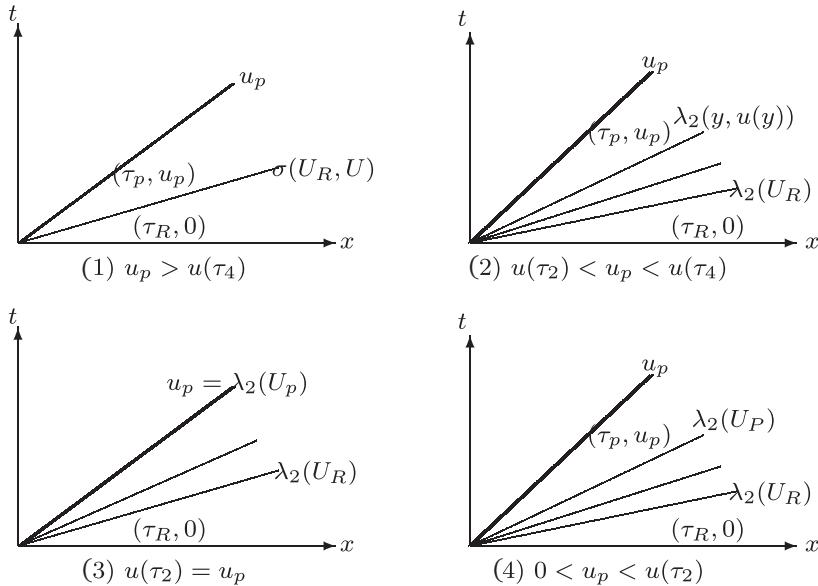


图 14 活塞推进气体运动

如果 $u_p < 0$, 与上述情形 3 有同样结果 (见图 13).

情形 5 $\tau_3 < \tau_R$.

若 $u_p > 0$, 结果如下:

- (1) 若 $u_p > u(\tau_5)$, 由情形 5.1 可以得到 (τ_p, u_p) 与 $(\tau_R, 0)$ 通过激波相连接, 结果见图 15(1).

(2) 若 $u(\tau_2) < u_p < u(\tau_5)$, 由情形 5.2 得, (τ_p, u_p) 先通过接触间断连接到 $(y, u(y))$, $(y, u(y))$ 再通过扇形波连接到 $(\bar{\tau}_R, u(\bar{\tau}_R))$. 最后 $(\bar{\tau}_R, u(\bar{\tau}_R))$ 再通过接触间断连接到 $(\tau_R, 0)$ (见图 15(2)).

(3) 若 $u(\tau_2) = u_p$, 由情形 5.2 知, (τ_p, u_p) 与 $(\tau_2, u(\tau_2))$ 通过接触间断相连接, $(\tau_2, u(\tau_2))$ 再通过扇形波连接到 $(\bar{\tau}_R, u(\bar{\tau}_R))$. 最后 $(\bar{\tau}_R, u(\bar{\tau}_R))$ 再通过接触间断连接到 $(\tau_R, 0)$ (见图 15(3)).

(4) 若 $u(\bar{\tau}_R) < u_p < u(\tau_2)$, 由情形 5.3 知, (τ_p, u_p) 先通过前向疏散波连接到 $(\bar{\tau}_R, u(\bar{\tau}_R))$, $(\bar{\tau}_R, u(\bar{\tau}_R))$ 再通过接触间断连接到 $(\tau_R, 0)$ (见图 15(4)).

(5) 若 $0 < u_p < u(\bar{\tau}_R)$, 由情形 5.4 知, (τ_p, u_p) 通过激波连接到 $(\tau_R, 0)$ (见图 15(5)).

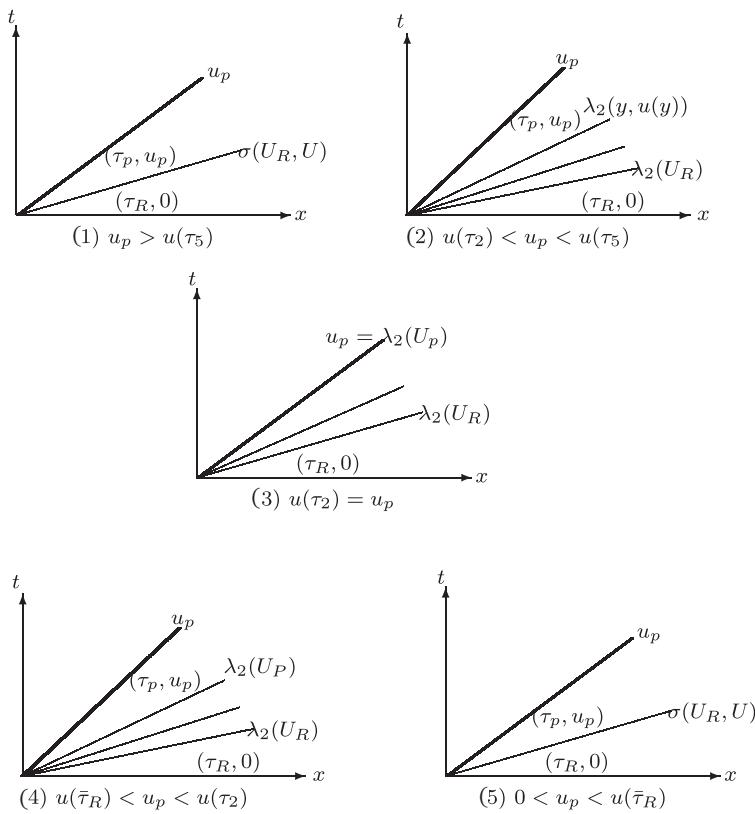


图 15 活塞推进气体运动

若 $u_p < 0$, 我们得到, 若 $-\infty < u_p < 0$, 由情形 5.5 知, (τ_p, u_p) 与 $(\tau_R, 0)$ 通过扇形波相连. 结果见图 16.

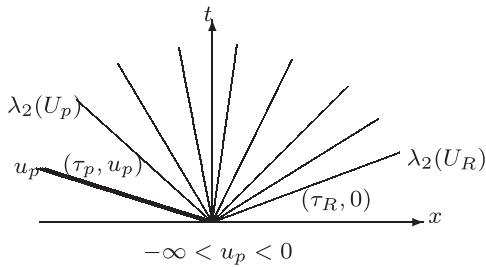


图 16 活塞抽离气体运动

注 4.1 若 $\int_{\tau_3}^{+\infty} \sqrt{-p'(x)} dx < +\infty$. 在拉离活塞时会出现真空的情形, 在这里就不展开讨论了.

参 考 文 献

- [1] Wendroff B. The Riemann problem for materials with nonconvex equations of state, I: isentropic flow [J]. *Journal of Mathematics Analysis and Application*, 1972, 38:454–466.
- [2] Liu T P. The entropy condition and the admissibility of shocks [J]. *Journal of Mathematics Analysis and Application*, 1976, 53:78–88.
- [3] Shearer M. The Riemann problem for a class of conservation laws of mixed type [J]. *Journal of Differential Equations*, 1982, 46:426–433.
- [4] Yanagi S. The Riemann problem for a class of conservation laws of Van der Waals fluid [J]. *Japan J Indust Appl Math*, 1992, 9:239–268.
- [5] Chang T, Hsiao L. The Riemann problem and interaction of waves in gas dynamics [M]. Essex (England): Longman Scientific and Technical, 1989.
- [6] 张同, 肖玲, 非凸典型拟线性双曲组的黎曼问题和间断始值问题 [J]. 数学学报, 1977, 20(3):229–231.
- [7] Liu T P, Smoller J. On the vacuum state for isentropic gas dynamic equations [J]. *Adv Appl Math*, 1980, 1:345–359.
- [8] 张同, 肖玲, 非凸气体动力学方程组的黎曼问题 [J]. 数学学报, 1979, 22(6):719–732.
- [9] Hattori H. The Riemann problem for a Van der Waals fluid with entropy rate admissibility criterion-isother case [J]. *Arch Rational Mech Anal*, 1986, 92:247–263.
- [10] Sheng W C, Wang B. Riemann problem and interaction of elementary waves to the Euler equations for Van der Waals gas [J]. *Chinese Ann Math Ser A*, 2016, 37(4):377–396; translation in *Chinese J Contemp Math*, 2016, 37(4):319–338.
- [11] Godlewski E, Seguin N. The Riemann problem for a simple model of phase transition [J]. *Comm Math Sci*, 2006, 4:227–247.
- [12] Courant R, Friedrichs K O. Supersonic flow and shock waves [M]. New York: Interscience Publisher Inc, 1948.
- [13] 周毓麟. 一维非定常流体力学 [M]. 北京: 科学出版社, 1998.

The Piston Problem of the Euler Equations for Van der Waals Gas

CHEN Honghua¹ SHENG Wancheng¹

¹Department of Mathematics, Shanghai University, Shanghai 200444, China.
E-mail: hhchen@shu.edu.cn; mathwchseng@shu.edu.cn

Abstract This paper is devoted to the piston problem of the Euler equations for isentropic modified Van der Waals gas. The modified Van der Waals gas state equation agrees with the reality, which was constructed by Maxwell using area equal principle. Then the system transforms mixed type into hyperbolic type. By the characteristic analysis methods, the forward wave solutions of the Euler equations for the modified Van der Waals gas are given. Thereby further, the motions of gas caused by pushing and pulling the piston are shown.

Keywords Euler equations, Van der Waals gas, Piston problem.

2000 MR Subject Classification 35L65, 35L80, 35R35, 35L60, 35L50.

The English translation of this paper will be published in

Chinese Journal of Contemporary Mathematics, Vol. 41 No. 3, 2020

by ALLERTON PRESS, INC., USA