数 学 年 刊 A 辑
2020, 41(3):283–298
DOI: 10.16205/j.cnki.cama.2020.0020

黎曼流形上具有 Neumann 边界条件的 Monge-Ampère 型方程*

郭 希[1] 魏念念[1] 向 妮[1] 潘 岑[1]

提要 文章研究了黎曼流形上具有 Neumann 边界条件的 Monge-Ampère 型方程的全局正则性, 并将其在欧几里得空间中的主要结论推广到了曲面空间.

关键词 二阶导数估计, Monge-Ampère 型方程, Neumann 问题, 黎曼流形
MR (2010) 主题分类 35J15, 35J67, 35R01, 58J05
中图法分类 O175.23
文献标志码 A
文章编号 1000-8314(2020)03-0283-16

1 引 言

本文的主要目的是研究黎曼流形上 Monge-Ampère 型方程的 Neumann 边值问题. 设一个 n $(n \geqslant 2)$ 维光滑黎曼流形 (M^n, g), S_2M^n 是 M^n 上对称的 $(0,2)$ 型张量丛, $\Omega \subset M^n$ 是一个紧致的区域, 且其边界 $\partial\Omega$ 是光滑的. 结合 Neumann 边界条件, 考虑方程

$$\det[(\nabla^2 u - A(x,u,\nabla u))g^{-1}] = B(x,u,\nabla u) \qquad \text{在 } \Omega \text{ 内}, \tag{1.1}$$

$$\nabla_\nu u = \varphi(x,u) \qquad \text{在 } \partial\Omega \text{ 上}, \tag{1.2}$$

其中 $A : \overline{\Omega} \times \mathbb{R} \times T_xM^n \to S_2M^n$, $B \geqslant 0$ 关于 $(x,z,p) \in \overline{\Omega} \times \mathbb{R} \times T_xM^n$ 是 C^∞ 的, $\varphi \in C^2(\overline{\Omega} \times \mathbb{R})$. 这里 T_xM^n 表示点 $x \in M^n$ 的切空间, ν 是 $\partial\Omega$ 上的单位内法向量场. ∇u 和 $\nabla^2 u$ 分别表示 u 的梯度向量和 Hessian 矩阵. 如果 $\nabla^2 u - A(x,u,\nabla u)$ 是正 (或非负) 定的, 则称解 u 是椭圆解 (或者退化椭圆解). 本文主要研究非退化情形.

近年来, 人们对形如 (1.1) 的完全非线性方程进行了大量的研究, 该类偏微分方程在最优运输问题、反射器和折射器形状的设计问题中得到了广泛的应用 (见 [1–4]).

线性和拟线性椭圆方程的 Neumann 边界问题的系统研究成果见文 [5]. Neumann 边界的半线性椭圆型临界 Sobolev 指数方程与带边流形上的 Yamabe 问题联系紧密 (见 [6–7]).

关于黎曼流形上的完全非线性椭圆方程, 已经有了许多已知的结果. 众所周知, 将 Brenier 分解定理推广到黎曼流形上有着广泛的应用, 同时 McCann[8] 解决了曲面几何中

本文 2018 年 12 月 10 日收到.
[1]湖北大学应用数学湖北省重点实验室数学与统计学院, 武汉 430062.
E-mail: guoxi@hubu.edu.cn; kweiniannian@163.com; nixiang@hubu.edu.cn; pancen960213@163.com
*本文受到国家自然科学基金 (No. 11971157, No. 11501184) 和湖北省教育厅重点项目 (No. D20171004) 的资助.

的 Monge-Kantorovich 运输问题. 再例如, Guan 和 Li[9] 利用 Dirichlet 边界条件将著名的 Monge-Ampère 方程的结果从欧几里得空间 $\mathbb{R}^n$ 扩展到了黎曼流形上. 对于这方面的结果, 可以见文 [10–11] 等.

本文将文 [12] 中的结论推广到黎曼流形上, 得到 Neumann 边值问题 (1.1)–(1.2) 解的二阶导数的先验估计. 而先验估计蕴含着解的存在性和正则性. 我们知道解的正则性依赖于 A 的正则性. 这里称 A 是正则的, 如果 A 满足

$$\nabla_{p_kp_l}A_{ij}(x,z,p)\xi_i\xi_j\eta_k\eta_l \geqslant 0, \tag{1.3}$$

其中 $(x,z,p)\in\Omega\times\mathbb{R}\times T_xM^n$, $\xi,\eta\in T_xM^n$, $\xi\perp\eta$. 而如果存在 $c_0>0$,

$$\nabla_{p_kp_l}A_{ij}(x,z,p)\xi_i\xi_j\eta_k\eta_l \geqslant c_0|\xi|^2|\eta|^2, \tag{1.4}$$

则称 A 是严格正则的. 在文 [1, 13] 中 (1.3) 和 (1.4) 分别被称为 *A3w, A3* 条件. Loeper[14] 表明 *A3w* 条件在解的正则性研究中至关重要.

在文 [15–16] 中, 若 A 满足

$$\nabla_zA_{ij}(x,z,p)\xi_i\xi_j \geqslant 0(>0), \tag{1.5}$$

其中 $(x,z,p)\in\Omega\times\mathbb{R}\times T_xM^n$, $\xi\in\mathbb{R}^n$, 则称 A 对 z 是非减 (严格递增) 的. 同样地, 若函数 B 满足

$$\nabla_zB(x,z,p) \geqslant 0(>0), \tag{1.6}$$

其中 $(x,z,p)\in\Omega\times\mathbb{R}\times T_xM^n$, 则称 B 对 z 是非减 (严格递增) 的. 若函数 φ 满足

$$\nabla_z\varphi(x,z) \geqslant 0(>0), \tag{1.7}$$

其中 $(x,z)\in\partial\Omega\times\mathbb{R}$, 则称 φ 对 z 是非减 (严格递增) 的. 另外, 称区域 Ω 满足 A-凸条件, 是指存在函数 $\phi\in C^2(\overline{\Omega})$, 使得在 $\partial\Omega$ 上 $\phi=0$, $\nabla\phi\neq0$, 在 Ω 内 $\phi<0$ 且满足不等式

$$\nabla_{ij}\phi-\nabla_{p_k}A_{ij}(x,u,\nabla u)\nabla_k\phi \geqslant \delta_0g_{ij}, \tag{1.8}$$

其中 δ_0 是正常数. 当 $A\equiv0$ 时, 令 $\phi(x)=|x|^2$, (1.8) 自然成立. 而对于流形上的 Monge-Ampère 方程, (1.8) 这个条件被 Hong[17] 称为在 Ω 上的测地凸函数的存在性. 利用定义域 Ω 的一致凸性, 可以定义函数 ϕ,

$$\phi=-ar+br^2, \tag{1.9}$$

其中 a 和 b 为正常数, $r(x)\triangleq\operatorname{dist}(x,\partial\Omega)$ 表示 Ω 中的距离函数 (见 [2, 18]).

为了研究 (1.1)–(1.2) 解的 C^2 估计, 我们还需要假设 (1.1)–(1.2) 的上解 $\overline{u}$ 的存在性, 这里上解 $\overline{u}$ 是指满足下列条件的函数:

$$\det[(\nabla^2\overline{u}-A(x,\overline{u},\nabla\overline{u}))g^{-1}] \leqslant B(x,\overline{u},\nabla\overline{u}) \quad 在\ \Omega\ 内, \tag{1.10}$$

$$\nabla_\nu\overline{u}=\varphi(x,\overline{u}) \qquad 在\ \partial\Omega\ 上. \tag{1.11}$$

类似地, (1.1)–(1.2) 的下解 $\underline{u}$ 是指满足以下条件的函数:

$$\det[(\nabla^2\underline{u}-A(x,\underline{u},\nabla\underline{u}))g^{-1}] \geqslant B(x,\underline{u},\nabla\underline{u}) \quad 在\ \Omega\ 内, \tag{1.12}$$

$$\nabla_\nu\underline{u}=\varphi(x,\underline{u}) \qquad 在\ \partial\Omega\ 上. \tag{1.13}$$

下面给出本文的主要结论.

定理 1.1　设 $u \in C^4(\Omega) \cap C^3(\overline{\Omega})$ 是 (1.1)–(1.2) 在 Ω 上的椭圆解, 其中 $\Omega \subset M^n$ 是流形 M^n 上的 $C^{3,1}$ 一致 A- 凸区域, $A \in C^2(\overline{\Omega} \times \mathbb{R} \times T_xM^n)$ 是正则且非减的, $B \in C^2(\overline{\Omega} \times \mathbb{R} \times T_xM^n)$, $\varphi \in C^2(\overline{\Omega} \times \mathbb{R})$ 均非减且 $B > 0$. 假设存在 $\overline{u} \in C^2(\overline{\Omega})$ 满足条件 (1.10)–(1.11), 则有

$$\sup_{\Omega} |\nabla^2 u| \leqslant C, \tag{1.14}$$

其中 C 是依赖于 n, A, B, Ω, $\overline{u}$, φ, δ_0 和 $|u|_{1;\Omega}$ 的常数.

通过假设问题 (1.1)–(1.2) 的上下解存在, 利用比较原理可以得到解的最大模估计. 在梯度估计的证明中, 需要 A 满足结构性条件

$$A(x,z,p) \geqslant -\mu_0[1+|p|^2], \tag{1.15}$$

其中 $x \in \Omega$, $|z| \leqslant K$, $p \in T_xM^n$, μ_0 是依赖于常数 K 的正常数 (见 [19–20]).

根据椭圆方程的一般理论, 利用连续性方法, 结合解的二阶导数估计可以得到解的存在性.

定理 1.2　在定理 1.1 的条件下, 设 A, B 或 φ 是严格递增的. 假设满足条件 (1.15) 且存在一个满足 (1.12)–(1.13) 的椭圆下解, 则对任意的 $0 < \alpha < 1$, Neumann 边值问题都有唯一的椭圆解 $u \in C^{3,\alpha}(\overline{\Omega})$.

解的唯一性由椭圆方程解的比较定理得到, 而定理 1.2 中关于解的正则性可通过系数足够光滑的线性椭圆方程一般理论来得到. 设 A, B, φ 以及 $\partial\Omega$ 是 C^∞ 的, 则 $u \in C^\infty(\overline{\Omega})$.

本文结构如下: 第二部分给出了一些预备结论, 比如关于 Neumann 问题 (1.1)–(1.2) 的比较定理, 最大模和梯度估计. 在第三部分中, 我们得到了区域内部的 C^2 估计以及边界的 C^2 估计, 然后证明了本文的主要定理 1.1. 在第四部分我们完成了定理 1.2 的证明.

2　预备知识

我们首先回顾一些与 M^n 上协变导数相关的公式, 然后得出关于 Neumann 问题 (1.1)–(1.2) 椭圆解的最大模和梯度估计, 同时我们利用 Neumann 边值问题对上解和下解的比较定理得到最大模估计. 而梯度估计已经在文 [19] 中通过解的椭圆形和矩阵 A 的下界二次约束形式得到了, 这里我们将梯度估计作为一个引理而不加以证明.

记 (M^n, g) 是一个 n 维黎曼流形. 在本文中, ∇ 表示 M^n 上的协变微分. 我们可以取一个与 (M^n, g) 相容的局部幺正标架场 $\{e_1, \cdots, e_n\}$, 其对偶标架场为 $\{\omega_1, \cdots, \omega_n\}$, 则有

$$\nabla u = \nabla_j u \omega_j, \quad \nabla_{e_i} \nu = \nabla_i \nu_k e_k, \tag{2.1}$$

以及

$$\nabla^2 u = \nabla_{ij} u \omega_i \omega_j, \tag{2.2}$$

其中

$$\nabla_{ij} u = \nabla_i(\nabla_j u) - (\nabla_i e_j) u. \tag{2.3}$$

已知

$$\nabla_{ij}u = \nabla_{ji}u, \tag{2.4}$$

而根据 Ricci 恒等式, 有

$$\nabla_{ijk}u - \nabla_{jik}u = R_{lkji}\nabla_l u, \tag{2.5}$$

其中 R_{ijkl} 是 (M^n, g) 黎曼曲率张量的分量. (M^n, g) 的联络形式 $\{\omega_{ij}\}$ 由结构方程给出

$$\mathrm{d}\omega_i = -\sum_j \omega_{ij} \wedge \omega_j, \quad \omega_{ij} + \omega_{ji} = 0,$$

$$\mathrm{d}\omega_{ij} = -\sum_k \omega_{ik} \wedge \omega_{kj} + \frac{1}{2}\sum_{k,l} R_{ijkl}\omega_k \wedge \omega_l.$$

我们考虑在一个小球 $B_\delta(x_0) = \{x \in \Omega, d(x) < \varepsilon\}$ 中的距离函数

$$d(x) = \mathrm{dist}(x, x_0), \tag{2.6}$$

取 δ 足够小时, 我们可以假设 $d^2(x)$ 是光滑的并且在 $B_\delta(x_0)$ 内满足

$$\{\delta_{ij}\} \leqslant \{\nabla_{ij}d^2\} \leqslant 3\{\delta_{ij}\}. \tag{2.7}$$

由方程 (1.1), 有

$$F[u] = \ln\det[(\nabla^2 u - A(x, u, \nabla u))g^{-1}] = \widetilde{B}(x, u, \nabla u), \tag{2.8}$$

其中 $\widetilde{B} = \ln B$. 记

$$F^{ij} = \frac{\partial F}{\partial w_{ij}} = w^{ij} \quad , \quad F^{ij,kl} = \frac{\partial^2 F}{\partial w_{ij}\partial w_{kl}} = -w^{ik}w^{jl},$$

其中 $\{w_{ij}\} \triangleq \{\nabla_{ij}u - A_{ij}\}$ 表示广义的 Hessian 矩阵, $\{w^{ij}\}$ 表示 $\{w_{ij}\}$ 的逆矩阵.

现在考虑关于 F 的下列线性算子

$$L = w^{ij}(\nabla_{ij} - \nabla_{p_k}A_{ij}(., u, \nabla u)\nabla_k) \tag{2.9}$$

和

$$\mathcal{L} = L - \nabla_{p_k}\widetilde{B}\nabla_k. \tag{2.10}$$

为了方便表达, 对于任意的向量 ξ 和 η 我们都可以用 $\nabla_{\xi\eta}u \triangleq \nabla_{ij}u\xi_i\eta_j$, $w_{\xi\eta} \triangleq w_{ij}\xi_i\eta_j = \nabla_{ij}u\xi_i\eta_j - A_{ij}\xi_i\eta_j$ 来表示. 通常, C 表示依赖于已知数据的常数.

我们从 Monge-Ampère 型方程的 Neumann 边值问题的比较原理开始. 为了方便清晰地表达, 记

$$\begin{aligned} \mathfrak{F}[u] &= \det Mu - B(x, u, \nabla u), \quad \forall x \in \Omega, \\ G(u) &= \nabla_\nu u - \varphi(x, u), \quad \forall x \in \partial\Omega. \end{aligned} \tag{2.11}$$

回顾一下 $Mu = [\nabla^2 u - A(x, u, \nabla u)]g^{-1}$, 如果 $Mu > 0$, 那么称函数 u 是一个椭圆函数. 下面我们来回顾一下比较原理.

引理 2.1 设 u, v 是方程 (1.1) 的椭圆函数, 且满足

$$\mathfrak{F}[u] \geqslant \mathfrak{F}[v], \quad \forall x \in \Omega, \tag{2.12}$$

$$G(u) \geqslant G(v), \quad \forall x \in \partial\Omega. \tag{2.13}$$

假设 A 或 B 在 z 上是严格递增的, 且 G 在 z 上严格递减, 则有

$$u \leqslant v, \quad \forall x \in \partial\Omega. \tag{2.14}$$

证　令 $w = u - v$. 根据 (2.12) 直接计算, 有

$$\begin{aligned}
0 &\leqslant \mathfrak{F}[u] - \mathfrak{F}[v] \\
&= (\det Mu - \det Mv) - [B(x,u,\nabla u) - B(x,v,\nabla v)] \\
&= \int_0^1 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \det[Mv + t(Mu - Mv)]\mathrm{d}t - [B(x,u,\nabla u) - B(x,v,\nabla v)] \\
&= a^{ij}[\nabla_{ij}(u-v) - \nabla_{p_k} A_{ij} \nabla_k (u-v) - \nabla_z A_{ij}(u-v)] \\
&\quad - \nabla_{p_k} B \nabla_k (u-v) - \nabla_z B(u-v) \\
&= a^{ij}\nabla_{ij} w + b^k \nabla_k w + cw,
\end{aligned} \tag{2.15}$$

其中 $a^{ij} = \int_0^1 C_t^{ij}\mathrm{d}t$, $C_t^{ij} = [Mv + t(Mu - Mv)]$, $b^k = -(a^{ij}\nabla_{p_k} A_{ij} + \nabla_{p_k} B)$, $c = -(a^{ij}\nabla_z A_{ij} + \nabla_z B)$. 由边界条件 (2.13), 则有

$$\begin{aligned}
0 &\leqslant G(u) - G(v) \\
&= \nabla_\nu (u-v) - \varphi(x,u) + \varphi(x,v) \\
&= \nabla_\nu (u-v) - \varphi_z(x,\widehat{u})(u-v) \\
&= \nabla_\nu w - \varphi_z w,
\end{aligned} \tag{2.16}$$

其中存在 $\lambda \in (0,1)$, $\widehat{u} = \lambda u + (1-\lambda)v$ 可以通过中值定理来表示. 注意, 算子 $\widetilde{L} = a_{ij}D_{ij} + b^k D_k + c$ 是线性且一致椭圆的. 通过 A 和 B 的单调性, 我们得到 $c \leqslant 0$. 因为 φ 是严格递增的, 得到在 $\partial\Omega$ 上 $\varphi_z > 0$. 然后通过文 [21] 中的引理 1.2, 在 $\overline{\Omega}$ 上, $w \leqslant 0$, 可以得到结论 (2.14).

通过 Neumann(1.1)–(1.2) 问题的比较原理, 我们可以很快得到 (1.1)–(1.2) 解的唯一性.

因为我们假设存在一个 C^2 上解 $\overline{u}$ 满足 (1.10)–(1.11) 且存在一个 C^2 下解 $\underline{u}$ 满足 (1.12)–(1.13), 基于引理 2.1, 我们已经有了 u 的上界 $u \leqslant \overline{u}$ 和下界 $u \geqslant \underline{u}$.

下面给出 Ω 上 Neumann 边值条件的椭圆解的梯度估计. 其证明在文 [19] 中已经给出.

定理 2.1　设 Ω 是 (M^n, g) 上的具有光滑边界的紧流形, u 是 Neumann 问题 (1.1)–(1.2) 的退化椭圆解. 设 A 满足结构性条件: 对 $\forall x \in \overline{\Omega}$ 和正常数 μ_0, 有

$$A(x,u,\nabla u) \geqslant -\mu_0(1 + |\nabla u|^2)g, \tag{2.17}$$

则

$$\sup_{\overline{\Omega}} |\nabla u| \leqslant C \tag{2.18}$$

成立, 其中 C 依赖于 n, g, μ_0, Ω, φ 和 $\sup_{\overline{\Omega}} |u|$.

3 二阶导数估计

在本节中, 我们将得到 C^2 估计并完成定理 1.1 的证明. 我们只需要得到二阶导数的上界, 因为下界可以由椭圆条件 $\nabla^2 u - A > 0$ 得到. 通过类似于文 [9, 22] 中 Pogorelev 估计的推导, 可以得到内部估计. 在本节中, 我们会充分利用上解存在的条件.

在以后的讨论中, 总是假设函数 φ 和 ν 可以分别光滑地延拓到 $\overline{\Omega} \times \mathbb{R}$ 和 $\overline{\Omega}$. 同时还假设在边界附近 ν 可以沿法线方向延拓成一个常数.

我们先引入一个文 [15, 23] 中的基本引理.

引理 3.1 设 u 是方程 (1.1) 的椭圆解, 且 $\overline{u}$ 是 (1.1) 的严格椭圆上解. 若 A 正则, 则

$$\mathcal{L}(\mathrm{e}^{K(\overline{u}-u)}) \geqslant \varepsilon \sum_i w^{ii} - C \tag{3.1}$$

在 $B_r(x_0)$ 中成立, 其中 K 和 ε 是一致正常数, 而 C 是只依赖于 n, g, A, B, Ω, $\overline{u}$ 和 $|u|_{1;\Omega}$ 的正常数.

证 因为 $\overline{u}$ 是严格椭圆上解, 则存在 $\varepsilon > 0$, 使得 $\overline{u}_\varepsilon = \overline{u} - \varepsilon d^2$ 仍是 (1.1) 的椭圆上解, 即

$$F(\overline{u}_\varepsilon) \leqslant \widetilde{B}(x, \overline{u}_\varepsilon, \nabla \overline{u}_\varepsilon). \tag{3.2}$$

令 $v_\varepsilon = \overline{u}_\varepsilon - u$, 则在 x_0 处, 有

$$L(\overline{u} - u) = Lv_\varepsilon + \varepsilon L d^2 \geqslant Lv_\varepsilon + \varepsilon \sum_i w^{ii}. \tag{3.3}$$

根据 L 的定义, 有

$$Lv_\varepsilon = w^{ij}(\nabla_{ij} v_\varepsilon - \nabla_{p_k} A_{ij}(x, u, \nabla u) \nabla_k v_\varepsilon). \tag{3.4}$$

根据 F 的凹性, 有

$$F(\overline{u}_\varepsilon) - F(u) \leqslant w^{ij}[\nabla_{ij} v_\varepsilon - A_{ij}(x, \overline{u}_\varepsilon, \nabla \overline{u}_\varepsilon) + A_{ij}(x, u, \nabla u)], \tag{3.5}$$

结合 (3.4) 和 (3.5), 可得

$$\begin{aligned} Lv_\varepsilon \geqslant\ & F(\overline{u}_\varepsilon) - F(u) + w^{ij}[A_{ij}(x, \overline{u}_\varepsilon, \nabla \overline{u}_\varepsilon) - A_{ij}(x, u, \nabla u) \\ & - \nabla_{p_k} A_{ij}(x, u, \nabla u) \nabla_k v_\varepsilon] \\ =\ & F(\overline{u}_\varepsilon) - F(u) + w^{ij}[A_{ij}(x, \overline{u}_\varepsilon, \nabla \overline{u}_\varepsilon) - A_{ij}(x, u, \nabla \overline{u}_\varepsilon) \\ & + A_{ij}(x, u, \nabla \overline{u}_\varepsilon) - A_{ij}(x, u, \nabla u) - \nabla_{p_k} A_{ij}(x, u, \nabla u) \nabla_k v_\varepsilon]. \end{aligned} \tag{3.6}$$

由 (1.5), 有

$$\begin{aligned} & w^{ij}[A_{ij}(x, \overline{u}_\varepsilon, \nabla \overline{u}_\varepsilon) - A_{ij}(x, u, \nabla \overline{u}_\varepsilon)] \\ =\ & w^{ij} \nabla_z A_{ij}(x, \widehat{z}, \nabla \overline{u}_\varepsilon) v_\varepsilon \geqslant 0, \end{aligned} \tag{3.7}$$

其中 $u \leqslant \widehat{z} \leqslant \overline{u}_\varepsilon$. 根据 Taylor 展开式, 有

$$\begin{aligned} & w^{ij}[A_{ij}(x, u, \nabla \overline{u}_\varepsilon) - A_{ij}(x, u, \nabla u) - \nabla_{p_k} A_{ij}(x, u, \nabla u) \nabla_k v_\varepsilon] \\ =\ & \frac{1}{2} w^{ij} \nabla_{p_k p_l} A_{ij}(x, u, p_\theta) \nabla_k v_\varepsilon \nabla_l v_\varepsilon, \end{aligned} \tag{3.8}$$

这里 $p_\theta=\theta\nabla\overline{u}_\varepsilon+(1-\theta)\nabla u$, $0\leqslant\theta\leqslant 1$. 令 $v=\overline{u}-u$. 结合 (3.3)–(3.8), 在 x_0 处, 有

$$Lv\geqslant\varepsilon\sum_i w^{ii}+\frac{1}{2}w^{ij}\nabla_{p_kp_l}A_{ij}(x,u,p_\theta)\nabla_k v\nabla_l v-C_1, \tag{3.9}$$

其中 C_1 是只依赖于 B, $|u|_{C^1}$ 和 $|\overline{u}|_{C^2}$ 的正常数. 通过计算, 有

$$\begin{aligned}Le^{Kv}&=Ke^{Kv}[Lv+Kw^{ij}\nabla_i v\nabla_j v]\\&\geqslant Ke^{Kv}\Big[\varepsilon\sum_i w^{ii}+\frac{1}{2}w^{ij}\nabla_{p_kp_l}A_{ij}(x,u,p_\theta)\nabla_k v\nabla_l v+Kw^{ij}\nabla_i v\nabla_j v-C_1\Big].\end{aligned} \tag{3.10}$$

不妨设在 x_0 处 $\nabla v\neq 0$, 否则定理证毕. 令 $e_1=\frac{\nabla v}{|\nabla v|}$, 因为 A 正则, 那么

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}w^{ij}\nabla_{p_kp_l}A_{ij}\nabla_k v\nabla_l v+Kw^{ij}\nabla_i v\nabla_j v\\&=\Big(\frac{1}{2}w^{ij}\nabla_{p_1p_1}A_{ij}+Kw^{11}\Big)|\nabla v|^2\\&\geqslant\Big(\frac{1}{2}w^{11}\nabla_{p_1p_1}A_{11}+\sum_{j\neq 1}w^{1j}\nabla_{p_1p_1}A_{1j}+Kw^{11}\Big)|\nabla v|^2.\end{aligned} \tag{3.11}$$

因为

$$|w^{1j}|^2\leqslant w^{11}w^{jj}, \tag{3.12}$$

由 Cauchy 不等式, 对正常数 ε_0, 有

$$|w^{1j}|\leqslant\frac{1}{2}\Big(\varepsilon_0 w^{jj}+\frac{1}{\varepsilon_0}w^{11}\Big), \tag{3.13}$$

则

$$\begin{aligned}Le^{Kv}\geqslant Ke^{Kv}\Big[&\varepsilon\sum_i w^{ii}-\frac{1}{2}\varepsilon_0 w^{ii}|\nabla_{p_1p_1}A_{1i}||\nabla_1 v|^2\\&-\frac{1}{2\varepsilon_0}w^{11}|\nabla_{p_1p_1}A_{1i}||\nabla v|^2+Kw^{11}|\nabla_1 v|^2-C_1\Big].\end{aligned} \tag{3.14}$$

进一步取 $\varepsilon_0\leqslant\frac{\varepsilon}{|\nabla_{p_1p_1}A_{1i}||\nabla_1 v|^2}$, $K\geqslant\frac{|\nabla_{p_1p_1}A_{1i}|}{8\varepsilon_0}$, 有

$$\begin{aligned}\mathcal{L}e^{Kv}&=Le^{Kv}-\nabla_{p_k}\widetilde{B}\nabla_k e^{Kv}\\&\geqslant Ke^{Kv}\frac{\varepsilon}{2}\sum_i w^{ii}-C_2\\&\geqslant\varepsilon_1\sum_i w^{ii}-C_3,\end{aligned} \tag{3.15}$$

其中 $\varepsilon_1=\frac{\varepsilon}{2}Ke^{Kv}$.

定义 $\Omega_\mu=\{x\in\Omega\big|\ r(x):=\mathrm{dist}(x,\partial\Omega)<\mu\}$, 其中 μ 是正常数. 因为 $\partial\Omega\in C^2$, 这里我们假设 μ 足够小, 使得 $d(x)$ 在 Ω_μ 上光滑. 假设单位内法向量 ν 从 $\partial\Omega$ 光滑延拓到 $\overline{\Omega}_\mu$, 则在 Ω_μ 中有 $\nu=\nabla r$.

引理 3.2　设 u 是 (1.1) 中的椭圆解, Ω 是一致 A-凸的, 则在 $\partial\Omega$ 上, 有

$$\nabla^2_{\nu\nu}u\leqslant C(1+M_2)^{\frac{n-2}{n-1}}, \tag{3.16}$$

其中 $M_2=\sup_\Omega|\nabla^2 u|$, 且 C 是依赖于 n, g, A, B, Ω, φ, δ_0 和 $|u|_{1;\Omega}$ 的正常数.

证 取 $x_0 \in \partial\Omega$, 令 $\{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$ 是 x_0 的一个局部正交标架. 通过直接计算, 有

$$\begin{aligned} L(\nabla_\nu u) = w^{ij}[&\nabla_{ijk}u\nu_k + 2\nabla_{ki}u\nabla_j\nu_k + \nabla_k u\nabla_{ij}\nu_k \\ &- \nabla_{p_l}A_{ij}\nabla_{kl}u\nu_k - \nabla_{p_l}A_{ij}\nabla_k u\nabla_l\nu_k]. \end{aligned} \tag{3.17}$$

对方程 (1.1) 沿 ν 求微分, 有

$$w^{ij}\nabla_\nu w_{ij} = \nabla_\nu \widetilde{B} + \nabla_z \widetilde{B}\nabla_\nu u + \nabla_{p_k}\widetilde{B}\nabla_{ik}u\nu_i. \tag{3.18}$$

由 Ricci 恒等式 (2.5), 有

$$\begin{aligned} \nabla_\nu w_{ij} &= \nabla_{kij}u\nu_k - \nabla_\nu A_{ij} - \nabla_z A_{ij}\nabla_\nu u - \nabla_{p_k}A_{ij}\nabla_{ik}u\nu_i \\ &= \nabla_{ijk}u\nu_k + R_{lijk}\nabla_l u\nu_k - \nabla_\nu A_{ij} - \nabla_z A_{ij}\nabla_\nu u - \nabla_{p_k}A_{ij}\nabla_{ik}u\nu_i. \end{aligned} \tag{3.19}$$

因为 $w_{ij} = \nabla_{ij}u - A_{ij}$, 可以得到

$$w^{ij}\nabla_{ki}u = w^{ij}(w_{ki} + A_{ki}) = \delta_{jk} + w^{ij}A_{ki}. \tag{3.20}$$

将 (3.18)–(3.20) 代入 (3.17), 则

$$L(\nabla_\nu u) \leqslant C\Big(1 + \sum_i w^{ii} + |\nabla^2 u|\Big), \tag{3.21}$$

这里 C 依赖于 n, g, A, B, Ω, 和 $|u|_{1;\Omega}$. 考虑 $h = \nabla_\nu u - \varphi(x, u)$. 通过类似的计算, 有

$$Lh \leqslant C\Big(1 + \sum_i w^{ii} + |\nabla^2 u|\Big). \tag{3.22}$$

由 B, 可得

$$1 \leqslant Cw^{ii}, \quad (w_{ii})^{\frac{1}{n-1}} \leqslant C(w^{ii}). \tag{3.23}$$

因此

$$Lh \leqslant C\Big(1 + M_2^{\frac{n-2}{n-1}}\Big)\sum_i w^{ii}. \tag{3.24}$$

因为 Ω 是 A-凸的, 那么

$$L\phi \geqslant \delta_0 \sum_i w^{ii}. \tag{3.25}$$

取闸函数 $-\phi$, 由标准闸参数, 可得

$$\nabla_\nu h \leqslant C\Big(1 + M_2^{\frac{n-2}{n-1}}\Big), \tag{3.26}$$

引理得证.

由上面的引理 3.2 我们知道双法向导数是有界的. 而将切向算子应用到边界条件 (1.2), 可得混合切向法向导数估计. 接下来, 我们将采用文 [24] 中的方法来估计边界上的双切向导数. 这样可以得到边界上的二阶导数估计.

为了估计 (双) 切向导数, 我们需要对上解做一个扰动. 我们知道当 a 足够小时, 函数 $\overline{u} - a\phi$ 仍是 (1.1)–(1.2) 的椭圆上解. 在 $\partial\Omega$ 上, 由条件 (1.8), 可得

$$\nabla_\nu(\overline{u} - a\phi - u) \geqslant a. \tag{3.27}$$

对于 $x \in \overline{\Omega}$, $\xi \in T_xM$, $|\xi| = 1$, 考虑辅助函数 $V(x,\xi)$,

$$V(x,\xi) = \mathrm{e}^{\alpha|\nabla(u-\lambda\phi)|^2+\beta\Phi}(w_{\xi\xi} - V'(x,\xi)), \tag{3.28}$$

$$\lambda = \max_{\overline{\Omega}} |\nabla u|,$$

且

$$V'(x,\xi) = 2g(\xi,\nu)[\nabla_{\xi'}\varphi(x,u) - g(\nabla u,\xi') - A_{\nu\xi'}], \tag{3.29}$$

其中 $\xi' = \xi - g(\xi,\nu)\nu$, ν 表示在 M 上内法向量场的延拓, 且 $\Phi = \mathrm{e}^{K(\overline{u}-u-a\phi)}$. 假设 V 的最大值点为 (x_0,ξ).

情形一 x_0 是一个内点. 我们仍用 ξ 表示 ξ 在 x_0 的一个邻域上的延拓, 且 $\nabla\xi(x_0) = 0$. 令 $\{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$ 是 x_0 的邻域上关于 w_{ij} 对角线上的一个局部正交标架, 且 w_{11} 是最大的特征值. 设 $H = \ln V$, 则在 x_0 处, 对 $i = 1, \cdots, n$, 有

$$0 = \nabla_i H = \frac{\nabla_i(w_{\xi\xi} - V')}{w_{\xi\xi} - V'} + 2\alpha\nabla_k(u-\lambda\phi)\nabla_{ik}(u-\lambda\phi) + \beta\nabla_i\Phi, \tag{3.30}$$

$$0 \geqslant \mathcal{L}H = \mathcal{L}\ln(w_{\xi\xi} - V') + 2\alpha\mathcal{L}|\nabla(u-\lambda\phi)|^2 + \beta\mathcal{L}\Phi. \tag{3.31}$$

通过直接计算, 有

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\ln(w_{\xi\xi} - V') &= \frac{\mathcal{L}(w_{\xi\xi} - V')}{w_{\xi\xi} - V'} - \frac{w^{ij}\nabla_i(w_{\xi\xi} - V')\nabla_j(w_{\xi\xi} - V')}{(w_{\xi\xi} - V')^2} \\ &\geqslant \frac{\mathcal{L}w_{\xi\xi} - \mathcal{L}V'}{w_{\xi\xi} - V'} - (1+\theta)\frac{w^{ij}\nabla_i w_{\xi\xi}\nabla_j w_{\xi\xi}}{(w_{\xi\xi} - V')^2} \\ &\quad - C(\theta)\frac{w^{ij}\nabla_i V'\nabla_j V'}{(w_{\xi\xi} - V')^2}.\end{aligned} \tag{3.32}$$

根据 $\mathcal{L}$ 的定义, 有

$$\mathcal{L}w_{\xi\xi} = w^{ij}[\nabla_{ij}w_{\xi\xi} - \nabla_{p_k}A_{ij}\nabla_k w_{\xi\xi}] - \nabla_{p_k}\widetilde{B}\nabla_k w_{\xi\xi}. \tag{3.33}$$

对方程 (2.8) 的两边在 x_0 处沿 ξ 方向求导数, 得到

$$w^{ij}\nabla_\xi w_{ij} = \nabla_\xi\widetilde{B} + \nabla_z\widetilde{B}\nabla_\xi u + \nabla_{p_k}\widetilde{B}\nabla_{jk}u\xi_j. \tag{3.34}$$

再次沿 ξ 方向求导数

$$\begin{aligned}w^{ij}\nabla_{\xi\xi}w_{ij} = {}& w^{ik}w^{jl}\nabla_\xi w_{ij}\nabla_\xi w_{kl} + \nabla_{p_k}\widetilde{B}\nabla_{ijk}u\xi_i\xi_j + \nabla_z\widetilde{B}\nabla_{ij}u\xi_i\xi_j \\ &+ \nabla_{\xi\xi}\widetilde{B} + 2\nabla_{\xi z}\widetilde{B}\nabla_\xi u + 2\nabla_{\xi p_k}\widetilde{B}\nabla_{jk}u\xi_j + \nabla_{zz}\widetilde{B}(\nabla_\xi u)^2 \\ &+ 2\nabla_{zp_k}\widetilde{B}\nabla_\xi u\nabla_{jk}u\xi_j + \nabla_{p_kp_l}\widetilde{B}\nabla_{jk}u\nabla_{il}u\xi_i\xi_j,\end{aligned} \tag{3.35}$$

则

$$w^{ij}\nabla_{\xi\xi}w_{ij} \geqslant w^{ik}w^{jl}\nabla_\xi w_{ij}\nabla_\xi w_{kl} + \nabla_{p_k}\widetilde{B}\nabla_{ijk}u\xi_i\xi_j - C[1+(w_{ii})^2]. \tag{3.36}$$

为了方便, 我们定义一个 $(0,3)$ 型张量,

$$\begin{aligned}T_{ijk} = {}& \nabla_k A_{ij} + \nabla_z A_{ij}\nabla_k u + \nabla_{p_l}A_{ij}\nabla_{kl}u \\ &- \nabla_j A_{ik} - \nabla_z A_{ik}\nabla_j u - \nabla_{p_l}A_{ik}\nabla_{jl}u.\end{aligned} \tag{3.37}$$

另外, 根据 Ricci 恒等式, 有

$$\nabla_k w_{ij} - \nabla_j w_{ik} = \nabla_s u R_{sijk} - T_{ijk}. \tag{3.38}$$

通过直接计算, 得到

$$\begin{aligned} &w^{ij}[\nabla_{ij} w_{\xi\xi} - \nabla_{\xi\xi} w_{ij}] \\ &= w^{ij}[\nabla_{ij} w_{kl} - \nabla_{kl} w_{ij}]\xi_k\xi_l + 2w^{ij} w_{kl} \nabla_{ij}\xi_k\xi_l, \end{aligned} \tag{3.39}$$

且由 Ricci 恒等式以及 (3.38), 可得

$$\begin{aligned} \nabla_{ij} w_{kl} &= \nabla_{jl} w_{ki} - \nabla_j T_{kli} + \nabla_{js} u R_{skli} + \nabla_s u \nabla_j R_{skli} \\ &= \nabla_{lj} w_{ik} + w_{si} R_{sklj} + w_{sk} R_{silj} - \nabla_j T_{kli} \\ &\quad + \nabla_{js} u R_{skli} + \nabla_s u \nabla_j R_{skli} \\ &= \nabla_{lk} w_{ij} - \nabla_l T_{ikj} - \nabla_j T_{kli} + \nabla_{ls} u R_{sikj} \\ &\quad + \nabla_s u \nabla_l R_{sikj} + \nabla_{js} u R_{skli} + \nabla_s u \nabla_j R_{skli} \\ &\quad + w_{si} R_{sklj} + w_{sk} R_{silj}. \end{aligned} \tag{3.40}$$

结合 (3.36), (3.39)–(3.40), 有

$$\begin{aligned} &w^{ij} \nabla_{ij} w_{\xi\xi} - \nabla_{p_k} \widetilde{B} \nabla_k w_{\xi\xi} \\ &\geqslant w^{ik} w^{jl} \nabla_\xi w_{ij} \nabla_\xi w_{kl} - w^{ij}(\nabla_l T_{ikj} + \nabla_j T_{kli})\xi_k\xi_l - C[1 + \mathcal{T} w_{ii} + (w_{ii})^2], \end{aligned} \tag{3.41}$$

其中 $\mathcal{T} = w^{ii}$. 由 (3.37) 中给出的张量 T 的定义, 有

$$\begin{aligned} &w^{ij}(\nabla_l T_{ikj} + \nabla_j T_{kli})\xi_k\xi_l \\ &= w^{ij}(\nabla_{p_s} A_{kl} \nabla_{jis} u - \nabla_{p_s} A_{ij} \nabla_{lks} u)\xi_k\xi_l + w^{ij}(A_{sk} R_{sijl} + A_{si} R_{skjl})\xi_k\xi_l \\ &\quad + w^{ij}\{(\nabla_z A_{kl} \nabla_{ij} u + \nabla_{ij} A_{kl} + 2\nabla_{iz} A_{kl} \nabla_j u + 2\nabla_{ip_s} A_{kl} \nabla_{js} u \\ &\quad + \nabla_{zz} A_{kl} \nabla_i u \nabla_j u + 2\nabla_{p_s z} A_{kl} \nabla_{sj} u \nabla_i u + \nabla_{p_s p_t} A_{kl} \nabla_{is} u \nabla_{jt} u) \\ &\quad - (\nabla_z A_{ij} \nabla_{kl} u + \nabla_{kl} A_{ij} + 2\nabla_{kz} A_{ij} \nabla_l u + 2\nabla_{kp_s} A_{ij} \nabla_{ls} u \\ &\quad + \nabla_{zz} A_{ij} \nabla_k u \nabla_l u + 2\nabla_{p_s z} A_{ij} \nabla_{sl} u \nabla_k u + \nabla_{p_s p_t} A_{ij} \nabla_{ks} u \nabla_{lt} u)\}\xi_k\xi_l. \end{aligned} \tag{3.42}$$

通过直接计算, 有

$$w^{ij} \nabla_{p_s} A_{ij} \nabla_{lks} u \xi_k\xi_l = w^{ij} \nabla_{p_s} A_{ij}(\nabla_s w_{\xi\xi} + \nabla_s A_{\xi\xi} + \nabla_m u R_{mksl}), \tag{3.43}$$

以及

$$\begin{aligned} w^{ij} \nabla_{jis} u &= w^{ij} \nabla_{sij} u + w^{ij} R_{misj} \nabla_m u \\ &= w^{ij} \nabla_s w_{ij} + w^{ij}(\nabla_s A_{ij} + \nabla_z A_{ij} \nabla_s u + \nabla_{p_m} A_{ij} \nabla_{ms} u + R_{misj} \nabla_m u) \\ &= \nabla_s \widetilde{B} + \nabla_z \widetilde{B} \nabla_s u + \nabla_{p_m} \widetilde{B} \nabla_{sm} u + w^{ij}(\nabla_s A_{ij} + \nabla_z A_{ij} \nabla_s u \\ &\quad + \nabla_{p_m} A_{ij} \nabla_{ms} u + R_{misj} \nabla_m u), \end{aligned} \tag{3.44}$$

则根据 (3.42)–(3.44), 得到

$$\begin{aligned} &w^{ij}(\nabla_l T_{ikj} + \nabla_j T_{kli})\xi_k\xi_l \\ &\leqslant -w^{ij} \nabla_{p_s} A_{ij} \nabla_s w_{\xi\xi} + C(\mathcal{T} + \mathcal{T} w_{ii} + 1). \end{aligned} \tag{3.45}$$

因此得到 (3.41) 和 (3.45),

$$\mathcal{L}w_{\xi\xi} \geqslant w^{ik}w^{jl}\nabla_\xi w_{ij}\nabla_\xi w_{kl} - C[(1+w_{ii})\mathcal{T} + (w_{ii})^2]. \tag{3.46}$$

同样地, 也可以得到

$$|\mathcal{L}V'| \leqslant C[(1+w_{ii})\mathcal{T} + (w_{ii})^2] \tag{3.47}$$

和

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\mathcal{L}|\nabla(u-\lambda\phi)|^2\\
&= w^{ij}[\nabla_{ijk}(u-\lambda\phi)\nabla_k(u-\lambda\phi) + \nabla_{ik}(u-\lambda\phi)\nabla_{jk}(u-\lambda\phi)\\
&\quad - \nabla_{p_s}A_{ij}\nabla_{sk}(u-\lambda\phi)\nabla_k(u-\lambda\phi)] - \nabla_{p_s}\widetilde{B}\nabla_{sk}(u-\lambda\phi)\nabla_s(u-\lambda\phi).
\end{aligned} \tag{3.48}$$

通过直接计算, 得

$$\begin{aligned}
&w^{ij}\nabla_{ik}(u-\lambda\phi)\nabla_{jk}(u-\lambda\phi)\\
&= w^{ij}(w_{ik} + A_{ik} - \lambda\nabla_{ik}\phi)(w_{jk} + A_{jk} - \lambda\nabla_{jk}\phi)\\
&= w_{ii} + 2A_{ii} - 2\lambda\triangle\phi + w^{ij}(A_{ik} - \lambda\nabla_{ik}\phi)(A_{jk} - \lambda\nabla_{jk}\phi),
\end{aligned} \tag{3.49}$$

以及

$$\begin{aligned}
&w^{ij}\nabla_{ijk}(u-\lambda\phi)\nabla_k(u-\lambda\phi)\\
&= w^{ij}\nabla_{ijk}u\nabla_k(u-\lambda\phi) - \lambda w^{ij}\nabla_{ijk}\phi\nabla_k(u-\lambda\phi)\\
&= w^{ij}(\nabla_k w_{ij} + R_{sikj}\nabla_s u + \nabla_k A_{ij} + \nabla_z A_{ij}\nabla_k u + \nabla_{p_s}A_{ij}\nabla_{ks}u)\nabla_k(u-\lambda\phi)\\
&\quad - \lambda w^{ij}\nabla_{ijk}\phi\nabla_k(u-\lambda\phi).
\end{aligned} \tag{3.50}$$

将 (3.49), (3.50) 和 (3.34) 代入 (3.48), 有

$$\frac{1}{2}\mathcal{L}|\nabla(u-\lambda\phi)|^2 \geqslant w_{ii} - C\mathcal{T}. \tag{3.51}$$

结合 (3.31)–(3.32), (3.46) 和 (3.51), 根据引理 3.1 得到,

$$\begin{aligned}
0 \geqslant\ & \frac{w^{ik}w^{jl}\nabla_\xi w_{ij}\nabla_\xi w_{kl}}{w_{\xi\xi} - V'} - (1+\theta)\frac{w^{ij}\nabla_i w_{\xi\xi}\nabla_j w_{\xi\xi}}{(w_{\xi\xi} - V')^2}\\
& - \frac{C[(1+w_{ii})\mathcal{T} + (w_{ii})^2]}{w_{\xi\xi} - V'} - C(\theta)\frac{w^{ij}\nabla_i V'\nabla_j V'}{(w_{\xi\xi} - V')^2}\\
& + 2\alpha w_{ii} + (\beta - 2\alpha C)\mathcal{T} - \beta C.
\end{aligned} \tag{3.52}$$

因为 w_{11} 是最大的特征值, 由文 [24], 在 x_0 处,

$$w^{ik}w^{jl}\nabla_\xi w_{ij}\nabla_\xi w_{kl} \geqslant \frac{1}{w_{11}}w^{jl}\nabla_\xi w_{li}\nabla_\xi w_{jk}\xi_k\xi_i. \tag{3.53}$$

根据 (3.38), 有

$$\nabla_\xi w_{jk}\xi_k = \nabla_j w_{\xi\xi} + (\nabla_s u R_{skji} - T_{kji})\xi_k\xi_i, \tag{3.54}$$

则

$$w^{ik}w^{jl}\nabla_\xi w_{ij}\nabla_\xi w_{kl} \geqslant \frac{1-\theta}{w_{11}}w^{jl}\nabla_j w_{\xi\xi}\nabla_l w_{\xi\xi} - \frac{C_\theta}{w_{11}}(1+w_{ii}). \tag{3.55}$$

因为 V' 是有界的, 对于

$$w_{11} \geqslant w_{\xi\xi}, \quad w_{\xi\xi} - V'(x_0,\xi) \geqslant w_{11} - V'(x_0,e_1),$$

可以定义如下的量:

$$M_1 = \sup\{V'(x_0,\eta) \mid \eta \in T_{x_0}M,\ |\eta| = 1\}.$$

因此, 若

$$w_{11} > \frac{M_1}{\theta}, \tag{3.56}$$

有

$$|w_{11} - w_{\xi\xi} + V'(x_0,\xi)| < \theta w_{11}. \tag{3.57}$$

这里假设 (3.56) 成立, 因为若 (3.56) 不成立, 就可以直接得到 w 的上界, 且

$$\begin{aligned}&\frac{w^{ik}w^{jl}\nabla_\xi w_{ij}\nabla_\xi w_{kl}}{w_{\xi\xi} - V'} - (1+\theta)\frac{w^{ij}\nabla_i w_{\xi\xi}\nabla_j w_{\xi\xi}}{(w_{\xi\xi} - V')^2}\\ &\geqslant -\frac{3\theta}{(1-\theta)^2}\frac{w^{ij}\nabla_i w_{\xi\xi}\nabla_j w_{\xi\xi}}{w_{11}^2} - \frac{C_\theta}{w_{11}^2}(1+w_{ii}).\end{aligned} \tag{3.58}$$

根据 V' 的定义, 有

$$|\nabla V'| \leqslant C(1+w_{ii}). \tag{3.59}$$

将 (3.58)–(3.59) 代入到 (3.52), 从 (3.30) 中可以得到

$$0 \geqslant (2\alpha - C - C\alpha^2\theta)w_{ii} + (\beta - 2\alpha - C - C\beta^2\theta)\mathcal{T} - \beta C. \tag{3.60}$$

因此取 θ 足够小, α,β 足够大, 可以得到估计 $w_{ii} \leqslant C$.

情形二 $x_0 \in \partial\Omega$. 在这种情形下, 我们将沿三个不同的方向考虑.

(i) $\xi = \nu$. 我们在引理 3.2 中证明了

$$\nabla_{\nu\nu} u \leqslant C(1+M_2)^{\frac{n-2}{n-1}}. \tag{3.61}$$

(ii) ξ 对 $\partial\Omega$ 既不是法向的也不是切向的. 单位向量 ξ 可以写成

$$\xi = \xi^T + g(\xi\cdot\nu)\nu, \tag{3.62}$$

这里 $\xi^T \in T_{x_0}\partial\Omega$ 是 ξ 的切向部分. 令

$$\tau = \frac{\xi^T}{|\xi^T|}.$$

因此由 V 和 V', 有

$$w_{\xi\xi} = |\xi^T|^2 w(\tau,\tau) + g(\xi\cdot\nu)^2 w(\nu,\nu) + V'(x_0,\xi), \tag{3.63}$$

则

$$\begin{aligned}V(x_0,\xi) &= |\xi^T|^2 V(x_0,\tau) + g(\xi\cdot\nu)^2 V(x_0,\nu)\\ &\leqslant |\xi^T|^2 V(x_0,\xi) + g(\xi\cdot\nu)^2 V(x_0,\nu),\end{aligned} \tag{3.64}$$

也就是说 $V(x_0,\xi) \leqslant V(x_0,\nu)$. 实际上, 若 $V(x_0,\xi) \geqslant V(x_0,\nu)$, 有 $V(x_0,\xi) = V(x_0,\nu)$.

(iii) ξ 是在 $\partial\Omega$ 上 x_0 处的切向量. 令 $\{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$ 是 Ω 中 x_0 处的一个局部正交标架, 通过平移得到 $\partial\Omega$ 上的一个局部正交标架, 有 $e_n = \nu$. 我们仍用 ξ 表示 ξ 在 x_0 的一个小邻域上的延拓, $\nabla\xi(x_0) = 0$, 则在 x_0 点处,

$$\nabla_n V \leqslant 0,$$

因此由 (3.27) 可得

$$\begin{aligned} 0 &\geqslant (\alpha\nabla_n|\nabla(u-\lambda\phi)|^2 + \beta\nabla_n\Phi)w_{\xi\xi} - \nabla_n w_{\xi\xi} - \nabla_n V'(x,\xi) \\ &\geqslant [2\alpha\nabla_{nn}(u-\lambda\phi)\nabla_n(u-\lambda\phi) + 2\alpha\sum_{i=1}^{n-1}\nabla_{in}(u-\lambda\phi)\nabla_i(u-\lambda\phi) + \beta a]w_{\xi\xi} \\ &\quad - \nabla_n w_{\xi\xi} - \nabla_n V'(x,\xi). \end{aligned} \tag{3.65}$$

当 $1 \leqslant i \leqslant n-1$ 时, 根据边界条件 (1.2), 有

$$\begin{aligned} \nabla_{in}u &= \nabla_i\nabla_n u - \nabla_{\nabla_i e_n}u \\ &= \nabla_i\varphi(x,u)\nabla_i u + \nabla_z\varphi(x,u)(\nabla_i u)^2 - \nabla_{\nabla_i e_n}u\nabla_i u. \end{aligned} \tag{3.66}$$

因为 w 是正定的且 $\lambda \geqslant |\nabla u|$, 则

$$\begin{aligned} \nabla_{nn}(u-\lambda\phi)\nabla_n(u-\lambda\phi) &= (\nabla_n u + \lambda)(w_{nn} + A_{nn} - \lambda\nabla_{nn}\phi) \\ &\geqslant (\nabla_n u + \lambda)(A_{nn} - \lambda\nabla_{nn}\phi) \\ &\geqslant -C, \end{aligned} \tag{3.67}$$

根据 λ 的取法, 第一个不等式成立. 将 (3.66) 和 (3.67) 代入 (3.65), 可以得到

$$0 \geqslant (\beta a - \alpha C)w_{\xi\xi} - \nabla_n w_{\xi\xi} - \nabla_n V'(x,\xi). \tag{3.68}$$

通过直接计算, 有

$$\begin{aligned} \nabla_\nu w_{\xi\xi} &= (\nabla_{ijk}u + R_{sijk}\nabla_s u)\xi_i\xi_j\nu_k - \nabla_\nu A(\xi,\xi) \\ &= \nabla_{\xi\xi}(\nabla_\nu u) - 2g(\nabla_\xi\nu, \nabla_\xi\nabla u) - g(\nabla_{\xi\xi}\nu, \nabla u) \\ &\quad + R_{sijk}\nabla_s u\xi_i\xi_j\nu_k - \nabla_\nu A(\xi,\xi). \end{aligned} \tag{3.69}$$

因为 ξ 是 $\partial\Omega$ 上 x_0 处的切向量,

$$\nabla_{\xi\xi}(\nabla_\nu u) = \nabla_z\varphi\nabla_{\xi\xi}u + \nabla_{\xi\xi}\varphi + 2\nabla_{\xi z}\varphi\nabla_\xi u + \nabla_{zz}\varphi(\nabla_\xi u)^2, \tag{3.70}$$

则有

$$\begin{aligned} \nabla_\nu w_{\xi\xi} &= \nabla_z\varphi\nabla_{\xi\xi}u + \nabla_{\xi\xi}\varphi + \nabla_{zz}\varphi(\nabla_\xi u)^2 + R_{sijk}\nabla_s u\xi_i\xi_j\nu_k \\ &\quad + 2\nabla_{\xi z}\varphi\nabla_\xi u - 2g(\nabla_\xi\nu, \nabla_\xi\nabla u) - g(\nabla_{\xi\xi}\nu, \nabla u) - \nabla_\nu A(\xi,\xi) \\ &\geqslant -C[1 + w_{\xi\xi}] \end{aligned} \tag{3.71}$$

和

$$|\nabla_\nu V'| \leqslant C[1 + w_{\xi\xi}]. \tag{3.72}$$

根据 (3.68), (3.71)–(3.72), 得到

$$0 \geqslant (\beta a - \alpha C - C)w_{\xi\xi} - C. \tag{3.73}$$

取 β 足够大, 定理得证.

4 定理 1.2 的证明

在这一部分, 我们给出定理 1.2 的简短证明. 在直到二阶导数估计的基础上, 我们用连续性方法给出存在性的证明.

证 通过第二部分的最大模和定理 2.1, 我们可以给出半线性 Neumann 边值问题 (1.1)–(1.2) 的椭圆解 $u \in C^2(\Omega) \cap C^3(\Omega)$ 的 Hölder 估计,

$$|u|_{2,\alpha;\Omega} \leqslant C, \tag{4.1}$$

这里 $0 < \alpha < 1$(关于 Hölder 估计, 读者可以见文 [25, 定理 3.2] 或文 [26–27]). 有了 $C^{2,\alpha}$ 估计, 我们可以用连续性方法证明解 $u \in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$ 的存在性 (见文 [18, 定理 17.22, 定理 17.28]). 而通过极大值原理我们可以得到解 $u \in W^{4,n}(\Omega) \cap C^3(\overline{\Omega})$(见文 [18, 定理 9.1, 定理 9.6]). 因此由 Schauder 理论可知, 我们可以将 $C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$ 的解提高至 $W^{4,p}(\Omega) \cap C^{3,\delta}(\overline{\Omega})$, 这里 $p < \infty$, $0 < \delta < 1$(见文 [18, 6.7]). 唯一性由引理 2.1 比较原理得到.

致谢 作者感谢审稿人提出的宝贵意见.

参 考 文 献

[1] Ma X N, Trudinger N S, Wang X J. Regularity of potential functions of the optimal transportation problem [J]. *Arch Rat Mech Anal*, 2005, 177:151–183.

[2] Trudinger N S, Wang X J. On the second boundary value problem for Monge-Ampère type equations and optimal transportation [J]. *Ann Scuola Norm Sup Pisa Cl Sci*, 2009, VIII:143–174.

[3] Wang X J. On the design of a refector antenna [J]. *Inverse Problems*, 1996, 12:351–375.

[4] Wang X J. On the design of a refector antenna II [J]. *Calc Var PDE*, 2006, 20:329–341.

[5] Lieberman G M. Oblique derivative problems for elliptic and parabolic equations [J]. *Comm Pure Appl Anal*, 2013, 12(6):2409–2444.

[6] Escobar J. The Yamabe problem on manifolds with boundary [J]. *J Diff Geom*, 1992, 35:21–84.

[7] Li A, Li Y Y. A fully nonlinear version of the Yamabe problem on manifolds with boundary [J]. *J Eur Math Soc*, 2006, 8(2):295–316.

[8] McCann R J. Polar factorization of maps on Riemannian manifolds [J]. *Geom Funct Anal*, 2001, 11:589–608.

[9] Guan B, Li Y Y. Monge-Ampère equations on Riemannian manifolds [J]. *J Diff Equa*, 1996, 132:126–139.

[10] Atallah A, Zuily C. Monge-Ampère equations relative to a Riemannian metric [J]. *Trans Amer Math Soc*, 1997, 10:3989–4006.

[11] Guan B. Second-order estimates and regularity for fully nonlinear elliptic equations on Riemannian manifolds [J]. *Duke Math J*, 2014, 163:1491–1524.

[12] Jiang F, Trudinger N S, Xiang N. On the Neumann problem for Monge-Ampère type equations [J]. *Cana J Math*, 2016, 68(6):1334–1361.

[13] Trudinger N S. Recent developments in elliptic partial differential equations of Monge-Ampère type [J]. *Proc Int Cong Math*, 2006, 3:291–302.

[14] Loeper G. On the regularity of solutions of optimal transportation problems [J]. *Acta Math*, 2009, 202:241–283.

[15] Jiang F, Trudinger N S. On Pogorelov estimates in optimal transportation and geometric optics [J]. *Bulletin of Mathematical Sciences*, 2014, 4(3):407–431.

[16] Trudinger N S. On the local theory of prescribed Jacobian equations [J]. *Discrete Contin Dyn Syst*, 2014, 34(4):1663–1681.

[17] Hong J X. Dirichlet problems for general Monge-Ampère equations [J]. *Math Z*, 1992, 209:289–306.

[18] Gilbarg D, Trudinger N S. Elliptic partial differential equation of second order [M]. Berlin: Springer-Verlag, 2001.

[19] Guo X, Xiang N. Gradient estimates for Neumann boundary value problem of Monge-Ampère type equations on Riemannian manifolds [J]. *Nonlinear Analysis Theory Methods & Applications*, 2017, 150:151–158.

[20] Jiang F, Xiang N, Xu J. Gradient estimates for Neumann boundary value problem of Monge-Ampère type equations [J]. *Communications in Contemporary Mathematics*, 2017, 19(04):34.

[21] Lieberman G M. Oblique derivative problems for elliptic equations [M]. New Jersey: World Scientific, 2013.

[22] Liu J, Trudinger N S. On Pogorelov estimates for Monge-Ampère type equations [J]. *Discrete Contin Dyn Syst Series A*, 2010, 28:1121–1135.

[23] Jiang F, Trudinger N S, Yang X P. On the Dirichlet problem for Monge-Ampère type equations [J]. *Calc Var PDE*, 2014, 49:1223–1236.

[24] Lions P L, Trudinger N S, Urbas J. The Neumann problem for equations of Monge-Ampère type [J]. *Comm Pure Appl Math*, 1986, 39:539–563.

[25] Lions P L, Trudinger N S. Linear oblique derivative problems for the uniformly elliptic Hamilton-Jacobi-Bellman equation [J]. *Math Z*, 1986, 191:1–15.

[26] Lieberman G M, Trudinger N S. Nonlinear oblique boundary value problems for nonlinear elliptic equations [J]. *Trans Amer Math Soc*, 1986, 295:509–546.

[27] Trudinger N S. Boundary value problem for fully nonlinear elliptic equations, proceedings of the centre for mathematical analysis [J]. *Australian National University*, 1984, 8:65–83.

Monge-Ampère Type Equations with Neumann Boundary Conditions on Riemannian Manifolds

GUO Xi[1] WEI Niannian[1] XIANG Ni [1] PAN Cen[1]

[1]Faculty of Mathematics and Statistics, Hubei Key Laboratory of Applied Mathematics, Hubei University, Wuhan 430062, China.

E-mail: guoxi@hubu.edu.cn; kweiniannian@163.com; nixiang@hubu.edu.cn; pancen960213@163.com

Abstract In this paper, the authors consider the global regularity for Monge-Ampère type equations with the Neumann boundary conditions on Riemannian manifolds, and extend the main conclusions in the Euclidean flat space to curved spaces.

Keywords Second derivative estimate, Monge-Ampère type equation, Neumann problem, Riemannian manifold

2010 MR Subject Classification 35J15, 35J67, 35R01, 58J05