数 学 年 刊 A 辑
2020, 41(3):309–324
DOI: 10.16205/j.cnki.cama.2020.0022

Osgood 条件下 G-Brown 驱动的倒向随机微分方程*

张 伟[1] 江 龙[2]

提要 在生成元关于变量 y 满足 Osgood 条件、关于变量 z 满足 Lipschitz 条件下, 建立了 G-Brown 运动驱动的倒向随机微分方程的解的存在唯一性定理.

关键词 G-BSDE, G-Brown 运动, Osgood 条件, 逐次逼近法

MR (2000) 主题分类 60H10, 60H30

中图法分类 O211.6

文献标志码 A

文章编号 1000-8314(2020)03-0309-16

1 引 言

Peng[1−2] 利用自控的非线性马尔可夫半群构造了时间一致性完全非线性期望, 并通过 G-热方程定义了一类完全非线性期望 —G-期望. G-期望可表示为一族期望的上期望, 在此框架下 G-Brown 运动被刻画. Denis 等 [3], Hu 和 Peng[4], Hu 等 [5], Li 和 Peng[6] 等研究了 G-期望的表示和 G-Brown 运动特征和性质等问题. 相应地, Peng[2, 7−8] 在 G-期望框架下建立了随机积分理论. Hu 等 [9] 研究了 G-Brown 运动驱动的倒向随机微分方程

$$Y_t=\xi+\int_t^T f(s,Y_s,Z_s)\mathrm{d}s+\int_t^T g_{ij}(s,Y_s,Z_s)\mathrm{d}\langle B^i,B^j\rangle_s-\int_t^T Z_s\mathrm{d}B_s-(K_T-K_t), \quad (1.1)$$

其中终端条件 $\xi\in L_G^\beta(\Omega_T)(\beta>1)$, 生成元 f 和 g 满足 Lipschitz 条件, 他们证明了在此条件下的解的存在唯一性定理, 其解为三元组 (Y,Z,K). G-BSDE 为完全非线性 PDE 提供概率解释并为在波动率不确定条件下路径依赖未定权益定价提供方法. G-BSDE 解的存在唯一性问题一直是研究的热点, Bai 和 Lin[10] 证明了可积性 Lipschitz 条件下 G-BSDE 的解的存在唯一性. Hu 等 [11], Wang 和 Zheng[12] 分别建立了关于变量 z 的平方增长条件和一致连续条件下解的存在唯一性定理. Li 和 Peng[13−14] 研究了反射 G-BSDE 问题. 本文将研究该类方程在关于变量 y 满足 Osgood 条件下解的存在唯一性问题.

经典的 BSDE

$$Y_t=\xi+\int_t^T g(s,Y_s,Z_s)\mathrm{d}s-\int_t^T Z_s\mathrm{d}B_s \quad (1.2)$$

定义在概率空间 $(\Omega,\mathcal{F},P)$ 中, 其解的形式为一对适应解 (Y,Z). Pardoux 和 Peng[15] 解决了 Lipschitz 条件下解的存在唯一性问题. BSDE 在金融数学、随机控制等方面的广泛应用促进了 BSDE 理论快速发展, 在非 Lipschitz 条件下方程解的研究成为了热点. Lepeltier 和 San Martin[16] 提出并解决了 1 维情况下生成元满足线性增长条件时解的存在性问题,

---

本文 2018 年 8 月 4 日收到, 2020 年 5 月 19 日收到修改稿.

[1] 中国矿业大学徐海学院, 江苏 徐州 221008. E-mail: zhangweixhc@163.com

[2] 通信作者. 中国矿业大学数学学院, 江苏 徐州 221116. E-mail: jianglong365@hotmail.com

* 本文受到中央大学基础研究专项基金 (No. 2017XKZD11) 的资助.

Mao[17], Wang 和 Wang[18] 分别建立了两类非 Lipschitz 条件解的存在唯一性定理. Fan 和 Jiang[19−20] 研究了有限和无限时间区间上多维非 Lipschitz 条件下解的存在唯一性问题. Fan 和 Jiang[21] 解决了 Osgood 条件下多维 BSDE 的解的存在唯一性问题.

与经典 BSDE 相比, G-BSDE 的解的存在唯一性问题研究更为复杂. 因为在 G-期望框架中存在着相互奇异的概率测度, 一些经典的理论如控制收敛定理在 G-期望的框架下不再适用, 这将为我们的研究带来很大的困难. 本文中我们将利用皮卡迭代逼近的方法证明解的存在性问题, 并利用先验估计证明解的唯一性定理.

本文安排如下: 第 2 节回顾一些记号和结果; 第 3 节给出了在 Osgood 条件下一些先验估计, 并证明解的存在唯一性定理.

2 预备知识

首先, 回顾基本的概念和记号并介绍与 G-BSDE 相关的结论. 设 Ω 为给定的集合, $\mathcal{H}$ 为定义在集合 Ω 上的随机变量空间, 对于任意常数 c 满足 $c \in \mathcal{H}$, 且对于每一个 $X \in \mathcal{H}$, 有 $|X| \in \mathcal{H}$. 下面将介绍次线性期望 [1], 以及在次线性空间中随机变量独立性和分布的定义 [2, 8].

定义 2.1 设次线性期望 $\mathbb{E} : \mathcal{H} \to \mathbb{R}$ 满足下列性质: 对所有 $X, Y \in \mathcal{H}$, 有
(i) 单调性: 若 $X \leqslant Y$, 则 $\mathbb{E}[X] \leqslant \mathbb{E}[Y]$;
(ii) 保常性: $\mathbb{E}[c] = [c]$;
(iii) 次可加性: $\mathbb{E}[X + Y] \leqslant \mathbb{E}[X] + \mathbb{E}[Y]$;
(iv) 正齐次性: $\mathbb{E}[\lambda X] = \lambda \mathbb{E}[X]$, 其中 $\lambda \geqslant 0$.

定义 2.2 设 X_1 和 X_2 分别为两个次线性空间 $(\Omega_1, \mathcal{H}_1, \mathbb{E}_1)$ 和 $(\Omega_2, \mathcal{H}_2, \mathbb{E}_2)$ 中的 n 维随机变量. 若对任意的 $\varphi \in C_{\mathrm{Lip}}(\mathbb{R}^n)$, 有 $\mathbb{E}_1[\varphi(X_1)] = \mathbb{E}_2[\varphi(X_2)]$ 成立, 其中 $C_{\mathrm{Lip}}(\mathbb{R}^n)$ 为 $\mathbb{R}^n$ 上 Lipschitz 连续实值函数全体, 则称随机变量 X_1 和 X_2 同分布, 记为 $X_1 \overset{d}{=} X_2$.

定义 2.3 设 $(\Omega, \mathcal{H}, \mathbb{E})$ 为次线性空间, 设随机变量 $X \in \mathcal{H}^m, Y \in \mathcal{H}^n$. 若对任意试验函数 $\varphi \in C_{\mathrm{Lip}}(\mathbb{R}^{m+n})$, 有 $\mathbb{E}[\varphi(X, Y)] = \mathbb{E}[[\mathbb{E}\varphi(x, Y)]_{x=X}]$ 成立, 则称随机变量 Y 在次线性期望 $\mathbb{E}[\cdot]$ 下独立于随机变量 X.

接下来, 介绍 G-正态分布, G-期望和条件 G-期望的概念 [2, 8], 并介绍几个重要的空间.

定义 2.4 设 $X = (X_1, X_2, \cdots, X_d)$ 为次线性空间 $(\Omega, \mathcal{H}, \mathbb{E})$ 中的 d 维随机变量. 若对任意实数 $a, b \geqslant 0$, 有

$$aX + b\overline{X} \overset{d}{=} \sqrt{a^2 + b^2}X$$

成立, 其中 $\overline{X}$ 为随机变量 X 的独立复制, 则称 X 为 G-正态分布. 函数 $G(\cdot) : \mathbb{S}_d \to \mathbb{R}$, 其具体形式为

$$G(A) := \frac{1}{2}\mathbb{E}[\langle AX, X\rangle],$$

其中 $\mathbb{S}_d$ 为 $d \times d$ 对称矩阵全体, 函数 G 为 $\mathbb{S}^d$ 上单调次线性映射. 本文中, G 为非退化的, 即存在 $\underline{\sigma}^2 > 0$, 使得对于任意的对称矩阵 $A, B \in \mathbb{S}_d$, 当 $A \geqslant B$ 时, 有

$$G(A) - G(B) \geqslant \frac{1}{2}\underline{\sigma}^2 \mathrm{tr}(A - B).$$

定义 2.5 设 $\Omega_T = C_0([0,T])$ 为区间 $[0,T]$ 上连续实值函数空间, 满足 $\omega_0 = 0$, 其上定义模为 $\|\cdot\| = \sup\limits_{t\in[0,T]} |\cdot_t|$. 记 $(B_t)_{t\geqslant 0}$ 为典则过程,

$$\mathrm{Lip}(\Omega_T) := \{\varphi(B_{t_1},\cdots,B_{t_n}) : n\geqslant 1, t_1,\cdots,t_n\in[0,T], \varphi\in C_{\mathrm{Lip}}(\mathbb{R}^n)\}.$$

定义 G-期望为

$$\widehat{\mathbb{E}}[\varphi(B_{t_1}, B_{t_2}-B_{t_1},\cdots,B_{t_n}-B_{t_{n-1}})] := \widetilde{\mathbb{E}}[\varphi(\sqrt{t_1}\xi_1, \sqrt{t_2-t_1}\xi_2,\cdots,\sqrt{t_n-t_{n-1}}\xi_n)],$$

其中随机变量 $\xi_1,\cdots,\xi_n$ 为次线性空间 $(\widetilde{\Omega},\widetilde{\mathcal{H}},\widetilde{\mathbb{E}})$ 中的同分布随机变量, 均服从 1 维 G-正态分布, 且 ξ_{i+1} 独立于 $(\xi_1,\cdots,\xi_i)(i=1,\cdots,n-1)$, 称 $(\Omega_T,\mathrm{Lip}(\Omega_T),\widehat{\mathbb{E}})$ 为 G-期望空间. 定义条件 G-期望为:

$$\widehat{\mathbb{E}}_{t_i}[\varphi(B_{t_1}, B_{t_2}-B_{t_1},\cdots,B_{t_n}-B_{t_{n-1}})] = \widetilde{\varphi}(B_{t_1}, B_{t_2}-B_{t_1},\cdots,B_{t_i}-B_{t_{i-1}}),$$

其中 $\widetilde{\varphi}(x_1,\cdots,x_i) = \widetilde{\mathbb{E}}[\varphi(x_1,\cdots,x_i,B_{t_{i+1}}-B_{t_i},\cdots,B_{t_n}-B_{t_{n-1}})]$.

设 $p\geqslant 1$, 记 $L_G^p(\Omega_T)$ 为 G-期望空间 $(\Omega_T,\mathrm{Lip}(\Omega_T),\widehat{\mathbb{E}})$ 在模 $\|\cdot\|_{L_G^p} = (\widehat{\mathbb{E}}[|\cdot|^p])^{\frac{1}{p}}$ 下的完备化空间. 考虑到条件 G-期望在模 $\|\cdot\|_{L_G^p}$ 为连续映射, 可将条件 G-期望拓展至 $L_G^p(\Omega_T)$ 空间中. 设

$$S_G^0(0,T) = \{h(t,B_{t_1\wedge t},\cdots,B_{t_n\wedge t}) : t_1,\cdots,t_n\in[0,T], h\in C_{b,\mathrm{Lip}}(\mathbb{R}^{n+1})\}.$$

记 $S_G^p(0,T)$ 为 $S_G^0(0,T)$ 在模 $\|\cdot\|_{S_G^p} = \big\{\widehat{\mathbb{E}}\big[\sup\limits_{t\in[0,T]}|\cdot|^p\big]\big\}^{\frac{1}{p}}$ 下的完备化空间.

定义 2.6 设给定区间 $[0,T]$ 上的一个分割 $\pi_T = \{t_0,\cdots,t_N\}$, 记 $M_G^0(0,T)$ 为具有如下形式:

$$\eta_t(\omega) = \sum_{i=1}^{N-1}\xi_j(\omega)\mathbf{1}_{[t_j,t_{j+1}]}(t)$$

的简单过程全体, 其中 $\xi_i\in\mathrm{Lip}(\Omega_{t_i})(i=0,1,\cdots,N-1)$. 记 $H_G^p(0,T)$ 和 $M_G^p(0,T)$ 为 $M_G^0(0,T)$ 分别在模 $\|\cdot\|_{H_G^p}$ 和 $\|\cdot\|_{M_G^p}$ 下的完备化空间, 其中

$$\|\cdot\|_{H_G^p} := \Big\{\widehat{\mathbb{E}}\Big[\Big(\int_0^T|\cdot_s|^2\mathrm{d}s\Big)^{\frac{p}{2}}\Big]\Big\}^{\frac{1}{p}}, \quad \|\cdot\|_{M_G^p} := \Big[\widehat{\mathbb{E}}\Big(\int_0^T|\cdot_s|^p\mathrm{d}s\Big)\Big]^{\frac{1}{p}}.$$

定义 2.7 设对于每一个简单过程 $\eta\in M_G^0(0,T)$, 定义线性映射 $I,L := M_G^0(0,T)\to L_G^p(\Omega_T)$, 其具体形式为

$$I(\eta) := \int_0^T\eta_s\mathrm{d}B_s = \sum_{j=0}^{N-1}\xi_j(B_{t_{j+1}}-B_{t_j}),$$

$$L(\eta) := \int_0^T\eta_s\mathrm{d}\langle B\rangle_s = \sum_{j=0}^{N-1}\xi_j(\langle B\rangle_{t_{j+1}}-\langle B\rangle_{t_j}),$$

则映射 I 和 L 可连续地延拓至 $H_G^p(0,T)$ 和 $M_G^p(0,T)$ 空间中.

Denis 等 [3, 定理52], Hu 和 Peng[4, 定理3.5] 给出了 G-期望表示定理.

引理 2.1 [3−4] 设 $\mathcal{M}_1(\Omega_T)$ 为 $(\Omega_T,\mathcal{B}(\Omega_T)$ 上概率测度全体, 其上存在弱紧集 $\mathcal{P}$, 使得对任意 $\xi\in L_G^1(\Omega_T)$,

$$\widehat{\mathbb{E}}[\xi] = \sup_{P\in\mathcal{P}}E_P[\xi].$$

称 $\mathcal{P}$ 为 G-期望的表示.

由上述引理可诱导出 Choquet 容度

$$c(A) := \sup_{P\in\mathcal{P}} P(A), \quad A\in\mathcal{B}(\Omega_T).$$

利用 Choquet 容度定义 G-期望框架下两个随机变量无差别. 若集合 $A\in\mathcal{B}(\Omega_T)$ 满足 $c(A)=0$, 则称集合 A 为极集. 在极集之外成立的性质称之为拟必然 (简写为 q.s.) 性质成立. 若两个随机变量 X 和 Y 满足 $X=Y$,q.s., 则称随机变量 X 与 Y 无差别.

下面介绍在 G-期望框架下 Burkholder-Davis-Gundy 不等式.

引理 2.2 [22, 定理2.1] 设 $\eta\in H_G^p(0,T)$, $\alpha\geqslant 1$, $p\in(0,\alpha]$, 不等式

$$\underline{\sigma}^p c_p \widehat{\mathbb{E}}_t\Big[\Big(\int_t^T|\eta_s|^2\mathrm{d}s\Big)^{\frac{p}{2}}\Big]\leqslant\widehat{\mathbb{E}}_t\Big[\sup_{u\in[t,T]}\Big|\int_t^u\eta_s\mathrm{d}B_s\Big|^p\Big]\leqslant\overline{\sigma}^p c_p\widehat{\mathbb{E}}_t\Big[\Big(\int_t^T|\eta_s|^2\mathrm{d}s\Big)^{\frac{p}{2}}\Big]$$

成立, 其中 $\underline{\sigma}^2:=-\widehat{\mathbb{E}}(-B_1^2)<\widehat{\mathbb{E}}(B_1^2):=\overline{\sigma}^2$, c_p 为常数.

Hu 等 [9] 证明了 G-BSDE

$$Y_t=\xi+\int_t^T f(s,Y_s,Z_s)\mathrm{d}s+\int_t^T g_{ij}(s,Y_s,Z_s)\mathrm{d}\langle B^i,B^j\rangle_s-\int_t^T Z_s\mathrm{d}B_s-(K_T-K_t) \tag{2.1}$$

解的存在唯一性定理, 其中生成元

$$\phi(\omega,t,y,z)=f(\omega,t,y,z),g(\omega,t,y,z):\Omega_T\times[0,T]\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^d\to\mathbb{R}$$

满足条件:

(i) 设 $\beta>1$, 对于 $\forall y\in\mathbb{R},z\in\mathbb{R}^d$, $f(\cdot,\cdot,y,z),g(\cdot,\cdot,y,z)\in M_G^\beta(0,T)$;

(ii) 存在 Lipschitz 常数 $L>0$, 使得 $\forall y,y'\in\mathbb{R},z,z'\in\mathbb{R}^d$,

$$|f(t,y,z)-f(t,y',z')|+|g(t,y,z)-g(t,y',z')|\leqslant L(|y-y'|+|z-z'|).$$

定义 2.8 设 $\alpha>1$, 记 $\mathfrak{S}_G^\alpha(0,T)$ 为三元随机过程组 (Y,Z,K) 构成的集合, 其中 $Y\in S_G^\alpha(0,T),Z\in H_G^\alpha(0,T)$, K 为单调递减 G-鞅, $K_0=0$, 且 $K_T\in L_G^\alpha(\Omega_T)$. 若 $1<\alpha<\beta$, 三元组 $(Y,Z,K)\in\mathfrak{S}_G^\alpha(0,T)$, 且满足方程 (2.1), 则称 (Y,Z,K) 为 G-BSDE (2.1) 的解.

引理 2.3 [9, 定理4.1] 设 $\beta>1$, 终端条件 $\xi\in \mathrm{L}_G^\beta(\Omega_T)$, 生成元 f 和 g 满足条件 (i) 和 (ii), 则 G-BSDE (2.1) 存在唯一解.

Hu 等 [23] 在 Lipschitz 条件下, 证明了比较定理和 Gronwall 不等式.

引理 2.4 [23, 定理3.6] 设 $\beta>1$, $(Y_t^l,Z_t^l,K_t^l)_{t\leqslant T}$ $(l=1,2)$ 为 G-BSDEs

$$Y_t^l=\xi^l+\int_t^T f^1(s,Y_s^l,Z_s^l)\mathrm{d}s+\int_t^T g_{ij}^l(s,Y_s^l,Z_s^l)\mathrm{d}\langle B^i,B^j\rangle_s+V_T^l-V_t^l-\int_t^T Z_s^l\mathrm{d}B_s-(K_T^l-K_t^l)$$

的解, 其中 $(V_t^l)_{t\in[0,T]}$ 为右连左极随机过程, 使得 $\widehat{\mathbb{E}}\big[\sup\limits_{t\in[0,T]}|V_t^l|^\beta\big]<\infty$, 生成元 f^l,g^l 满足条件 (i) 和 (ii), 终端条件 $\xi^l\in \mathrm{L}_G^\beta(\Omega_T)$. 若 $\xi^1\geqslant\xi^2,f^1\geqslant f^2,g^1\geqslant g^2,V_t^1-V_t^2$ 为单调递增过程, 则 $Y_t^1\geqslant Y_t^2$.

引理 2.5 [23, 定理3.10] 设 $(Y_t)_{t\in[0,T]}\in S_G^1(0,T)$ 满足

$$Y_t\leqslant\widehat{\mathbb{E}}_t\Big[\xi+\int_t^T f(s,Y_s)\mathrm{d}s+\int_t^T g(s,Y_s)\mathrm{d}\langle B\rangle\Big],$$

其中 $\xi\in L_G^1(\Omega)$. 对于每一个 $y\in\mathbb{R}$, $\{f(s,y)\}_{s\in[0,T]},\{g(s,y)\}_{s\in[0,T]}\in M_G^1(0,T)$, 生成元 f 和 g 关于变量 y 满足 Lipschitz 条件. 当 $y_1\leqslant y_2$ 时, $f(\cdot,y_1)\leqslant f(\cdot,y_2)$, $g(\cdot,y_1)\leqslant g(\cdot,y_2)$,

则 $Y_t \leqslant \widetilde{Y}_t$, 其中 $(\widetilde{Y}_t)_{t\in[0,T]}$ 为 G-BSDE

$$\widetilde{Y}_t = \widehat{\mathbb{E}}_t\Big[\xi + \int_t^T f(s,\widetilde{Y}_s)\mathrm{d}s + \int_t^T g(s,\widetilde{Y}_s)\mathrm{d}\langle B\rangle\Big]$$

的解. 特别地, 若 $f(s,y) = a_s y + m_s, g(s,y) = c_s y + n_s$, 其中 $a_s \geqslant 0, c_s \geqslant 0$, 则

$$Y_t \leqslant (X_t)^{-1}\widehat{\mathbb{E}}_t\Big[X_T\xi + \int_t^T m_s X_s\mathrm{d}s + \int_t^T n_s X_s \mathrm{d}\langle B\rangle_s\Big],$$

其中 $X_t = \exp\big(\int_t^T a_s\mathrm{d}s + \int_t^T c_s\mathrm{d}\langle B\rangle_s\big)$.

Song[24] 引入了 G-估计 $\mathcal{E}(\xi) := \widehat{\mathbb{E}}\big[\sup\limits_{t\in[0,T]}\widehat{\mathbb{E}}_t|\xi|\big]$, 其中 $\xi \in \mathrm{Lip}(\Omega_T)$. 下面的引理给出了 G-估计的不等式, 该引理将应用于本文解的存在性证明中.

引理 2.6 [24, 定理3.4] 对任意 $\alpha \geqslant 1$ 和 $\delta > 0$, 则 $L_G^{\alpha+\delta}(\Omega_T) \in L_{\mathcal{E}}^{\alpha}(\Omega_T)$. 确切地说, 对任意 $1 < \gamma < \beta := \frac{\alpha+\delta}{\alpha}, \gamma \leqslant 2$, 有

$$\|\xi\|_{\alpha,\mathcal{E}}^{\alpha} \leqslant \gamma^*\Big\{\|\xi\|_{L_G^{\alpha+\delta}}^{\alpha} + 14^{\frac{1}{\gamma}}C_{\beta/\gamma}\|\xi\|_{L_G^{\alpha+\delta}}^{\frac{\alpha+\delta}{\gamma}}\Big\}, \qquad \forall \xi \in \mathrm{Lip}(\Omega_T)$$

成立, 其中 $\|\cdot\|_{p,\mathcal{E}} = (\mathcal{E}[|\cdot|^p])^{\frac{1}{p}}(p \geqslant 1)$, $C_{\beta/\gamma} = \sum\limits_{i=1}^{\infty} i^{-\frac{\beta}{\gamma}}, \gamma^* = \frac{\gamma}{\gamma-1}$.

最后, 给出在证明解的存在性和唯一性定理中涉及的几个引理.

引理 2.7 [9, 定理3.4] 设 $\alpha > 1$, $\alpha^* = \frac{\alpha}{\alpha-1}$. 若 $X \in S_G^{\alpha}(0,T)$, 设 K^l $(l = 1, 2)$ 为单调递减 G-鞅, 且满足 $K_0^l = 0$ 和 $K_T^l \in L_G^{\alpha^*}(\Omega_T)$, 则

$$\int_0^t (X_s)^+\mathrm{d}K_s^1 + \int_0^t (X_s)^-\mathrm{d}K_s^2$$

仍为单调递减 G-鞅.

引理 2.8 [25] 设函数 $\rho : (0,+\infty) \to (0,+\infty)$ 为单调递增的连续函数, 且满足 $\rho(0+) = 0$ 和 $\int_{0^+}\frac{\mathrm{d}r}{\rho(r)} = +\infty$. 设函数 u 为定义在 $(0,+\infty)$ 上的可测非负函数, 且 u 满足 $u(t) \leqslant a + \int_0^t k(s)\rho(u(s))\mathrm{d}s, t \in (0,+\infty)$, 其中 $a \in \mathbb{R}^+$, $k : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ 为 Lebesgue 可积函数, 则

(1) 若 $a = 0$, 则 $u(t) = 0, t \in (0,+\infty)$, $\quad \lambda - \mathrm{a.e.}$;

(2) 若 $a > 0$, 定义 $v(t) := \int_{t_0}^t \frac{\mathrm{d}r}{\rho(r)}, t \in \mathbb{R}^+$, 其中 $t_0 \in (0,+\infty)$, 则

$$u(t) \leqslant v^{-1}\Big(v(a) + \int_0^t k(s)\mathrm{d}s\Big).$$

引理 2.9 [21] 设 $\rho : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ 为单调递增凹函数, $\rho(0) = 0$, 则 $\kappa(u) := \sqrt{u}\rho(\sqrt{u})$ 为单调递增凹函数, 且满足 $\kappa(0) = 0$.

3 Osgood 条件下 G-BSDE 解的存在唯一性

本节将建立本文的主要定理, 即 G-BSDE (2.1) 解的存在唯一性定理, 其中生成元 f 和 g 满足下列条件:

(H1) 设 $\alpha > 0$, 且对于任意 $y \in \mathbb{R}, z \in \mathbb{R}^d$, $f(\cdot,\cdot,y,z), g(\cdot,\cdot,y,z) \in M_G^{2+\alpha}(0,T)$.

(H2) 生成元 f 和 g 关于变量 y 满足 Osgood 条件, 即存在单调递增的凹函数 $\rho : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, 满足 $\rho(0) = 0$, 当 $x > 0$ 时, $\rho(x) > 0$, 且 $\int_{0^+}\frac{\mathrm{d}x}{\rho(x)} = +\infty$, 使得 $\forall y_1, y_2 \in \mathbb{R}, z \in \mathbb{R}^d$,

$$|f(\omega,t,y_1,z) - f(\omega,t,y_2,z)| + |g(\omega,t,y_1,z) - g(\omega,t,y_2,z)| \leqslant \rho(|y_1 - y_2|).$$

(H3) 生成元 f 和 g 关于变量 z 满足 Lipschitz 条件, 即存在常数 $L \geqslant 0$, 使得 $\forall z_1, z_2 \in \mathbb{R}^d, y \in \mathbb{R}$,

$$|f(\omega, t, y, z_1) - f(\omega, t, y, z_2)| + g(\omega, t, y, z_1) - g(\omega, t, y, z_2)| \leqslant L|z_1 - z_2|.$$

注 3.1 由条件 (H2) 可知存在常数 $K > 0$, 使得当 $x > 0$ 时, $\rho(x) \leqslant K(1+x)$. 联立假设 (H2) 和 (H3), 生成元 $\phi = f, g$ 满足不等式

$$|\phi(t, y, z)| \leqslant |\phi(t, 0, 0)| + \rho(|y|) + L|z|, \qquad \forall t \in [0, T], \quad \forall y \in \mathbb{R}, z \in \mathbb{R}^d.$$

下面给出本文的主要定理.

定理 3.1 设 $\alpha > 0$, 设终端条件 $\xi \in L_G^{2+\alpha}(\Omega_T)$, f 和 g 满足假设 (H1),(H2) 和 (H3), 则方程 G-BSDE (2.1) 存在唯一解 $(Y, Z, K) \in \mathfrak{S}_G^2(0, T)$.

在下面的证明中, 我们仅证明当 $d = 1$ 和 $g = 0$ 时结论成立. 类似地, 可以证明 $d > 1$ 和 $g \neq 0$ 的情况. 当 $d = 1$ 和 $g = 0$ 时, 方程为

$$Y_t = \xi + \int_t^T f(s, Y_s, Z_s) \mathrm{d}s - \int_t^T Z_s \mathrm{d}B_s - (K_T - K_t), \quad \forall t \in [0, T]. \tag{3.1}$$

因此, 我们只需要证明 G-BSDE (3.1) 存在唯一解, 其中参数 (ξ, f, T) 为 G-BSDE (2.1) 中的参数. 即终端条件 $\xi \in L_G^{2+\alpha}(\Omega_T)$, 生成元 f 满足假设 (H1), (H2) 和 (H3).

下面我们将用迭代逼近方法证明 G-BSDE (3.1) 存在唯一解. 考虑方程 (3.1), 对于每一个给定的 y, 生成元 $f(t, y, \cdot)$ 关于变量 z 满足 Lipschitz 条件, 由引理 2.3 可知 G-BSDE

$$Y_t = \xi + \int_t^T f(s, y, Z_s) \mathrm{d}s - \int_t^T Z_s \mathrm{d}B_s - (K_T - K_t)$$

存在唯一解 $(Y, Z, K) \in \mathfrak{S}_G^2(0, T)$. 因此, 令 $Y_t^0 \equiv 0, t \in [0, T]$, 构造 G-BSDEs 迭代方程组

$$Y_t^n = \xi + \int_t^T f(s, Y_s^{n-1}, Z_s^n) \mathrm{d}s - \int_t^T Z_s^n \mathrm{d}B_s - (K_T^n - K_t^n), \quad \forall t \in [0, T]. \tag{3.2}$$

记 $(Y^n, Z^n, K^n)_{n \geqslant 1} \in \mathfrak{S}_G^2(0, T)$ 为上述方程组对应的解. G-BSDE (3.1) 解的存在唯一性证明涉及迭代方程组的一些先验估计和其解 $(Y^n, Z^n, K^n)_{n \geqslant 1}$ 的收敛问题. 首先, 我们将给出 $(Y^n, Z^n, K^n)_{n \geqslant 1}$ 的先验估计.

引理 3.1 设三元组 $(Y^n, Z^n, K^n) \in \mathfrak{S}_G^2(0, T)$ 满足迭代方程组 (3.2), 则存在独立于 n 的常数 $C := C(T, \underline{\sigma}, K, L)$, 使得

$$\begin{aligned}\widehat{\mathbb{E}}\Big(\int_0^T |Z_s^n|^2 \mathrm{d}s\Big) \leqslant C\Big\{&\widehat{\mathbb{E}}\Big[\Big(\int_0^T |\overline{f}_s| \mathrm{d}s\Big)^2\Big] + \widehat{\mathbb{E}}\Big(\sup_{s \in [0, T]} |Y_s^n|^2\Big) \\ &+ \widehat{\mathbb{E}}\Big(\sup_{s \in [0, T]} |Y_s^{n-1}|^2\Big)\Big\}\end{aligned} \tag{3.3}$$

和

$$\widehat{\mathbb{E}}[|K_T^n|^2] \leqslant C\Big\{\widehat{\mathbb{E}}\Big[\Big(\int_0^T |\overline{f}_s| \mathrm{d}s\Big)^2\Big] + \widehat{\mathbb{E}}\Big(\sup_{s \in [0, T]} |Y_s^n|^2\Big) + \widehat{\mathbb{E}}\Big(\sup_{s \in [0, T]} |Y_s^{n-1}|^2\Big)\Big\}, \tag{3.4}$$

其中 $\overline{f}_s := |f(s, 0, 0)| + K$.

证 对 $|Y_t^n|^2$ 在区间 $[0, T]$ 做 Itô 公式, 可得

$$|Y_0^n|^2 + \int_0^T |Z_s^n|^2 \mathrm{d}\langle B \rangle_s$$

$$
\begin{aligned}
&= |\xi|^2 + \int_0^T 2Y_s^n f(s, Y_s^{n-1}, Z_s^n)\mathrm{d}s \\
&\quad - \int_0^T 2Y_s^n Z_s^n \mathrm{d}B_s - \int_0^T 2Y_s^n \mathrm{d}K_s^n.
\end{aligned} \tag{3.5}
$$

由假设 (H2), (H3) 和注 3.1 中的不等式, 利用不等式 $2ab \leqslant \lambda a^2 + \frac{b^2}{\lambda}, \forall \lambda > 0$, 将等式 (3.5) 右边第二项化为

$$
\begin{aligned}
\int_0^T 2Y_s^n f(s, Y_s^{n-1}, Z_s^n)\mathrm{d}s &\leqslant \int_0^T 2|Y_s^n|(|f(s,0,0)| + \rho(|Y_s^{n-1}|) + L|Z_s^n|)\mathrm{d}s \\
&\leqslant \int_0^T 2|Y_s^n|(|f(s,0,0)| + K + K|Y_s^{n-1}| + L|Z_s^n|)\mathrm{d}s \\
&\leqslant \int_0^T \Big[2|Y_s^n||\overline{f}_s| + (2L^2 + K)|Y_s^n|^2 + K|Y_s^{n-1}|^2 + \frac{|Z_s^n|^2}{2}\Big]\mathrm{d}s \\
&\leqslant \sup_{s\in[0,T]} |Y_s^n| \int_0^T |\overline{f}_s|\mathrm{d}s + \Big(\frac{2L^2}{\underline{\sigma}^2} + K\Big) T \sup_{s\in[0,T]} |Y_s^n|^2 \\
&\quad + KT \sup_{s\in[0,T]} |Y_s^{n-1}|^2 + \frac{1}{2}\int_0^T |Z_s^n|^2 \mathrm{d}\langle B\rangle_s,
\end{aligned}
$$

其中 $\overline{f}_s = |f(s,0,0)| + K$. 又因为等式 (3.5) 右边第三项为对称 G-鞅, 即 $\widehat{\mathbb{E}}[\pm\int_0^T Y_s^n Z_s^n \mathrm{d}B_s] = 0$. 所以, 对等式 (3.5) 两边同时取 G-期望, 再利用 Hölder 不等式, 可得

$$
\begin{aligned}
\widehat{\mathbb{E}}\Big(\int_0^T |Z_s^n|^2 \mathrm{d}s\Big) &\leqslant C\Big\{\widehat{\mathbb{E}}\Big(\sup_{s\in[0,T]} |Y_s^n|^2\Big) + \widehat{\mathbb{E}}\Big(\sup_{s\in[0,T]} |Y_s^{n-1}|^2\Big) \\
&\quad + \widehat{\mathbb{E}}\Big[\Big(\int_0^T |\overline{f}_s|\mathrm{d}s\Big)^2\Big] + \Big[\widehat{\mathbb{E}}\Big(\sup_{s\in[0,T]} |Y_s^n|^2\Big)\Big]^{\frac{1}{2}} [\widehat{\mathbb{E}}|K_T^n|^2]^{\frac{1}{2}}\Big\},
\end{aligned} \tag{3.6}
$$

其中常数 $C := C(T, \underline{\sigma}, K, L)$ 仅与参数 $T, \underline{\sigma}, K, L$ 有关. 在下面的运算过程中可能发生变化, 但仍记为 C.

另一方面, 将 G-BSDEs (3.2) 变形为

$$
K_T^n = \xi - Y_0^n + \int_0^T f(s, Y_s^{n-1}, Z_s^n)\mathrm{d}s - \int_0^T Z_s^n \mathrm{d}B_s.
$$

利用注 3.1 中的不等式和引理 2.2, 可得

$$
\begin{aligned}
\widehat{\mathbb{E}}[|K_T^n|^2] &\leqslant C\Big\{\widehat{\mathbb{E}}\Big(\sup_{s\in[0,T]} |Y_s^n|^2\Big) + \widehat{\mathbb{E}}\Big(\sup_{s\in[0,T]} |Y_s^{n-1}|^2\Big) \\
&\quad + \widehat{\mathbb{E}}\Big[\Big(\int_0^T |\overline{f}_s|\mathrm{d}s\Big)^2\Big] + \widehat{\mathbb{E}}\Big(\int_0^T |Z_s^n|^2 \mathrm{d}s\Big)\Big\}.
\end{aligned} \tag{3.7}
$$

因此, 联立不等式 (3.6) 和 (3.7), 利用不等式 $2ab \leqslant \lambda a^2 + \frac{b^2}{\lambda}$, $\forall \lambda > 0$, 可证明结论.

引理 3.2 设三元组 $(Y^n, Z^n, K^n) \in \mathfrak{S}_G^2(0,T)$ 满足迭代方程组 (3.2). 记 $\widehat{Z}_t^{m,n} = Z_t^n - Z_t^m, \widehat{K}_t^{m,n} = K_t^n - K_t^m$, 则存在实数 $C := C(T, \underline{\sigma}, K, L)$, 使得

$$
\begin{aligned}
\widehat{\mathbb{E}}\Big(\int_0^T |\widehat{Z}_s^{m,n}|^2 \mathrm{d}s\Big) &\leqslant C\Big\{\widehat{\mathbb{E}}\Big(\sup_{s\in[0,T]} |Y_s^{n-1} - Y_s^{m-1}|^2\Big) + \widehat{\mathbb{E}}\Big(\sup_{s\in[0,T]} |Y_s^n - Y_s^m|^2\Big) \\
&\quad + \Big[\widehat{\mathbb{E}}\Big(\sup_{s\in[0,T]} |Y_s^n - Y_s^m|^2\Big)\Big]^{\frac{1}{2}} \Big[1 + \Big(\widehat{\mathbb{E}}|\widehat{K}_T^{m,n}|^2\Big)^{\frac{1}{2}}\Big]\Big\}
\end{aligned} \tag{3.8}
$$

和

$$\widehat{\mathbb{E}}(|\widehat{K}_T^{m,n}|^2) \leqslant C\Big\{\widehat{\mathbb{E}}\Big(\sup_{s\in[0,T]}|Y_s^n - Y_s^m|^2\Big) + \int_0^T \rho([\widehat{\mathbb{E}}|Y_s^{n-1} - Y_s^{m-1}|^2]^{\frac{1}{2}})\mathrm{d}s + \int_0^T \kappa(\widehat{\mathbb{E}}|Y_s^{n-1} - Y_s^{m-1}|^2)\mathrm{d}s + \widehat{\mathbb{E}}\Big(\int_0^T |\widehat{Z}_s^{m,n}|^2\mathrm{d}s\Big)\Big\}, \tag{3.9}$$

其中 $\kappa(\cdot)$ 为引理 2.9 中定义的函数.

证 取 $n, m \geqslant 1$, 对 $|Y_t^n - Y_t^m|^2$ 在区间 $[0,T]$ 做 Itô 公式, 可得

$$\begin{aligned}&|Y_0^n - Y_0^m|^2 + \int_0^T |\widehat{Z}_s^{m,n}|^2\mathrm{d}\langle B\rangle_s\\ &= \int_0^T 2(Y_s^n - Y_s^m)[f(s, Y_s^{n-1}, Z_s^n) - f(s, Y_s^{m-1}, Z_s^m)]\mathrm{d}s\\ &\quad - \int_0^T 2(Y_s^n - Y_s^m)\widehat{Z}_s^{m,n}\mathrm{d}B_s - \int_0^T 2(Y_s^n - Y_s^m)\mathrm{d}\widehat{K}_s^{m,n}.\end{aligned} \tag{3.10}$$

与引理 3.1 证明类似, 将等式 (3.10) 右边第一项化简为

$$\begin{aligned}&\int_0^T 2|Y_s^n - Y_s^m|[f(s, Y_s^{n-1}, Z_s^n) - f(s, Y_s^{m-1}, Z_s^m)]\mathrm{d}s\\ &\leqslant 2K\sup_{s\in[0,T]}|Y_s^n - Y_s^m| + \Big(\frac{2L^2}{\underline{\sigma}^2} + K\Big)T\sup_{s\in[0,T]}|Y_s^n - Y_s^m|^2\\ &\quad + KT\sup_{s\in[0,T]}|Y_s^{n-1} - Y_s^{m-1}|^2 + \frac{1}{2}\int_0^T |\widehat{Z}_s^{m,n}|^2\mathrm{d}\langle B\rangle_s.\end{aligned}$$

注意到等式 (3.10) 右边第二项为对称 G-鞅, 再对等式 (3.10) 两边同时取 G-期望, 利用 Hölder 不等式, 可得到第一个结论. 另一方面, 对 $Y^n - Y^m$ 进行变形可得:

$$\widehat{K}_T^{m,n} = -(Y_0^n - Y_0^m) + \int_0^T [f(s, Y_s^{n-1}, Z_s^n) - f(s, Y_s^{m-1}, Z_s^m)]\mathrm{d}s - \int_0^T \widehat{Z}_s^{m,n}\mathrm{d}B_s.$$

由注 3.1 中的不等式和引理 2.2, 可得

$$\widehat{\mathbb{E}}(|\widehat{K}_T^{m,n}|^2) \leqslant C\Big\{\widehat{\mathbb{E}}\Big(\sup_{s\in[0,T]}|Y_s^n - Y_s^m|^2\Big) + \widehat{\mathbb{E}}\Big(\int_0^T |\widehat{Z}_s^{m,n}|^2\mathrm{d}s\Big) + \widehat{\mathbb{E}}\Big[\Big(\int_0^T \rho(|Y_s^{n-1} - Y_s^{m-1}|)\mathrm{d}s\Big)^2\Big]\Big\}.$$

最后, 利用引理 2.9, 对上式中右边最后一项应用 Hölder 不等式和 Jensen 不等式, 可得

$$\begin{aligned}&\widehat{\mathbb{E}}\Big[\Big(\int_0^T \rho(|Y_s^{n-1} - Y_s^{m-1}|)\mathrm{d}s\Big)^2\Big]\\ &\leqslant C\widehat{\mathbb{E}}\Big[\int_0^T \rho^2(|Y_s^{n-1} - Y_s^{m-1}|)\mathrm{d}s\Big]\\ &\leqslant C\Big\{\widehat{\mathbb{E}}\Big[\int_0^T K(1 + |Y_s^{n-1} - Y_s^{m-1}|)\rho(|Y_s^{n-1} - Y_s^{m-1}|)\mathrm{d}s\Big]\Big\}\\ &\leqslant C\Big\{\widehat{\mathbb{E}}\int_0^T [\rho(|Y_s^{n-1} - Y_s^{m-1}|) + \kappa(|Y_s^{n-1} - Y_s^{m-1}|^2)]\mathrm{d}s\Big\}\\ &\leqslant C\Big\{\int_0^T \rho([\widehat{\mathbb{E}}|Y_s^{n-1} - Y_s^{m-1}|^2]^{\frac{1}{2}})\mathrm{d}s\end{aligned}$$

$$+\int_0^T \kappa(\widehat{\mathbb{E}}|Y_s^{n-1}-Y_s^{m-1}|^2)\mathrm{d}s\Big\}. \tag{3.11}$$

第二个结论得证.

引理 3.3　设三元组 (Y^n,Z^n,K^n) 满足迭代方程组 (3.2), 则对任意 $1<p<2+\alpha$, 存在独立于 n 的常数 $C_p:=C(p,T,\underline{\sigma},K,L)$, 使得

$$\widehat{\mathbb{E}}\Big(\sup_{t\in[0,T]}|Y_t^n|^p\Big)\leqslant C_p.$$

证　设 $\varepsilon>0$, $1<p<2+\alpha$. 记 $\widetilde{Y}_t=|Y_t^n|^2+\varepsilon_p$, 其中 $\varepsilon_p=\varepsilon\big(1-\frac{p}{2}\big)^+$. 对 $\mathrm{e}^{rt}\widetilde{Y}_t^{\frac{p}{2}}$ 应用 Itô 公式, 可得

$$\begin{aligned}
&\mathrm{e}^{rt}\widetilde{Y}_t^{\frac{p}{2}}+r\int_t^T \mathrm{e}^{rs}\widetilde{Y}_s^{\frac{p}{2}}\mathrm{d}s+\frac{p}{2}\int_t^T \mathrm{e}^{rs}\widetilde{Y}_s^{\frac{p}{2}-1}(Z_s^n)^2\mathrm{d}\langle B\rangle_s\\
&=\mathrm{e}^{rT}(|\xi|^2+\varepsilon_p)^{\frac{p}{2}}-\int_t^T p\mathrm{e}^{rs}\widetilde{Y}_s^{\frac{p}{2}-1}Y_s^nZ_s^n\mathrm{d}B_s-\int_t^T p\mathrm{e}^{rs}\widetilde{Y}_s^{\frac{p}{2}-1}Y_s^n\mathrm{d}K_s^n\\
&\quad+\int_t^T p\mathrm{e}^{rs}\widetilde{Y}_s^{\frac{p}{2}-1}Y_s^nf(s,Y_s^{n-1},Z_s^n)\mathrm{d}s+p\Big(1-\frac{p}{2}\Big)\int_t^T \mathrm{e}^{rs}\widetilde{Y}_s^{\frac{p}{2}-2}(Y_s^n)^2(Z_s^n)^2\mathrm{d}\langle B\rangle_s\\
&\leqslant \mathrm{e}^{rT}(|\xi|^2+\varepsilon_p)^{\frac{p}{2}}+p\Big(1-\frac{p}{2}\Big)\int_t^T \mathrm{e}^{rs}\widetilde{Y}_s^{\frac{p}{2}-1}(Z_s^n)^2\mathrm{d}\langle B\rangle_s\\
&\quad+\int_t^T p\mathrm{e}^{rs}\widetilde{Y}_s^{\frac{p}{2}-1}|Y_s^n||f(s,Y_s^{n-1},Z_s^n)|\mathrm{d}s-(M_T^n-M_t^n),
\end{aligned}$$

其中 $M_t^n=\int_0^t p\mathrm{e}^{rs}\widetilde{Y}_s^{\frac{p}{2}-1}[Y_s^nZ_s^n\mathrm{d}B_s+(Y_s^n)^+\mathrm{d}K_s^n]$. 由注 3.1 的不等式和 Young 不等式, 将上面不等式右边第三项化简, 得

$$\begin{aligned}
&\int_t^T p\mathrm{e}^{rs}\widetilde{Y}_s^{\frac{p}{2}-1}|Y_s^n||f(s,Y_s^{n-1},Z_s^n)|\mathrm{d}s\\
&\leqslant \int_t^T p\mathrm{e}^{rs}\widetilde{Y}_s^{\frac{p}{2}-1}|Y_s^n|[|f(s,0,0)|+\rho(|Y_s^{n-1}|)+L|Z_s^n|]\mathrm{d}s\\
&\leqslant p\int_t^T \mathrm{e}^{rs}\widetilde{Y}_s^{\frac{p-1}{2}}|\overline{f}_s|\mathrm{d}s+pK\int_t^T \mathrm{e}^{rs}\widetilde{Y}_s^{\frac{p-1}{2}}|Y_s^{n-1}|\mathrm{d}s\\
&\quad+pL\int_t^T \mathrm{e}^{rs}\widetilde{Y}_s^{\frac{p}{2}-1}|Y_s^n||Z_s^n|\mathrm{d}s\\
&\leqslant \Big[(K+1)(p-1)+\frac{L^2p}{\underline{\sigma}^2(p-1)}\Big]\int_t^T \mathrm{e}^{rs}\widetilde{Y}_s^{\frac{p}{2}}\mathrm{d}s+\int_t^T \mathrm{e}^{rs}|\overline{f}_s|^p\mathrm{d}s\\
&\quad+K\int_t^T \mathrm{e}^{rs}|Y_s^{n-1}|^p\mathrm{d}s+\frac{p(p-1)}{4}\int_t^T \mathrm{e}^{rs}\widetilde{Y}_s^{\frac{p}{2}-1}(Z_s^n)^2\mathrm{d}\langle B\rangle_s.
\end{aligned}$$

令 $r=(K+1)(p-1)+\frac{L^2p}{\underline{\sigma}^2(p-1)}+1$, 可得

$$\mathrm{e}^{rt}\widetilde{Y}_t^{\frac{p}{2}}+(M_T-M_t)\leqslant \mathrm{e}^{rT}(|\xi|^2+\varepsilon_p)^{\frac{p}{2}}+\int_t^T \mathrm{e}^{rs}|\overline{f}_s|^p\mathrm{d}s+K\int_t^T \mathrm{e}^{rs}|Y_s^{n-1}|^p\mathrm{d}s.$$

由引理 2.7 可知, $(M_t^n)_{t\in[0,T]}$ 为 G-鞅. 在不等式两边同时取条件 G-期望, 并令 $\varepsilon\to0^+$, 于是

$$|Y_t^n|^p\leqslant C_p\widehat{\mathbb{E}}_t\Big[|\xi|^p+\int_t^T |\overline{f}_s|^p\mathrm{d}s+\int_t^T |Y_s^{n-1}|^p\mathrm{d}s\Big]$$

$$\leqslant C_p\widehat{\mathbb{E}}_t\Big[|\xi|^p+\int_t^T|\overline{f}_s|^p\mathrm{d}s+\int_t^T\sup_{1\leqslant k\leqslant n}|Y_s^k|^p\mathrm{d}s\Big],$$

其中 $C_p:=C(p,T,\underline{\sigma},K,L)$ 为独立于 n 的常数. 因此

$$\sup_{1\leqslant k\leqslant n}|Y_t^k|^p\leqslant C_p\widehat{\mathbb{E}}_t\Big[|\xi|^p+\int_t^T|\overline{f}_s|^p\mathrm{d}s+\int_t^T\sup_{1\leqslant k\leqslant n}|Y_s^k|^p\mathrm{d}s\Big].$$

利用引理 2.5, 可得

$$\sup_{1\leqslant k\leqslant n}|Y_t^k|^p\leqslant C_p\mathrm{e}^{C_p(T-t)}\widehat{\mathbb{E}}_t\Big(|\xi|^p+\int_t^T|\overline{f}_s|^p\mathrm{d}s\Big).$$

因为 $\xi\in L_G^{2+\alpha}(\Omega_T)$ 和 $\overline{f}\in M_G^{2+\alpha}(0,T)$, 由引理 2.6 可得, 对于任意 $1<p<2+\alpha$, 存在独立于 n 的常数, 记为 C_p, 使得

$$\widehat{\mathbb{E}}\Big[\sup_{t\in[0,T]}\sup_{1\leqslant k\leqslant n}|Y_t^k|^p\Big]\leqslant C_p.$$

故而得证.

注 3.2 在引理 3.3 的条件下, 当 $p=2$ 时, 结论仍成立. 由引理 3.1 和不等式 (3.3), (3.4), 可知对于任意的 $n\in\mathbb{N}$, 存在常数 $C:=C(T,\underline{\sigma},K,L)$, 使得 $\widehat{\mathbb{E}}\big(\int_0^T|Z_s^n|^2\mathrm{d}s\big)\leqslant C$ 和 $\widehat{\mathbb{E}}[|K_T^n|^2]\leqslant C$.

在得到上述先验估计后, 下面将研究迭代方程组 (3.2) 的解 $(Y^n)_{n\geqslant1}$ 的收敛性. 问题分两步进行: 第一步, 证明 $(Y^n)_{n\geqslant1}$ 在模 $\sup\limits_{0\leqslant t\leqslant T}\{\widehat{\mathbb{E}}[|\cdot_t|^2]\}^{\frac12}$ 下收敛; 第二步, 进而证明 $(Y^n)_{n\geqslant1}$ 在 $S_G^2(0,T)$ 中为 Cauchy 列.

引理 3.4 设 (Y^n,Z^n,K^n) 为迭代方程组 (3.2) 的解, 则 $(Y^n)_{n\geqslant1}$ 在模 $\sup\limits_{0\leqslant t\leqslant T}\{\widehat{\mathbb{E}}[|\cdot_t|^2]\}^{\frac12}$ 下为 Cauchy 列.

证 对任意 $k,m\in\mathbb{N}$, 令

$$u_{k+1,m}(t):=\sup_{0\leqslant s\leqslant t}\widehat{\mathbb{E}}\Big(\sup_{1\leqslant i\leqslant k+1}|Y_s^{i+m}-Y_s^i|^2\Big).$$

记 $Y_t^{k+1,m}=Y_t^{k+1+m}-Y_t^{k+1}$, $Z_t^{k+1,m}=Z_t^{k+1+m}-Z_t^{k+1}$, $K_t^{k+1,m}=K_t^{k+1+m}-K_t^{k+1}$, $f_t^{k+1,m}=f(t,Y_t^{k+m},Z_t^{k+1+m})-f(t,Y_t^k,Z_t^{k+1})$. 对 $|Y_t^{k+1,m}|^2\mathrm{e}^{rt}$ 做 Itô 公式, 可得

$$\begin{aligned}&\mathrm{e}^{rt}|Y_t^{k+1,m}|^2+r\int_t^T\mathrm{e}^{rs}|Y_s^{k+1,m}|^2\mathrm{d}s+\int_t^T\mathrm{e}^{rs}|Z_s^{k+1,m}|^2\mathrm{d}\langle B\rangle_s\\&=2\int_t^T\mathrm{e}^{rs}Y_s^{k+1,m}f_s^{k+1,m}\mathrm{d}s-2\int_t^T\mathrm{e}^{rs}Y_s^{k+1,m}Z_s^{k+1,m}\mathrm{d}B_s\\&\quad-2\int_t^T\mathrm{e}^{rs}Y_s^{k+1,m}\mathrm{d}K_s^{k+1,m}\\&\leqslant2\int_t^T\mathrm{e}^{rs}Y_s^{k+1,m}f_s^{k+1,m}\mathrm{d}s-(M_T^{k+1,m}-M_t^{k+1,m}),\end{aligned}$$

其中 $M_t^{k+1,m}=2\int_0^t\mathrm{e}^{rs}[Y_s^{k+1,m}Z_s^{k+1,m}\mathrm{d}B_s+(Y_s^{k+1,m})^+\mathrm{d}K_s^{k+1+m}+(Y_s^{k+1,m})^-\mathrm{d}K_s^{k+1}]$. 由假设 (H2) 和 (H3), 利用 Young 不等式和 $2ab\leqslant\lambda a^2+\frac{b^2}{\lambda},\ \forall\lambda>0$, 将上面不等式右边第一项化为

$$2\int_t^T\mathrm{e}^{rs}Y_s^{k+1,m}f_s^{k+1,m}\mathrm{d}s\leqslant2\int_t^T|\mathrm{e}^{rs}Y_s^{k+1,m}|\rho(|Y_s^{k,m}|)\mathrm{d}s+2L\int_t^T\mathrm{e}^{rs}|Y_s^{k+1,m}||Z_s^{k+1,m}|\mathrm{d}s$$

$$
\begin{aligned}
&\leqslant 2\int_t^T \mathrm{e}^{rs}\Big(\Big|\sup_{1\leqslant i\leqslant k+1} Y_s^{i,m}\Big|\Big)\rho\Big(\Big|\sup_{1\leqslant i\leqslant k+1} Y_s^{i,m}\Big|\Big)\mathrm{d}s \\
&\quad + 2L\int_t^T \mathrm{e}^{rs}|Y_s^{k+1,m}||Z_s^{k+1,m}|\mathrm{d}s \\
&\leqslant \frac{2L^2}{\underline{\sigma}^2}\int_t^T \mathrm{e}^{rs}(Y_s^{k+1,m})^2\mathrm{d}s + \frac{1}{2}\int_t^T \mathrm{e}^{rs}|Z_s^{k+1,m}|^2\mathrm{d}\langle B\rangle_s \\
&\quad + \int_t^T \mathrm{e}^{rs}\kappa\Big(\Big|\sup_{1\leqslant i\leqslant k+1} Y_s^{i,m}\Big|^2\Big)\mathrm{d}s.
\end{aligned}
$$

令 $r=\frac{2L^2}{\underline{\sigma}^2}+1$, 可得

$$
\mathrm{e}^{rt}|Y_t^{k+1,m}|^2 + (M_T^{k+1,m} - M_t^{k+1,m}) \leqslant \int_t^T \mathrm{e}^{rs}\kappa\Big(\Big|\sup_{1\leqslant i\leqslant k+1} Y_s^{i,m}\Big|^2\Big)\mathrm{d}s.
$$

由引理 2.7 可知, $(M_t^{k+1,m})_{t\in[0,T]}$ 为 G-鞅. 在不等式两边同时取条件 G-期望, 可得

$$
|Y_t^{k+1,m}|^2 \leqslant C\widehat{\mathbb{E}}_t\Big[\int_t^T \kappa\Big(\Big|\sup_{1\leqslant i\leqslant k+1} Y_s^{i,m}\Big|^2\Big)\mathrm{d}s\Big].
$$

由条件 G-期望保号性可得

$$
\Big|\sup_{1\leqslant i\leqslant k+1} Y_t^{i,m}\Big|^2 \leqslant C\widehat{\mathbb{E}}_t\Big[\int_t^T \kappa\Big(\Big|\sup_{1\leqslant i\leqslant k+1} Y_s^{i,m}\Big|^2\Big)\mathrm{d}s\Big].
$$

对不等式两边取 G-期望, 再利用 Jensen 不等式, 可得

$$
u_{k+1,m}(t) \leqslant C\widehat{\mathbb{E}}\int_t^T \kappa\Big(\Big|\sup_{1\leqslant i\leqslant k+1} Y_s^{i,m}\Big|^2\Big)\mathrm{d}s \leqslant C\int_t^T \kappa(u_{k+1,m}(s))\mathrm{d}s.
$$

令

$$
v_{k+1}(t) := \sup_{m\in\mathbb{N}^+} u_{k+1,m}(t), \quad 0\leqslant t\leqslant T,
$$

则

$$
0\leqslant v_{k+1}(t) \leqslant C\int_t^T \kappa(v_{k+1}(s))\mathrm{d}s. \tag{3.12}
$$

定义

$$
p(t) := \limsup_{k\to\infty} v_k(t), \quad 0\leqslant t\leqslant T.
$$

由引理 3.3 可知, $\forall t\in[0,T], p(t)$ 有界. 对不等式 (3.12) 应用 Fatou-Lebesgue 定理可得

$$
0\leqslant p(t)\leqslant C\int_t^T \kappa(p(s))\mathrm{d}s.
$$

由引理 2.8 可得:

$$
p(t)=0, \quad 0\leqslant t\leqslant T,
$$

即得 $(Y^n)_{n\geqslant 1}$ 在模 $\sup\limits_{0\leqslant t\leqslant T}(\widehat{\mathbb{E}}|\cdot_t|^2)^{\frac{1}{2}}$ 下为 Cauchy 列.

引理 3.5　设 (Y^n, Z^n, K^n) 满足迭代方程组 (3.2), 则 $(Y^n)_{n\geqslant 1}$ 在 $S_G^2(0,T)$ 为 Cauchy 列, 即对于任意的 $m,n\in\mathbb{N}$, 有

$$
\lim_{m,n\to\infty}\widehat{\mathbb{E}}\Big(\sup_{t\in[0,T]}|Y_t^n - Y_t^m|^2\Big) = 0
$$

成立.

证 记 $\widehat{Y}_t^{m,n}=Y_t^n-Y_t^m$, $\widehat{Z}_t^{m,n}=Z_t^n-Z_t^m$, $\widehat{K}_T^{m,n}=K_T^n-K_T^m$, $\widehat{f}_t^{m,n}=f(t,Y_t^{n-1},Z_t^n)-f(t,Y_t^{m-1},Z_t^m)$. 对 $|\widehat{Y}_t^{m,n}|^2\mathrm{e}^{rt}$ 做 Itô 公式, 可得

$$\begin{aligned}&\mathrm{e}^{rt}|\widehat{Y}_t^{m,n}|^2+r\int_t^T\mathrm{e}^{rs}|\widehat{Y}_s^{m,n}|^2\mathrm{d}s+\int_t^T\mathrm{e}^{rs}|\widehat{Z}_s^{m,n}|^2\mathrm{d}\langle B\rangle_s\\&=2\int_t^T\mathrm{e}^{rs}\widehat{Y}_s^{m,n}\widehat{f}_s^{m,n}\mathrm{d}s-2\int_t^T\mathrm{e}^{rs}\widehat{Y}_s^{m,n}\widehat{Z}_s^{m,n}\mathrm{d}B_s-2\int_t^T\mathrm{e}^{rs}\widehat{Y}_s^{m,n}\mathrm{d}\widehat{K}_s^{m,n}\\&\leqslant 2\int_t^T\mathrm{e}^{rs}|\widehat{Y}_s^{m,n}||\widehat{f}_s^{m,n}|\mathrm{d}s-(M_T^{m,n}-M_t^{m,n}),\end{aligned}$$

其中 $M_t^{m,n}=2\int_0^t\mathrm{e}^{rs}[\widehat{Y}_s^{m,n}\widehat{Z}_s^{m,n}\mathrm{d}B_s+(\widehat{Y}_s^{m,n})^+\mathrm{d}K_s^n+(\widehat{Y}_s^{m,n})^-\mathrm{d}K_s^m]$. 由于 f 满足假设 (H2) 和 (H3), 所以

$$\begin{aligned}2\int_t^T\mathrm{e}^{rs}|\widehat{Y}_s^{m,n}||\widehat{f}_s^{m,n}|\mathrm{d}s&\leqslant 2\int_t^T\mathrm{e}^{rs}|\widehat{Y}_s^{m,n}|[\rho(|\widehat{Y}_s^{m-1,n-1}|)+L|\widehat{Z}_s^{m,n}|]\mathrm{d}s\\&\leqslant 2L^2\int_t^T\mathrm{e}^{rs}|\widehat{Y}_s^{m,n}|^2\mathrm{d}s+\int_t^T\mathrm{e}^{rs}|\widehat{Y}_s^{m,n}|\rho(|\widehat{Y}_s^{m-1,n-1}|)\mathrm{d}s\\&\quad+\frac{1}{2}\int_t^T\mathrm{e}^{rs}|\widehat{Z}_s^{m,n}|^2\mathrm{d}s.\end{aligned}$$

令 $r=1+2L^2$, 联立上述不等式可得

$$\mathrm{e}^{rt}|\widehat{Y}_t^{m,n}|^2+(M_T^{m,n}-M_t^{m,n})\leqslant 2\int_t^T\mathrm{e}^{rs}|\widehat{Y}_s^{m,n}|\rho(|\widehat{Y}_s^{m-1,n-1}|)\mathrm{d}s.$$

由引理 2.7 可知, $(M_t^{m,n})_{t\in[0,T]}$ 为 G-鞅. 在不等式两边同时取条件 G-期望, 可得

$$|\widehat{Y}_t^{m,n}|^2\leqslant C\widehat{\mathbb{E}}_t\Big[\int_t^T|\widehat{Y}_s^{m,n}|\rho(|\widehat{Y}_s^{m-1,n-1}|)\mathrm{d}s\Big]\leqslant C\widehat{\mathbb{E}}_t\Big[\int_0^T|\widehat{Y}_s^{m,n}|\rho(|\widehat{Y}_s^{m-1,n-1}|)\mathrm{d}s\Big].$$

将不等式两边取上确界后再求 G-期望, 得

$$\widehat{\mathbb{E}}\Big(\sup_{t\in[0,T]}|\widehat{Y}_t^{m,n}|^2\Big)\leqslant C\widehat{\mathbb{E}}\Big\{\sup_{t\in[0,T]}\widehat{\mathbb{E}}_t\Big[\int_0^T|\widehat{Y}_s^{m,n}|\rho(|\widehat{Y}_s^{m-1,n-1}|)\mathrm{d}s\Big]\Big\}.\tag{3.13}$$

设 $1<\alpha'<\frac{4+2\alpha}{4+\alpha}$, 即 $\frac{2\alpha'}{2-\alpha'}<2+\alpha$, 利用 Hölder 不等式和不等式 $(a+b)^r\leqslant 2^{r-1}(a^r+b^r)$, 可得

$$\begin{aligned}&\widehat{\mathbb{E}}\Big[\Big(\int_0^T|\widehat{Y}_s^{m,n}|\rho(|\widehat{Y}_s^{m-1,n-1}|)\mathrm{d}s\Big)^{\alpha'}\Big]\\&\leqslant\widehat{\mathbb{E}}\Big[\sup_{s\in[0,T]}|\widehat{Y}_s^{m,n}|^{\alpha'}\Big(\int_0^T\rho(|\widehat{Y}_s^{m-1,n-1}|)\mathrm{d}s\Big)^{\alpha'}\Big]\\&\leqslant\Big\{\widehat{\mathbb{E}}\Big[\Big(\int_0^T\rho(|\widehat{Y}_s^{m-1,n-1}|)\mathrm{d}s\Big)^2\Big]\Big\}^{\frac{\alpha'}{2}}\Big[\widehat{\mathbb{E}}\Big(\sup_{s\in[0,T]}|\widehat{Y}_s^{m,n}|^{\frac{2\alpha'}{2-\alpha'}}\Big)\Big]^{\frac{2-\alpha'}{2}}\\&\leqslant\Big\{\widehat{\mathbb{E}}\Big[\Big(\int_0^T\rho(|\widehat{Y}_s^{m-1,n-1}|)\mathrm{d}s\Big)^2\Big]\Big\}^{\frac{\alpha'}{2}}\Big[\widehat{\mathbb{E}}\Big(\sup_{s\in[0,T]}|\widehat{Y}_s^{m}|^{\frac{2\alpha'}{2-\alpha'}}+\sup_{s\in[0,T]}|\widehat{Y}_s^{n}|^{\frac{2\alpha'}{2-\alpha'}}\Big)\Big]^{\frac{2-\alpha'}{2}}.\end{aligned}\tag{3.14}$$

由引理 3.4 和不等式 (3.11), 可得

$$\lim_{m,n\to\infty}\widehat{\mathbb{E}}\Big[\Big(\int_0^T\rho(|\widehat{Y}_s^{m-1,n-1}|)\mathrm{d}s\Big)^2\Big]=0.$$

再由引理 3.3 可得

$$\widehat{\mathbb{E}}\Big(\sup_{s\in[0,T]}|\widehat{Y}_s^m|^{\frac{2\alpha'}{2-\alpha'}}+\sup_{s\in[0,T]}|\widehat{Y}_s^n|^{\frac{2\alpha'}{2-\alpha'}}\Big)<\infty.$$

所以, 不等式 (3.14) 化简得

$$\lim_{m,n\to\infty}\widehat{\mathbb{E}}\Big[\Big(\int_0^T|\widehat{Y}_s^{m,n}|\rho(|\widehat{Y}_s^{m-1,n-1}|)\mathrm{d}s\Big)^{\alpha'}\Big]=0.$$

应用引理 2.6 可证明结论.

定理 3.1 的证明 先证明定理 3.1 中解的存在性.

假设 $(Y^n,Z^n,K^n)_{n\geqslant 1}$ 为迭代方程组 (3.2) 的解. 由引理 3.5 可知, 存在随机过程 $Y\in S_G^2(0,T)$, 使得

$$\lim_{n\to\infty}\widehat{\mathbb{E}}\Big(\sup_{t\in[0,T]}|Y_t-Y_t^n|^2\Big)=0.$$

由注 3.2 可知, $\widehat{K}_T^{m,n}$ 为有界, 即 $\widehat{\mathbb{E}}|\widehat{K}_T^{n,m}|^2\leqslant 2(\widehat{\mathbb{E}}|K_T^n|^2+\widehat{\mathbb{E}}|K_T^m|^2)<\infty$. 因此, 再由引理 3.2 中的不等式 (3.8) 和引理 3.5, 可知

$$\lim_{n,m\to\infty}\widehat{\mathbb{E}}\Big(\int_0^T|Z_s^n-Z_s^m|^2\mathrm{d}s\Big)=0,$$

即 $(Z^n)_{n\geqslant 1}$ 为 $H_G^2(0,T)$ 中的 Cauchy 列. 记 $Z\in H_G^2(0,T)$ 为其极限, $(Z^n)_{n\geqslant 1}$ 收敛于 Z. 下面将证明 $(K_T^n)_{n\geqslant 1}$ 收敛. 由引理 3.2 中的不等式 (3.9) 可得

$$\lim_{n,m\to\infty}\widehat{\mathbb{E}}(|\widehat{K}_T^{n,m}|^2)=0.$$

因此 $(K_T^n)_{n\geqslant 1}$ 收敛, 记其极限为 K_T, 且 $K_T\in L_G^2(\Omega_T)$. 又因为 $\widehat{K}_t^{m,n}=\widehat{Y}_t^{m,n}-\int_t^T\widehat{f}_s^{m,n}\mathrm{d}s+\int_t^T\widehat{Z}_s^{m,n}\mathrm{d}B_s+\widehat{K}_T^{m,n}$, 其中 $f_s^{m,n}=f(s,Y_s^{n-1},Z^n)-f(s,Y_s^{m-1},Z^m)$. 由上述分析可得 $(K^n)_{n\geqslant 1}$ 收敛, 记其极限为 K. 极限过程 K 为 G-鞅, $K_0=0$. 事实上, $\forall s,t>0,s<t$,

$$\begin{aligned}\widehat{\mathbb{E}}[|\widehat{\mathbb{E}}_s(K_t)-K_s|]&\leqslant\widehat{\mathbb{E}}[|\widehat{\mathbb{E}}_s(K_t)-\widehat{\mathbb{E}}_s(K_t^n)+\widehat{\mathbb{E}}_s(K_t^n)-K_s|]\\&\leqslant\widehat{\mathbb{E}}[\widehat{\mathbb{E}}_s|K_t-K_t^n|]+\widehat{\mathbb{E}}[|\widehat{\mathbb{E}}_s(K_t^n)-K_s|]\\&\leqslant\widehat{\mathbb{E}}[|K_t-K_t^n|]+\widehat{\mathbb{E}}[|K_s^n-K_s|]\to 0,\quad n\to\infty.\end{aligned}$$

因此 $(Y,Z,K)\in\mathfrak{S}_G^2(0,T)$. 最后证明三元组 (Y,Z,K) 满足方程 (3.1). 只需证明

$$\Big(\int_0^T f(s,Y_s^{n-1},Z_s^n)\mathrm{d}s\Big)_{n\geqslant 1}$$

在空间 $L_G^{2+\alpha}(\Omega_T)$ 中收敛到 $\int_0^T f(s,Y_s,Z_s)\mathrm{d}s$. 事实上,

$$\begin{aligned}&\widehat{\mathbb{E}}\Big(\Big|\int_0^T f(s,Y_s^{n-1},Z_s^n)\mathrm{d}s-\int_0^T f(s,Y_s,Z_s)\mathrm{d}s\Big|\Big)\\&\leqslant\widehat{\mathbb{E}}\Big(\int_0^T|f(s,Y_s^{n-1},Z_s^n)-f(s,Y_s,Z_s)|\mathrm{d}s\Big)\\&\leqslant\widehat{\mathbb{E}}\Big[\int_0^T\rho(|Y_s^{n-1}-Y_s|)\mathrm{d}s\Big]+L\widehat{\mathbb{E}}\Big(\int_0^T|Z_s^n-Z_s|\mathrm{d}s\Big)\\&\leqslant C\Big\{\int_0^T\rho([\widehat{\mathbb{E}}|Y_s^{n-1}-Y_s|^2]^{\frac{1}{2}})\mathrm{d}s+\Big[\widehat{\mathbb{E}}\Big(\int_0^T|Z_s^n-Z_s|^2\mathrm{d}s\Big)\Big]^{\frac{1}{2}}\Big\}.\end{aligned}$$

所以对迭代方程组 (3.2) 两边取极限可得方程 (3.1), 定理 3.1 中 G-BSDE 解的存在性得证.

最后证明定理 3.1 中解的唯一性.

设 $(Y^l, Z^l, K^l)(l=1,2)$ 为 G-BSDEs

$$Y_t^l = \xi + \int_t^T f^l(s, Y_s^l, Z_s^l)\mathrm{d}s - \int_t^T Z_s^l \mathrm{d}B_s - (K_T^l - K_t^l)$$

的解, 其中生成元 f^l 满足假设 (H1)–(H3), 终端条件 $\xi \in \mathbb{L}_G^{2+\alpha}(\Omega_T)$. 应用与引理 3.5 类似的方法, 可得

$$\begin{aligned}|Y_t^1 - Y_t^2|^2 &\leqslant C\widehat{\mathbb{E}}_t\Big(\int_t^T |Y_s^1 - Y_s^2|\rho(|Y_s^1 - Y_s^2|)\mathrm{d}s\Big)\\ &\leqslant C\widehat{\mathbb{E}}_t\Big(\int_0^T \kappa(|Y_s^1 - Y_s^2|^2)\mathrm{d}s\Big).\end{aligned}$$

对上式两边同时取 G-期望, 再利用引理 2.8 Bihari 不等式, 可得 $\widehat{\mathbb{E}}(|Y_t^1 - Y_t^2|^2) = 0$. 采用不等式 (3.14) 的证明方法可知

$$\widehat{\mathbb{E}}\Big(\sup_{t\in[0,T]} |Y_t^1 - Y_t^2|^2\Big) = 0.$$

由不等式 (3.8)–(3.9) 可得

$$\widehat{\mathbb{E}}\Big(\int_0^T |Z_t^1 - Z_t^2|^2 \mathrm{d}t\Big) = 0, \quad \widehat{\mathbb{E}}[|K_T^1 - K_T^2|^2] = 0.$$

定理 3.1 得证.

注 3.3 若将假设 (H2) 改为 1 维情况下的 Mao 条件, 即为下面的假设 (H2′), 定理 3.1 结论仍成立.

(H2′) 存在单调递增凹函数 $\rho: \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, $\rho(0) = 0$, 当 $x > 0$ 时, $\rho(x) > 0$, 且满足 $\int_{0^+} \frac{\mathrm{d}x}{\rho(x)} = +\infty$, 使得

$$\forall y_1, y_2 \in \mathbb{R}, z \in \mathbb{R}^d, \quad |\phi(\omega, t, y_1, z) - \phi(\omega, t, y_2, z)|^p \leqslant \rho(|y_1 - y_2|^p),$$

其中 $1 < p \leqslant 2$. 证明方法是类似的.

致谢 感谢审稿人提出的宝贵意见和建议.

参 考 文 献

[1] Peng S. Nonlinear expectations and nonlinear Markov chains [J]. *Chinese Annals of Mathematics*, 2005, 26B(2):159–184.

[2] Peng S. G-expectation, G-Brownian motion and related stochastic calculus of Itô's type [J]. *Stochastic Analysis and Application*, 2007, 2:541–567.

[3] Denis L, Hu M, Peng S. Function spaces and capacity related to a sublinear expectation:application to G-Brownian motion paths [J]. *Potential Analysis*, 2011, 34:139–161.

[4] Hu M, Peng S. On the representation theorem of G-expectations and paths of G-Brownian motion [J]. *Acta Mathematicae Applicatae Sinica, English Series*, 2009, 25(3):539–546.

[5] Hu M, Wang F, Zheng G. Quasi-continuous random variables and processes under the G-expectation framework [J]. *Stochastic Processes and Their Applications*, 2016, 126:2367–2387.

[6] Li X, Peng S. Stopping times and related Itô's calculus with G-Brownian motion [J]. *Stochastic Processes and Their Applications*, 2011, 121:1492–1508.

[7] Peng S. Multi-dimensional G-Browmian motion and related stochastic calculus under G-expectation [J]. *Stochastic Processes and Their Applications*, 2008, 118(12):2223–2253.

[8] Peng S. Nonlinear expectations and stochastic calculus under uncertainty [R/OL]. arXiv:1002.4546vl, 2010.

[9] Hu M, Ji S, Peng S, et al. Backward stochastic differential equations driven by G-Brownian motion [J]. *Stochastic Processes and Their Applications*, 2014, 124:759–784.

[10] Bai X, Lin Y. On the exsitence and uniqueness of solution to stochastic differential equations driven by G-Brownian motion with integral-Lipschtiz coefficients [J]. *Acta Mathematicae Applicatae Sinica, English Series*, 2014, 30(3):589–610.

[11] Hu Y, Lin Y, Soumana Hima A. Quadratic backward stochastic differential equations driven by G-Brownian motion: discrete solutions and approximation [J]. *Stochastic Processes and Their Applications*, 2018, 128:3724–3750.

[12] Wang F, Zheng G. BSDE driven by G-Brownian motion with uniformly generator [J/OL].*Journal of Theoretical Probability*, 2020, https://doi.org/10.1007/s10959-020-00998-y.

[13] Li H, Peng S. Reflected solutions of BSDEs driven by G-Brownian motion [J]. *Science China Mathematics*, 2018, 61:1–26.

[14] Li H, Peng S. Reflected BSDE driven by G-Brownian motion with an upper obstacle [R/OL]. arXiv:1709.09817vl, 2017.

[15] Pardoux E. Peng S. Adapted solutions of backward stochastic equations [J]. *Systems and Control Letters*, 1990, 14:55–61.

[16] Lepeltier J P, San Martin J. Backward stochastic differential equations with continunous coefficient [J]. *Statistics and Probability Letters*, 1997, 32:425–430.

[17] Mao X. Adapted solutions of backjward stochastic differential equations with non-Lipschitz coefficients [J]. *Stochastic Processes and Their Applications*, 1995, 58:281–292.

[18] Wang Y, Wang X. Adapted solutions of backward SDE with non-Lipschitz coefficients [J]. *Chinese Journal of Applied Probability and Statistics*, 2003, 19:245–251.

[19] Fan S, Jiang L. Finite and infinite time intervals BSDEs with non-Lipschitz coefficients [J]. *Statistics and Probability Letters*, 2010, 80:962–968.

[20] Fan S, Jiang L. L^p solution of finite and infinite time intervals BSDEs with non-Lipschitz coefficients [J]. *Stochastics: An International Journal of Probability and Stochastic Processes*, 2012, 84:487–506.

[21] Fan S, Jiang L. Existence and uniqueness result for multidimensional BSDEs with generators of Osgood type [J]. *Frontiers of Mathematics in China*, 2013, 8:811–824.

[22] Gao F. Pathwise properties and homeomorphic flows for stochastic differential equations driven by G-Brownian motion [J]. *Stochastic Processes and Their Applications*, 2009, 19:3356–3382.

[23] Hu M, Ji S, Peng S, et al. Comparison theorem, Feynman-Kac formula and Gisanov transformation for BSDEs driven by G-Brownian motion [J]. *Stochastic Processes and Their Applications*, 2014, 124:1170–1195.

[24] Song Y. Some properties on G-evaluation and its application to G-martingale decomposition [J]. *Science China Mathematics*, 2011, 54: 287–300.

[25] Bahari I. A generalization of a lemma of bellman and its application to uniqueness problems of differential equations [J]. *Acta Mathematica Academiae Entiarum Hungaricae*,1956,7:81–94.

Backward Stochastic Differential Equations with Generators of Osgood Type Driven by *G*-Brownian Motion

ZHANG Wei[1] JIANG Long[2]

[1]Xuhai College, China University of Mining and Technology, Xuzhou 221008, Jiangsu, China. E-mail: zhangweixhc@163.com

[2]Corresponding author. School of Mathematics, China University of Mining and Technology, Xuzhou 221116, Jiangsu, China.
E-mail: jianglong365@hotmail.com

Abstract In this paper, the authors study the following backward stochastic differential equation driven by G-Brownian motion

$$Y_t = \xi + \int_t^T f(s, Y_s, Z_s)\mathrm{d}s + \int_t^T g(s, Y_s, Z_s)\mathrm{d}\langle B\rangle_s - \int_t^T Z_s \mathrm{d}B_s - (K_T - K_t),$$

whose generators satisfy Osgood condition in y and Lipschitz continuous in z. An existence and uniqeness theorem for this kind of G-BSDE is established.

Keywords G-BSDE, G-Brownian motion, Osgood condition, Successive approximation

2000 MR Subject Classification 60H10, 60H30

The English translation of this paper will be published in
Chinese Journal of Contemporary Mathematics, Vol. 41 No. 3, 2020
by ALLERTON PRESS, INC., USA