数 学 年 刊 A 辑
2020, 41(3):325–330
DOI: 10.16205/j.cnki.cama.2020.0023

Artin 单群的一种刻画*

贾松芳[1] 陈彦恒[2]

提要 设 L 是一个有限单群. 若存在素数 p, 使得 $p \mid |L|$ 且 $p > |L|^{\frac{1}{3}}$, 则称 L 是一个 Artin 单群. Brauer 和 Reynolds 在 1958 年给出了 Artin 单群的完全分类: $PSL_2(p)$, $p > 3$ 是一个素数, 和 $PSL_2(p-1)$, $p > 3$ 为一个 Fermat 素数. 不借助于有限单群分类定理, 本文利用群阶和一个共轭类长刻画了 Artin 单群, 作为推论得出了 Thompson 猜想对 Artin 单群成立.

关键词 有限群, Artin 单群, 群阶, 共轭类长
MR (2000) 主题分类 20D45, 20D60
中图法分类 O152.1
文献标志码 A
文章编号 1000-8314(2020)03-0325-06

1 引 言

本文所提及的群皆为有限群, 单群均为非交换单群.

20 世纪 80 年代初, 有限单群的分类工作宣布完成以后, 很多群论学者试图用群的一些基本数量信息来认识单群, 形成了一系列单群的数量刻画研究课题. 比如, 两阶刻画, 阶分量刻画, OD– 刻画, 非交换图刻画, 等等. 本文研究了 Artin 单群的一种数量刻画问题, 且与 Thompson 猜想相关.

在 1988 年, Thompson 在给施武杰教授的一封信中提出了如下猜想 (1989 年施武杰教授在文 [1] 公开了这一猜想, 且 1992 年该猜想被正式收录在 Unsolved Problems in Group Theory 中的问题 12.38, 参见文 [2]): 设 L 是一个单群, G 是一个中心平凡的群. 若 $N(G) = N(L)$, 则 $G \cong L$, 其中 $N(G)$ 表示群 G 的共轭类长的集合.

近四十年来, Thompson 猜想的研究取得了巨大的进展[3–17]. 2019 年, Gorshkov 在文 [18] 中宣称已完成 Thompson 猜想对剩余单群的证明. 目前, 很多群论学者开始转向研究 Thompson 猜想的推广和延伸问题. 几年前, 陈贵云教授和他的学生仅用群阶和一些特殊共轭类长成功刻画了散在单群, K_3-单群, K_4-单群, 和一些特殊射影线性群 $PSL_4(4)$, $PSL_2(p)$, 交错群 A_p (p 是一个奇素数), 参见文 [19–23]. 这一课题还引起伊朗学者 Asboei, Mohammadyari 和 Amiri 的注意, 他们刻画了交错群 A_{p+1}, A_{p+2} (p 是一个奇素数), 典型群 ${}^2D_n(2)$, ${}^2D_{n+1}(2)(2^n+1>5$ 是一个素数), 参见文 [24–25].

1958 年, Brauer 和 Reynolds 在文 [26] 回答了 Artin 在信中提出的问题: 哪些 g 阶单群的阶能被一个大于 $g^{\frac{1}{3}}$ 的 g 的素因子 p 整除? 这样的单群恰为 $PSL_2(p)$, $p > 3$ 是一个素数, 或者 $PSL_2(p-1)$, $p > 3$ 为一个 Fermat 素数. 本文把这些单群称为 Artin 单群. 本文继续了上述陈贵云教授和他学生的工作, 利用群阶和一个共轭类长刻画了 Artin 单群.

本文 2018 年 5 月 13 日收到, 2020 年 5 月 11 日收到修改稿.

[1]重庆三峡学院数学与统计学院, 重庆 404020. E-mail: jiasongfang@163.com

[2]通信作者. 重庆三峡学院非线性与系统科学重点实验室, 重庆 404020. E-mail: math_yan@126.com

*本文受到重庆市教委科学技术研究项目 (No.KJ1710254, No.KJQN202001217) 和重庆三峡学院重大培育项目 (No.18ZDPY07) 的资助.

据上所述, 文 [20] 已利用群阶和一个共轭类长刻画了 $PSL_2(p)$, p 是一个素数, 得到如下结论.

定理 1.1 [20, 定理3.1] 设 G 是一个群, 则 $G \cong PSL_2(7)$ 当且仅当 $|G| = 2^3 \cdot 3 \cdot 7$ 且 $21 \in N(G)$.

定理 1.2 [20, 定理3.2] 设 G 是一个群, p 是一个素数, 则 $G \cong PSL_2(p)$ 当且仅当 $|G| = \frac{p(p^2-1)}{(2,p-1)}$ 且 $\frac{p^2-1}{(2,p-1)} \in N(G)$, 其中 $p \neq 7$.

与上述文献不同的是, 本文不借助单群分类定理刻画了线性群 $PSL_2(p-1)$, $p>3$ 为一个 Fermat 素数, 得到如下结论.

定理 1.3 设 G 是一个群, $p>3$ 是一个 Fermat 素数, 则 $G \cong PSL_2(p-1)$ 当且仅当 $|G| = p(p-1)(p-2)$ 且 $(p-1)(p-2) \in N(G)$.

为了方便, 用 $\pi(n)$ 表示自然数 n 的全部素因子的集合. 特别地, 对群 G, 记 $\pi(G) = \pi(|G|)$. 另外, G_p 表示群 G 的一个 Sylow p-子群. 其他未加以说明的符号可参见文 [27–28].

2 预备引理

设 G 是一个群. 群 G 的素图 $\Gamma(G)$ 是满足如下条件的简单图:

(1) $\Gamma(G)$ 的顶点集为 $\pi(G)$;

(2) 在图 $\Gamma(G)$ 中, 两个顶点 p, q 有一条边相连的充要条件是群 G 中含有 pq 阶元, 记作: $p \sim q$.

素图 $\Gamma(G)$ 也称为 Gruenberg-Kegel 图, 该图最早由 Gruenberg 和 Kegel 定义. 令 $t(G)$ 表示素图 $\Gamma(G)$ 的连通分支的个数, $\pi_1(G)$, $\pi_2(G)$, $\cdots$, $\pi_{t(G)}(G)$ 是其每一个连通分支顶点的集合. 特别地, 当 G 是偶阶群时, 我们总设 $2 \in \pi_1(G)$. 为了方便主要定理的证明, 下面引入几个著名事实和结论.

引理 2.1 [29,定理A] 设 G 是一个群且 $t(G)>1$, 则下列结论之一成立:

(1) G 是一个 Frobenius 群或者 2-Frobenius 群;

(2) G 有一个正规群列 $1 \subseteq H \subseteq K \subseteq G$, 其中 H 是一个幂零的 $\pi_1(G)$-群, K/H 是一个单群, G/K 是一个 $\pi_1(G)$-群, $|G/K|$ 整除 K/H 的外自同构的阶. 另外, G 的奇阶分量是 K/H 的奇阶分量.

引理 2.2 [30,定理1] 设 G 是一个偶数阶的 Frobenius 群, H 和 K 分别是其 Frobenius 核和 Frobenius 补, 则 $t(G)=2$, $T(G)=\{\pi(H),\pi(K)\}$, 且下列结论之一成立:

(1) $2 \in \pi(H)$ 且 K 的所有 Sylow 子群都是循环群;

(2) $2 \in \pi(K)$, H 是交换群, K 是可解群, K 的奇数阶 Sylow 子群都是循环群, K 的 Sylow 2-子群或是循环群, 或是广义四元数群;

(3) $2 \in \pi(K)$, H 交换, K 有一个子群 K_0, 满足

$$|K:K_0| \leqslant 2, \quad K_0 = Z \times SL(2,5), \quad (|Z|,\ 2\times 3\times 5)=1,$$

其中 Z 的 Sylow 子群是循环的.

引理 2.3 [30,定理2] 设 G 是一个偶数阶的 2-Frobenius 群, K 和 G/H 是 Frobenius 群, 且 H 和 K/H 分别是它们的核, 则成立以下结论:

(1) $t(G)=2$ 且 $T(G)=\{\pi_1(G)=\pi(H)\cup\pi(G/K), \pi_2(G)=\pi(K/H)\}$;

(2) G/K 和 K/H 是循环群, $|G/K| \mid |\mathrm{Aut}(K/H)|$, 且 $(|G/K|, |K/H|) = 1$;
(3) H 是幂零群, G 是可解群.

为了引用方便, 下面给出特殊射影线性群 $PSL_2(q)$ (其中 $2 \mid q$) 的一些数量信息以及 Fermat 素数的一个性质.

引理 2.4 设 $q = 2^m$, m 是一个正整数, 则
(1) $|PSL_2(q)| = q(q-1)(q+1)$;
(2) $N(PSL_2(q)) = \{1, q^2-1, q(q+1), q(q-1)\}$;
(3) $PGL_2(q) = PSL_2(q)$;
(4) $PSL_2(4) \cong A_5 \cong PSL_2(5)$.

引理 2.5 设 p 是一个 Fermat 素数, 则 $p = 2^{2^s} + 1$, 其中 s 是一个自然数.

3 定理 1.3 的证明

定理 1.3 的证明 必要性证明. 如果 $G \cong PSL_2(p-1)$, p 是一个 Fermat 素数, 那么由引理 2.4, $|G| = p(p-1)(p-2)$ 且 $N(G) = \{1, (p-1)(p-2),\ p(p-1), p(p-2)\}$, 从而 $(p-1)(p-2) \in N(G)$.

充分性证明. 因为 p 是一个 Fermat 素数, 所以由引理 2.5, $p = 2^{2^s} + 1$, 其中 s 是一个自然数.

若 $s = 0$, 则 $p = 3$, G 是一个 6 阶的非交换群, 从而 G 仅能同构于对称群 S_3. 又 $S_3 \cong PSL_2(2)$, 所以 $G \cong PSL_2(2)$.

若 $s \geqslant 1$, 则 $p > 3$ 是一个 Fermat 素数. 由题设条件知, G 中存在 p 阶元 x, 使得 $C_G(x) = \langle x\rangle$. 又由 Sylow 定理知, 对任意 p 阶元 $y \in G$, 都有 $C_G(y) = \langle y\rangle$, 从而 $\{p\}$ 是 G 的一个素图分支, 继而 $t(G) \geqslant 2$. 因此 G 满足引理 2.1 的条件且 $Z(G) = 1$. 下面据引理 2.1 对群 G 进行分类讨论.

假如 G 是一个 Frobenius 群且以 H 为核和以 K 为补, 则 $|K|\big|(|H|-1)$. 如果 $p \in \pi(H)$, 那么由引理 2.2 知, $|H| = p$ 且 $|K| = (p-1)(p-2)$. 因此 $(p-1)(p-2)\big|(p-1)$, 从而 $p = 3$, 矛盾. 如果 $p \in \pi(K)$, 那么仍由引理 2.2 知, $|K| = p$ 且 $|H| = (p-1)(p-2)$, 从而 $p\big|((p-1)(p-2)-1)$, 这是不可能的, 所以产生矛盾. 因此 G 不是一个 Frobenius 群.

假如 G 是一个 2-Frobenius 群. 由引理 2.3 知, G 有一个正规群列 $1 \subseteq H \subseteq K \subseteq G$, 使得 $\pi(K/H) = \{p\} = \pi_2(G)$, $\pi(H) \cup \pi(G/K) = \pi_1(G)$, 且 $|G/K| \mid (p-1)$. 因此 K/H 是一个 p 阶群且 $\pi(p-2) \subseteq \pi(H)$. 于是存在一个奇素数 $r \in \pi(p-2)$, 使得 $|H_r| < p$, 从而 $(p, |\mathrm{Aut}(H_r)|) = 1$, 故 r 与 p 在素图 $\Gamma(G)$ 中连通, 矛盾. 因此 G 也不是 2-Frobenius 群.

现在, 由引理 2.1 知, G 有一个正规群列 $1 \subseteq H \subseteq K \subseteq G$, 其中 H 是一个幂零 $\pi_1(G)$-群, K/H 是一个单群, G/K 是 $\pi_1(G)$-群, 使得 $|G/K| \mid \mathrm{Out}(K/H)|$. 于是 p 是素图 $\Gamma(K/H)$ 的一个孤立顶点. 因此 $p \mid |K/H| \mid |G/H| \mid |G| = p(p-1)(p-2)$, 从而 $p > |K/H|^{\frac{1}{3}}$. 于是由 Artin 单群的分类定理知, K/H 同构于 $PSL_2(p)$, $p > 3$ 的素数, 或者同构于 $PSL_2(p-1)$, $p > 3$ 且 p 是一个 Fermat 素数.

(a) 如果 $K/H \cong PSL_2(p)$, $p > 3$ 且是一个素数, 那么 $|PSL_2(p)| = \frac{1}{2}p(p^2-1) \mid p(p-1)(p-2)$, 从而 $\frac{1}{2}(p+1) = p-2$, 可得 $p = 5$ 且是 Fermat 素数. 因此 $K/H \cong PSL_2(5)$, 从而 $|K/H| = |PSL_2(5)| = 5(5-1)(5-2) = |G|$. 于是 $|H| = |G/K| = 1$, 从而 $G \cong PSL_2(5)$. 再由引理 2.5 知, $PSL_2(5) \cong PSL_2(4)$, 从而 $G \cong PSL_2(4)$.

(b) 如果 $K/H \cong PSL_2(p-1)$, $p > 3$ 且 p 是一个 Fermat 素数, 那么 $|K/H| = |PSL_2(p-1)| = p(p-1)(p-2) = |G|$. 于是 $|H| = |G/K| = 1$, 从而 $G \cong PSL_2(p-1)$,

$p > 3$ 且 p 是一个 Fermat 素数.

综合 (a) 和 (b), $G \cong PSL_2(p-1)$, 其中 $p > 3$ 且 p 是一个 Fermat 素数.

注 3.1 定理 1.2 的证明在文 [20] 中使用了单群分类定理, 但在本文定理 1.3 的证明过程中没有使用, 且证明过程简洁明了. 实际上, 经验证本文定理 1.3 的证明方法对定理 1.2 也是适用的.

由定理 1.1, 定理 1.2, 定理 1.3 可得下面两个推论.

推论 3.1 Artin 单群可以被其群阶和一个共轭类长刻画.

进而也可得到 Thompson 猜想对 Artin 单群成立的结论.

推论 3.2 Thompson 猜想对 Artin 单群成立.

证 设 L 是一个 Artin 单群和 G 是一个中心平凡的群, 且 $N(G) = N(L)$. 因为 Artin 单群都是素图非连通的, 所以由文 [3] 得知, $|G| = |L|$. 因此推论 3.2 可由推论 3.1 直接得出.

由引理 2.4 我们知道, 当 $2 \mid q$ 时, $PGL_2(q) = PSL_2(q)$. 再据文 [31] 的主要定理可得下面推论.

推论 3.3 射影线性群 $PGL_2(p)$, 其中 $p > 3$ 是一个素数, 和 $PGL_2(p-1)$, 其中 $p > 3$ 是一个 Fermat 素数, 可以被其群阶和一个共轭类长刻画.

进而利用与推论 3.2 同样的证明方法, 也可得到如下结论.

推论 3.4 射影线性群 $PGL_2(p)$, $p > 3$ 是一个素数, 和 $PGL_2(p-1)$, $p > 3$ 是一个 Fermat 素数, 可以被它们共轭类长的集合刻画.

注 3.2 推论 3.4 的结论说明了 Thompson 猜想可以推广到几乎单群 $PGL_2(p)$, 其中 $p > 3$ 是一个素数, 和 $PGL_2(p-1)$, 其中 p 是一个大于 3 的 Fermat 素数.

致谢 作者真诚地感谢审稿人和编辑给予的帮助和建议.

参 考 文 献

[1] Shi W J, Bi J X. A characteristic property for each finite projective special linear group [M]//Kovács L G, Groups–Canbera 1989 (ed), Lecture Notes in Mathematics, Berlin: Springer-Verlag, 1990:171–180.

[2] Khukhro E, Mazurov V. Unsolved problems in group theory: the Kourovka notebook [M]. Novosibirsk: Sobolev Institute of Mathematics, 2010.

[3] 陈贵云. 关于 Thompson 猜想 [D]. 成都: 四川大学, 1994.

[4] 陈贵云. 关于 Thompson 猜想 [C]//中国科协首届青年学术年会执行委员会, 中国科技技术协会首届青年学术年会论文集, 北京: 科学技术出版社, 1992: 1–6.

[5] Chen G Y. On Thompson's conjecture [J]. *J Algebra*, 1996, 185:184–193.

[6] Chen G Y. Further reflections on Thompson's conjecture [J]. *J Algebra*, 1999, 218:276–285.

[7] Vasil'ev A. On Thompson's conjecture [J]. *Siberian Electronic Mathematical Reports*, 2009, 6:457–464.

[8] Ahanjideh N. On Thompson's conjecture for some finite simple groups [J]. *J Algebra*, 2011, 344:205–228.

[9] Pientka G. A characterization of the alternating group A_{10} by its conjugacy class lengths [J]. *Beitr Algebra Geom*, 2012, 53:273–280.

[10] Jiang Q H, Shao C G, Guo X Y, et al. On Thompson's conjecture of A_{10} [J]. *Comm Algebra*, 2011, 39(7):2349–2353.

[11] Ahanjideh N. Thompson's conjecture for some finite simple groups with connected prime graph [J]. *Algebra and Logic*, 2013, 51(6):451–478.

[12] Gorshkov I. On Thompson's conjecture for simple groups with connected prime graph [J]. *Algebra and Logic*, 2012, 51(2):111–127.

[13] Ahanjideh N. On Thompson's conjecture on the conjugacy classes sizes [J]. *International Journal of Algebra and Computation*, 2013, 23(1):37–68.

[14] Ahanjideh N, Ahanjideh M. On the validity of Thompson's conjecture for finite simple groups [J]. *Comm Algebra*, 2013, 41:4116–4145.

[15] Xu M C. Thompson's conjecture for alternating group of degree 22 [J]. *Frontiers of Mathematics in China*, 2013, 8(5):1227–1236.

[16] Xu M C, Shi W J. Thompson's conjecture for Lie type groups [J]. *Sci China Math*, 2014, 57(3):499–514.

[17] Gorshkov I. Thompson's conjecture for alternating groups [J]. *Comm Algebra*, 2019, 47(1):30–36.

[18] Gorshkov I. On Thompson's conjecture for finite simple groups [J]. *Comm Algebra*, 2019, 47(12):5192–5206.

[19] 李金宝. 具有特殊共轭类长的有限群及子群的广义置换性 [D]. 重庆: 西南大学, 2012.

[20] Chen Y H, Chen G Y. Recognizing $PSL_2(p)$ by its order and one special conjugacy class sizes [J/OL]. *J Ineq App*, 2012, 310, DOI:10.1186/1029-242X-2012-310.

[21] Chen Y H, Chen G Y. Recognization of A_{10} and $L_4(4)$ by two special conjugacy class size [J]. *Italian Journal of Pure and Applied Mathematics*, 2012, 29:387–394.

[22] Li J B, Chen G Y. A new characterization of the Mathieu groups and alternating groups with degree primes [J]. *Comm Algebra*, 2015, 43:2971–2983.

[23] Chen Y H, Chen G Y, Li J B. Recognizing simple K_4-groups by few special conjugacy class sizes [J]. *Bulletin of the Malaysian Mathematical Sciences Society*, 2015, 38(1):51–72.

[24] Asboei A, Mohammadyari R. Characterization of the alternating groups by their order and one conjugacy class length [J]. *Czechoslovak Mathematical Journal*, 2016, 66(1):63–70.

[25] Amiri S, Asboei A. Characterization of some finite groups by order and length of one conjugacy class [J]. *Siberian Mathematical Journal*, 2016, 57(2):185–189.

[26] Brauer R, Reynolds W. On a problenl of E Artin [J]. *Ann Math*, 1958, 68(3):713–720.

[27] Conway J, Curtis R, Norton S, et al. Atlas of finite groups [M]. Oxford: Clarendon Press, 1985.

[28] 徐明耀, 黄建华, 李慧陵, 李世荣. 有限群导引: 下册 [M]. 北京: 科学出版社, 1999.

[29] Williams J. Prime graph components of finite groups [J]. *J Algebra*, 1981, 69:487–513.

[30] 陈贵云. Frobenius 群与 2-Frobeniusgroup 的结构 [J]. 西南师范大学学报, 1995, 20(5):485–487.

[31] Chen Y H, Chen G Y. A characterization of $PGL_2(p)$ by its order and one conjugacy class size [J]. *Proc Indian Acad Sci* (*Math Sci*), 2015, 125(4):501–506.

A Characterization of Artin Simple Groups

JIA Songfang[1] CHEN Yanheng[2]

[1]School of Mathematics and Statistics, Chongqing Three Gorges University, Chongqing 404020, China. E-mail: jiasongfang@163.com

[2]Corresponding author. Key Laboratory for Nonlinear Science and System Structure, Chongqing Three Gorges University, Chongqing 404020, China. E-mail: math_yan@126.com

Abstract Let L be a finite simple group. If it exists a prime p such that $p \mid |L|$ and $p > |L|^{\frac{1}{3}}$, then L is called an Artin simple group. In 1958, Brauer and Reynolds classified Artin simple groups, which are $PSL_2(p)$ where $p > 3$ is a prime, and $PSL_2(p-1)$ where $p > 3$ is a Fermat prime. Without the help of classification theorem of finite simple groups, the authors characterize the Artin simple groups by their order and one conjugacy class length in this short note. This work implies that Thompson's conjecture holds for Artin simple groups.

Keywords Finte group, Artin simple groups, Group order, Conjugacy class length

2000 MR Subject Classification 20D45, 20D60

The English translation of this paper will be published in
Chinese Journal of Contemporary Mathematics, Vol. 41 No. 3, 2020
by ALLERTON PRESS, INC., USA