数 学 年 刊 A 辑
2020, 41(4):357–370
DOI: 10.16205/j.cnki.cama.2020.0025

余模范畴中的余倾斜预包络和余倾斜挠类*

李 园[1] 姚海楼[1]

提要 众所周知, Assem-Smalϕ 定理在倾斜理论中有重要的作用. 本文的目的是建立一个在余模范畴中的 Assem-Smalϕ 定理的版本, 并通过利用预包络理论来刻画余模范畴中的余倾斜挠类.

关键词 Finendo, 预包络, 余倾斜余模, 余倾斜挠类
MR (2000) 主题分类 16T15, 18G05
中图法分类 O153.3
文献标志码 A
文章编号 1000-8314(2020)04-0357-14

1 引 言

倾斜理论对于代数表示理论的发展起着重要的作用. 对偶于有限生成倾斜模, Happel 引入了有限生成余倾斜模的定义, 见文 [1]. 众所周知, 每个有限生成的余倾斜模都诱导出一个挠理论. 然而, 反过来不一定成立. 因此, 一个问题自然而然地就出现了, 哪个挠对是由有限生成的余倾斜模诱导的?

对于有限维代数, Assem[2] 和 Smalϕ[3] 证明了, 一个给定的挠自由类 $\mathcal{F}$ 在一定条件下可以由有限生成的余倾斜模 T 余生成, 使得 $\mathcal{F}=\mathrm{Cogen}(T)$, 这个结果也被称为 Assem-Smal$\phi$ 定理. 后来 Colpi 和 Trlifaj 证明了 Assem-Smalϕ 定理仍然适用于任意环上, 见文 [4, 推论2.7]. Angeleri Hügel 等人受 Assem 和 Smalϕ 的启发, 证明了由余倾斜模余生成的任意环上的挠自由类（即余倾斜挠自由类）可以由模范畴中的特殊预包络类来刻画, 见文 [5, 定理2.5]. 对偶地 [4,推论2.7], Angeleri Hügel 等人也给出了在由余倾斜模余生成的挠自由类上的 Assem-Smalϕ 定理, 见文 [5, 引理2.4].

余代数表示理论是近年来研究的一个热点问题, 很多学者从不同角度进行了研究, 见文 [6–15]. Simson 在文 [13] 中对余代数的表示理论提出了九个公开问题, 其中第五个公开问题是发展余模范畴中的（余）倾斜理论. 为了研究第五个公开问题, 余倾斜理论被许多学者研究, 见文 [11, 15–18]. Simson[11] 证明了在基本余代数上每一个余倾斜余模都可以诱导出一个挠理论. 因此, 很自然地考虑 Assem-Smalϕ 定理在余模范畴中是否仍然成立. 本文对这一问题作了肯定的回答. Angeleri Hügel 等人的工作启发我们利用预包络理论来刻画由余倾斜余模生成的挠类.

本文结构组织如下: 第 2 节, 给出一些必要的预备知识. 第 3 节, 给出 finendo 余模和余模的 (预) 包络的概念. 另外, 还证得预包络预挠类与由 finendo 余模生成的余模类是一致的. 第 4 节, 介绍余倾斜余模的定义, 并给出它们的一些性质. 第 5 节, 给出 Assem-Smalϕ 定理, 并刻画余倾斜挠类.

本文 2020 年 4 月 5 日收到, 2020 年 6 月 29 日收到修改稿.
[1]北京工业大学理学部, 北京 100124. E-mail: yuanlimath@foxmail.com; yaohl@bjut.edu.cn
*本文受到国家自然科学基金 (No. 11671126) 的资助.

2 预备知识

令 K 是一个域, C 是一个 K-向量空间, 如果有两个 K-线性映射 $\Delta : C \to C \otimes C$ 和 $\varepsilon : C \to K$, 使得 $(I \otimes \Delta)\Delta = (\Delta \otimes I)\Delta$ 和 $(I \otimes \varepsilon)\Delta = (\varepsilon \otimes I)\Delta$ 成立, 则称 C 为一个 K-余代数. 令 C 是一个余代数, M 是一个 K-向量空间, 如果存在一个 K-线性映射 $\rho_M^- : M \to C \otimes M$, 使得 $(I \otimes \rho_M^-)\rho_M^- = (\Delta \otimes I)\rho_M^-$ 和 $(\varepsilon \otimes I)\rho_M^- = I$ 成立, 则称 M 为一个左 C-余模.

令 C 是一个 K-余代数. 记 C-Comod 为左 C-余模范畴. 除非另有说明, 在整篇文章我们假定所有的余模都是左余模. 若 M 和 N 是两个左 C-余模, 则记 $\mathrm{Hom}_C(M, N)$ 为所有从 M 到 N 的余模映射. 我们知道, 在 C-Comod 中每个余模 M 都可以嵌入到一个内射余模. 用 $\mathrm{Add}(M)(\mathrm{add}(M))$ 表示若干个 M 的任意直和的 (有限) 直和项构成的范畴. 类似地, 用 $\mathrm{Prod}(M)$ 表示 M 中元素的任意直积的直和项构成的范畴.

回忆文 [19], 如果每个有限维的左 C-余模都有一个投射盖, 那么余代数 C 就称为左半完备余代数. 对于给定的余代数 C, 每个有限维的左 C-余模都有一个投射盖当且仅当左 C-余模范畴 C-Comod有足够多的投射对象, 见文 [19, 定理10]. 我们回忆左 C-余模范畴 C-Comod 有足够多的投射对象的定义为如果对 C-Comod 中的每一个 A, 都存在一个满态射 $P \to A$, 其中 P 是投射的. 因此, 我们回忆左 C-余模 M 的投射维数的定义为对每一个在 C-Comod 中的 N, 有使得 $\mathrm{Ext}_C^{n+1}(M, N) = 0$ 的最小整数 n, 见文 [20]. 令 $\mathcal{D}$ 是 C-Comod 中的余模类. 若 $\mathcal{D}$ 在直和与商下是封闭的, 则 $\mathcal{D}$ 是一个预挠类.

3 Finendo 余模和预包络

在这一节中, 我们将介绍 finendo 余模和余模的预包络的定义. 此外, 我们将研究预包络类和 finendo 余模之间的关系.

定义 3.1 (i) 令 W 是 C-Comod 的投射生成子. 如果存在一个基数 γ 和一个余模映射 $f : W \to B^{(\gamma)}$, 使得对每一个基数 α, 所有的余模映射 $W \to B^{(\alpha)}$ 都通过 f 分解, 则称余模 B 为 W-finendo;

(ii) 如果余模 B 是 W-finendo, 其中 W 是 C-Comod 的投射生成子, 则称 B 为 finendo.

引理 3.1 令 C 是余代数, W 是投射生成子且 $T \in C$-Comod, 则如下叙述等价:

(1) T 是 finendo;

(2) 存在一个基数 β, 使得对每一个基数 α, 所有余模映射 $W \to T^{(\alpha)}$ 都通过若干个 $T^{(\beta)}$ 的直积分解.

证 (1) $\Rightarrow$ (2) 由于 T 是 finendo, 则存在一个基数 β, 使得对每一个基数 α, 余模映射 $\phi : W \to T^{(\alpha)}$ 都通过 $h : W \to T^{(\beta)}$ 分解. 令 $I = \mathrm{Hom}_C(W, T^{(\beta)})$. 取 $T^{(\beta)}$ 的第 h 个投影映射 $\eta : [T^{(\beta)}]^I \to T^{(\beta)}$ 且令 $g : W \to [T^{(\beta)}]^I$ 是由 I 中所有映射诱导的对角映射. 故有如下交换图:

$$\begin{tikzcd}
 & & T^{(\alpha)} \\
T^{(\beta)} \arrow[urr, "f"] & & W \arrow[ll, "h"'] \arrow[u, "\phi"'] \arrow[dl, "g"] \\
 & {[T^{(\beta)}]^I} \arrow[ul, "\eta"] &
\end{tikzcd}$$

因此, $\phi = f\eta g$ 且有 (2).

(2) ⇒ (1) 由假设可知, 对任意的基数 α, 存在基数 β, 使得每一个余模映射 $\phi: W \to T^{(\alpha)}$ 都通过 $\psi: W \to [T^{(\beta)}]^J$ 分解, 即存在一个 $\theta: [T^{(\beta)}]^J \to T^{(\alpha)}$, 使得 $\phi = \theta\psi$ 成立. 取 $I = \mathrm{Hom}_C(W, T^{(\beta)})$, 用 $\widetilde{f}: W \to [T^{(\beta)}]^I$ 表示由 I 中所有余模映射诱导的对角映射, 则存在基数 γ 和余模映射 $f: W \to T^{(\gamma)}$, 使得存在投影映射 $\eta: T^{(\gamma)} \to [T^{(\beta)}]^I$ 和 $\widetilde{f}\,|_{T^{(\gamma)}} = f$. 令 $l_j: [T^{(\beta)}]^J \to T^{(\beta)}$ 为 $T^{(\beta)}$ 在 $[T^{(\beta)}]^J$ 中的第 j 个投影映射, 其中 $j \in J$ 且 $\rho_j: [T^{(\beta)}]^I \to T^{(\beta)}$ 为 $T^{(\beta)}$ 在 $[T^{(\beta)}]^I$ 中的第 j 个投影映射, 其中 $j \in I$. 取 $\delta = \rho_j\eta: T^{(\gamma)} \to T^{(\beta)}$ 为 ρ_j 和 η 的合成映射. 因此, 由直积的性质可知, 存在唯一的 $\tau: T^{(\gamma)} \to [T^{(\beta)}]^J$, 使得 $\delta = l_j\tau$ 成立. 故有如下交换图:

$$\begin{tikzcd}
 & & T^{(\alpha)} \\
T^{(\beta)} & {[T^{(\beta)}]^J} \arrow[l, "l_j"'] \arrow[ur, "\theta"] & W \arrow[l, "\psi"'] \arrow[u, "\phi"'] \arrow[dl, "f"] \arrow[ddl, "\widetilde{f}"] \\
 & T^{(\gamma)} \arrow[u, "\tau"] \arrow[ul, "\delta"'] \arrow[d, "\eta"] & \\
 & {[T^{(\beta)}]^I} \arrow[uul, "\rho_j"] &
\end{tikzcd}$$

直接计算可知, 对每一个 $j \in J$, 都有 $l_j\psi = \rho_j\widetilde{f} = \rho_j\eta f = l_j\tau f$ 成立. 因此, 由直积的性质可得 $\psi = \tau f$, 进而得到 $\phi = \theta\tau f$. 因此, T 是 finendo.

现在我们用另一种方式来引入余模的 (预) 包络. 我们将余模的 (预) 包络与 finendo 余模联系起来.

定义 3.2　令 $\mathcal{F}$ 是 C-Comod 中的一类余模且 $M \in C$-Comod, 如果对每一个 $F \in \mathcal{F}$, 都有 $\mathrm{Hom}_C(\phi, F): \mathrm{Hom}_C(X, F) \to \mathrm{Hom}_C(M, F)$ 是满态射, 则称 $\phi \in \mathrm{Hom}_C(M, X)$ 为 M 的 $\mathcal{F}$-预包络, 其中 $X \in \mathcal{F}$.

注 3.1　令 $\phi \in \mathrm{Hom}_C(M, X)$ 是 M 的 $\mathcal{F}$-预包络.

(i) 如果 $g\phi = \phi$ 且 $g \in \mathrm{End}(X)$, 那么 g 是 X 的自同构, 则称 ϕ 为 M 的 $\mathcal{F}$-包络;

(ii) 若 $\phi \in \mathrm{Hom}_C(M, X)$ 是单射且 $\mathrm{Coker}\phi \in {}^{\perp}\mathcal{F}$, 则称 ϕ 是特殊的.

若 C-Comod 中的每一个余模都有一个 $\mathcal{F}$-预包络 ($\mathcal{F}$-包络), 则称 $\mathcal{F} \subseteq C$-Comod 为预包络 (包络) 类.

命题 3.1　假设 $\phi_1: M \to F_1$ 和 $\phi_2: M \to F_2$ 是 M 的两个不同的 $\mathcal{F}$-包络, 则 $F_1 \cong F_2$.

证　若 $\phi_1: M \to F_1$ 和 $\phi_2: M \to F_2$ 是 M 的两个不同的 $\mathcal{F}$- 包络, 则有两个余模映射 $f_1: F_2 \to F_1$ 和 $f_2: F_1 \to F_2$, 满足如下两个交换图:

$$\begin{tikzcd}
M \arrow[r, "\phi_1"] \arrow[d, "\phi_2"'] & F_1 \arrow[dl, dashed, "f_2"] \\
F_2 &
\end{tikzcd}
\qquad\qquad
\begin{tikzcd}
M \arrow[r, "\phi_2"] \arrow[d, "\phi_1"'] & F_2 \arrow[dl, dashed, "f_1"] \\
F_1 &
\end{tikzcd}$$

故有 $\phi_2 = f_2\phi_1$ 和 $\phi_1 = f_1\phi_2$. 显然有 $\phi_2 = f_2f_1\phi_2$ 和 $\phi_1 = f_1f_2\phi_1$. 由假设可知, f_2f_1 和

f_1f_2 都是自同构. 因此, f_1, f_2 既是单态射又是满态射, 即它们是同构. 因此 $F_1 \cong F_2$.

命题 3.2 若 M 有一个 $\mathcal{F}$-包络且 $\phi: M \to F$ 是一个 $\mathcal{F}$-预包络, 则存在 F 的子余模 F' 和 K, 使得 $F = F' \oplus K$ 成立, 且合成 $\pi \circ \phi$: $M \to F'$ 是一个 $\mathcal{F}$- 包络, 其中 π 是从 F 到 F' 的投影映射.

证 若 $\theta: M \to F_0$ 是 M 的一个 $\mathcal{F}$-包络, 则有如下交换图:

$$\begin{tikzcd} & F_0 \arrow[d, dashed, "f"] \\ M \arrow[ur, "\theta"] \arrow[r, "\phi"] \arrow[dr, "\theta"'] & F \arrow[d, dashed, "g"] \\ & F_0 \end{tikzcd}$$

故有 $\phi = f\theta$ 和 $\theta = g\phi$. 于是, 有 $\theta = gf\theta$. 由定义可知, gf 是 F_0 的自同构, 进而有 $F = \mathrm{Im}(f) \oplus \mathrm{Ker}(g)$. 因此 $F' = \mathrm{Im}(f) \cong F_0$ 且 $M \to F'$ 是 M 的 $\mathcal{F}$-包络.

推论 3.1 假设 M 有一个 $\mathcal{F}$-包络. 令 $\phi: M \to F$ 是一个 $\mathcal{F}$-预包络, 则 ϕ 是一个 $\mathcal{F}$-包络当且仅当不存在直和分解 $F = F' \oplus K$ 且 $K \neq 0$, $\mathrm{Im}(\phi) \subset F'$.

证 必要性. 假设 $\phi: M \to F$ 是一个 $\mathcal{F}$-包络且有分解 $F = F' \oplus K$, 其中 $\mathrm{Im}(\phi) \subset F'$ 和 $K \neq 0$. 令 $f': F' \oplus K \to F'$ 为从 F 到 F' 的投影映射, 且 $\eta: F' \to F = F' \oplus K$ 是典型嵌入映射, 则有余模映射 $f = \eta f': F' \oplus K \to F$. 容易验证 $\phi = f\phi$. 由于 $\phi: M \to F$ 是一个 $\mathcal{F}$-包络, 故 f 是一个自同构. 故 $K = 0$ 矛盾.

反过来, 由命题 3.1 和命题 3.2 可得我们想要的结果.

引理 3.2 假设余模类 $\mathcal{F}$ 在直和下是封闭的. 令 $\phi_i: M_i \to F_i$ 是一个 $\mathcal{F}$-预包络, 对每一个 $i \in I$, 其中 I 是一个指数集, 则 $\bigoplus\limits_{i\in I}\phi_i$: $\bigoplus\limits_{i\in I}M_i \to \bigoplus\limits_{i\in I}F_i$ 是一个 $\mathcal{F}$-预包络.

证 因为对每一个 $i \in I$, 其中 I 是一个指数集, $\phi_i: M_i \to F_i$ 是一个 $\mathcal{F}$-预包络, 所以对任意的 $F' \in \mathcal{F}$, 都有 $\mathrm{Hom}(\phi_i, F')$: $\mathrm{Hom}(F_i, F') \to \mathrm{Hom}(M_i, F')$ 是满态射. 取任意的余模映射 $\psi: \bigoplus\limits_{i\in I}M_i \to F'$. 令 $q_i: M_i \to \bigoplus\limits_{i\in I}M_i$ 是典型的嵌入映射, 则有如下交换图:

$$\begin{tikzcd} M_i \arrow[rr, "\phi_i"] \arrow[dr, "\delta"] \arrow[dd, "q_i"'] & & F_i \arrow[dl, "f_i"'] \arrow[dd, "\mu_i"] \\ & F' & \\ \bigoplus\limits_{i\in I}M_i \arrow[ur, "\psi"] \arrow[rr, "\bigoplus\limits_{i\in I}\phi_i"] & & \bigoplus\limits_{i\in I}F_i \arrow[ul, "f"'] \end{tikzcd}$$

其中 μ_i 是典型的嵌入映射. 因为 $\phi_i: M_i \to F_i$ 是一个 $\mathcal{F}$-预包络, 所以有 $\psi q_i = f_i\phi_i$. 由上积的性质可知, 有唯一的余模映射 $f: \bigoplus\limits_{i\in I}F_i \to F'$, 使得 $f\mu_i = f_i$ 成立, 即 $f|_{F_i} = f_i$. 故

有 $\psi = f(\bigoplus\limits_{i\in I}\phi_i)$, 进而 $\mathrm{Hom}(\bigoplus\limits_{i\in I}\phi_i, F')$: $\mathrm{Hom}(\bigoplus\limits_{i\in I}F_i, F') \to \mathrm{Hom}(\bigoplus\limits_{i\in I}M_i, F')$ 是满态射. 因此, $\bigoplus\limits_{i\in I}\phi_i$ 是 $\mathcal{F}$-预包络.

引理 3.3　令 C 是一个余代数, 且 W 是投射生成子, 则对于一个余模 T, 以下叙述等价:

(1) T 是 finendo;

(2) 存在 W 的一个 $\mathrm{Add}(T)$-预包络;

(3) $\mathrm{Gen}(T)$ 是一个预包络类.

证　(1) $\Rightarrow$ (2) 对一个态射 $\phi: W \to X$, 其中 $X \in \mathrm{Add}(T)$, 则存在一个基数 α, 使得有满态射 $\pi: T^{(\alpha)} \to X$. 由于 W 是投射的, 则存在一个 $g: W \to T^{(\alpha)}$, 使得 $\pi g = \phi$ 成立. 由于 T 是 finendo 的, 则对任意的基数 α 和 $g: W \to T^{(\alpha)}$, 存在一个基数 γ 和余模映射 $f: W \to T^{(\gamma)}$, 使得 g 通过 f 分解. 因此, 有如下交换图:

$$\begin{tikzcd}
W \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "g"] \arrow[ddr, "\phi"'] & & T^{(\gamma)} \arrow[dl, "h"'] \arrow[ddl, "\theta"] \\
& T^{(\alpha)} \arrow[d, "\pi"] & \\
& X &
\end{tikzcd}$$

故 $\pi h f = \phi$. 因此, 令 $\theta = \pi h$, 可得 $f: W \to T^{(\gamma)}$ 是一个 $\mathrm{Add}(T)$- 预包络.

(2) $\Rightarrow$ (3) 取一个 $\mathrm{Add}(T)$-预包络 $\psi: W \to B$. 首先, 证明 ψ 也是一个 $\mathrm{Gen}(T)$-预包络. 假设 $f: W \to X$ 是任意的余模映射, 其中 $X \in \mathrm{Gen}(T)$, 则对于某个基数 J, 有满态射 $\rho: T^{(J)} \to X$. 由 W 的假设可知, f 通过 ρ 分解, 即 $f = \rho f'$, 其中 $f': W \to T^{(J)}$ 是一个余模映射. 因为 $\psi: W \to B$ 是一个 $\mathrm{Add}(T)$-预包络, 所以存在一个 $g: B \to T^{(J)}$, 使得 $g\psi = f'$. 因此, 有如下交换图:

$$\begin{tikzcd}
B \arrow[dr, "g"'] & W \arrow[l, "\psi"'] \arrow[d, "f'"] \arrow[dr, "f"] & \\
& T^{(J)} \arrow[r, "\rho"] & X
\end{tikzcd}$$

故 $\rho g \psi = \rho f' = f$. 于是, ψ 也是一个 $\mathrm{Gen}(T)$-预包络. 令 A 是任意的 C-余模. 由于 W 是生成子, 则对于某个基数 I, 存在一个满态射 $\pi: W^{(I)} \to A$. 因此, 有如下推出图:

$$\begin{tikzcd}
W^{(I)} \arrow[r, "\psi^{(I)}"] \arrow[d, "\pi"'] & B^{(I)} \arrow[d, "\sigma"] \arrow[ddr, bend left, "\theta"] & \\
A \arrow[r, "b'"] \arrow[drr, bend right, "f"'] & B' \arrow[dr, dotted, "\alpha"] & \\
& & X
\end{tikzcd}$$

由于 π 是满态射, 故 σ 是满态射, 进而有 $B' \in \mathrm{Gen}(T)$. 由引理 3.2 可知, $\psi^{(I)}$ 是一

个Gen(T)-预包络. 因此, 对于 $f: A \to X$, 其中 $X \in \mathrm{Gen}(T)$, 存在一个 $\theta: B^{(I)} \to X$, 使得 $f\pi = \theta\psi^{(I)}$ 成立. 由推出的性质可知, 有唯一的 $\alpha: B' \to X$, 使得 $f = \alpha b'$ 成立. 因此, b' 是一个Gen(T)-预包络, 且 Gen(T) 是一个预包络类.

(3) $\Rightarrow$ (1) 令 $\psi: W \to X$ 是一个Gen(T)-预包络, 其中 $X \in \mathrm{Gen}(T)$, 则 $\mathrm{Hom}_C(\psi, T^{(\alpha)}): \mathrm{Hom}_C(X, T^{(\alpha)}) \to \mathrm{Hom}_C(W, T^{(\alpha)})$ 是满态射. 因此, 对任意的 $g: W \to T^{(\alpha)}$, 存在一个 $h: X \to T^{(\alpha)}$, 使得 g 通过 ψ 分解. 由于 $X \in \mathrm{Gen}(T)$, 则对于某个基数 γ, 有满态射 $\pi: T^{(\gamma)} \to X$. 由于 W 是投射生成子, 故存在一个 $f: W \to T^{(\gamma)}$, 使得 $\psi = \pi f$ 成立. 从而有 $h\pi f = g$. 因此, T 是 finendo.

引理 3.4 令 W 是 C-Comod 中的投射生成子. 对于一个余模类 $\mathcal{M} \subseteq C$-Comod, 假设 $\phi: W \to B$ 是 W 的一个 $\mathcal{M}$-预包络, 则 $\mathrm{Hom}_C(W, B)$ 是一个循环 End(B)-模且 $\mathrm{Prod}(\mathcal{M}) \subseteq \mathrm{Gen}(B)$.

证 由于 $\phi: W \to B$ 是 W 的一个 $\mathcal{M}$-预包络, 故有满态射 $\mathrm{Hom}_C(\phi, B): \mathrm{End}(B) \to \mathrm{Hom}_C(W, B)$. 因此, $\mathrm{Hom}_C(W, B)$ 是一个循环 End(B)-模, 其中标量积如下: 对于 $x \in W, \alpha \in \mathrm{End}B$, $f \in \mathrm{Hom}_C(W, B)$ 有 $(\alpha f)(x) = \alpha(f(x))$. 令 $M = \prod\limits_{\alpha<\kappa} M_\alpha$, 其中 $\{M_\alpha \mid \alpha < \kappa\} \subseteq \mathcal{M}$, 则有满同态 $\pi_\alpha: M = \prod\limits_{\alpha<\kappa} M_\alpha \to M_\alpha$. 由于 W 是生成子, 故对某个基数 I, 可设 $f: W^{(I)} \to M = \prod\limits_{\alpha<\kappa} M_\alpha$ 是满态射. 令 $f_\alpha: W^{(I)} \to M_\alpha$ 是 π_α 和 f 的合成映射 $f_\alpha = \pi_\alpha f$. 取第 i 个嵌入映射 $\eta_i: W_i \to W^{(I)}$, 其中 $W_i = W$ 和 $\eta'_i: B_i \to B^{(I)}$, 这里 $B_i = B$. 因此, 有 $\phi^{(I)}\eta_i = \eta'_i\phi$, 其中 $\phi^{(I)}: W^{(I)} \to B^{(I)}$ 是由 ϕ 诱导的映射. 由于 $\phi: W \to B$ 是一个 $\mathcal{M}$-预包络, 故有 $g^i_\alpha: B^i \to M_\alpha$, 使得 $g^i_\alpha\phi = f_\alpha\eta_i$ 成立. 由上积的性质可知, 存在一个 $g_\alpha: B^{(I)} \to M_\alpha$, 使得 $g_\alpha\eta'_i = g^i_\alpha$ 成立. 因此, 有如下交换图:

$$\begin{tikzcd}
W_i \arrow[r, "\eta_i"] \arrow[dd, "\phi"'] & W^{(I)} \arrow[r, "f_\alpha"] \arrow[d, "\phi^{(I)}"] & M_\alpha \\
 & B^{(I)} \arrow[ur, "g_\alpha"] & \\
B_i \arrow[ur, "\eta'_i"] \arrow[uurr, "g^i_\alpha"'] & &
\end{tikzcd}$$

故有 $g_\alpha\phi^{(I)}\eta_i = f_\alpha\eta_i$. 由上积的性质可知, 有唯一的 f_α, 即 $f_\alpha = g_\alpha\phi^{(I)}$. 由直积的性质可知, 有唯一的 $\psi: B^{(I)} \to \prod M_\alpha$, 使得 $\pi_\alpha\psi = g_\alpha$ 成立. 因此, 有如下交换图:

$$\begin{tikzcd}
 & & M = \prod\limits_{\alpha<\kappa} M_\alpha \arrow[dl, "\pi_\alpha"] \\
W^{(I)} \arrow[urr, "f"] \arrow[r, "f_\alpha"] \arrow[dr, "\phi^{(I)}"'] & M_\alpha & \\
 & B^{(I)} \arrow[u, "g_\alpha"] \arrow[uur, "\psi"'] &
\end{tikzcd}$$

故有 $\pi_\alpha\psi\phi^{(I)} = f_\alpha = \pi_\alpha f$. 再由直积的性质可知, 存在唯一的 f, 即 $\psi\phi^{(I)} = f$. 由于 f 是满态射, 故 ψ 是满态射. 因此, 有 $M \in \mathrm{Gen}(B)$, 即 $\mathrm{Prod}(\mathcal{M}) \subseteq \mathrm{Gen}(B)$.

推论 3.2 令 $\mathcal{T} \subseteq C$-Comod 是一个预挠类, W 是投射生成子, 则如下叙述等价:

(1) $\mathcal{T}$ 是一个预包络类;

(2) 存在 W 的一个 $\mathcal{T}$-预包络;

(3) 对于一个 finendo 余模 T, 有 $\mathcal{T} = \mathrm{Gen}(T)$.

证 (1) $\Rightarrow$ (2) 显然成立.

(2) $\Rightarrow$ (3) 令 $\phi: W \to T$ 是一个 $\mathcal{T}$-预包络. 由引理 3.4 可知, $\mathrm{Prod}(\mathcal{T}) \subseteq \mathrm{Gen}(T)$. 由于 $\mathcal{T} \subseteq C$-Comod 是一个预挠类, 故 $\mathrm{Gen}(T) \subseteq \mathcal{T}$. 由 $\mathcal{T} \subseteq \mathrm{Prod}(\mathcal{T})$ 可知, $\mathcal{T} = \mathrm{Gen}(T)$. 由于 W 有一个 $\mathcal{T}$-预包络, 故对任意的基数 α 和 $\phi: W \to X$, 其中 $X \in \mathrm{Gen}(T)$, 有 $\mathrm{Hom}_C(\phi, T^{(\alpha)})$ 是满态射. 即对任意的 $g: W \to T^{(\alpha)}$, 存在 $f: X \to T^{(\alpha)}$, 使得 $f\phi = g$ 成立. 由于 $X \in \mathrm{Gen}(T)$, 则存在基数 γ, 使得 $\pi: T^{(\gamma)} \to X$ 是满态射. 因此, 由 W 的投射性可知, 存在一个 $\psi: W \to T^{(\gamma)}$, 使得 $\pi\psi = \phi$ 成立. 因此, 对任意的基数 α 和 $g: W \to T^{(\alpha)}$, 存在一个基数 γ 和 $\psi: W \to T^{(\gamma)}$, 使得 g 通过 ψ 分解. 因此, T 是 finendo 余模且 $\mathcal{T} = \mathrm{Gen}(T)$.

(3) $\Rightarrow$ (1) 由引理 3.3 中的 (1) $\Rightarrow$ (3) 可得 $\mathcal{T}$ 是一个预包络类.

4 余倾斜余模

在这一节中, 我们研究余倾斜余模, 其定义不同于 Simson 所引入的定义. 假设在余模范畴里有足够多的投射对象.

对偶于倾斜余模的定义 [15], 我们引进余倾斜余模的定义.

定义 4.1 如果余模 T 满足下面的三个条件, 则称 T 为余倾斜余模:

(i) $\mathrm{proj.dim}(T) \leqslant 1$;

(ii) 对任意的基数 X, 有 $\mathrm{Ext}_C^1(T, T^{(X)}) = 0$;

(iii) 存在正合列 $0 \to W \to T_1 \to T_2 \to 0$, 其中 W 是 C-Comod 中的投射生成子, 且 $T_i \in \mathrm{Add}\, T$, 对 $i = 1, 2$.

注 4.1 如果余模 T 满足下面的四个条件, 则称 T 为典型的余倾斜余模:

(i) $\mathrm{proj.dim}T \leqslant 1$;

(ii) $\mathrm{Ext}_C^1(T, T) = 0$;

(iii) 存在正合列 $0 \to W \to T_1 \to T_2 \to 0$, 其中 W 是投射生成子, 且 $T_i \in \mathrm{add}\, T$, 对 $i = 1, 2$;

(iv) T 是有限余表现余模.

如果余模 T 满足 (i), (ii), (iv), 则称 T 为典型的偏余倾斜余模.

命题 4.1 令 C 是一个半完备余代数. 若 $T \in C$-Comod 是一个典型的余倾斜余模, 则 T 是一个余倾斜余模.

证 只需证对任意的基数 X, 有 $\mathrm{Ext}_C(T, T^{(X)}) = 0$ 成立. 易知有如下的短正合列:

$$0 \to K \xrightarrow{f} P \to T \to 0, \tag{4.1}$$

其中 P 是投射余模. 将 $\mathrm{Hom}(-,T)$ 作用到 (4.1) 上, 则有长正合列

$$0 \to \mathrm{Hom}_C(T,T) \to \mathrm{Hom}_C(P,T) \xrightarrow{f^*} \mathrm{Hom}_C(K,T) \to \mathrm{Ext}_C(T,T) = 0.$$

因此, 对任意的 $h_i \in \mathrm{Hom}_C(K,T)$, 存在 $g_i \in \mathrm{Hom}_C(P,T)$, 使得 $h_i = f^*(g_i) = g_i f$ 成立. 对任意的 $h = (h_i)_{i\in X} \in \mathrm{Hom}_C(K,T^{(X)})$, 可设 $g = (g_i)_{i\in X} \in \mathrm{Hom}_C(P,T^{(X)})$. 因此, $h = f^*(g) = gf = (g_i f)_{i\in X}$, 且 $\mathrm{Ext}_C(T,T^{(X)}) = 0$.

命题 4.2 (1) T 是典型的偏余倾斜余模的充要条件是 T 为有限余表现的, 对任意的基数 X, 有 $\mathrm{Ext}_C(T, T^{(X)}) = 0$, 且 $\mathrm{proj.dim}T \leqslant 1$;

(2) T 是典型的余倾斜余模的充要条件是 T 为有限余表现余倾斜余模;

(3) 每一个典型的偏余倾斜余模 T 是典型的余倾斜余模的直和项 (事实上, $W \oplus T$ 是典型的余倾斜余模).

证 (1) 充分性是显然的. 必要性由命题 4.1 可得.

(2) 和 (3) 由命题 4.1 可得.

我们给出如下符号.

定义 4.2 我们定义:

$$M^{\perp} = \{X \in C\text{-Comod} \mid \mathrm{Ext}^1_C(M,X) = 0\},$$

$$\mathrm{Pres}(T) = \{M \mid T^{(I)} \xrightarrow{\delta} T^{(J)} \xrightarrow{\theta} M \to 0 \ \text{是正合的}\}.$$

$$\mathrm{Gen}(T) = \{M \mid T^{(I)} \to M \to 0 \text{ 对于某个基数 } I \text{ 是正合的}\}.$$

命题 4.3 令 C 是余代数且 $\mathrm{Gen}(T) = T^{\perp}$, 则

(1) $\mathrm{Gen}(T)$ 在扩张、商与直和下是封闭的, 特别地, $\mathrm{Gen}(T)$ 是挠类;

(2) 对任意的基数 X, 有 $\mathrm{Ext}_C(T,T^{(X)}) = 0$ 和 $\mathrm{proj.dim}T \leqslant 1$.

证 (1) 显然由假设可知, 结论成立.

(2) 由于 $T^{(X)} \in \mathrm{Gen}(T)$, 则对任意的基数 X, 有 $\mathrm{Ext}_C(T,T^{(X)}) = 0$. 对任意的 $M \in C\text{-Comod}$, 有正合列

$$0 \to M \xrightarrow{f} C^{(n)} \to Z \to 0. \tag{4.2}$$

将 $\mathrm{Hom}(T,-)$ 作用到 (4.2) 上, 则有正合列

$$\mathrm{Ext}^1_C(T,M) \to \mathrm{Ext}^1_C(T,C^{(n)}) = 0 \to \mathrm{Ext}^1_C(T,Z)$$
$$\to \mathrm{Ext}^2_C(T,M) \to \mathrm{Ext}^2_C(T,C^{(n)}) = 0.$$

由于 $C^{(n)} \in T^{\perp}$, 故 $\mathrm{Ext}_C(T,Z) = 0$. 因此, $\mathrm{proj.dim}T \leqslant 1$.

注 4.2 若对于一个余倾斜余模 T, 有 $\mathfrak{D} = \mathrm{Gen}(T)$ 成立, 则称 $\mathfrak{D}$ 为余倾斜挠类.

定义 4.3 若 $\mathrm{Gen}(T) \subseteq T^{\perp}$ 且 $T^{\perp}$ 是一个挠类, 则称 T 为偏余倾斜余模.

命题 4.4 令 C 是余代数, 则

(1) $\mathrm{Gen}(T) \subseteq T^{\perp}$ 和 $T^{\perp}$ 在商下封闭的充要条件是 $\mathrm{proj.dimT} \leqslant 1$ 且对任意的基数 X, 有 $\mathrm{Ext}_C(T,T^{(X)}) = 0$ 成立;

(2) $T^{\perp}$ 在商下封闭的充要条件是 $\mathrm{proj.dim}T \leqslant 1$;

(3) 若 T 是偏余倾斜余模, 则 $\mathrm{proj.dimT} \leqslant 1$ 且对任意的基数 X, 有 $\mathrm{Ext}_C(T,T^{(X)}) = 0$.

证　(1) 必要性由命题 4.2 中的 (1) $\Rightarrow$ (2) 可知. 反过来, 若 $M \in T^{\perp}$ 且 $N \subseteq M$, 则有正合列

$$0 \to N \to M \to M/N \to 0. \tag{4.3}$$

将 $\mathrm{Hom}(T,-)$ 作用到 (4.3) 上, 则有正合列

$$\mathrm{Ext}_C(T,N) \to \mathrm{Ext}_C(T,M) = 0 \to \mathrm{Ext}_C(T,M/N) \to \mathrm{Ext}_C^2(T,N) = 0.$$

故有 $\mathrm{Ext}_C(T,M/N) = 0$. 因此, $M/N \in T^{\perp}$, 进而 $T^{\perp}$ 在商下是封闭的. 对任意的 $M \in \mathrm{Gen}(T)$, 则有正合列

$$0 \to K \to T^{(X)} \to M \to 0. \tag{4.4}$$

将 $\mathrm{Hom}(T,-)$ 作用到 (4.4) 上, 则有正合列

$$\mathrm{Ext}_C^1(T,K) \to \mathrm{Ext}_C^1(T,T^{(X)}) = 0 \to \mathrm{Ext}_C^1(T,M) \to \mathrm{Ext}_C^2(T,K) = 0.$$

因此, 有 $\mathrm{Ext}_C(T,M) = 0$, 进而 $\mathrm{Gen}(T) \subseteq T^{\perp}$.

(2) 由 (1) 可得.

(3) 由 (1) 和 (2) 可知, 任意的偏余倾斜余模 T 满足 $\mathrm{proj.dim}(T) \leqslant 1$ 且对任意的基数 X, 有 $\mathrm{Ext}_C^1(T,T^{(X)}) = 0$.

命题 4.5　若余模 T 是一个余倾斜余模, 则 $\mathrm{Gen}(T) = T^{\perp}$.

证　由命题 4.4 可得 $\mathrm{Gen}(T) \subseteq T^{\perp}$. 由于 T 是一个余倾斜余模, 故有正合列

$$0 \to W \xrightarrow{\theta} T^{(\gamma)} \to T_2 \to 0, \tag{4.5}$$

其中 W 是投射生成子, $T_2 \in \mathrm{Add}\, T$. 若 $M \in T^{\perp}$, 将 $\mathrm{Hom}(-,M)$ 作用到 (4.5) 上, 则有正合列

$$0 \to \mathrm{Hom}_C(T_2,M) \to \mathrm{Hom}_C(T^{(\gamma)},M) \xrightarrow{\theta^*} \mathrm{Hom}_C(W,M) \to \mathrm{Ext}_C(T_2,M) = 0.$$

由 $\mathrm{Ext}_C(T_2,M) = 0$ 可知, θ^* 是满态射. 因此, 对任意的 $\phi \in \mathrm{Hom}_C(W,\ M)$, 存在 $\psi_\phi \in \mathrm{Hom}_C(T^{(\gamma)},M)$, 使得 $\psi_\phi\theta = \phi$ 成立, 即有如下的交换图:

$$\begin{tikzcd} W \arrow[r, hook, "\theta"] \arrow[d, "\phi"'] & T^{(\gamma)} \arrow[dl, "\psi_\phi"] \\ M & \end{tikzcd}$$

因此 $\mathrm{Im}\phi \subseteq \mathrm{Im}\psi_\phi$. 由于 W 是投射生成子, 故有 $\sum\{\mathrm{Im}\phi \mid \phi \in \mathrm{Hom}_C(W,M)\} = M$, 进而有 $\sum\limits_{\phi}\mathrm{Im}\phi = M \subseteq \sum\limits_{\phi}\mathrm{Im}\psi_\phi$. 于是, 有 $\sum\limits_{\phi}\{\mathrm{Im}\psi_\phi \mid \psi_\phi \in \mathrm{Hom}_C(T^{(\gamma)},M)\} = M \subseteq \sum\{\mathrm{Im}\psi \mid \psi \in \mathrm{Hom}_C(T^{(\gamma)},M)\}$. 因此 $M \in \mathrm{Gen}(T)$, 且 $T^{\perp} \subseteq \mathrm{Gen}(T)$.

5　余倾斜挠类

在本节, 我们给出 $\mathcal{D}$-投射余模的定义, 其中 $\mathcal{D}$ 是 C-Comod 中的一个余模类. 另外, 对于任意一个余倾斜挠类, 我们得到了一些有趣的结果.

对于余模 $M \in C$-Comod, 如果将 $\mathrm{Hom}_C(M,-)$ 作用在形式如下的正合列: $0 \to X \to U \to V \to 0$, 其中 $X, U, V \in \mathcal{D}$ 之后仍是正合的, 则称 M 为 $\mathcal{D}$-投射的.

定义 5.1 如果对于一个余倾斜余模 M, 有 $\mathfrak{D}=\mathrm{Gen}(M)$, 则称 $\mathcal{D}$ 为余倾斜挠类.

定义 5.2 令 C 是一个余代数, 如果一个内射余生成子 P 由余模 M 生成, 则称余模 M 为余忠实的.

命题 5.1 令 T 是一个 C-余模. 若 $\mathrm{Gen}(T)=T^{\perp}$, 则 $\mathrm{Gen}(T)=\mathrm{Pres}(T)$.

证 假设 $M\in\mathrm{Gen}(T)$ 且 $X=\mathrm{Hom}_C(T,M)$. 令 $\phi:T^{(X)}\to M$ 是由 X 中所有的映射诱导的余对角映射. 因为 M 是由 T 生成的, 故 ϕ 是满态射. 令 $D=\mathrm{Ker}(\phi)$, 则有如下正合列:

$$0\to D\to T^{(X)}\xrightarrow{\phi}M\to 0. \tag{5.1}$$

将 $\mathrm{Hom}_C(T,-)$ 作用到 (5.1) 上, 则有如下长正合列:

$$\begin{aligned}&0\to\mathrm{Hom}_C(T,D)\to\mathrm{Hom}_C(T,T^{(X)})\xrightarrow{\phi^*}\mathrm{Hom}_C(T,M)\\&\to\mathrm{Ext}_C(T,D)\to\mathrm{Ext}_C(T,T^{(X)})=0.\end{aligned}$$

由构造可知, ϕ^* 是满态射. 因此, $\mathrm{Ext}_C(T,D)=0$, 即 $D\in\mathrm{Gen}(T)$.

命题 5.2 令 C 是一个余代数. 若 T 是余倾斜余模且 M 是投射余模, 则有如下的正合列 $0\to M\to T_0\to T_1\to 0$, 其中 $T_0,T_1\in\mathrm{Add}(T)$.

证 由于 C 是 C-Comod中的余生成子, 则对于某个基数 α, 存在单态射 $\theta:M\to C^{\alpha}$. 由命题 4.5 可知, $\mathrm{Gen}(T)=T^{\perp}$. 由于 $C^{\alpha}\in T^{\perp}$, 故对于某个基数 β, 存在满态射 $\pi:T^{(\beta)}\to C^{\alpha}$. 因此, 由 M 的投射性可知, 存在一个 $f:M\to T^{(\beta)}$, 使得 $\pi f=\theta$ 成立, 进而 f 是单态射. 令 $K=\mathrm{Coker}(f)$, 则有短正合列 $0\to M\xrightarrow{f}T^{(\beta)}\to K\to 0$. 因此, $K\in\mathrm{Gen}(T)$. 由命题 5.1 可知, 有正合列 $0\to L\to T^{(\gamma)}\to K\to 0$, 其中 $L\in\mathrm{Gen}(T)$. 因此, 有如下拉回图:

$$\begin{tikzcd}
 & & 0 & 0 & \\
0 \arrow[r] & M \arrow[r, "f"] & T^{(\beta)} \arrow[r] \arrow[u] & K \arrow[r] \arrow[u] & 0 \\
0 \arrow[r] & M \arrow[r] \arrow[u, equal] & E \arrow[r] \arrow[u] & T^{(\gamma)} \arrow[r] \arrow[u] & 0 \\
 & & L \arrow[r, equal] \arrow[u] & L \arrow[u] & \\
 & & 0 \arrow[u] & 0 \arrow[u] &
\end{tikzcd}$$

进而有正合列

$$0\to M\to E\to T^{(\gamma)}\to 0. \tag{5.2}$$

由于 L 和 $T^{(\beta)}$ 都属于 $T^{\perp}$, 故有 $E\in T^{\perp}=\mathrm{Gen}(T)$. 由命题 5.1 可知, 存在正合列

$$0\to Y\to T^{(\delta)}\to E\to 0, \tag{5.3}$$

其中 $Y\in\mathrm{Gen}(T)=T^{\perp}$. 将 $\mathrm{Hom}_C(-,Y)$ 作用到 (5.2) 上, 则有如下的长正合列:

$$0\to\mathrm{Hom}_C(T^{(\gamma)},Y)\to\mathrm{Hom}_C(E,Y)\to\mathrm{Hom}_C(M,Y)$$

$$\to \mathrm{Ext}_C^1(T^{(\gamma)}, Y) \to \mathrm{Ext}_C^1(E, Y) \to \mathrm{Ext}_C^1(M, Y) \to \cdots.$$

由于 $\mathrm{Ext}_C^1(T^{(\gamma)}, Y) \cong \mathrm{Ext}_C^1(T, Y)^\gamma = 0$ 且 $\mathrm{Ext}_C^1(M, Y) = 0$, 故有 $\mathrm{Ext}_C^1(E, Y) = 0$, 即短正合列 (5.3) 是可裂的. 因此 $E \in \mathrm{Add}(T)$.

作为命题 5.2 的直接结果, 我们有如下的余模范畴中的 Assem-Smalϕ 定理.

定理 5.1　令 C 是半完备余代数且 $\mathcal{F} \subseteq C$-Comod 是余模类. 假设 W 是 C-Comod 中的投射生成子, 则 $\mathcal{F}$ 是余倾斜挠类的充要条件是 $\mathcal{F} = \mathrm{Gen}(T)$, 其中 T 是余忠实的,finendo 和 $\mathcal{F}$-投射余模.

证　必要性. 由于 $\mathcal{F}$ 是一个余倾斜挠类, 则对于一个余倾斜余模 T, 有 $\mathcal{F} = \mathrm{Gen}(T) = T^\perp$. 由于 $C \in T^\perp = \mathrm{Gen}(T)$, 故 T 是余忠实的. 取正合列

$$0 \to X \to Y \to N \to 0, \tag{5.4}$$

其中 $X, Y, N \in \mathcal{F}$. 将 $\mathrm{Hom}_C(T, -)$ 作用到 (5.4) 上, 则有如下正合列:

$$0 \to \mathrm{Hom}_C(T, X) \to \mathrm{Hom}_C(T, Y) \to \mathrm{Hom}_C(T, N) \to \mathrm{Ext}_C(T, X) = 0.$$

由于 $X \in \mathcal{F} = T^\perp$, 故有 $\mathrm{Ext}_C(T, X) = 0$. 故 T 是 $\mathcal{F}$-投射的. 由于 W 是 C-Comod中的投射生成子. 由命题 5.2 可知, 有正合列

$$0 \to W \xrightarrow{\delta} T_0 \to T_1 \to 0, \tag{5.5}$$

其中 $T_0, T_1 \in \mathrm{Add}(T)$. 将 $\mathrm{Hom}_C(-, L)$ 作用到 (5.5) 上, 则有如下正合列:

$$0 \to \mathrm{Hom}_C(T_1, L) \to \mathrm{Hom}_C(T_0, L) \xrightarrow{\delta^*} \mathrm{Hom}_C(W, L) \to \mathrm{Ext}_C(T_1, L).$$

因为对所有的 $L \in \mathrm{Add}(T)$, 有 $\mathrm{Ext}_C(T_1, L) = 0$, 故有 $\delta^* : \mathrm{Hom}_C(T_0, L) \to \mathrm{Hom}_C(W, L)$ 为满态射. 因此, 映射 $\delta : W \to T_0$ 是 W 的一个$\mathrm{Add}(T)$- 预包络. 由引理 3.3 可知, T 是 finendo.

充分性. 假设 $\mathrm{Gen}(T) = \mathcal{F}$, 其中余模 T 是余忠实, finendo 和 $\mathcal{F}$-投射的. 由引理 3.3 可知, 有投射生成子 W 的一个 $\mathcal{F}$-预包络 $\tau : W \to T^{(\gamma)}$. 由于 T 是余忠实的, 故 $\mathcal{F}$ 包含所有的内射余模. 因此, 存在一个内射余模 X, 使得 $g : W \to X$ 是单态射. 由预包络的性质可知, 存在一个 $f : T^{(\gamma)} \to X$, 使得 $f\tau = g$ 成立. 因此, τ 是单态射且有如下的正合列:

$$0 \to W \xrightarrow{\tau} T^{(\gamma)} \to H \to 0. \tag{5.6}$$

若 $M \in \mathcal{F}$, 则任取 $\mathcal{F}$ 中的正合列

$$0 \to M \to F \to Q \to 0, \tag{5.7}$$

其中 F 是自由余模. 将 $\mathrm{Hom}_C(T, -)$ 作用到 (5.7) 上, 则有长正合列

$$0 \to \mathrm{Hom}_C(T, M) \to \mathrm{Hom}_C(T, F) \to \mathrm{Hom}_C(T, Q)$$
$$\to \mathrm{Ext}_C(T, M) \to \mathrm{Ext}_C(T, F) \to \mathrm{Ext}_C(T, Q) \to \cdots.$$

由于 T 是 $\mathcal{F}$-投射的且 $\mathrm{Ext}_C(T, F) = 0$, 故 $M \in T^\perp$. 因此, $\mathrm{Gen}(H) \subseteq \mathcal{F} \subseteq T^\perp$. 现在我们证明 $\mathcal{F} = H^\perp$. 令 M 是一个余模. 将 $\mathrm{Hom}_C(-, M)$ 作用到 (5.6) 上, 则有长正合列

$$0 \to \mathrm{Hom}_C(H, M) \to \mathrm{Hom}_C(T^{(\gamma)}, M) \xrightarrow{\tau^*} \mathrm{Hom}_C(W, M)$$
$$\to \mathrm{Ext}_C(H, M) \to \mathrm{Ext}_C(T^{(\gamma)}, M) \to \mathrm{Ext}_C(W, M) \to \cdots. \tag{5.8}$$

若 $M\in\mathcal{F}$, 则由预包络的性质可知 τ^* 是满态射. 由于 $\mathcal{F}\subseteq T^{\perp}$, 故有 $\mathrm{Ext}_C(T^{(\gamma)},M)=0$ 和 $M\in H^{\perp}$. 反过来, 假设 $M\in H^{\perp}$, 则可得 τ^* 是满态射. 由于 W 是投射生成子, 则有 $\sum\{\mathrm{Im}\phi\mid\phi\in\mathrm{Hom}_C(W,M)\}=M$. 故有如下交换图:

$$\begin{tikzcd} W \arrow[r, hook, "\tau"] \arrow[d, "\phi"'] & T^{(\gamma)} \arrow[dl, "\psi_\phi"] \\ M & \end{tikzcd}$$

因此 $\mathrm{Im}\phi\subseteq\mathrm{Im}\psi_\phi$, 其中 $\psi_\phi:T^{(\gamma)}\to M$, 进而有 $\sum\limits_{\phi}\mathrm{Im}\phi=M\subseteq\sum\limits_{\phi}\mathrm{Im}\psi_\phi$. 由于 $\sum\limits_{\phi}\{\mathrm{Im}\psi_\phi\mid\psi_\phi\in\mathrm{Hom}_C(T^{(\gamma)},M)\}=M\subseteq\sum\{\mathrm{Im}\psi\mid\psi\in\mathrm{Hom}_C(T^{(\gamma)},M)\}$, 故 $M\in\mathcal{F}$. 于是, 有 $\mathcal{F}=H^{\perp}$, 且

$$\mathrm{Gen}(T\oplus H)=\mathrm{Gen}(T)=\mathcal{F}=H^{\perp}=(T\oplus H)^{\perp}.$$

因此, $T\oplus H$ 是一个由余倾斜余模生成的余倾斜挠类 $\mathcal{F}$.

定理 5.2 令 C 是一个半完备余代数, W 是 C-Comod 中的投射生成子且 $\mathcal{F}\subseteq C$-Comod是一个预挠类, 则如下叙述等价:

(1) $\mathcal{F}$ 是一个余倾斜挠类;

(2) 存在 W 的一个特殊的 $\mathcal{F}$-预包络;

(3) 存在 W 的一个 $\mathcal{F}$-预包络 $\theta:W\to B$, 使得 B 是余忠实的、$\mathcal{F}$-投射的, 且 θ 是单态射.

证 (1) $\Rightarrow$ (2) 若 $\mathcal{F}$ 是一个余倾斜挠类, 则对于余倾斜余模 T, 有 $\mathcal{F}=\mathrm{Gen}(T)=T^{\perp}$. 对于余倾斜余模 T, 有如下的正合列:

$$0\to W\xrightarrow{\psi}T_1\to T_2\to 0,\tag{5.9}$$

其中 $T_i\in\mathrm{Add}\,T(i=1,2)$. 将 $\mathrm{Hom}_C(-,N)$ 作用到 (5.9) 上, 则有如下长正合列:

$$\begin{aligned}&0\to\mathrm{Hom}_C(T_2,N)\to\mathrm{Hom}_C(T_1,N)\xrightarrow{\psi^*}\mathrm{Hom}_C(W,N)\\&\to\mathrm{Ext}_C(T_2,N)\to\mathrm{Ext}_C(T_1,N)\to\mathrm{Ext}_C(W,N)\to\cdots.\end{aligned}$$

因为对所有的 $N\in\mathcal{F}$, 有 $\mathrm{Ext}_C(T_2,N)=0$, 则 $\psi^*:\mathrm{Hom}_C(T_1,N)\to\mathrm{Hom}_C(W,N)$ 是满态射. 另外, $\mathrm{Ext}_C(T_2,\mathcal{F})=0$, 即 $T_2\in{}^{\perp}\mathcal{F}$. 因此, 映射 $\psi:W\to T_1$ 是 W 的一个特殊的 $\mathcal{F}$-预包络.

(2) $\Rightarrow$ (3) 取一个特殊的 $\mathcal{F}$-预包络 $\theta:W\to B$, 则 θ 是单态射. 对于一个内射余生成子 C, 存在一个基数 I, 使得 $g:W^{(I)}\to C$ 是满态射. 由于 θ 是单态射, 故诱导的余模映射 $\theta^{(I)}:W^{(I)}\to B^{(I)}$ 是单态射. 因此, 由 C 的内射性可知, 存在一个 $h:B^{(I)}\to C$, 使得 $h\theta^{(I)}=g$ 成立, 进而 h 是满态射. 所以, B 是余忠实的. 由于 θ 是单态射, 故存在正合列

$$0\to W\xrightarrow{\theta}B\to L\to 0,\tag{5.10}$$

其中 $B\in\mathcal{F}$, 且 W,L 都属于 ${}^{\perp}\mathcal{F}$. 将 $\mathrm{Hom}_C(-,\mathcal{F})$ 作用到 (5.10) 上, 则有如下长正合列:

$$\begin{aligned}&0\to\mathrm{Hom}_C(L,\mathcal{F})\to\mathrm{Hom}_C(B,\mathcal{F})\to\mathrm{Hom}_C(W,\mathcal{F})\\&\to\mathrm{Ext}_C(L,\mathcal{F})\to\mathrm{Ext}_C(B,\mathcal{F})\to\mathrm{Ext}_C(W,\mathcal{F}).\end{aligned}$$

由于 $\mathrm{Ext}_C(L,\mathcal{F})=0$ 和 $\mathrm{Ext}_C(W,\mathcal{F})=0$, 故有 $\mathrm{Ext}_C(B,\mathcal{F})=0$. 因此, $B\in{}^{\perp}\mathcal{F}$. 取正合列

$$0\to K\to Y\xrightarrow{\psi}Z\to 0,\tag{5.11}$$

其中 ψ 是满态射且 $K = \mathrm{Ker}\psi \in \mathcal{F}$. 将 $\mathrm{Hom}_C(B, -)$ 作用到 (5.11) 上, 则有如下长正合列:

$$0 \to \mathrm{Hom}_C(B, K) \to \mathrm{Hom}_C(B, Y) \to \mathrm{Hom}_C(B, Z) \to \mathrm{Ext}_C(B, K) = 0.$$

由于 $B \in {}^{\perp}\mathcal{F}$, 故有 $\mathrm{Ext}_C(B, K) = 0$. 因此, $\mathrm{Hom}_C(B, -)$ 作用在任意一个核属于 $\mathcal{F}$ 的满态射上是正合的. 若 K, Y, Z 都属于 $\mathcal{F}$, 则 B 是 $\mathcal{F}$-投射的.

(3) $\Rightarrow$ (1) 假设 $\theta : W \to B$ 满足 (3) 中的条件. 由推论 3.2 中的 (2) $\Rightarrow$ (3) 可得 $\mathcal{F} = \mathrm{Gen}(B)$, 且 B 是 finendo. 由定理 5.1 可知, $\mathcal{F}$ 是余倾斜挠类.

致谢 衷心感谢各位审稿人提出的宝贵意见和建议, 这些意见和建议帮助我们提高了论文的质量.

参　考　文　献

[1] Happel D. Triangulated categories in the representation theory of finite-dimensional algebras [M]//London Mathematical Society Lecture Note Series, 119. Cambridge: Cambridge University Press, 1988.

[2] Assem I. Torsion theories induced by tilting modules [J]. *Canad J Math,* 1984, 369(5):899–913.

[3] Smalϕ S O. Torsion theories and tilting modules [J]. *Bull London Math Soc*, 1984, 16(5):518–522.

[4] Colpi R, Trlifaj J. Tilting modules and tilting torsion theories [J]. *J Algebra*, 1995, 178(2):614–634.

[5] Angeleri Hügel L, Tonolo A, Trlifaj J. Tilting preenvelopes and cotilting precovers [J]. *Algebr Represent Theory*, 2001, 4(2):155–170.

[6] Chin W, Kleiner M, Quinn D. Local theory of almost split sequences for comodules [J]. *Ann Univ Ferrara Sez VII* (N.S.), 2005, 51(1):183–196.

[7] Chin W. A brief introduction to coalgebra representation theory [J]. *Lecture Notes in Pure and Appl Math,* 2004, 237:109–131.

[8] Chin W, Kleiner M, Quinn, D. Almost split sequences for comodules [J]. *J Algebra*, 2002, 249(1):1–19.

[9] Simson D. Tame-wild dichotomy of Birkhoff type problems for nilpotent linear operators [J]. *J Algebra*, 2015, 424(2):254–293.

[10] Simson D. Coalgebras of tame comodule type, comodule categories, and a tame-wild dichotomy problem [C]//Representations of algebras and related topics, EMS Ser Congr Rep, Eur Math Soc, Zürich, 2011, 561–660.

[11] Simson D. The Euler characteristic and Euler defect for comodules over Euler coalgebras [J]. *J K-Theory*, 2011, 7(1):91–113.

[12] Simson D. Path coalgebras of profinite bound quivers, cotensor coalgebras of bound species and locally nilpotent representations [J]. *Colloq Math,* 2007, 109(2):307–343.

[13] Simson D. Coalgebras, comodules, pseudocompact algebras and tame comodule type [J]. *Colloq Math,* 2001, 90(1):101–150.

[14] Simson D. Incidence coalgebras of intervally finite posets, their integral quadratic forms and comodule categories [J]. *Colloq Math,* 2009, 115(2):259–295.

[15] Wang M Y. Tilting comodules over semi-perfect coalgebras [J]. *Algebra Colloq,* 1999, 6(4):461–472.

[16] Wang M Y. Some co-hom functors and classical tilting comodules [J]. *Southeast Asian Bull Math*, 1998, 22(4):455–468.

[17] Fu X R, Yao H L. The Auslander-Reiten formula for comodule categories with applications to partial tilting comodules and tilting global dimension [J]. *Colloq Math*, 2018, 153(2): 219–240.

[18] Zhang S J, Yao H L. Some remarks on cotilting comodules [J]. *Front Math China*, 2014, 9(3):699–714.

[19] Lin B I-peng. Semiperfect coalgebras [J]. *J Algebra*, 1977, 49(2):357–373.

[20] Asensio M J, López Ramos J A, Torrecillas B. Gorenstein coalgebras [J]. *Acta Mathematica Hungarica*, 1999, 85(1):187–198.

Cotilting Preenvelope and Cotilting Torsion Classes in Comodule Categories

LI Yuan[1] YAO Hailou[1]

[1]Faculty of Science, Beijing University of Technology, Beijing 100124, China.
E-mail: yuanlimath@foxmail.com; yaohl@bjut.edu.cn

Abstract As it is well-known, Assem-Smalϕ theorem plays an important role in tilting theory. The purpose of this paper is to establish a version of Assem-Smalϕ theorem in comodule categories and characterize the cotilting torsion classes in comodule categories by means of the preenvelope theory.

Keywords Finendo, Preenvelope, Cotilting comodule, Cotilting torsion class

2000 MR Subject Classification 16T15, 18G05

The English translation of this paper will be published in
Chinese Journal of Contemporary Mathematics, Vol. 41 No. 4, 2020
by ALLERTON PRESS, INC., USA