数 学 年 刊 A 辑
2020, 41(4):371–382
DOI: 10.16205/j.cnki.cama.2020.0026

有限级超越整函数的 (微 -) 差分多项式的零点分布 *

陈 海 莹 [1] 郑 秀 敏 [2]

提要 作者研究了有限级超越整函数的差分多项式和微 - 差分多项式的零点分布，在一定条件下得到了这些多项式的零点收敛指数的精确估计．所得结果可视为 Hayman 关于 Picard 例外值的经典结果的 (微 -) 差分模拟．

关键词 亚纯函数，差分多项式，微 - 差分多项式，零点
MR (2010) 主题分类 30D35, 39A70, 39A10
中图法分类 O174.52
文献标志码 A
文章编号 1000-8314(2020)04-0371-12

1 引言与结果

在本文中，我们采用的记号为 Nevanlinna 值分布理论的标准记号 [1−4], 且我们讨论的整函数和亚纯函数均是复平面 $\mathbf{C}$ 上的函数．设 $f(z)$ 为非常数超越亚纯函数，我们将 $f(z)$ 的 (增长) 级记为 $\sigma(f)$, 将 $f(z)$ 的零点收敛指数记为 $\lambda(f)$, 分别定义如下 [3]:

$$\sigma(f)=\varlimsup_{r\to\infty}\frac{\log^+T(r,f)}{\log r},\quad \lambda(f)=\varlimsup_{r\to\infty}\frac{\log^+N(r,\frac{1}{f})}{\log r},$$

其中 $T(r,f)$ 为 $f(z)$ 的特征函数， $N(r,\frac{1}{f})$ 为 $f(z)$ 的零点计数函数．此外，沿用文 [5] 中关于小函数的定义，我们称亚纯函数 $\alpha(z)$ 是有限级亚纯函数 $f(z)$ 的小函数，若对任意的 $\varepsilon>0$, 存在 $\lambda<\sigma(f)$, 使得 $T(r,\alpha)=O(r^{\lambda+\varepsilon})+S(r,f)$, 其中 $S(r,f)=o(T(r,f))(r\to\infty)$, 至多可能除去一个有限对数测度的例外集． (注意， λ 每次出现可不尽相同.) 若无其他特殊说明，我们约定 $k,m,n,s\in\mathbf{N}_+,\ l\in\mathbf{N}$.

复微分多项式的增长性和值分布是亚纯函数理论中的重要论题．学者们在研究复微分方程亚纯解与其导数的关系的同时，还研究了亚纯函数的微分多项式的增长性和值分布，得到了颇为丰富而有趣的结果．研究复微分方程亚纯解和复微分多项式的解析性质的主要工具是 Nevanlinna 理论．而近二十年来，这一工具在复差分和复差分方程领域有了新应用，并使得复差分和复差分方程的研究成为了复分析领域新的研究热点．其中，亚纯函数的差分多项式的解析性质是重要研究内容之一，它与亚纯函数的微分多项式的相关研究一起丰富了亚纯函数理论中的多项式的内容．以下是一些代表性结果.

本文 2019 年 5 月 30 日收到， 2020 年 8 月 15 日收到修改稿.
[1]江西师范大学数学与统计学院，南昌 330022. E-mail: chenhaiying182@126.com
[2]通信作者．江西师范大学数学与统计学院，南昌 330022. E-mail: zhengxiumin2008@sina.com
*本文受到国家自然科学基金 (No.11761035) 和江西省自然科学基金 (No.20171BAB201002) 的资助.

继 Hayman[6] 研究了 $f(z)^n f'(z)$ 和 $f'(z)-af(z)^n$ 这两种特殊形式的微分多项式之后, Laine 和 Yang[7] 首次研究了差分多项式 $f(z)^n f(z+c)(n\geqslant 2)$ 的 a- 值点分布 (其中 $a,c\in \mathbf{C}\backslash\{0\}$), 得到了如下结果.

定理 A [7] 设 $f(z)$ 为有限级超越整函数, c 为非零复常数, 则当 $n\geqslant 2$ 时, $f(z)^n f(z+c)$ 可以取到任意非零复数值 a 无限多次.

另一方面, 郑秀敏和陈宗煊 [8] 研究了差分多项式 $f(z+c)-af(z)^n(n\geqslant 3)$ 的 b- 值点分布 (其中 $a,b,c\in \mathbf{C}\backslash\{0\}$). 这两方面结果可以视为上述 Hayman 关于 Picard 例外值的经典结果的差分模拟. 此后, 学者们研究了更一般形式的差分多项式的值分布 [5,9−14]. 特别地, 李楠和杨连忠在文 [9 − 10] 中分别研究了差分多项式

$$G_1(z)=P(f)f(z+c)-\alpha(z) \quad \text{和} \quad G_2(z)=f(z)^n\sum_{i=1}^{k}b_i f(z+c_i)-\alpha(z),$$

其中 $P(f)=a_nf^n+a_{n-1}f^{n-1}+\cdots+a_1f+a_0(a_n\neq 0)$ 为 f 的常系数 n 次多项式, $b_i(i=1,2,\cdots,k)$ 为复常数, 在一定条件下得到了 $G_1(z)$ 和 $G_2(z)$ 的零点个数的估计.

随后, 郑秀敏和吴顺周 [11] 在上述结果的基础上考虑了更一般形式的差分多项式

$$H(z)=P(f)\sum_{i=1}^{k}b_i f(z+c_i),$$

其中 $P(f)=d_n(f-\beta_1)^{n_1}(f-\beta_2)^{n_2}\cdots(f-\beta_m)^{n_m}(d_n\neq 0)$ 为 f 的常系数 n 次多项式, $b_i(i=1,2,\cdots,k)$ 为复常数, 在一定条件下得到了 $H(z)$ 和 $H(z)-\alpha(z)$ 的零点个数的估计.

最近, Laine [5] 在张杰和张建军 [15] 的基础上进一步研究了差分多项式

$$F(z)=f(z)^n(g(f))^s-b_0(z),$$

并得到了如下结果.

定理 B [5] 设 $f(z)$ 为有限级超越亚纯函数, 亚纯函数 $b_0(z)(\not\equiv 0),b_i(z)(i=1,2,\cdots,k)$ 是 $f(z)$ 的小函数, $c_i(i=1,2,\cdots,k)$ 是互不相同的复常数且满足 $g(f)=\sum\limits_{i=1}^{k}b_i(z)f(z+c_i)\not\equiv 0$. 若 $n\geqslant 2,s\geqslant 1$, 则 $F(z)=f(z)^n(g(f))^s-b_0(z)$ 有无限多个零点, 且满足 $\lambda(F)=\sigma(f)$.

受上述结果的启发, 我们继续研究一般形式的差分多项式和微 - 差分多项式的值分布. 一方面, 结合文 [11] 中的定理 1.1 和本文定理 B, 我们研究差分多项式

$$Q(z)=P(f)(g(f))^s-b_0(z),$$

得到定理 1.1.

定理 1.1 设 $f(z)$ 为有限级超越整函数, 亚纯函数 $b_0(z)(\not\equiv 0),b_i(z)(i=1,2,\cdots,k)$ 是 $f(z)$ 的小函数, $c_i(i=1,2,\cdots,k)$ 是互不相同的复常数且满足

$$g(f)=\sum_{i=1}^{k}b_i(z)f(z+c_i)\not\equiv 0.$$

又设

$$P(f)=d_n\prod_{j=1}^{m}(f-\beta_j)^{n_j}$$

是 f 的常系数 n 次多项式，其中 d_n 为非零复常数， $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_m$ 为互不相同的复常数， $n_1,n_2,\cdots,n_m$ 为正整数且满足 $\sum\limits_{j=1}^{m}n_j=n$. 若 $n>m$, 则

$$Q(z)=P(f)(g(f))^s-b_0(z)$$

有无限多个零点，且满足 $\lambda(Q)=\sigma(f)$.

另一方面，结合复微分和复差分，我们研究微 - 差分多项式

$$G(z)=f(z)^n(L(z,f))^s-b_0(z),$$

得到定理 1.2.

定理 1.2 设 $f(z)$ 为有限级超越整函数, 亚纯函数 $b_0(z)(\not\equiv 0),b_{ij}(z)$ $(i=1,2,\cdots,k;j=0,1,\cdots,l)$ 是 $f(z)$ 的小函数， $c_i(i=1,2,\cdots,k)$ 是互不相同的复常数且满足

$$L(z,f)=\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=0}^{l}b_{ij}(z)f^{(j)}(z+c_i)\not\equiv 0.$$

若 $n>s$, 则

$$G(z)=f(z)^n(L(z,f))^s-b_0(z)$$

有无限多个零点，且满足 $\lambda(G)=\sigma(f)$.

注 1.1 从定理 1.1 和定理 1.2 的证明过程中不难看出，若 $f(z)$ 为超越亚纯函数且满足 $N(r,f)=S(r,f)$, 则定理 1.1 和定理 1.2 的结论依然成立.

2 定理证明所需的引理

引理 2.1 [1] 设 $f(z)$ 为亚纯函数，则

(1) 当 $f(z)$ 为有限级时，有

$$m\Big(r,\frac{f^{(k)}}{f}\Big)=O(\log r),\quad r\to\infty;$$

(2) 当 $f(z)$ 为无限级时，有

$$m\Big(r,\frac{f^{(k)}}{f}\Big)=O(\log(rT(r,f))),\quad r\to\infty,$$

至多除去一个有限对数测度的例外集.

注 2.1 由文 [16, p. 66] 可知，对亚纯函数 $f(z)$ 和非零复常数 c, 当 $r\to\infty$ 时，有

$$(1+o(1))T(r-|c|,f)\leqslant T(r,f(z+c))\leqslant(1+o(1))T(r+|c|,f).$$

由此立得 $\sigma(f(z+c))=\sigma(f)$. 再结合引理 2.1 可知，当亚纯函数 $f(z)$ 具有有限级时，有

$$m\Big(r,\frac{f^{(k)}(z+c)}{f(z+c)}\Big)=O(\log r),\quad r\to\infty.$$

引理 2.2 [17] 设 c_1, c_2 是两个不同的复常数， $f(z)$ 为有限级亚纯函数，则对任意的 $\varepsilon > 0$, 有

$$m\Big(r, \frac{f(z+c_1)}{f(z+c_2)}\Big) = O(r^{\sigma(f)-1+\varepsilon}).$$

引理 2.3 [18] 设 $F(r)$ 与 $G(r)$ 为 $(0,+\infty)$ 中的非减函数, 且满足 (i)$F(r) \leqslant G(r), r \notin E$, 其中 E 是线测度有限的集合，或满足 (ii) 当 $r \notin E \cup (0,1]$ 时， $F(r) \leqslant G(r)$, 其中 $E \subset (1,+\infty)$ 是对数测度有限的集合，则对任给的常数 $\alpha > 1$, 存在 $r_0 > 0$, 使得当 $r > r_0$ 时，有 $F(r) \leqslant G(\alpha r)$.

以下引理 2.4 是差分 Clunie 引理 (见 [19, 定理 2.3]) 的一个变式.

引理 2.4 [5,19] 设有限级超越亚纯函数 $f(z)$ 是差分方程

$$U(z,f)P(z,f) = Q(z,f)$$

的解, 其中 $U(z,f), P(z,f), Q(z,f)$ 是 $f(z)$ 及其平移算子的差分多项式, 且系数均为 $f(z)$ 的小函数. 若 $\deg U(z,f) = n, \deg Q(z,f) \leqslant n$, 且 $U(z,f)$ 中具有 $f(z)$ 及其平移算子的最高次数的项只有一项，则对任意的 $\varepsilon > 0$, 有

$$m(r, P(z,f)) = O(r^{\sigma(f)-1-\varepsilon}) + O(r^{\lambda+\varepsilon}) + S(r,f).$$

注 2.2 杨重骏和 Laine 在文 [20] 中提到，文 [19] 中的定理 2.3 对微 - 差分多项式同样成立. 类似地，引理 2.4 对微 - 差分多项式也同样成立.

引理 2.5 设 $f(z)$ 为有限级超越整函数，亚纯函数 $b_i(z)(i=1,2,\cdots,k)$ 是 $f(z)$ 的小函数， $c_i(i=1,2,\cdots,k)$ 是互不相同的复常数且满足 $g(f) = \sum\limits_{i=1}^{k} b_i(z)f(z+c_i) \not\equiv 0$, $P(f)$ 如定理 1.1 中所述，则 $Q_1(z) = P(f)(g(f))^s$ 超越且满足 $\sigma(Q_1) = \sigma(f)$.

证 由注 2.1 易知 $\sigma(Q_1) \leqslant \sigma(f)$. 若 $\sigma(Q_1) < \sigma(f)$, 则对任意的 $\varepsilon(>0)$, 当 $r \to \infty$ 时，有 $T(r,Q_1) = O(r^{\sigma(Q_1)+\varepsilon})$, 即 $Q_1(z) = P(f)(g(f))^s$ 是 $f(z)$ 的小函数. 又已知亚纯函数 $b_i(z)(i=1,2,\cdots,k)$ 是 $f(z)$ 的小函数，故存在 $\lambda(<\sigma(f))$, 使得

$$T(r,b_i) = O(r^{\lambda+\varepsilon}) + S(r,f), \quad i=1,2,\cdots,k. \tag{2.1}$$

从而，由 (2.1) 式和引理 2.4 可知

$$\begin{aligned} T(r,(g(f))^s) &= m(r,(g(f))^s) + O(r^{\lambda+\varepsilon}) + S(r,f) \\ &= O(r^{\sigma(f)-1+\varepsilon}) + O(r^{\sigma(Q_1)+\varepsilon}) + O(r^{\lambda+\varepsilon}) + S(r,f). \end{aligned} \tag{2.2}$$

因此，由 (2.2) 式和 Valiron-Mokhon′ko 定理可知，对任意的 $\varepsilon(>0)$, 有

$$\begin{aligned} nT(r,f) + O(1) = T(r,P(f)) &\leqslant T(r,Q_1) + T\Big(r, \frac{1}{(g(f))^s}\Big) \\ &= T(r,Q_1) + T(r,(g(f))^s) + O(1) \\ &\leqslant O(r^{\sigma(f)-1+\varepsilon}) + O(r^{\sigma(Q_1)+\varepsilon}) + O(r^{\lambda+\varepsilon}) + S(r,f). \end{aligned}$$

再由引理 2.3 和 ε 的任意性可得 $\sigma(f) \leqslant \max\{\sigma(f)-1, \sigma(Q_1), \lambda\} < \sigma(f)$, 矛盾. 所以, $\sigma(Q_1) = \sigma(P(f)(g(f))^s) = \sigma(f)$ 且 $Q_1(z) = P(f)(g(f))^s$ 超越.

引理 2.5 证毕.

引理 2.6 设 $f(z)$ 为有限级超越整函数, 亚纯函数 $b_{ij}(z)(i=1,2,\cdots,k;j=0,1,\cdots,l)$ 是 $f(z)$ 的小函数, $c_i(i=1,2,\cdots,k)$ 是互不相同的复常数且满足 $L(z,f)\not\equiv 0$(其中 $L(z,f)$ 如定理 1.2 中所述). 若 $n>s$, 则 $G_1(z)=f(z)^n(L(z,f))^s$ 满足 $\sigma(G_1)=\sigma(f)$.

证 由注 2.1 易知 $\sigma(G_1)\leqslant\sigma(f)$. 若 $\sigma(G_1)<\sigma(f)$, 则对任意的 $\varepsilon(>0)$, 当 $r\to\infty$ 时, 有 $T(r,G_1)=O(r^{\sigma(G_1)+\varepsilon})$, 即 $G_1(z)=f(z)^n(L(z,f))^s$ 是 $f(z)$ 的小函数. 由 $L(z,f)$ 的定义可知

$$\begin{aligned}T(r,(L(z,f))^s)&=m(r,(L(z,f))^s)+N(r,(L(z,f))^s)\\&\leqslant s\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{l}m\Big(r,\frac{f^{(j)}(z+c_i)}{f(z+c_i)}\Big)+s\sum_{i=1}^{k}m\Big(r,\frac{f(z+c_i)}{f(z)}\Big)\\&\quad+sT(r,f)+O\Big(\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=0}^{l}T(r,b_{ij})\Big).\end{aligned}\tag{2.3}$$

又已知亚纯函数 $b_{ij}(z)(i=1,2,\cdots,k;\ j=0,1,\cdots,l)$ 是 $f(z)$ 的小函数, 故存在 $\lambda(<\sigma(f))$, 使得

$$T(r,b_{ij})=O(r^{\lambda+\varepsilon})+S(r,f),\quad i=1,2,\cdots,k;\ j=0,1,\cdots,l.\tag{2.4}$$

由引理 2.1 及注 2.1 可知

$$m\Big(r,\frac{f^{(j)}(z+c_i)}{f(z+c_i)}\Big)=S(r,f),\quad i=1,2,\cdots,k;\ j=1,2,\cdots,l,\tag{2.5}$$

并由引理 2.2 可知, 对任意的 $\varepsilon(>0)$, 有

$$m\Big(r,\frac{f(z+c_i)}{f(z)}\Big)=O(r^{\sigma(f)-1+\varepsilon}),\quad i=1,2,\cdots,k.\tag{2.6}$$

故由 (2.3)–(2.6) 式可知, 对任意的 $\varepsilon(>0)$, 有

$$T(r,(L(z,f))^s)\leqslant sT(r,f)+O(r^{\sigma(f)-1+\varepsilon})+O(r^{\lambda+\varepsilon})+S(r,f).\tag{2.7}$$

从而, 由 (2.7) 式可知, 对任意的 $\varepsilon(>0)$, 有

$$\begin{aligned}nT(r,f)=T(r,f^n)&\leqslant T(r,G_1)+T\Big(r,\frac{1}{(L(z,f))^s}\Big)\\&\leqslant sT(r,f)+O(r^{\sigma(f)-1+\varepsilon})+O(r^{\sigma(G_1)+\varepsilon})+O(r^{\lambda+\varepsilon})+S(r,f).\end{aligned}$$

又因 $n>s$, 故 $\sigma(f)\leqslant\max\{\sigma(f)-1,\sigma(G_1),\lambda\}<\sigma(f)$, 矛盾. 因此, $\sigma(G_1)=\sigma(f^n(L(z,f))^s)=\sigma(f)$.

引理 2.6 证毕.

3 定理 1.1 和 1.2 的证明

定理 1.1 的证明 同理于 (2.1) 式, 易知 $b_0(z)$ 满足

$$T(r,b_0)=O(r^{\lambda+\varepsilon})+S(r,f).\tag{3.1}$$

由 (3.1) 式和引理 2.5 可知, $Q(z)=Q_1(z)-b_0(z)$ 超越且满足 $\sigma(Q)=\sigma(Q_1)=\sigma(f)$. 若 $\lambda(Q)<\sigma(f)$, 则对任意的 $\varepsilon(>0)$, 当 $r\to\infty$ 时, 有 $N(r,\frac{1}{Q})=O(r^{\lambda(Q)+\varepsilon})$. 且由 (2.1) 式和 (3.1) 式可知, 对任意的 $\varepsilon(>0)$, 有

$$N(r,Q)\leqslant O\Big(\sum_{i=0}^{k}T(r,b_i)\Big)=O(r^{\lambda+\varepsilon})+S(r,f).$$

于是, 由 Hadamard 因式分解定理可知, $Q(z)$ 可以记为

$$Q(z)=P(f)(g(f))^s-b_0(z)=p_1(z)\mathrm{e}^{h_1(z)},$$

即有

$$P(f)(g(f))^s=p_1(z)\mathrm{e}^{h_1(z)}+b_0(z), \tag{3.2}$$

其中 $p_1(z)(\not\equiv 0)$ 为亚纯函数且满足当 $r\to\infty$ 时, 有

$$N\Big(r,\frac{1}{p_1}\Big)=O(r^{\lambda(Q)+\varepsilon}),\quad N(r,p_1)=O(r^{\lambda+\varepsilon})+S(r,f)$$

和

$$T(r,p_1)=O(r^{\lambda(Q)+\varepsilon})+O(r^{\lambda+\varepsilon})+S(r,f),$$

$h_1(z)$ 为多项式且满足 $\deg h_1\leqslant\sigma(f)$. 若 $\deg h_1<\sigma(f)$, 则由 (3.1) 式和 (3.2) 式可知, 对任意的 $\varepsilon(>0)$, 有

$$\begin{aligned}T(r,P(f)(g(f))^s)&\leqslant T(r,Q)+T(r,b_0)\\&\leqslant T(r,p_1)+T(r,\mathrm{e}^{h_1})+O(r^{\lambda+\varepsilon})+S(r,f)\\&=O(r^{\lambda(Q)+\varepsilon})+O(r^{\deg h_1+\varepsilon})+O(r^{\lambda+\varepsilon})+S(r,f).\end{aligned}$$

从而, 由引理 2.5 可知, $\sigma(f)=\sigma(P(f)(g(f))^s)\leqslant\max\{\lambda(Q),\deg h_1,\lambda\}<\sigma(f)$, 矛盾. 因此 $\deg h_1=\sigma(f)=\sigma(Q)$.

接下来, 微分 (3.2) 式, 并消去 $\mathrm{e}^{h_1(z)}$, 得到

$$\begin{aligned}&\frac{(P(f))'}{P(f)}+s\frac{(g(f))'}{g(f)}-\frac{p_1'}{p_1}-h_1'\\&=\Big(b_0'-b_0\frac{p_1'}{p_1}-b_0h_1'\Big)\frac{1}{P(f)(g(f))^s}\\&=D_1(z)\frac{1}{P(f)(g(f))^s},\end{aligned}\tag{3.3}$$

其中 $D_1(z)=b_0'-b_0\frac{p_1'}{p_1}-b_0h_1'=b_0\big(\frac{b_0'}{b_0}-\frac{p_1'}{p_1}-h_1'\big)$. 我们断言 $D_1(z)\not\equiv 0$. 如若不然, 即 $\frac{b_0'}{b_0}-\frac{p_1'}{p_1}-h_1'\equiv 0$, 则积分得到 $b_0(z)=C_1p_1(z)\mathrm{e}^{h_1(z)}$, 其中 C_1 为非零复常数. 由 (3.2) 式立知 $C_1\neq -1$. 于是,

$$Q(z)+b_0(z)=P(f)(g(f))^s=\frac{C_1+1}{C_1}b_0(z).$$

再由 (3.1) 式可知, 对任意的 $\varepsilon(>0)$, 有

$$T(r,P(f)(g(f))^s)=T\Big(r,\frac{C_1+1}{C_1}b_0\Big)=O(r^{\lambda+\varepsilon})+S(r,f),$$

故 $\sigma(P(f)(g(f))^s)<\sigma(f)$, 与引理 2.5 矛盾. 从而, $D_1(z)\not\equiv 0$.

将 (3.3) 式改写为

$$\begin{aligned}&p_1(P(f))'(g(f))^s+sp_1P(f)(g(f))'(g(f))^{s-1}-p_1'P(f)(g(f))^s-p_1h_1'P(f)(g(f))^s\\&=b_0'p_1-b_0p_1'-b_0p_1h_1'\\&=D_1(z)p_1(z),\end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned}P(f)&=d_n(f-\beta_1)^{n_1}(f-\beta_2)^{n_2}\cdots(f-\beta_m)^{n_m},\\(P(f))'&=P(f)\Big(\sum_{j=1}^{m}\frac{n_j}{f-\beta_j}\Big)f',\\g(f)&=\sum_{i=1}^{k}b_i(z)f(z+c_i),\\(g(f))'&=\sum_{i=1}^{k}b_i'(z)f(z+c_i)+\sum_{i=1}^{k}b_i(z)f'(z+c_i).\end{aligned}$$

因为 $n>m$, 所以 $P(f)$ 至少有一个重级零点．不失一般性，设 $n_1>1$, 则有

$$d_n(f-\beta_1)^{n_1-1}A(z,f)=b_0'p_1-b_0p_1'-b_0p_1h_1'=D_1(z)p_1(z),\tag{3.4}$$

其中

$$\begin{aligned}A(z,f)=\;&p_1(f-\beta_1)(f-\beta_2)^{n_2}\cdots(f-\beta_m)^{n_m}\Big(\sum_{j=1}^{m}\frac{n_j}{f-\beta_j}\Big)f'(g(f))^s\\&+(f-\beta_1)(f-\beta_2)^{n_2}\cdots(f-\beta_m)^{n_m}(sp_1(g(f))'(g(f))^{s-1}\\&-p_1'(g(f))^s-p_1h_1'(g(f))^s)\end{aligned}$$

是 $f(z)$ 的微 - 差分多项式．由 $D_1(z)p_1(z)\not\equiv 0$ 和 (3.4) 式可知 $A(z,f)\not\equiv 0$. 从而，由引理 2.4 和注 2.2 可知，对任意的 $\varepsilon(>0)$, 有

$$m(r,A(z,f))=O(r^{\sigma(f)-1+\varepsilon})+O(r^{\lambda(Q)+\varepsilon})+O(r^{\lambda+\varepsilon})+S(r,f).$$

另一方面，由 (2.1) 式可得，对上述的 $\varepsilon(>0)$, 有

$$N(r,A(z,f))\leqslant O\Big(\sum_{i=1}^{k}T(r,b_i)\Big)\leqslant O(r^{\lambda+\varepsilon})+S(r,f).$$

所以，再由引理 2.3 可知，(3.4) 式左边的级为

$$\sigma(d_n(f-\beta_1)^{n_1-1}A(z,f))=\sigma(f-\beta_1)=\sigma(f).$$

同时，(3.4) 式右边的级为

$$\sigma(b_0'p_1-b_0p_1'-b_0p_1h_1')\leqslant\max\{\lambda(Q),\lambda\}<\sigma(f),$$

矛盾．因此 $\lambda(Q)=\sigma(f)$, 即 $Q(z)=P(f)(g(f))^s-b_0(z)$ 有无限多个零点.

定理 1.1 证毕.

定理 1.2 的证明　易知 $b_0(z)$ 满足 (3.1) 式，则由 (3.1) 式和引理 2.6 可知，$G(z)=G_1(z)-b_0(z)$ 满足 $\sigma(G)=\sigma(G_1)=\sigma(f)$, 且 $G(z)=f(z)^n(L(z,f))^s-b_0(z)\not\equiv 0$. 若

$\lambda(G) < \sigma(f)$, 则对任意的 $\varepsilon(>0)$, 当 $r \to \infty$ 时，有 $N(r, \frac{1}{G}) = O(r^{\lambda(G)+\varepsilon})$. 且由 (2.4) 式和 (3.1) 式可知，对任意的 $\varepsilon(>0)$, 有

$$N(r,G) \leqslant O\Big(\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=0}^{l} T(r,b_{ij}) + T(r,b_0)\Big) \leqslant O(r^{\lambda+\varepsilon}) + S(r,f).$$

于是，由 Hadamard 因式分解定理可知， $G(z)$ 可以记为

$$G(z) = f(z)^n(L(z,f))^s - b_0(z) = p_2(z)\mathrm{e}^{h_2(z)},$$

即有

$$f(z)^n(L(z,f))^s = p_2(z)\mathrm{e}^{h_2(z)} + b_0(z), \tag{3.5}$$

其中 $p_2(z)(\not\equiv 0)$ 为亚纯函数且满足当 $r \to \infty$ 时，有

$$N\Big(r, \frac{1}{p_2}\Big) = O(r^{\lambda(G)+\varepsilon}), \quad N(r,p_2) = O(r^{\lambda+\varepsilon}) + S(r,f)$$

和

$$T(r,p_2) = O(r^{\lambda(G)+\varepsilon}) + O(r^{\lambda+\varepsilon}) + S(r,f),$$

$h_2(z)$ 为多项式且满足 $\deg h_2 \leqslant \sigma(f)$. 若 $\deg h_2 < \sigma(f)$, 则由 (2.4) 式， (3.1) 式和 (3.5) 式可知，对任意的 $\varepsilon(>0)$, 有

$$\begin{aligned} T(r, f(z)^n(L(z,f))^s) &\leqslant T(r,G) + T(r,b_0) \\ &\leqslant T(r,p_2) + T(r,\mathrm{e}^{h_2}) + O(r^{\lambda+\varepsilon}) + S(r,f) \\ &= O(r^{\lambda(G)+\varepsilon}) + O(r^{\deg h_2+\varepsilon}) + O(r^{\lambda+\varepsilon}) + S(r,f). \end{aligned}$$

从而，由引理 2.6 可知， $\sigma(f) = \sigma(f^n(L(z,f))^s) \leqslant \max\{\lambda(G), \deg h_2, \lambda\} < \sigma(f)$, 矛盾. 因此， $\deg h_2 = \sigma(f) = \sigma(G)$.

接下来，我们微分 (3.5) 式，并消去 $\mathrm{e}^{h_2(z)}$, 得到

$$\begin{aligned} &n\frac{f'}{f} + s\frac{(L(z,f))'}{L(z,f)} - \frac{p_2'}{p_2} - h_2' \\ &= \Big(b_0' - b_0\frac{p_2'}{p_2} - b_0h_2'\Big)\frac{1}{f(z)^n(L(z,f))^s} \\ &= D_2(z)\frac{1}{f(z)^n(L(z,f))^s}, \end{aligned} \tag{3.6}$$

其中 $D_2(z) = b_0' - b_0\frac{p_2'}{p_2} - b_0h_2' = b_0(\frac{b_0'}{b_0} - \frac{p_2'}{p_2} - h_2')$. 我们断言 $D_2(z) \not\equiv 0$. 如若不然，即 $\frac{b_0'}{b_0} - \frac{p_2'}{p_2} - h_2' \equiv 0$, 则积分得到 $b_0(z) = C_2p_2(z)\mathrm{e}^{h_2(z)}$, 其中 C_2 为非零复常数. 由 (3.5) 式立知 $C_2 \neq -1$. 于是,

$$G(z) + b_0(z) = f(z)^n(L(z,f))^s = \frac{C_2+1}{C_2}b_0(z).$$

再由 (3.1) 式可知，对任意的 $\varepsilon(>0)$, 有

$$T(r, f(z)^n(L(z,f))^s) = T\Big(r, \frac{C_2+1}{C_2}b_0\Big) = O(r^{\lambda+\varepsilon}) + S(r,f),$$

故 $\sigma(f^n(L(z,f))^s) < \sigma(f)$, 与引理 2.6 矛盾. 从而， $D_2(z) \not\equiv 0$.

我们将 (3.6) 式改写为

$$\frac{1}{f(z)^n(L(z,f))^s}=\frac{1}{D_2(z)}\Big(n\frac{f'}{f}+s\frac{(L(z,f))'}{L(z,f)}-\frac{p_2'}{p_2}-h_2'\Big).$$

分析该式两边极点分布情况，得到

$$\begin{aligned}&nn\Big(r,\frac{1}{f}\Big)+sn\Big(r,\frac{1}{L(z,f)}\Big)\\ \leqslant{}& n\Big(r,\frac{1}{D_2}\Big)+\overline{n}\Big(r,\frac{1}{f}\Big)+\overline{n}\Big(r,\frac{1}{L(z,f)}\Big)+\overline{n}(r,L(z,f))\\ &+\overline{n}\Big(r,\frac{1}{p_2}\Big)+\overline{n}(r,p_2)\\ \leqslant{}& n\Big(r,\frac{1}{D_2}\Big)+n\Big(r,\frac{1}{f}\Big)+n\Big(r,\frac{1}{L(z,f)}\Big)\\ &+\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=0}^{l}n(r,b_{ij})+n\Big(r,\frac{1}{p_2}\Big)+n(r,p_2),\end{aligned}$$

即

$$\begin{aligned}&(n-1)N\Big(r,\frac{1}{f}\Big)+(s-1)N\Big(r,\frac{1}{L(z,f)}\Big)\\ \leqslant{}& N\Big(r,\frac{1}{D_2}\Big)+\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=0}^{l}N(r,b_{ij})+N\Big(r,\frac{1}{p_2}\Big)+N(r,p_2).\end{aligned}\tag{3.7}$$

因 $n>s\geqslant 1$, 故由 (2.4) 式，(3.1) 式和 (3.7) 式可知，对任意的 $\varepsilon(>0)$, 有

$$\begin{aligned}N\Big(r,\frac{1}{f}\Big)&\leqslant(n-1)N\Big(r,\frac{1}{f}\Big)\leqslant N\Big(r,\frac{1}{D_2}\Big)+\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=0}^{l}N(r,b_{ij})+N\Big(r,\frac{1}{p_2}\Big)+N(r,p_2)\\ &\leqslant O(r^{\lambda(G)+\varepsilon})+O(r^{\lambda+\varepsilon})+S(r,f).\end{aligned}\tag{3.8}$$

下面，我们分两种情形进行讨论.

情形 1　当 $s\geqslant 2$ 时. 同理，由 (3.7) 式可知，对任意的 $\varepsilon(>0)$, 有

$$N\Big(r,\frac{1}{L(z,f)}\Big)\leqslant O(r^{\lambda(G)+\varepsilon})+O(r^{\lambda+\varepsilon})+S(r,f).\tag{3.9}$$

因此，由 (3.8) 式和 (3.9) 式可知

$$N\Big(r,\frac{1}{f^n(L(z,f))^s}\Big)\leqslant O(r^{\lambda(G)+\varepsilon})+O(r^{\lambda+\varepsilon})+S(r,f).\tag{3.10}$$

从而，由 (3.10) 式和亚纯函数第二基本定理可知，对任意的 $\varepsilon(>0)$, 有

$$\begin{aligned}&T(r,f^n(L(z,f))^s)\\ \leqslant{}& N(r,f^n(L(z,f))^s)+N\Big(r,\frac{1}{f^n(L(z,f))^s}\Big)\\ &+N\Big(r,\frac{1}{G}\Big)+S(r,f^n(L(z,f))^s)\\ \leqslant{}& O(r^{\lambda(G)+\varepsilon})+O(r^{\lambda+\varepsilon})+S(r,f),\end{aligned}$$

故 $\sigma(f^n(L(z,f))^s)\leqslant\max\{\lambda(G),\lambda\}<\sigma(f)$, 与引理 2.6 矛盾. 因此 $\lambda(G)=\sigma(f)$.

情形 2 当 $s=1$ 时. 因 $f(z)$ 为有限级超越整函数, 故由 (3.8) 式可将 $f(z)$ 记为

$$f(z)=\varphi(z)\mathrm{e}^{q(z)},$$

其中 $\varphi(z)(\not\equiv 0)$ 为整函数且满足

$$N\Big(r,\frac{1}{\varphi}\Big)=O(r^{\lambda(G)+\varepsilon})+O(r^{\lambda+\varepsilon})+S(r,f)$$

和

$$T(r,\varphi)=O(r^{\lambda(G)+\varepsilon})+O(r^{\lambda+\varepsilon})+S(r,f),$$

$q(z)$ 为多项式且满足 $\deg q=\sigma(f)$. 从而

$$\begin{aligned}L(z,f)&=\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=0}^{l}b_{ij}(z)(\varphi(z+c_i)\mathrm{e}^{q(z+c_i)})^{(j)}\\&=\Big(\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=0}^{l}b_{ij}(z)L_{ij}(z,f)\mathrm{e}^{q(z+c_i)-q(z)}\Big)\mathrm{e}^{q(z)},\end{aligned}$$

其中 $L_{ij}(z,f)(i=1,2,\cdots,k;\ j=0,1,\cdots,l)$ 均是与 $\varphi(z+c_i),q(z+c_i)(i=1,2,\cdots,k)$ 有关的微分多项式, $q(z+c_i)-q(z)(i=1,2,\cdots,k)$ 均为 $\sigma(f)-1$ 次多项式. 再由 (2.4) 式可知, 对任意的 $\varepsilon(>0)$, 有

$$\begin{aligned}N\Big(r,\frac{1}{L(z,f)}\Big)&=N\Big(r,\frac{1}{(\sum\limits_{i=1}^{k}\sum\limits_{j=0}^{l}b_{ij}(z)L_{ij}(z,f)\mathrm{e}^{q(z+c_i)-q(z)})\mathrm{e}^{q(z)}}\Big)\\&=N\Big(r,\frac{1}{\sum\limits_{i=1}^{k}\sum\limits_{j=0}^{l}b_{ij}(z)L_{ij}(z,f)\mathrm{e}^{q(z+c_i)-q(z)}}\Big)\\&\leqslant O\Big(\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=0}^{l}T(r,b_{ij})\Big)+O\Big(\sum_{i=1}^{k}T(r,\varphi(z+c_i))\Big)+O(r^{\sigma(f)-1+\varepsilon})+S(r,f)\\&=O(r^{\sigma(f)-1+\varepsilon})+O(r^{\lambda(G)+\varepsilon})+O(r^{\lambda+\varepsilon})+S(r,f).\end{aligned}\tag{3.11}$$

从而, 由 (3.8) 式, (3.11) 式和亚纯函数第二基本定理可知, 对任意的 $\varepsilon(>0)$, 有

$$\begin{aligned}T(r,f^nL(z,f))&\leqslant N(r,f^nL(z,f))+N\Big(r,\frac{1}{f^nL(z,f)}\Big)+N\Big(r,\frac{1}{G}\Big)+S(r,f^nL(z,f))\\&\leqslant O(r^{\sigma(f)-1+\varepsilon})+O(r^{\lambda(G)+\varepsilon})+O(r^{\lambda+\varepsilon})+S(r,f).\end{aligned}$$

故 $\sigma(f^nL(z,f))\leqslant\max\{\sigma(f)-1,\lambda(G),\lambda\}<\sigma(f)$, 与引理 2.6 矛盾. 因此 $\lambda(G)=\sigma(f)$.

定理 1.2 证毕.

致谢 感谢审稿人及编者对本文的帮助.

参 考 文 献

[1] Hayman W K. Meromorphic functions [M]. Oxford: Clarendon Press, 1964.

[2] Laine I. Nevanlinna theory and complex differential equations [M]. Berlin: Walter de Gruyter, 1993.

[3] 仪洪勋，杨重骏．亚纯函数唯一性理论 [M]. 北京：科学出版社， 1995.

[4] 杨乐．值分布论及其新研究 [M]. 北京：科学出版社， 1982.

[5] Laine I. Zero distribution of some shift polynomials [J]. *J Math Anal Appl*, 2019, 469(2):808–826.

[6] Hayman W K. Picard value of meromorphic functions and their derivatives [J]. *Ann Math*, 1959, 70(1):9–42.

[7] Laine I, Yang C C. Value distribution of difference polynomials [J]. *Proc Japan Acad Ser A Math Sci*, 2007, 83(8):148–151.

[8] Zheng X M, Chen Z X. On the value distribution of some difference polynomials [J]. *J Math Anal Appl*, 2013, 397(2):814–821.

[9] Li N, Yang L Z. Value distribution of difference and q-difference polynomials [J]. *Adv Difference Equ*, 2013, 2013(98):1–9.

[10] Li N, Yang L Z. Value distribution of certain type of difference polynomials [J]. *Abstr Appl Anal*, 2014, 2014:1–6, Article ID: 278786.

[11] 郑秀敏，吴顺周．有限级超越整函数的差分多项式的值分布 [J]. 数学年刊 A 辑, 2016, 37(2):115–126.

[12] 郑秀敏，陈宗煊．某些差分多项式的亏量 [J]. 数学学报, 2011, 54(6):983–992.

[13] 张然然, 陈宗煊. 亚纯函数差分多项式的值分布 [J]. 中国科学, 2012, 42(11):1115–1130.

[14] Liu K, Cao T B, Liu X L. The properties of differential-difference polynomials [J]. *Ukrain Math J*, 2017, 69(1):85–100.

[15] Zhang J, Zhang J J. Meromorphic solutions to complex difference and q-difference equations of Malmquist type [J]. *Electron J Differential Equations*, 2014, 2014(16):1–11.

[16] Goldberg A A, Ostrovskii I V. The distribution of values of meromorphic functions [M]. Moscow: Nauka, 1970 (in Russian).

[17] Chiang Y M, Feng S J. On the Nevanlinna characteristic of $f(z+\eta)$ and difference equations in the complex plane [J]. *Ramanujan J*, 2008, 16(1):105–129.

[18] 高仕安，陈宗煊，陈特为．线性微分方程的复振荡理论 [M]. 武汉：华中理工大学出版社， 1997.

[19] Laine I, Yang C C, Clunie theorems for difference and q-difference polynomials [J]. *J London Math Soc*, 2007, 76(2):556–566.

[20] Yang C C, Laine I. On analogies between nonlinear difference and differential equations [J]. *Proc Japan Acad Ser A Math Sci*, 2010, 86(1):10–14.

Zeros Distribution of (Differential-)Difference Polynomials of Transcendental Entire Functions of Finite Order

CHEN Haiying [1] ZHENG Xiumin [2]

[1]School of Mathematics and Statistics, Jiangxi Normal University, Nanchang 330022, China. E-mail: chenhaiying182@126.com

[2]Corresponding author. School of Mathematics and Statistics, Jiangxi Normal University, Nanchang 330022, China. E-mail: zhengxiumin2008@sina.com

Abstract In this paper, the authors investigate the zeros distribution of some difference polynomials and differential-difference polynomials of transcendental entire functions of finite order, and obtain some exact estimates on the exponent of convergence of zeros of these polynomials under certain conditions. The results obtained can be regarded as (differential-) difference counterparts of Hayman's classical results on Picard's exceptional values.

Keywords Meromorphic function, Difference polynomial, Differential-Difference polynomial, Zero

2010 MR Subject Classification 30D35, 39A70, 39A10

The English translation of this paper will be published in

Chinese Journal of Contemporary Mathematics, Vol. 41 No. 4, 2020

by ALLERTON PRESS, INC., USA