数 学 年 刊 A 辑
2020, 41(4):383–398
DOI: 10.16205/j.cnki.cama.2020.0027

算子矩阵值域的闭性及其应用*

董 炯[1] 曹小红[2]

提要 令 $\mathcal{H}$ 和 $\mathcal{K}$ 均为无限复可分的 Hilbert 空间. 定义 $M_X = \begin{pmatrix} A & C \\ X & B \end{pmatrix}$ 为作用在 $\mathcal{H} \oplus \mathcal{K}$ 上的 2×2 算子矩阵, 其中 X 为从 $\mathcal{H}$ 到 $\mathcal{K}$ 上未知的有界线性算子. 在本文中, 基于 $R(C)$ 的闭性对某个 (或任意的)$X \in \mathcal{B}(\mathcal{H}, \mathcal{K})$, 使得 $R(M_X)$ 为闭集的充要条件做了等价刻画. 另外, 研究了算子矩阵 M_X 的半 Fredholm 性与广义 Weyl 性并给出了一些相应的结论.

关键词 值域, 半 Fredholm 算子, 算子矩阵, 广义 Weyl 算子
MR (2000) 主题分类 47A05, 47A53, 47A10
中图法分类 O177.1
文献标志码 A
文章编号 1000-8314(2020)04-0383-16

1 引言及预备知识

在本文中, 定义 $\mathcal{H}$ 和 $\mathcal{K}$ 均为无限复可分的 Hilbert 空间, 令 $\mathcal{B}(\mathcal{H}, \mathcal{K})$ 为所有从 $\mathcal{H}$ 到 $\mathcal{K}$ 的有界线性算子组成的集合, 当 $\mathcal{K} = \mathcal{H}$ 时, $\mathcal{B}(\mathcal{H}, \mathcal{H})$ 可以简化为 $\mathcal{B}(\mathcal{H})$. 令 $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, 则 $\sigma(T)$, $N(T)$, $R(T)$ 和 T^* 分别表示为算子 T 的谱, 零空间, 值域和伴随算子. 将 $\rho(T) = \mathbb{C} \backslash \sigma(T)$, $n(T) = \dim N(T)$ 和 $d(T) = \operatorname{codim} R(T)$ 分别表示为算子 T 的预解集, 零度和亏数, 其中 $\mathbb{C}$ 表示为复数域. 如果 $n(T) < \infty$ ($d(T) < \infty$) 且 $R(T)$ 是闭集, 那么算子 T 称为上半 (下半)Fredholm 算子; 特别地, 若 $n(T) = 0(d(T) = 0)$ 且 $R(T)$ 为闭集, 则 T 被称为左 (右) 可逆算子, 即存在算子 T 的左逆算子 T_l^{-1}(右逆算子 T_r^{-1}), 使得 $T_l^{-1}T = \mathrm{I}(TT_r^{-1} = \mathrm{I})$. 若算子 T 为上半 (下半)Fredholm 算子, 则可以定义算子 T 的指标为 $\operatorname{ind}(T) = n(T) - d(T)$. 若算子 T 既是上半 Fredholm 算子又是下半 Fredholm 算子, 则称算子 T 为 Fredholm 算子; 另外, 如果算子 T 为 Fredholm 算子且 $\operatorname{ind}(T) = 0$, 则称 T 为 Weyl 算子. 众所周知, $R(T)$ 为闭集当且仅当 T 为 Moore-Penrose 算子 [1]. 因此, 算子 T 的 Moore-Penrose 谱可表示为

$$\sigma_M(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : R(T - \lambda\mathrm{I}) \text{ 为闭集}\}.$$

令 M 为 $\mathcal{H}$ 的线性子空间, 则 $\overline{M}$ 和 $M^{\perp}$ 分别表示为 M 的闭包和正交补空间. 设 $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H}, \mathcal{K})$, 则 $T|_M$ 表示为 T 限制在 M 上的算子. 若 $M = \overline{M}$, 则记 P_M 为限制在 M 上的正交投影.

本文 2019 年 5 月 14 日收到, 2020 年 7 月 5 日收到修改稿.

[1]长治学院数学系, 山西 长治 046011; 陕西师范大学数学与信息科学学院, 西安 710119.
E-mail: dongjiong1314@163.com

[2]陕西师范大学数学与信息科学学院, 西安 710119. E-mail: xiaohongcao@snnu.edu.cn

*本文受到国家自然科学基金 (No. 11471200, No. 11701351) 和陕西省自然科学基础研究 (No. 2018JQ1082) 的资助.

本文研究算子矩阵值域的闭性及其相关问题, 而研究算子矩阵的灵感来自于下面的事实: 令 $\mathcal{H}_1$ 为 $\mathcal{H}$ 的闭子空间, 则算子 $T\in\mathcal{B}(\mathcal{H})$ 可以表示为下面的算子矩阵形式:

$$T=\begin{pmatrix} A & C\\ D & B\end{pmatrix}:\begin{pmatrix}\mathcal{H}_1\\ \mathcal{H}_1^{\perp}\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}\mathcal{H}_1\\ \mathcal{H}_1^{\perp}\end{pmatrix}. \tag{1.1}$$

在上述等式中通过研究算子矩阵中元素算子的性质来刻画算子 T 的相应性质, 这样在一定条件下可以大幅度降低算子 T 的某些性质研究的难度. 另外, 算子矩阵的研究与基础数学以及应用数学的许多学科紧密相关, 如矩阵分析、最优化理论与量子物理学, 等等, 因此, 算子矩阵的研究是算子理论中的一个热点问题. 近年来, 学者们对算子矩阵的研究获得了许多的成果 [2-9]. 本文始终以 $M_X=\begin{pmatrix} A & C\\ X & B\end{pmatrix}$ 表示作用在 $\mathcal{H}\oplus\mathcal{K}$ 上的 2×2 算子矩阵. 基于 $R(C)$ 的闭性, 我们对 $R(M_X)$ 的闭性进行了探索并且在后续内容中给出了一些相关的应用.

2 $R(M_X)$ 的闭性与半 Fredholm 性

令 $A\in\mathcal{B}(\mathcal{H})$ 且 $C\in\mathcal{B}(\mathcal{K},\mathcal{H})$, 则 $N((A\quad C))$ 表示为行算子 $(A\quad C)$ 的零空间且

$$\begin{aligned}N((A\quad C))=&\begin{pmatrix}N(A)\\ 0\end{pmatrix}\oplus\begin{pmatrix}0\\ N(C)\end{pmatrix}\\ &\oplus\left\{\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}: x\in N(A)^{\perp}, y\in N(C)^{\perp}, Ax+Cy=0\right\}.\end{aligned} \tag{2.1}$$

显然, 通过上式可以看出

$$P_{\mathcal{H}}N((A\quad C))=\{x\in\mathcal{H}: Ax\in R(C)\}. \tag{2.2}$$

另外, 若 $R(C)$ 为闭集, 则 $P_{\mathcal{H}}N((A\quad C))=N(P_{N(C^*)}\quad A)$ 且 $P_{\mathcal{K}}N((B^*\quad C^*))=N(P_{N(C)}\quad B^*)$, 并且 $\mathcal{K}$ 与 $\mathcal{H}$ 可以分解为 $\mathcal{K}=N(C)\oplus R(C^*)$ 和 $\mathcal{H}=R(C)\oplus N(C^*)$, 此时, M_X 可以表示为下列形式:

$$M_X=\begin{pmatrix}A_1 & C_1 & 0\\ A_2 & 0 & 0\\ X & B_1 & B_2\end{pmatrix}:\begin{pmatrix}\mathcal{H}\\ R(C^*)\\ N(C)\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}R(C)\\ N(C^*)\\ \mathcal{K}\end{pmatrix}. \tag{2.3}$$

在本文中, 如无特殊说明, 始终使得 $A_1=P_{R(C)}A$, $A_2=P_{N(C^*)}A$, $B_1=B|_{R(C^*)}$, $B_2=B|_{N(C)}$ 且 $C_1=P_{R(C)}C|_{R(C^*)}$. 显然, C_1 为从 $R(C^*)$ 到 $R(C)$ 的可逆算子. 下面的引理验证了 $R((A\quad C))$ 和 $R\left(\begin{pmatrix}C\\ B\end{pmatrix}\right)$ 的闭性分别与 $R(A_2)$ 和 $R(B_2)$ 的闭性是等价的.

引理 2.1 给定算子 $A\in\mathcal{B}(\mathcal{H})$, $B\in\mathcal{B}(\mathcal{K})$ 且 $C\in\mathcal{B}(\mathcal{K},\mathcal{H})$, 其中 $R(C)$ 为闭集, 则下列叙述成立:

(1) $R((A\quad C))$ 为闭集当且仅当 $R(P_{N(C^*)}\quad A)$ 为闭集;

(2) $R\left(\begin{pmatrix} C \\ B \end{pmatrix}\right)$ 为闭集当且仅当 $R(B|_{N(C)})$ 为闭集.

证　由于 $R(C)$ 为闭集, 因此 $\mathcal{K}$ 和 $\mathcal{H}$ 可分解为 $\mathcal{K} = N(C) \oplus R(C^*)$ 且 $\mathcal{H} = R(C) \oplus N(C^*)$.

(1) 行算子 $(A \quad C)$ 可以表示为下列形式:

$$(A \quad C) = \begin{pmatrix} A_1 & C_1 & 0 \\ A_2 & 0 & 0 \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} \mathcal{H} \\ R(C^*) \\ N(C) \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} R(C) \\ N(C^*) \end{pmatrix}, \tag{2.4}$$

则存在可逆算子

$$V = \begin{pmatrix} \mathrm{I} & 0 & 0 \\ -C_1^{-1}A_1 & \mathrm{I} & 0 \\ 0 & 0 & \mathrm{I} \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} \mathcal{H} \\ R(C^*) \\ N(C) \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \mathcal{H} \\ R(C^*) \\ N(C) \end{pmatrix}, \tag{2.5}$$

使得

$$(A \quad C)V = \begin{pmatrix} 0 & C_1 & 0 \\ A_2 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{2.6}$$

因此 $R((A \quad C))$ 为闭集当且仅当 $R(A_2)$ 为闭集.

(2) 列算子 $\begin{pmatrix} C \\ B \end{pmatrix}$ 可以表示为下列矩阵形式:

$$\begin{pmatrix} C \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1 & 0 \\ 0 & 0 \\ B_1 & B_2 \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} R(C^*) \\ N(C) \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} R(C) \\ N(C^*) \\ \mathcal{K} \end{pmatrix}. \tag{2.7}$$

因此, 存在可逆算子

$$U = \begin{pmatrix} \mathrm{I} & 0 & 0 \\ 0 & \mathrm{I} & 0 \\ -B_1C_1^{-1} & 0 & \mathrm{I} \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} R(C) \\ N(C^*) \\ \mathcal{K} \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} R(C) \\ N(C^*) \\ \mathcal{K} \end{pmatrix}, \tag{2.8}$$

使得

$$U\begin{pmatrix} C \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & B_2 \end{pmatrix}, \tag{2.9}$$

从而, $R\left(\begin{pmatrix} C \\ B \end{pmatrix}\right)$ 为闭集当且仅当 $R(B_2)$ 为闭集.

从上述引理中可以看出 $n\left(\begin{pmatrix} C \\ B \end{pmatrix}\right) = n(B_2)$ 且 $d((A, C)) = n(A_2^*)$. 另外, 关于算子值域的闭性还需注意下面的事实.

引理 2.2[10]　给定算子 $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, $B \in \mathcal{B}(\mathcal{K})$ 且 $C \in \mathcal{B}(\mathcal{K}, \mathcal{H})$, 其中 $\overline{R(A)} = \mathcal{H}$. 若

$R(M_0)$ $(X=0)$ 为闭集, 则 $R(B)$ 为闭集.

引理 2.3[11] 令 $T\in\mathcal{B}(\mathcal{H},\mathcal{K})$, 则

(1) 若 $F\in\mathcal{B}(\mathcal{H},\mathcal{K})$ 为有限秩算子, 则 $R(T+F)$ 为闭集当且仅当 $R(T)$ 为闭集.

(2) 令 $N\in\mathcal{B}(\mathcal{K})$ 且 $M\in\mathcal{B}(\mathcal{K},\mathcal{H})$, 其中 N 为可逆算子且 $n(M)<\infty$. 若 $R(MNT)$ 为闭集, 则 $R(T)$ 为闭集.

(3) 若 $N\in\mathcal{B}(\mathcal{H})$ 和 $M\in\mathcal{B}(\mathcal{K})$ 均为可逆算子, 则 $R(MTN)$ 为闭集当且仅当 $R(T)$ 为闭集.

下面研究算子矩阵 M_X 的值域的闭性及其相关的结果.

定理 2.1 给定算子 $A\in\mathcal{B}(\mathcal{H})$, $B\in\mathcal{B}(\mathcal{K})$ 且 $C\in\mathcal{B}(\mathcal{K},\mathcal{H})$, 其中 $R(C)$ 为闭集, 则存在算子 $X\in\mathcal{B}(\mathcal{H},\mathcal{K})$, 使得 $R(M_X)$ 为闭集当且仅当下列之一成立:

(1) $R\left(\begin{pmatrix}A & C\end{pmatrix}\right)$ 和 $R\left(\begin{pmatrix}C\\ B\end{pmatrix}\right)$ 均为闭集;

(2) $R\left(\begin{pmatrix}A & C\end{pmatrix}\right)$ 为闭集, $R\left(\begin{pmatrix}C\\ B\end{pmatrix}\right)$ 不闭并且 $\dim P_{\mathcal{H}}N\left(\begin{pmatrix}A & C\end{pmatrix}\right)=\infty$;

(3) $R\left(\begin{pmatrix}A & C\end{pmatrix}\right)$ 不闭, $R\left(\begin{pmatrix}C\\ B\end{pmatrix}\right)$ 为闭集并且 $\dim P_{\mathcal{K}}N\left(\begin{pmatrix}B^* & C^*\end{pmatrix}\right)=\infty$;

(4) $R\left(\begin{pmatrix}A & C\end{pmatrix}\right)$ 和 $R\left(\begin{pmatrix}C\\ B\end{pmatrix}\right)$ 均不闭且

$$\dim P_{\mathcal{H}}N\left(\begin{pmatrix}A & C\end{pmatrix}\right)=\dim P_{\mathcal{K}}N\left(\begin{pmatrix}B^* & C^*\end{pmatrix}\right)=\infty.$$

证 由于 $R(C)$ 为闭集, 因此 M_X 可以表示为等式 (2.3) 中的矩阵形式, 故存在可逆算子 U 和 V(看等式 (2.8) 和 (2.5)), 使得

$$UM_XV=\begin{pmatrix}0 & C_1 & 0\\ A_2 & 0 & 0\\ X-B_1C_1^{-1}A_1 & 0 & B_2\end{pmatrix}.\tag{2.10}$$

令

$$M=\begin{pmatrix}B_2 & Y\\ 0 & A_2\end{pmatrix}:\begin{pmatrix}N(C)\\ \mathcal{H}\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}\mathcal{K}\\ N(C^*)\end{pmatrix},\tag{2.11}$$

其中 $Y=X-B_1C_1^{-1}A_1$. 显然,$R(M_X)$ 为闭集当且仅当 $R(M)$ 为闭集. 令 $N(C)=\overline{R(B_2^*)}\oplus N(B_2)$, $\mathcal{H}=\overline{R(A_2^*)}\oplus N(A_2)$, $\mathcal{K}=\overline{R(B_2)}\oplus N(B_2^*)$ 且 $N(C^*)=\overline{R(A_2)}\oplus N(A_2^*)$, 则 M 有如下矩阵形式:

$$M=\begin{pmatrix}B_2 & Y\\ 0 & A_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}B_{21} & 0 & Y_1 & Y_2\\ 0 & 0 & Y_3 & Y_4\\ 0 & 0 & A_{21} & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}:\begin{pmatrix}\overline{R(B_2^*)}\\ N(B_2)\\ \overline{R(A_2^*)}\\ N(A_2)\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}\overline{R(B_2)}\\ N(B_2^*)\\ \overline{R(A_2)}\\ N(A_2^*)\end{pmatrix}.\tag{2.12}$$

另外, 由 $R(C)$ 为闭集可得 $n(A_2)=\dim P_{\mathcal{H}}N((A\quad C))$ 且 $n(B_2^*)=\dim P_{\mathcal{K}}N((B^*\quad C^*))$.

必要性. 不失一般性, 令 $n(C)=n(C^*)=\infty$, 通过下面四种情况来证明必要性成立.

情形 1 设 $R(A_2)$ 和 $R(B_2)$ 均为闭集, 则由引理 2.1 可得 $R((A\quad C))$ 和 $R\left(\begin{pmatrix} C \\ B \end{pmatrix}\right)$ 均为闭集.

情形 2 设 $R(A_2)$ 为闭集且 $R(B_2)$ 不为闭集, 则 A_{21} 为可逆算子, 从而存在可逆算子

$$U_1=\begin{pmatrix} \mathrm{I} & 0 & -Y_1A_{21}^{-1} & 0 \\ 0 & \mathrm{I} & -Y_3A_{21}^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & \mathrm{I} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathrm{I} \end{pmatrix}:\begin{pmatrix} \overline{R(B_2)} \\ N(B_2^*) \\ \overline{R(A_2)} \\ N(A_2^*) \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} \overline{R(B_2)} \\ N(B_2^*) \\ \overline{R(A_2)} \\ N(A_2^*) \end{pmatrix}, \tag{2.13}$$

使得

$$U_1M=\begin{pmatrix} B_{21} & 0 & 0 & Y_2 \\ 0 & 0 & 0 & Y_4 \\ 0 & 0 & A_{21} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{2.14}$$

因此, $R(M)$ 为闭集当且仅当 $R\left(\begin{pmatrix} B_{21} & Y_2 \\ 0 & Y_4 \end{pmatrix}\right)$ 为闭集. 另外, $n(A_2)=\infty$ 显然成立, 否则 Y_2 与 Y_4 均为有限秩算子, 从而由引理 2.3 的结论 (1) 与 $R(B_{21})$ 不闭可知 $R\left(\begin{pmatrix} B_{21} & Y_2 \\ 0 & Y_4 \end{pmatrix}\right)$ 不闭, 矛盾. 因此, $\dim\, P_{\mathcal{H}}N((A\quad C))=n(A_2)=\infty$. 再者, 根据引理 2.1 可得 $R((A\quad C))$ 为闭集且 $R\left(\begin{pmatrix} C \\ B \end{pmatrix}\right)$ 不闭.

情形 3 设 $R(A_2)$ 不闭且 $R(B_2)$ 为闭集, 则由引理 2.1 可知 $R((A\quad C))$ 不闭且 $R\left(\begin{pmatrix} C \\ B \end{pmatrix}\right)$ 为闭集. 另外, 由算子 B_{21} 是可逆的可知, 存在可逆算子

$$V_1=\begin{pmatrix} \mathrm{I} & 0 & -B_{21}^{-1}Y_1 & -B_{21}^{-1}Y_2 \\ 0 & \mathrm{I} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathrm{I} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathrm{I} \end{pmatrix}:\begin{pmatrix} \overline{R(B_2^*)} \\ N(B_2) \\ \overline{R(A_2^*)} \\ N(A_2) \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} \overline{R(B_2^*)} \\ N(B_2) \\ \overline{R(A_2^*)} \\ N(A_2) \end{pmatrix}, \tag{2.15}$$

使得

$$MV_1=\begin{pmatrix} B_{21} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Y_3 & Y_4 \\ 0 & 0 & A_{21} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{2.16}$$

利用与情形 2 类似的证明方法可得 $\dim\, P_{\mathcal{K}}N((B^*\quad C^*))=n(B_2^*)=\infty$.

情形 4 设 $R(A_2)$ 和 $R(B_2)$ 均不闭, 那么由引理 2.1 可知 $R((A\quad C))$ 和 $R\left(\begin{pmatrix} C \\ B \end{pmatrix}\right)$ 均

不闭. 另外, 可以断言 $\dim P_{\mathcal{H}}N((A\quad C))=\dim P_{\mathcal{K}}N((B^*\quad C^*))=\infty$, 若不然 $\min\{n(A_2),$ $n(B_2^*)\}<\infty$. 由等式 (2.12) 可看出 $R(M)$ 为闭集当且仅当 $R\left(\begin{pmatrix}B_{21}&Y_2&Y_1\\0&Y_4&Y_3\\0&0&A_{21}\end{pmatrix}\right)$ 为闭集, 因此根据引理 2.2 可得 $R\left(\begin{pmatrix}Y_4&Y_3\\0&A_{21}\end{pmatrix}\right)$ 为闭集. 若 $n(B_2^*)<\infty$, 则 Y_3 和 Y_4 均为有限秩算子, 从而由引理 2.3 可得 $R(A_2)$ 为闭集, 矛盾. 若 $n(A_2)<\infty$, 则由引理 2.3 的结论 (2) 可得 $R\left(\begin{pmatrix}B_{21}&0&Y_1\\0&0&Y_3\\0&0&A_{21}\end{pmatrix}\right)$ 为闭集, 再次利用引理 2.2 可得 $R\left(\begin{pmatrix}Y_3\\A_{21}\end{pmatrix}\right)$ 为闭集. 由于 $N(A_{21})=\{0\}$, 因此 $N\left(\begin{pmatrix}Y_3\\A_{21}\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$, 故 $\begin{pmatrix}Y_3\\A_{21}\end{pmatrix}$ 为左可逆算子, 从而存在可逆算子

$$U_2=\begin{pmatrix}\mathrm{I}&-Y_1\begin{pmatrix}Y_3\\A_{21}\end{pmatrix}_l^{-1}\\0&\mathrm{I}\end{pmatrix}:\begin{pmatrix}\overline{R(B_2)}\\N(B_2^*)\oplus\overline{R(A_2)}\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}\overline{R(B_2)}\\N(B_2)\oplus\overline{R(A_2^*)}\end{pmatrix},\tag{2.17}$$

使得 $U_2\begin{pmatrix}B_{21}&0&Y_1\\0&0&Y_3\\0&0&A_{21}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}B_{21}&0&0\\0&0&Y_3\\0&0&A_{21}\end{pmatrix}$. 又因 $R(B_{21})$ 不为闭集, 故由引理 2.3 可得 $R\left(\begin{pmatrix}B_{21}&0&Y_1\\0&0&Y_3\\0&0&A_{21}\end{pmatrix}\right)$ 不为闭集, 矛盾. 综上有

$$\dim P_{\mathcal{H}}N((A\quad C))=\dim P_{\mathcal{K}}N((B^*\quad C^*))=\infty.$$

充分性. 假设 $R((A\quad C))$ 和 $R\left(\begin{pmatrix}C\\B\end{pmatrix}\right)$ 均为闭集, 则由引理 2.1 可知 $R(A_2)$ 和 $R(B_2)$ 均为闭集. 令 $X=B_1C_1^{-1}A_1$, 则 $R(M_X)$ 为闭集.

假设条件 (2) 成立, 则 $R(B_2)$ 不闭, 从而 $\dim\overline{R(B_2)}=\infty$. 令 J_1 为从 $N(A_2)$ 到 $\overline{R(B_2)}$ 上的酉算子并且令 $Y=\begin{pmatrix}0&J_1\\0&0\end{pmatrix}:\begin{pmatrix}R(A_2^*)\\N(A_2)\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}\overline{R(B_2)}\\N(B_2^*)\end{pmatrix}$. 显然, $R\left(\begin{pmatrix}B_2&Y\\0&A_2\end{pmatrix}\right)$ 为闭集. 令 $X=Y+B_1C_1^{-1}A_1$, 则 $R(M_X)$ 为闭集.

假设条件 (3) 成立, 则 $R(A_2)$ 不闭, 从而 $\dim\overline{R(A_2)}=\infty$. 令 J_2 为从 $\overline{R(A_2^*)}$ 到 $N(B_2^*)$ 的酉算子并且令 $Y=\begin{pmatrix}0&0\\J_2&0\end{pmatrix}:\begin{pmatrix}\overline{R(A_2^*)}\\N(A_2)\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}R(B_2)\\N(B_2^*)\end{pmatrix}$. 显然 $R\left(\begin{pmatrix}B_2&Y\\0&A_2\end{pmatrix}\right)$ 为闭集. 令 $X=Y+B_1C_1^{-1}A_1$, 则 $R(M_X)$ 为闭集.

假设条件 (4) 成立, 则由引理 2.1 可知 $R(A_2)$ 和 $R(B_2)$ 均不闭, 从而 $\dim\overline{R(A_2)}=\dim\overline{R(B_2)}=\infty$. 令 $J_3:N(A_2)\to\overline{R(B_2)}$ 和 $J_4:\overline{R(A_2^*)}\to N(B_2^*)$ 为两个酉算子并且

$Y=\begin{pmatrix}0 & J_3\\ J_4 & 0\end{pmatrix}:\begin{pmatrix}\overline{R(A_2^*)}\\ N(A_2)\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}\overline{R(B_2)}\\ N(B_2^*)\end{pmatrix}$. 通过计算可得 $R\left(\begin{pmatrix}B_2 & Y\\ 0 & A_2\end{pmatrix}\right)$ 为闭集. 令 $X=Y+B_1C_1^{-1}A_1$, 则 $R(M_X)$ 为闭集.

例 2.1 令 $A,\ B,\ C\in\mathcal{B}(\ell^2)$ 定义为

$$A(x_1,x_2,x_3,\cdots)=\left(x_1,0,\frac{x_2}{2},0,\frac{x_3}{3},0,\cdots\right),$$
$$B(x_1,x_2,x_3,\cdots)=\left(x_1,0,\frac{x_3}{3},0,\frac{x_5}{5},\cdots\right),$$

且

$$C(x_1,x_2,x_3,\cdots)=(0,x_2,0,x_4,0,x_6,0,\cdots).$$

显然, 算子 C 为正交投影算子, 故 $R(C)$ 为闭集. 又因 $N(C)=\{x\in\ell^2:x=(x_1,0,x_3,0,x_5,0,\cdots)\}$ 且 $N(C^*)=\{x\in\ell^2:x=(x_1,0,x_3,0,x_5,0,\cdots)\}$, 故 $P_{N(C^*)}A(x_1,x_2,x_3,\cdots)=\left(x_1,0,\frac{x_2}{2},0,\frac{x_3}{3},0,\cdots\right)$ 且 $B|_{N(C)}(x_1,x_2,x_3,\cdots)=\left(x_1,0,\frac{x_3}{3},0,\frac{x_5}{5},\cdots\right)$, 从而 $R(P_{N(C^*)}\quad A)$ 且 $R(B|_{N(C)})$ 均不为闭集. 但是, 由于 $N(A)=\{0\}$ 且 $R(A)\cap R(C)=\emptyset$, 因此 $\dim P_{\mathcal{H}}N((A\quad C))=0$, 从而由定理 2.1 可得, 对任意的 $X\in\mathcal{B}(\ell^2)$,$R(M_X)$ 均不闭.

根据定理 2.1 立刻可以得到 M_X 的固有 Moore-Penrose 谱.

推论 2.1 令算子 $A\in\mathcal{B}(\mathcal{H})$, $B\in\mathcal{B}(\mathcal{K})$ 且 $C\in\mathcal{B}(\mathcal{K},\mathcal{H})$, 其中 $R(C)$ 为闭集, 则

$$\bigcap_{X\in\mathcal{B}(\mathcal{H},\mathcal{K})}\sigma_M(M_X)=\{\lambda\in\sigma_M((A,\ C)):\dim P_{\mathcal{K}}N(B^*-\overline{\lambda}\mathrm{I},\ C^*)<\infty\}$$
$$\cup\{\lambda\in\sigma_M((B^*,\ C^*)):\dim P_{\mathcal{H}}N(A-\lambda\mathrm{I},\ C)<\infty\}.$$

下面对任给算子 $X\in\mathcal{B}(\mathcal{H},\mathcal{K})$, $R(M_X)$ 的闭性进行等价刻画.

定理 2.2 给定算子 $A\in\mathcal{B}(\mathcal{H})$, $B\in\mathcal{B}(\mathcal{K})$ 且 $C\in\mathcal{B}(\mathcal{K},\mathcal{H})$, 其中 $R(C)$ 为闭集, 则对任意的算子 $X\in\mathcal{B}(\mathcal{H},\mathcal{K})$,$R(M_X)$ 为闭集当且仅当 $R((A\quad C))$ 和 $R\left(\begin{pmatrix}C\\ B\end{pmatrix}\right)$ 均为闭集且下列之一成立:

(1) 若 $n(C)<\infty$, 则 $\dim P_{\mathcal{H}}N((A\quad C))<\infty$;

(2) 若 $d(C)<\infty$, 则 $\dim P_{\mathcal{K}}N((B^*\quad C^*))<\infty$;

(3) 若 $n(C)=d(C)=\infty$, 则 $\dim P_{\mathcal{H}}N((A\quad C))$ 与 $\dim P_{\mathcal{K}}N((B^*\quad C^*))$ 至少有一个有限.

证 必要性. 令 $X=B_1C_1^{-1}A_1$, 则由等式 (2.10) 可知存在算子 U 和 V, 使得

$$UM_XV=\begin{pmatrix}0 & C_1 & 0\\ A_2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & B_2\end{pmatrix}. \tag{2.18}$$

由于 $R(M_X)$ 为闭集, 则由引理 2.1 可知 $R((A\quad C))$ 和 $R\left(\begin{pmatrix}C\\ B\end{pmatrix}\right)$ 均为闭集. 另外, 存在

可逆算子

$$U_1=\begin{pmatrix}\mathrm{I}&0&0&0\\0&\mathrm{I}&-Y_3A_{21}^{-1}&0\\0&0&\mathrm{I}&0\\0&0&0&\mathrm{I}\end{pmatrix}:\begin{pmatrix}R(B_2)\\N(B_2^*)\\R(A_2)\\N(A_2^*)\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}R(B_2)\\N(B_2^*)\\R(A_2)\\N(A_2^*)\end{pmatrix}\tag{2.19}$$

和 V_1(即等式 (2.15)), 使得

$$U_1MV_1=\begin{pmatrix}B_{21}&0&0&0\\0&0&0&Y_4\\0&0&A_{21}&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}:\begin{pmatrix}R(B_2^*)\\N(B_2)\\R(A_2^*)\\N(A_2)\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}R(B_2)\\N(B_2^*)\\R(A_2)\\N(A_2^*)\end{pmatrix},\tag{2.20}$$

其中 M 为等式 (2.12) 中的算子. 由于 $R(M)$ 为闭集, 故 $R(Y_4)$ 为闭集. 另外, 可以断言 $n(A_2)$ 和 $n(B_2^*)$ 至少有一个有限. 事实上, 若 $n(A_2)=n(B_2^*)=\infty$, 则令 $\{f_i\}_{i=1}^{\infty}$ 和 $\{g_i\}_{i=1}^{\infty}$ 分别为 $N(A_2)$ 和 $N(B_2^*)$ 的正规正交基且令 $Y_4f_i=\frac{1}{i}g_i,\ i\in\mathbb{N}^+$ (正整数集). 通过计算可得 $R(Y_4)$ 不为闭集, 矛盾. 因此 $n(A_2)$ 和 $n(B_2^*)$ 至少有一个有限, 从而 $\dim P_{\mathcal{H}}N((A\quad C))$ 和 $\dim P_{\mathcal{K}}N((B^*\quad C^*))$ 至少有一个有限. 假设 $n(C)<\infty$, 则 $P_{N(C)}B^*$ 为有限秩算子, 因此 $\dim P_{\mathcal{K}}N((B^*\quad C^*))=n(P_{N(C)}\quad B^*)=\infty$, 从而 $\dim P_{\mathcal{H}}N((A\quad C))<\infty$. 类似地可证, 当 $d(C)<\infty$ 时能够得到 $\dim P_{\mathcal{H}}N((A\quad C))=n(P_{N(C^*)}\quad A)=\infty$, 因此 $\dim P_{\mathcal{K}}N((B^*\quad C^*))<\infty$.

充分性. 依照引理 2.1 和等式 (2.20) 易证任给 $X\in\mathcal{B}(\mathcal{H},\mathcal{K})$ 均有 $R(M_X)$ 为闭集.

通过上述定理, 可以得到下面的结论.

推论 2.2 给定算子 $A\in\mathcal{B}(\mathcal{H})$ 和 $B\in\mathcal{B}(\mathcal{K})$, 若 $C\in\mathcal{B}(\mathcal{K},\mathcal{H})$ 为 Fredholm 算子, 则存在算子 $X\in\mathcal{B}(\mathcal{H},\mathcal{K})$, 使得 $R(M_X)$ 不闭.

众所周知, Fredholm 算子在算子理论中扮演了一个重要的角色, 而 Fredholm 算子的前提是该算子的值域为闭集. 下面, 研究算子矩阵 M_X 的 Fredholm 性. 首先研究 M_X 的半 Fredholm 性.

引理 2.4 [12] 令 $A,B\in\mathcal{B}(\mathcal{H})$, 若 AB 为上半 (下半)Fredholm 算子, 则 B 为上半 (A 为下半)Fredholm 算子.

定理 2.3 给定算子 $A\in\mathcal{B}(\mathcal{H})$, $B\in\mathcal{B}(\mathcal{K})$ 且 $C\in\mathcal{B}(\mathcal{K},\mathcal{H})$, 其中 $R(C)$ 为闭集, 则存在 $X\in\mathcal{B}(\mathcal{H},\mathcal{K})$, 使得 M_X 为上半 Fredholm 算子当且仅当 $\begin{pmatrix}C\\B\end{pmatrix}$ 为上半 Fredholm 算子且下列之一成立:

(1) $R((A\quad C))$ 为闭集, 另外 $\dim P_{\mathcal{H}}N((A\quad C))<\infty$ 或 $\dim P_{\mathcal{H}}N((A\quad C))=\dim P_{\mathcal{K}}N((B^*\quad C^*))=\infty$;

(2) $R((A\quad C))$ 不闭且 $\dim P_{\mathcal{K}}N((B^*\quad C^*))=\infty$.

证 从等式 (2.10) 中可以看出 M(看等式 (2.11)) 是上半 Fredholm 算子当且仅当 M_X

为上半 Fredholm 算子.

必要性. 根据引理 2.4 可得 B_2 为上半 Fredholm 算子, 因此, 由引理 2.1 可知 $\begin{pmatrix} C \\ B \end{pmatrix}$ 为上半 Fredholm 算子. 不失一般性, 令 $n(C) = n(C^*) = \infty$. 若 $R((A \quad C))$ 为闭集, 则由引理 2.1 可知 $R(A_2)$ 为闭集, 因此 U_1MV_1(看等式 (2.20)) 为上半 Fredholm 算子. 另外, 在等式 (2.20) 中, 若 $n(A_2) = \infty$, 则可以断言 $n(B_2^*) = \infty$. 若不然, 可以得到 $n(Y_4) = \infty$, 这与 $n(Y_4) < \infty$ 相矛盾. 再者, 根据 $R(C)$ 为闭集可知 $n(A_2) = \dim P_{\mathcal{H}}N((A \quad C))$ 并且 $n(B_2^*) = \dim P_{\mathcal{K}}N((B^* \quad C^*))$, 因此结论 (1) 成立. 若 $R((A \quad C))$ 不闭, 则由定理 2.1 可得 $\dim P_{\mathcal{K}}N((B^* \quad C^*)) = \infty$.

充分性. 假设条件 (1) 成立, 当 $\dim P_{\mathcal{H}}N((A \quad C)) < \infty$ 时, 在等式 (2.11) 中, 令 $Y = 0$, 则 $X = B_1C_1^{-1}A_1$, 此时 M 为上半 Fredholm 算子, 从而 M_X(看等式 (2.10)) 为上半 Fredholm 算子. 当 $\dim P_{\mathcal{H}}N((A \quad C)) = \dim P_{\mathcal{K}}N((B^* \quad C^*)) = \infty$ 时, 令 $Y = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & Y_4 \end{pmatrix}$, 其中 $Y_4 : N(A_2) \to N(B_2^*)$ 为酉算子, 则 M 为上半 Fredholm 算子. 再令 $X = Y + B_1C_1^{-1}A_1$, 则 M_X 为上半 Fredholm 算子. 假设条件 (2) 成立, 由于 $\dim P_{\mathcal{K}}N((B^* \quad C^*)) = n(B_2^*) = \infty$, 因此存在 $N(B_2^*)$ 的无限维闭子空间 Q, 使得 $N(B_2^*) = Q \oplus Q^{\perp}$. 令

$$Y = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & J_1 \\ J_2 & 0 \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} \overline{R(A_2^*)} \\ N(A_2) \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} R(B_2) \\ Q \\ Q^{\perp} \end{pmatrix}, \tag{2.21}$$

其中 $J_1 : N(A_2) \to M$ 和 $J_2 : \overline{R(A_2^*)} \to M^{\perp}$ 均为可逆算子并且算子 M 可表示为

$$M = \begin{pmatrix} B_{21} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & J_1 \\ 0 & 0 & J_2 & 0 \\ 0 & 0 & A_{21} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} R(B_2^*) \\ N(B_2) \\ \overline{R(A_2^*)} \\ N(A_2) \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} R(B_2) \\ Q \\ Q^{\perp} \\ \overline{R(A_2)} \\ N(A_2^*) \end{pmatrix}. \tag{2.22}$$

通过计算可得 M 为上半 Fredholm 算子. 令 $X = Y + B_1C_1^{-1}A_1$, 则 M_X 为上半 Fredholm 算子.

利用与上述定理相似的证明方法, 可以得到它的对偶命题.

定理 2.4 给定算子 $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, $B \in \mathcal{B}(\mathcal{K})$ 和 $C \in \mathcal{B}(\mathcal{K}, \mathcal{H})$, 其中 $R(C)$ 为闭集, 则存在算子 $X \in \mathcal{B}(\mathcal{H}, \mathcal{K})$, 使得 M_X 为下半 Fredholm 算子当且仅当 $(A \quad C)$ 为下半 Fredholm 算子并且下列之一成立:

(1) $R\left(\begin{pmatrix} C \\ B \end{pmatrix}\right)$ 为闭集, 另外 $\dim P_{\mathcal{K}}N((B^* \quad C^*)) < \infty$ 或 $\dim P_{\mathcal{H}}N((A \quad C)) = \dim P_{\mathcal{K}}N((B^* \quad C^*)) = \infty$;

(2) $R\left(\begin{pmatrix} C \\ B \end{pmatrix}\right)$ 不为闭集并且 $\dim P_{\mathcal{H}}N((A \quad C)) = \infty$.

下面研究算子矩阵 M_X 的 Fredholm 性.

定理 2.5 给定算子 $A\in\mathcal{B}(\mathcal{H})$, $B\in\mathcal{B}(\mathcal{K})$ 且 $C\in\mathcal{B}(\mathcal{K},\mathcal{H})$, 其中 $R(C)$ 为闭集, 则存在 $X\in\mathcal{B}(\mathcal{H},\mathcal{K})$, 使得 M_X 为 Fredholm 算子当且仅当 $(A\quad C)$ 为下半 Fredholm 算子, $\begin{pmatrix} C\\ B\end{pmatrix}$ 为上半 Fredholm 算子且下列之一成立:

(1) $\dim P_{\mathcal{K}}N((B^*\quad C^*))<\infty$ 且 $\dim P_{\mathcal{H}}N((A\quad C))<\infty$;

(2) $\dim P_{\mathcal{H}}N((A\quad C))=\dim P_{\mathcal{K}}N((B^*\quad C^*))=\infty$.

证 必要性. 由定理 2.3 和定理 2.4 的结论可知必要性是显然成立的.

充分性. 若条件 (1) 成立, 那么对任给的算子 $Y_4:N(A_2)\to N(B_2^*)$, 都有 U_1MV_1(看等式 (2.20)) 为 Fredholm 算子, 因此对任给的 $X\in\mathcal{B}(\mathcal{H},\mathcal{K})$, 都有 M_X 为 Fredholm 算子. 若条件 (2) 成立, 则存在可逆算子 $Y_4:N(A_2)\to N(B_2^*)$, 使得 U_1MV_1 为 Fredholm 算子, 因此 M 为 Fredholm 算子. 令 $Y=\begin{pmatrix} 0 & 0\\ 0 & Y_4\end{pmatrix}$ 且令 $X=Y+B_1C_1^{-1}A_1$, 则 M_X 为 Fredholm 算子.

Weyl 算子是一类特殊的 Fredholm 算子, 它在算子谱理论, 特别是紧算子理论中都扮演着重要的角色. 下面研究算子矩阵 M_X 的 Weyl 性.

定理 2.6 给定算子 $A\in\mathcal{B}(\mathcal{H})$, $B\in\mathcal{B}(\mathcal{K})$ 和 $C\in\mathcal{B}(\mathcal{K},\mathcal{H})$, 若 $R(C)$ 为闭集, 则存在算子 $X\in\mathcal{B}(\mathcal{H},\mathcal{K})$, 使得 M_X 为 Weyl 算子当且仅当 $(A\quad C)$ 为下半 Fredholm 算子, $\begin{pmatrix} C\\ B\end{pmatrix}$ 为上半 Fredholm 算子且下列之一成立:

(1) $\dim P_{\mathcal{K}}N((B^*\quad C^*))<\infty$, $\dim P_{\mathcal{H}}N((A\quad C))<\infty$ 且

$$\dim P_{\mathcal{H}}N((A\quad C))+n\left(\begin{pmatrix} C\\ B\end{pmatrix}\right)=\dim P_{\mathcal{K}}N((B^*\quad C^*))+n\left(\begin{pmatrix} A^*\\ C^*\end{pmatrix}\right);$$

(2) $\dim P_{\mathcal{H}}N((A\quad C))=\dim P_{\mathcal{K}}N((B^*\quad C^*))=\infty$.

证 必要性. 根据定理 2.5 和等式 (2.20) 可以得出必要性成立.

充分性. 假设条件 (1) 成立, 则由等式 (2.11) 可得, 任给算子 $Y:\mathcal{H}\to\mathcal{K}$, 均有 M 为 Weyl 算子. 因此, 任给算子 $X\in\mathcal{B}(\mathcal{H},\mathcal{K})$, 均有 M_X 为 Weyl 算子. 假设条件 (2) 成立, 令 M_1 为 $P_{\mathcal{H}}N((A\quad C))$ 上的有限维子空间且使得 $\dim M_1=n(A_2^*)<\infty$, 则 $\dim M_1^{\perp}=\infty$ 且 $P_{\mathcal{H}}N((A\quad C))=M_1\oplus M_1^{\perp}$. 再者, 令 N 为 $P_{\mathcal{K}}N((B^*\quad C^*))$ 的有限子空间并且使得 $\dim N=n(B_2)<\infty$, 则 $\dim N^{\perp}=\infty$ 且 $P_{\mathcal{K}}N((B^*\quad C^*))=N\oplus N^{\perp}$. 假设 $J:M_1^{\perp}\to N^{\perp}$ 为酉算子, 并且令

$$Y=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & J\end{pmatrix}:\begin{pmatrix} R(A_2^*)\\ M_1\\ M_1^{\perp}\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} R(B_2)\\ N\\ N^{\perp}\end{pmatrix},$$

其中 $Y_4=\begin{pmatrix} 0 & 0\\ 0 & J\end{pmatrix}:\begin{pmatrix} M_1\\ M_1^{\perp}\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} N\\ N^{\perp}\end{pmatrix}$, 那么等式 (2.12) 的算子 M 可以表示为下列的

矩阵形式:

$$M=\begin{pmatrix} B_{21} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & J \\ 0 & 0 & A_{21} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}:\begin{pmatrix} R(B_2^*) \\ N(B_2) \\ R(A_2^*) \\ M_1 \\ M_1^{\perp} \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} R(B_2) \\ N \\ N^{\perp} \\ R(A_2) \\ N(A_2^*) \end{pmatrix}. \tag{2.23}$$

显然, M 为 Weyl 算子. 令 $X=Y+B_1C_1^{-1}A_1$, 则 M_X 为 Weyl 算子.

3　算子矩阵 M_X 的广义 Weyl 性及其相关结果

令 $T\in\mathcal{B}(\mathcal{H},\mathcal{K})$, 若 $R(T)$ 为闭集并且 $n(T)=d(T)$, 则称 T 为广义 Weyl 算子 (见 [13]). 显然, Weyl 算子一定为广义 Weyl 算子.

性质 3.1[7]　令 $A\in\mathcal{B}(\mathcal{H})$, $B\in\mathcal{B}(\mathcal{K})$ 且 $C\in\mathcal{B}(\mathcal{K},\mathcal{H})$, 则 M_0 $(X=0)$ 满足下列性质:

(1) $n(A)\leqslant n(M_0)\leqslant n(A)+n(B)$;

(2) $d(B)\leqslant d(M_0)\leqslant d(A)+d(B)$.

定理 3.1　给定算子 $A\in\mathcal{B}(\mathcal{H})$, $B\in\mathcal{B}(\mathcal{K})$ 且 $C\in\mathcal{B}(\mathcal{K},\mathcal{H})$, 若 $R(C)$ 为闭集, 则存在算子 $X\in\mathcal{B}(\mathcal{H},\mathcal{K})$, 使得 M_X 为广义 Weyl 算子, 当且仅当 $\dim P_{\mathcal{H}}N((A\quad C))+n\left(\begin{pmatrix} C \\ B\end{pmatrix}\right)=\dim P_{\mathcal{K}}N((B^*\ C^*))+n\left(\begin{pmatrix} A^* \\ C^*\end{pmatrix}\right)$ 并且下列之一成立:

(1) $R((A\quad C))$ 和 $R\left(\begin{pmatrix} C \\ B\end{pmatrix}\right)$ 均为闭集;

(2) $R((A\quad C))$ 为闭集, $R\left(\begin{pmatrix} C \\ B\end{pmatrix}\right)$ 不闭且 $\dim P_{\mathcal{H}}N((A\quad C))=\infty$;

(3) $R((A\quad C))$ 不闭, $R\left(\begin{pmatrix} C \\ B\end{pmatrix}\right)$ 为闭集且 $\dim P_{\mathcal{K}}N((B^*\quad C^*))=\infty$;

(4) $R((A\quad C))$ 和 $R\left(\begin{pmatrix} C \\ B\end{pmatrix}\right)$ 均不闭且 $\dim P_{\mathcal{H}}N((A\quad C))=\dim P_{\mathcal{K}}N((B^*\quad C^*))=\infty$.

证　显然, 算子 M(看等式 (2.12)) 为广义 Weyl 算子当且仅当 M_X 为广义 Weyl 算子. 另外, 由引理 2.1 可知 $R((A\quad C))$ 和 $R\left(\begin{pmatrix} C \\ B\end{pmatrix}\right)$ 的闭性分别与 $R(A_2)$ 和 $R(B_2)$ 的闭性是等价的并且 $n\left(\begin{pmatrix} C \\ B\end{pmatrix}\right)=n(B_2)$, $n\left(\begin{pmatrix} A^* \\ C^*\end{pmatrix}\right)=n(A_2^*)$.

必要性. 不失一般性, 令 $n(C)=n(C^*)=\infty$. 假设 $R(A_2)$ 和 $R(B_2)$ 均为闭集, 则由等式 (2.20) 可以看出 $R(Y_4)$ 为闭集, 又因 $R(M)$ 为闭集且 $n(M)=n(M^*)$, 故 $n(B_2)+n(Y_4)=n(A_2^*)+n(Y_4^*)$.　另外, 由于 $n(A_2)=n(Y_4)+\dim\ N(Y_4)^{\perp}$ 且 $n(B_2^*)=\dim\ R(Y_4)+$

$n(Y_4^*)$, 因此根据 $\dim\ N(Y_4)^{\perp} = \dim\ R(Y_4)$ 可得 $\dim\ P_{\mathcal{H}}N((A\quad C)) + n\left(\begin{pmatrix} C \\ B \end{pmatrix}\right) = \dim\ P_{\mathcal{K}}N((B^*\ C^*)) + n\left(\begin{pmatrix} A^* \\ C^* \end{pmatrix}\right)$. 假设 $R(A_2)$ 为闭集且 $R(B_2)$ 不闭, 由定理 2.1 可知 $\dim\ P_{\mathcal{H}}N((A\quad C)) = \infty$. 再者, 可以断言 $n(B_2^*) + n(A_2^*) = \infty$. 若不然, 由性质 3.1 可得 $n\left(\begin{pmatrix} B_2^* & 0 \\ Y^* & A_2^* \end{pmatrix}\right) \leqslant n(A_2^*) + n(B_2^*) < \infty$. 由于 $n\left(\begin{pmatrix} B_2 & Y \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}\right) = n\left(\begin{pmatrix} B_2^* & 0 \\ Y^* & A_2^* \end{pmatrix}\right) < \infty$, 因此 $\begin{pmatrix} B_2 & Y \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}$ 为 Weyl 算子, 从而 $R(B_2)$ 为闭集, 矛盾, 故 $\dim\ P_{\mathcal{H}}N((A\quad C)) + n\left(\begin{pmatrix} C \\ B \end{pmatrix}\right) = \dim\ P_{\mathcal{K}}N((B^*\ C^*)) + n\left(\begin{pmatrix} A^* \\ C^* \end{pmatrix}\right) = \infty$. 假设 $R(A_2)$ 不闭且 $R(B_2)$ 为闭集, 由定理 2.1 的必要性可得 $\dim\ P_{\mathcal{K}}N((B^*\quad C^*)) = \infty$. 再者, 利用与结论 (2) 同样的证明方法可证得 $n(B_2) + n(A_2) = \infty$, 因此 $\dim\ P_{\mathcal{H}}N((A\quad C)) + n\left(\begin{pmatrix} C \\ B \end{pmatrix}\right) = \dim\ P_{\mathcal{K}}N((B^*\ C^*)) + n\left(\begin{pmatrix} A^* \\ C^* \end{pmatrix}\right) = \infty$. 假设 $R(A_2)$ 和 $R(B_2)$ 均不闭, 则由定理 2.1 可得 $\dim\ P_{\mathcal{H}}N((A\quad C)) = \dim\ P_{\mathcal{K}}N((B^*\quad C^*)) = \infty$, 因此 $\dim\ P_{\mathcal{H}}N((A\quad C)) + n\left(\begin{pmatrix} C \\ B \end{pmatrix}\right) = \dim\ P_{\mathcal{K}}N((B^*\quad C^*)) + n\left(\begin{pmatrix} A^* \\ C^* \end{pmatrix}\right)$.

充分性. 假设条件 (1) 成立, 令等式 (2.10) 中的 $X = B_1C_1^{-1}A_1$, 则等式 (2.11) 中的 $Y = 0$, 因此 $R(M)$ 为闭集且 $n(M) = n(A_2) + n(B_2) = n(A_2^*) + n(B_2^*) = n(M^*)$, 从而 M 为广义 Weyl 算子, 故 M_X 为广义 Weyl 算子. 假设条件 (2) 成立, 由于 $R\left(\begin{pmatrix} C \\ B \end{pmatrix}\right)$ 不为闭集, 因此由引理 2.1 可得 $R(B_2)$ 不闭, 从而 $\dim\ \overline{R(B_2^*)} = \infty$. 令 $J' : N(A_2) \to \overline{R(B_2)}$ 为酉算子且令 $Y = \begin{pmatrix} 0 & J' \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, 则 M 有下列矩阵形式:

$$M = \begin{pmatrix} B_{21} & 0 & 0 & J' \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_{21} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} \overline{R(B_2^*)} \\ N(B_2) \\ R(A_2^*) \\ N(A_2) \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \overline{R(B_2)} \\ N(B_2^*) \\ R(A_2) \\ N(A_2^*) \end{pmatrix}. \tag{3.1}$$

定义可逆算子矩阵

$$V_2 = \begin{pmatrix} \mathrm{I} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathrm{I} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathrm{I} & 0 \\ -J'^{-1}B_{21} & 0 & 0 & \mathrm{I} \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} \overline{R(B_2)} \\ N(B_2^*) \\ R(A_2) \\ N(A_2^*) \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \overline{R(B_2)} \\ N(B_2^*) \\ R(A_2) \\ N(A_2^*) \end{pmatrix}, \tag{3.2}$$

使得

$$MV_2=\begin{pmatrix}0&0&0&J'\\0&0&0&0\\0&0&A_{21}&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}:\begin{pmatrix}\overline{R(B_2^*)}\\N(B_2)\\R(A_2^*)\\N(A_2)\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}\overline{R(B_2)}\\N(B_2^*)\\R(A_2)\\N(A_2^*)\end{pmatrix},\tag{3.3}$$

则 $R(MV_2)$ 为闭集且 $n((MV_2))=\dim\overline{R(B_2^*)}+n(B_2)=\infty$, $n((MV_2)^*)=n(B_2^*)+n(A_2^*)=\infty$, 因此 MV_2 为广义 Weyl 算子, 故 M 为广义 Weyl 算子. 令 $X=Y+B_1C_1^{-1}A_1$, 则 M_X 为广义 Weyl 算子. 假设条件 (3) 成立, 用同样的方法可以找到算子 $X=Y+B_1C_1^{-1}A_1$, 使得 M_X 为广义 Weyl 算子, 其中 $Y=\begin{pmatrix}0&0\\J&0\end{pmatrix}$ 且 $J:\overline{R(A_2^*)}\to N(B_2^*)$ 为酉算子. 假设条件 (4) 成立, 则 $\dim\overline{R(B_2)}=\dim\overline{R(A_2^*)}=\infty$, 因此存在酉算子 $J_1:N(A_2)\to\overline{R(B_2)}$ 和 $J_2:\overline{R(A_2^*)}\to N(B_2^*)$. 令 $Y=\begin{pmatrix}0&J_1\\J_2&0\end{pmatrix}$, 则用类似的方法可以证明 M_X 为广义 Weyl 算子, 其中 $X=Y+B_1C_1^{-1}A_1$.

推论 3.1　给定算子 $A\in\mathcal{B}(\mathcal{H})$, $B\in\mathcal{B}(\mathcal{K})$, 若 $C\in\mathcal{B}(\mathcal{K},\mathcal{H})$ 为 Fredholm 算子, 则存在 $X\in\mathcal{B}(\mathcal{H},\mathcal{K})$, 使得 M_X 为广义 Weyl 算子.

下面探索对任意的 $X\in\mathcal{B}(\mathcal{H},\mathcal{K})$, M_X 的广义 Weyl 性.

定理 3.2　给定算子 $A\in\mathcal{B}(\mathcal{H})$, $B\in\mathcal{B}(\mathcal{K})$ 和 $C\in\mathcal{B}(\mathcal{K},\mathcal{H})$, 其中 $R(C)$ 为闭集, 则对任意的 $X\in\mathcal{B}(\mathcal{H},\mathcal{K})$, 均有 M_X 为广义 Weyl 算子, 当且仅当

(1) $R((A\quad C))$ 和 $R\left(\begin{pmatrix}C\\B\end{pmatrix}\right)$ 均为闭集;

(2) $\dim P_{\mathcal{H}}N((A\quad C))+n\left(\begin{pmatrix}C\\B\end{pmatrix}\right)=\dim P_{\mathcal{K}}N((B^*\quad C^*))+n\left(\begin{pmatrix}A^*\\C^*\end{pmatrix}\right)$;

(3) 下列之一成立:

(i) 若 $n(C)<\infty$, 则 $\dim P_{\mathcal{H}}N((A\quad C))<\infty$;

(ii) 若 $d(C)<\infty$, 则 $\dim P_{\mathcal{K}}N((B^*\quad C^*))<\infty$;

(iii) 若 $n(C)=d(C)=\infty$, 则 $\dim P_{\mathcal{H}}N((A\quad C))$ 与 $\dim P_{\mathcal{K}}N((B^*\quad C^*))$ 至少有一个有限.

证　必要性. 在等式 (2.11) 中, 令 $X=B_1C_1^{-1}A_1$, 则 $Y=0$ 且 M 可以表示成如下形式:

$$M=\begin{pmatrix}B_2&0\\0&A_2\end{pmatrix}:\begin{pmatrix}N(C)\\H\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}K\\N(C^*)\end{pmatrix}.\tag{3.4}$$

由于 $R(M)$ 为闭集且 $n(M)=n(M^*)$, 因此, 根据引理 2.1 可得 $R((A\quad C))$, $R\left(\begin{pmatrix}C\\B\end{pmatrix}\right)$ 均为闭集且 $\dim P_{\mathcal{H}}N((A\,C))+n\left(\begin{pmatrix}C\\B\end{pmatrix}\right)=\dim P_{\mathcal{K}}N((B^*\quad C^*))+n\left(\begin{pmatrix}A^*\\C^*\end{pmatrix}\right)$. 再者, 由

定理 2.3 可得结论 (3) 成立.

充分性. 由于 $R((A\quad C))$ 和 $R\left(\begin{pmatrix} C \\ B \end{pmatrix}\right)$ 均为闭集, 因此, 在等式 (2.20) 中由条件 (3) 可以看出 Y_4 为有限秩算子, 故 $R(U_1MV_1)$ 为闭集且 $\dim R(Y_4) = \dim N(Y_4)^{\perp} < \infty$. 令 $M_1 = U_1MV_1$, 则由条件 (2) 可得 $n(M_1) = d(M_1)$, 因此 M_1 为广义 Weyl 算子, 故对任意的 $X \in \mathcal{B}(\mathcal{H}, \mathcal{K})$, M_X 均为广义 Weyl 算子.

下面研究一类特殊算子矩阵 $\begin{pmatrix} A & C \\ X & \mathrm{I} \end{pmatrix}$ 的值域的相关问题, 其中算子 X 是未知的, 这类算子矩阵在系统理论研究中有着重要的应用 (见 [14–15]). 另外, 通过下面的等式

$$\begin{pmatrix} \mathrm{I} & -C \\ 0 & \mathrm{I} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & C \\ X & \mathrm{I} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mathrm{I} & 0 \\ -X & \mathrm{I} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A-CX & 0 \\ 0 & \mathrm{I} \end{pmatrix}, \tag{3.5}$$

可知算子矩阵 $\begin{pmatrix} A & C \\ X & \mathrm{I} \end{pmatrix}$ 的闭性与算子 $A-CX$ 的闭性是等价的, 因此, 下面对 $R(A-CX)$ 的闭性的相关问题进行讨论.

性质 3.2 给定算子 $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, $B \in \mathcal{B}(\mathcal{K})$ 和 $C \in \mathcal{B}(\mathcal{K}, \mathcal{H})$, 其中 $R(C)$ 为闭集, 则下列叙述成立:

(1) 若 C 为有限秩算子, 则存在算子 $X \in \mathcal{B}(\mathcal{H}, \mathcal{K})$, 使得 $R(A-CX)$ 为闭集当且仅当 $R(A)$ 为闭集;

(2) 若 C 不是有限秩算子, 则存在算子 $X \in \mathcal{B}(\mathcal{H}, \mathcal{K})$, 使得 $R(A-CX)$ 为闭集.

证 结论 (1) 显然成立.

(2) 显然 $R\left(\begin{pmatrix} C \\ \mathrm{I} \end{pmatrix}\right)$ 为闭集. 若 $R(P_{N(C^*)}\quad A)$ 为闭集, 则由引理 2.1 和定理 2.1 可知, 存在算子 $X \in \mathcal{B}(\mathcal{H}, \mathcal{K})$, 使得 $R\left(\begin{pmatrix} A & C \\ X & \mathrm{I} \end{pmatrix}\right)$ 为闭集, 因此由等式 (3.5) 可得 $R(A-CX)$ 为闭集. 若 $R(P_{N(C^*)}\quad A)$ 不闭, 由 $P_{\mathcal{K}}N((\mathrm{I}^*\ C^*)) = R(C^*)$ 可得 $\dim P_{\mathcal{K}}N((\mathrm{I}^*\ C^*)) = \infty$, 因此, 由定理 2.1 可知存在算子 $X \in \mathcal{B}(\mathcal{H}, \mathcal{K})$, 使得 $R(A-CX)$ 为闭集.

性质 3.3 给定算子 $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, $B \in \mathcal{B}(\mathcal{K})$ 和 $C \in \mathcal{B}(\mathcal{K}, \mathcal{H})$, 其中 $R(C)$ 为闭集, 则下列叙述成立:

(1) 若 C 为有限秩算子, 则存在算子 $X \in \mathcal{B}(\mathcal{H}, \mathcal{K})$, 使得 $A-CX$ 为广义 Weyl 算子当且仅当 A 为广义 Weyl 算子;

(2) 若 C 不为有限秩算子, 则存在算子 $X \in \mathcal{B}(\mathcal{H}, \mathcal{K})$, 使得 $A-CX$ 为广义 Weyl 算子当且仅当 $\dim P_{\mathcal{H}}N((A\quad C)) = \infty$.

证 (1) 由于 C 为有限秩算子, 因此对任意的 $X \in \mathcal{B}(\mathcal{H}, \mathcal{K})$, CX 均为有限秩算子, 从而根据文 [13, 定理4.2] 可得 A 为广义 Weyl 算子当且仅当 $A-CX$ 为广义 Weyl 算子.

(2) 必要性. 由于 $A-CX$ 为广义 Weyl 算子, 因此 $\begin{pmatrix} A & C \\ X & \mathrm{I} \end{pmatrix}$ 为广义 Weyl 算子. 根据

定理 3.2 和 $n\left(\begin{pmatrix} C \\ \mathrm{I} \end{pmatrix}\right)=0$ 可得 $\dim P_{\mathcal{H}}N((A\quad C))=\dim P_{\mathcal{K}}N((\mathrm{I}^*\quad C^*))+n\left(\begin{pmatrix} A^* \\ C^* \end{pmatrix}\right)$. 另外, 根据 C 不为有限秩算子可得 $\dim P_{\mathcal{K}}N((\mathrm{I}^*\quad C^*))=\infty$, 故 $\dim P_{\mathcal{H}}N((A\quad C))=\infty$.

充分性. 由于 $\dim P_{\mathcal{H}}N((A\quad C))=\infty=\dim P_{\mathcal{K}}N((\mathrm{I}^*\ C^*))$, 因此 $\dim P_{\mathcal{H}}N((A\quad C))+n\left(\begin{pmatrix} C \\ \mathrm{I} \end{pmatrix}\right)=\dim P_{\mathcal{K}}N((\mathrm{I}^*\ C^*))+n\left(\begin{pmatrix} A^* \\ C^* \end{pmatrix}\right)$. 又因 $R\left(\begin{pmatrix} C \\ \mathrm{I} \end{pmatrix}\right)$ 为闭集, 因此由定理 3.1 可知存在算子 $X\in\mathcal{B}(\mathcal{H},\mathcal{K})$, 使得 $\begin{pmatrix} A & C \\ X & \mathrm{I} \end{pmatrix}$ 为广义 Weyl 算子, 从而 $A-CX$ 为广义 Weyl 算子.

参　考　文　献

[1] Ben-Israel A, Greville T N E. Generalized inverses: theory and applications, 2nd ed [M]. New York: Springer-Verlag, 2003.

[2] Cao X H, Meng B. Essential approximate point spectra and Weyl's theorem for operator matrices [J]. *J Math Anal Appl*, 2005, 304(2):759–771.

[3] Chen X L, Zhang S F, Zhong H J. On the filling in holes for operator matrices [J]. *Linear Alg Appl*, 2009, 430:761–766.

[4] Cui M M, Cao X H. Weyl's theorem for upper triangular operator matrix and perturbations [J]. *Linear Multilinear A*, 2017, 66(7):1–12.

[5] Dou Y N, Du G C, Shao C F, et al. Closedness of ranges of upper-triangular operators [J]. *J Math Anal Appl*, 2009, 356:13–20.

[6] Du H K, Pan J. Perturbations of spectrum of 2×2 operator matrices [J]. *Proc Amer Math Soc*, 1994, 121:558–563.

[7] Hai G J, Chen A. On the (α,β)-essential spectrum of upper triangular operator matrices [J]. *Acta Math Sci* (Chin Ed), 2014, 57:569–580.

[8] Huang J J, Shi Y F, Chen A. The representation of the Drazin inverse of anti-triangular operator matrices based on resolvent expansions [J]. *Appl Math Comput*, 2014, 242:196–201.

[9] Li Y, Sun X H, Du H K. The intersection of left (right) spectra of 2×2 upper triangular operator matrices [J]. *Linear Alg Appl*, 2006, 418:112–121.

[10] Apostol C. The reduced minimum modulus [J]. *Michigan Math J*, 1985, 32(3):279–294.

[11] Müller V. Spectral theory of linear operators and spectral systems in Banach algebras [M]. Basel:Birkhäuser, 2003.

[12] Aiena P. Fredholm and local spectral theory, with applications to multipliers [M]. New York: Kluwer Academic Publishers, 2004.

[13] Djordjević D S. On generalized Weyl operators [J]. *Proc Am Math Soc*, 2002, 130(1):81–84.

[14] Rodman L. An introduction to operator polynomials [M]. Basel: Birkhäuser, 1989.

[15] Takahashi K. Invertible completions of operator matrices [J]. *Integr Equat Oper Th*, 1995, 21:355–361.

Closedness of Ranges for Operator Matrices and Its Application

DONG Jiong[1] CAO Xiaohong[2]

[1]Department of Mathematics, Changzhi University, Changzhi 046011, Shanxi, China; School of Mathematics and Information Science, Shaanxi Normal University, Xi'an 710119, China. E-mail: dongjiong1314@163.com

[2]School of Mathematics and Information Science, Shaanxi Normal University, Xi'an 710119, China. E-mail: xiaohongcao@snnu.edu.cn

Abstract Let $\mathcal{H}$ and $\mathcal{K}$ be infinite dimensional separable complex Hilbert spaces. The authors denote by $M_X = \begin{pmatrix} A & C \\ X & B \end{pmatrix}$ a 2×2 operator matrix acting on $\mathcal{H} \oplus \mathcal{K}$, where X is an unknown bounded linear operator from $\mathcal{H}$ to $\mathcal{K}$. In this paper, based on the closedness of $R(C)$, the authors characterize the necessary and sufficient condition for $R(M_X)$ to be closed for some (or every) $X \in \mathcal{B}(\mathcal{H}, \mathcal{K})$. In addition, the authors study the semi-Fredholmness and generalized Weylness of M_X and give some relevant results.

Keywords Range, Semi-Fredholm operator, Operator matrix, Generalized Weyl operator

2000 MR Subject Classification 47A05, 47A53, 47A10

The English translation of this paper will be published in
Chinese Journal of Contemporary Mathematics, Vol. 41 No. 4, 2020
by ALLERTON PRESS, INC., USA