数 学 年 刊 A 辑
2020, 41(4):399–408
DOI: 10.16205/j.cnki.cama.2020.0028

原子映射空间中的广义 Hahn-Banach 定理 *

董平川[1] 董 浙[2] 姜海益[3]

提要 经典的 Hahn-Banach 定理告诉读者在有界映射空间 $(B(\cdot,\cdot),\|\cdot\|)$ 中 $\mathbb{C}$ 具有内射性. 在第二节中主要研究在原子映射空间 $(\mathcal{N}^B(\cdot,\cdot),\nu^B)$ 中的内射性. 作者得到任意有限维 Banach 空间在原子映射空间 $(\mathcal{N}^B(\cdot,\cdot),\nu^B)$ 中都是内射的. 这可以看作 $(\mathcal{N}^B(\cdot,\cdot),\nu^B)$ 中的广义 Hahn-Banach 定理.

在经典的 Banach 空间理论中, 众所周知一个 Banach 空间 E 在 $(B(\cdot,\cdot),\|\cdot\|)$ 中具有 $\{\ell_1^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 有限可表示性当且仅当 E 同构于某个超积 $\prod \ell_1^{n(\alpha)}$ 的子空间. 作为第二节的一个应用, 第三节中作者研究了在原子映射空间 $(\mathcal{N}^B(\cdot,\cdot),\nu^B)$ 中的 $\{\ell_1^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 有限可表示性. 作者得到 $\mathbb{C}$ 是唯一在原子映射空间 $(\mathcal{N}^B(\cdot,\cdot),\nu^B)$ 中具有 $\{\ell_1^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 有限可表示性的 Banach 空间. 这与 Banach 空间理论中的经典结果是迥然不同的.

关键词 Hahn-Banach 定理, 原子映射空间, 内射性, 有限可表示性
MR (2000) 主题分类 46B07
中图法分类 O175.29
文献标志码 A
文章编号 1000-8314(2020)04-0399-10

1 引 言

在文 [1] 中 Grothendieck 首先引入并研究了原子映射空间 $(\mathcal{N}^B(\cdot,\cdot),\nu^B)$ 、可积映射空间 $(\mathcal{I}^B(\cdot,\cdot),\iota^B)$ 以及 1- 绝对可和映射空间 $(\Pi_1^B(\cdot,\cdot),\pi_1^B)$. 原子映射在 Schwartz 空间理论以及在微分方程和量子场论的应用中起着重要作用. Grothendieck 也曾应用 1- 绝对可和映射研究 Dvoretzky-Rogers 定理.

为了方便读者, 先回顾投射、内射张量积和 Banach 映射空间的定义, 详情可参见文 [2–3].

给定 Banach 空间 E 和 F, $\|\cdot\|_\mu$ 为代数张量积 $E\otimes F$ 上的范数. 若对于所有的 $x\in E$ 和 $y\in F$, 有 $\|x\otimes y\|_\mu\leqslant\|x\|\cdot\|y\|$ (或 $\|x\otimes y\|_\mu=\|x\|\cdot\|y\|$), 我们称 $\|\cdot\|_\mu$ 为次交叉范数 (或交叉范数). 给定次交叉范数 $\|\cdot\|_\mu$ 和一个线性组合

$$u=\sum x_i\otimes y_i\in E\otimes F,$$

有

$$\|u\|_\mu\leqslant\sum\|x_i\|\cdot\|y_i\|.$$

本文 2019 年 2 月 27 日收到, 2020 年 3 月 29 日收到修改稿.
[1]纽约大学数学系, 纽约 10012-1110. E-mail: pd2170@nyu.edu
[2]通信作者. 浙江大学数学科学学院, 杭州 310027. E-mail: dongzhe@zju.edu.cn
[3]浙江大学数学科学学院, 杭州 310027. E-mail: jianghaiyi@zju.edu.cn
*本文受到国家自然科学基金 (No. 11871423) 的资助.

定义

$$\|u\|_\gamma = \inf\Big\{\sum \|x_i\|\cdot\|y_i\| : u = \sum x_i \otimes y_i\Big\},$$

称 $\|\cdot\|_\gamma$ 为 $E\otimes F$ 上的投射张量积范数．令

$$E \otimes_\gamma F = (E\otimes F, \|\cdot\|_\gamma),$$

并定义 Banach 空间投射张量积 $E \overset{\gamma}{\otimes} F$ 为 $E\otimes_\gamma F$ 的完备化. 设 $u\in E\otimes F$, 则 u 的 Banach 空间内射张量积范数定义为

$$\|u\|_\lambda = \sup\{|(f\otimes g)(u)| : f\in E^*,\ g\in F^*,\ \|f\|,\|g\|\leqslant 1\}.$$

令

$$E\otimes_\lambda F = (E\otimes F, \|\cdot\|_\lambda),$$

完备化 $E \overset{\lambda}{\otimes} F$ 被称作 Banach 空间内射张量积．假设 L 是有限维 Banach 空间，由文 [3] 中的推论 14.1.2 可得，对于任意 Banach 空间 E, 有

$$(L \overset{\lambda}{\otimes} E)^* = L^* \overset{\gamma}{\otimes} E^*$$

和

$$(L \overset{\gamma}{\otimes} E)^* = B(L, E^*) = L^* \overset{\lambda}{\otimes} E^*.$$

Banach 映射空间 $\mathcal{O}$ 定义为: 给定任意一对 Banach 空间 (E,F), 有线性子空间 $\mathcal{O}(E,F)\subseteq B(E,F)$ 和范数 $\|\cdot\|_{\mathcal{O}}$, 满足对于每个 $\varphi\in\mathcal{O}(E,F)$, 有

(a) $\|\varphi\|\leqslant\|\varphi\|_{\mathcal{O}}$ 和

(b) 对于任意有界线性映射 $r: D\to E$ 和 $s: F\to G$,

$$\|s\circ\varphi\circ r\|_{\mathcal{O}}\leqslant\|s\|\cdot\|\varphi\|_{\mathcal{O}}\cdot\|r\|.$$

定义 Grothendieck 原子映射空间 $\mathcal{N}^B(E,F)$ 为下述典范映射的像

$$\Phi: E^* \overset{\gamma}{\otimes} F \to E^* \overset{\lambda}{\otimes} F \subseteq B(E,F)$$

和由如下线性同构决定的商范数 ν^B

$$\mathcal{N}^B(E,F)\cong\frac{E^* \overset{\gamma}{\otimes} F}{\ker\Phi}.$$

如果 E 或 F 是有限维的，则有

$$\mathcal{N}^B(E,F) = E^* \overset{\gamma}{\otimes} F.$$

给定 Banach 空间 E 和 F, 线性映射 $\varphi: E\to F$ 满足

$$\iota^B(\varphi) = \sup\{\nu^B(\varphi\,|_L) : L\subseteq E\text{且}L\text{是有限维的}\} < +\infty,$$

我们称 φ 是可积的. 令 $\mathcal{I}^B(E,F)$ 是所有从 E 到 F 的可积映射构成的 Banach 映射空间. 由 Banach 空间理论知， $\iota^B(\varphi)\leqslant 1$ 当且仅当对于所有的有限维 Banach 空间 L, 有

$$\|id_L\otimes\varphi : L \overset{\lambda}{\otimes} E \to L \overset{\gamma}{\otimes} F\|\leqslant 1.$$

设 $\varphi: E \to F$ 是 Banach 空间 E, F 之间的线性映射，定义取值在 $[0,\infty]$ 中的 $\pi_1^B(\varphi)$ 如下：

$$\begin{aligned}\pi_1^B(\varphi) &= \|id_{\ell_1} \otimes \varphi : \ell_1 \overset{\lambda}{\otimes} E \to \ell_1 \overset{\gamma}{\otimes} F\| \\ &= \sup_{n\in\mathbb{N}} \|id_{\ell_1^n} \otimes \varphi : \ell_1^n \overset{\lambda}{\otimes} E \to \ell_1^n \overset{\gamma}{\otimes} F\|.\end{aligned}$$

如果 $\pi_1^B(\varphi) < \infty$, 则称 φ 是从 E 到 F 的 1- 绝对可和映射，并记 $\Pi_1^B(E,F)$ 为所有从 E 到 F 的 1- 绝对可和映射构成的 Banach 映射空间.

对于给定的 Banach 空间 E 和 F, 有如下的压缩包含

$$\mathcal{N}^B(E,F) \subseteq \mathcal{I}^B(E,F) \subseteq \Pi_1^B(E,F) \subseteq B(E,F)$$

和不等式

$$\nu^B(\cdot) \geqslant \iota^B(\cdot) \geqslant \pi_1^B(\cdot) \geqslant \|\cdot\|.$$

Hahn-Banach 定理告诉我们：在有界映射空间 $(B(\cdot,\cdot),\|\cdot\|)$ 中 $\mathbb{C}$ 具有内射性．在经典的 Banach 空间理论中， Banach 空间 E 在 $(B(\cdot,\cdot),\|\cdot\|)$ 中具有 $\{\ell_1^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 有限可表示性当且仅当 E 同构于某个超积 $\prod \ell_1^{n(\alpha)}$ 的子空间.

由上可知 $(B(\cdot,\cdot),\|\cdot\|)$ 是最大的 Banach 映射空间，很自然地在其他映射空间中也可研究相应的内射性和有限可表示性．在本文中，我们主要研究原子映射空间 (它是上述四个 Banach 映射空间中最小的一个) 上的这两个性质．在第二节中我们引入原子映射空间 $(\mathcal{N}^B(\cdot,\cdot),\nu^B)$ 上的内射性并证明了任意有限维的 Banach 空间在原子映射空间 $(\mathcal{N}^B(\cdot,\cdot),\nu^B)$ 中都具有内射性．作为推论， $(\mathcal{N}^B(\cdot,\cdot),\nu^B)$ 中的 Hahn-Banach 定理成立. 作为第二节的应用，在第三节中我们将研究在原子映射空间 $(\mathcal{N}^B(\cdot,\cdot),\nu^B)$ 中的 $\{\ell_1^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 有限可表示性．我们得到 $\mathbb{C}$ 是在原子映射空间 $(\mathcal{N}^B(\cdot,\cdot),\nu^B)$ 中的唯一具有 $\{\ell_1^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 有限可表示性的 Banach 空间.

在文 [4] 中，第一和第三作者研究了可积映射空间中的局部理论，其中证明了任意对偶 Banach 空间在可积映射空间中是内射的．我们计划研究 1- 绝对可和映射空间中的内射性和有限可表示性，进而探讨四类映射空间中的内射性和有限可表示性之间的关系.

2 广义 Hahn-Banach 定理

设 E 为 Banach 空间，且 Banach 空间 F_0, F 满足 $F_0 \subseteq F$, 每个有界线性映射 $\varphi_0 : F_0 \to E$ 有满足 $\|\varphi\| = \|\varphi_0\|$ 的线性扩张 $\varphi: F \to E$, 我们称 E 在 $(B(\cdot,\cdot),\|\cdot\|)$ 中具有内射性．下述交换图对于我们理解这个概念是有帮助的：

$$\begin{array}{ccc} & & E \\ & \overset{\varphi_0}{\nearrow} & \uparrow \varphi \\ F_0 & \subseteq & F \end{array}$$

于是经典的 Hahn-Banach 定理断言 $\mathbb{C}$ 是内射 Banach 空间. 在 $(B(\cdot,\cdot),\|\cdot\|)$ 中, 内射 Banach 空间，内射对偶空间，内射二次对偶空间在 20 世纪 50 年代由 Nachbin[5], Goodner[6], Kelley[7], Hasumi[8] 和 Grothendieck[9] 所刻画 (见 [10]). 我们将这些结果总结如下.

定理 2.1 设 E 是 Banach 空间.

(1) E 具有内射性当且仅当 E 同构于 $C(X)$, 其中 X 是 Hausdorff Stonean 空间;

(2) E^* 具有内射性当且仅当 E^* 同构且弱 * 同胚于 $L_\infty(X,\mu)$; 特别地，若 E^* 具有内射性且 $\dim E^*=n$, 则 $E^*=\ell_\infty^n$;

(3) E^{**} 具有内射性当且仅当存在下面有关压缩的图在点范拓扑下是近似交换:

$$\begin{tikzcd} & \ell_\infty^{n_\alpha} \arrow[dr, "\psi_\alpha"] & \\ E \arrow[ur, "\varphi_\alpha"] \arrow[rr, "id_E"] & & E \end{tikzcd}$$

我们首先研究 $(\mathcal{N}^B(\cdot,\cdot),\nu^B)$ 中的内射性和 Hahn-Banach 定理.

定义 2.1 设 E 为 Banach 空间，且 Banach 空间 F_0,F 满足 $F_0\subseteq F$, 每个原子映射 $\varphi_0\in\mathcal{N}^B(F_0,E)$ 都有满足 $\nu^B(\varphi)=\nu^B(\varphi_0)$ 的线性延拓 $\varphi\in\mathcal{N}^B(F,E)$, 称 E 在 $(\mathcal{N}^B(\cdot,\cdot),\nu^B)$ 中具有内射性.

给定 Banach 空间 E 和 F, 若有界线性映射 $\varphi:E\to F$ 是从 $E_{\|\cdot\|\leqslant1}$ 到 $F_{\|\cdot\|\leqslant1}$ 的满射，称 φ 是正合商映射. 首先叙述一个众所周知的简单引理.

引理 2.1 给定 Banach 空间 E 和 F, 则有界线性映射 $\varphi:E\to F$ 是等距当且仅当 $\varphi^*:F^*\to E^*$ 是正合商映射.

下述定理可以被看作是 $(\mathcal{N}^B(\cdot,\cdot),\nu^B)$ 中的广义 Hahn-Banach 定理. 但是其证明与经典 Hahn-Banach 定理的证明十分不同. 经典 Hahn-Banach 定理的证明关键在于将泛函延拓到高一维的空间中.

定理 2.2 若 L 是有限维的 Banach 空间，则 L 在 $(\mathcal{N}^B(\cdot,\cdot),\nu^B)$ 中具有内射性.

证 假设 L 是有限维 Banach 空间. 对于任意的 Banach 空间 $F_0\subseteq F$, 由第一节可得下述等距同构

$$\mathcal{N}^B(F_0,L)=F_0^*\overset{\gamma}{\otimes}L=(F_0\overset{\lambda}{\otimes}L^*)^*$$

和

$$\mathcal{N}^B(F,L)=F^*\overset{\gamma}{\otimes}L=(F\overset{\lambda}{\otimes}L^*)^*.$$

于是，有下列交换图：

$$\begin{array}{ccc} (F \overset{\lambda}{\otimes} L^*)^* & \longrightarrow & (F_0 \overset{\lambda}{\otimes} L^*)^* \\ \| & & \| \\ \mathcal{N}^B(F,L) & \longrightarrow & \mathcal{N}^B(F_0,L) \end{array}$$

其中第一行是嵌入映射 $F_0 \overset{\lambda}{\otimes} L^* \hookrightarrow F \overset{\lambda}{\otimes} L^*$ 的对偶，第二行是限制映射，两边的列表示恒等映射.

由于嵌入映射是等距的，由引理 2.1 可得第一行和第二行都是正合商映射. 因此对于 $\varphi_0 \in \mathcal{N}^B(F_0,L)$, 存在一个线性延拓 $\varphi \in \mathcal{N}^B(F,L)$ 满足 $\nu^B(\varphi) \leqslant \nu^B(\varphi_0)$. 又由于 $\varphi_0 = \varphi\,|_{F_0}$, $\nu^B(\varphi_0) \leqslant \nu^B(\varphi)$, 因此 $\nu^B(\varphi) = \nu^B(\varphi_0)$.

于是由定义 2.1 可得 L 在 $(\mathcal{N}^B(\cdot,\cdot),\nu^B)$ 中具有内射性.

由定理 2.1 和定理 2.2 可知，有限维 Banach 空间 $\ell_1^n(n>1)$ 在 $(\mathcal{N}^B(\cdot,\cdot),\nu^B)$ 中具有内射性而在 $(B(\cdot,\cdot),\|\cdot\|)$ 中不具有内射性.

3 $\{\ell_1^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 有限可表示性

在这一节中，我们将给出第二节的一个应用. 我们先回顾一下 Banach 空间理论中的一些相关概念.

若 $r: E \to F$ 是有限维 Banach 空间之间的线性同构，则记作 $E \overset{r}{\cong} F$. 给定两个有限维 Banach 空间 E, F, 定义它们的 Banach-Mazur 距离 $d(E,F)$ 为

$$d(E,F) \triangleq \inf\{\|r\|\cdot\|r^{-1}\| : E \overset{r}{\cong} F\}.$$

设 E 为 Banach 空间，如果对于 E 的任一有限维子空间 L 以及 $\varepsilon>0$, 都存在某个 ℓ_1^n 的子空间 S, 使得 $d(L,S)<1+\varepsilon$, 我们称 E 在 $(B(\cdot,\cdot),\|\cdot\|)$ 下是 $\{\ell_1^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 有限可表示的. 在经典的 Banach 空间理论中 (见 [11]), Banach 空间 E 在 $(B(\cdot,\cdot),\|\cdot\|)$ 下是 $\{\ell_1^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 有限可表示当且仅当 E 同构于某个超积 $\prod \ell_1^{n(\alpha)}$ 的一个子空间.

在 $(\mathcal{N}^B(\cdot,\cdot),\nu^B)$ 下具有 $\{\ell_1^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 有限可表示的 Banach 空间要满足什么条件？

首先我们定义 $d_\nu(E,F)$ 如下：

$$d_\nu(E,F) \triangleq \inf\{\|\nu^B(r)\|\cdot\|\nu^B(r^{-1})\| : E \overset{r}{\cong} F\}.$$

定义 3.1 设 E 为 Banach 空间，如果对于每个 E 的有限维子空间 L 和 $\varepsilon>0$, 都存在某个 ℓ_1^n 的子空间 S, 使得 $d_\nu(L,S)<1+\varepsilon$, 我们称 E 在 $(\mathcal{N}^B(\cdot,\cdot),\nu^B)$ 中是 $\{\ell_1^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 有限可表示的.

引理 3.1 假设 E 和 F 是 Banach 空间，且 E 是有限维的，则单位球 $B_1(\mathcal{N}^B(E,F))$ 在点范数拓扑的意义下是 $\mathcal{N}^B(E,F)$ 的闭子集.

证 假设 $\varphi : E \to F$ 是 $B_1(\mathcal{N}^B(E,F))$ 中网 $\{\psi_\beta\}$ 的一个点范数极限. 如果固定一组向量基 $x_j \in E(1 \leqslant j \leqslant n)$, 则相应的对偶基 $f_i \in E^*$ 满足

$$f_i\Big(\sum_{j=1}^n c_j x_j\Big) = c_i.$$

于是有

$$\psi_\beta = \sum_{i=1}^n f_i \otimes \psi_\beta(x_i)$$

和

$$\varphi = \sum_{i=1}^n f_i \otimes \varphi(x_i).$$

这样

$$\begin{aligned}\nu^B(\psi_\beta - \varphi) &= \Big\| \sum_{i=1}^n f_i \otimes (\psi_\beta(x_i) - \varphi(x_i)) \Big\|_{E^* \overset{\gamma}{\otimes} F} \\ &\leqslant \sum_{i=1}^n \|f_i\| \cdot \|\psi_\beta(x_i) - \varphi(x_i)\| \to 0.\end{aligned}$$

因为 $\nu^B(\psi_\beta) \leqslant 1$ 且

$$\nu^B(\varphi) \leqslant \nu^B(\varphi - \psi_\beta) + \nu^B(\psi_\beta),$$

可推得 $\nu^B(\varphi) \leqslant 1$ 以及 $\varphi \in B_1(\mathcal{N}^B(E,F))$.

定理 2.2 是证明下述重要引理 3.2 的关键点.

引理 3.2 对于任意有限维 Banach 空间 L, 如果 L 在 $(\mathcal{N}^B(\cdot,\cdot),\nu^B)$ 中是 $\{\ell_1^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 有限可表示的，则存在图

$$\begin{array}{ccccc} & & \ell_1^{n_\alpha} & & \\ & \overset{\varphi_\alpha}{\nearrow} & & \overset{\psi_\alpha}{\searrow} & \\ L & & \overset{id_L}{\longrightarrow} & & L \end{array}$$

在点范数拓扑的意义下是近似交换的，其中 $\nu^B(\varphi_\alpha) \leqslant 1$, $\nu^B(\psi_\alpha) \leqslant 1$.

证 假设 L 在 $(\mathcal{N}^B(\cdot,\cdot),\nu^B)$ 中是 $\{\ell_1^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 有限可表示的，由定义 3.1 可得对于任意 $\varepsilon > 0$ 存在整数 n_ε, 子空间 $S_\varepsilon \overset{J}{\hookrightarrow} \ell_1^{n_\varepsilon}$ 和线性同构 $r_\varepsilon : L \to S_\varepsilon$ 满足 $\nu^B(r_\varepsilon)\cdot\nu^B(r_\varepsilon^{-1}) < 1+\varepsilon$ 成立. 不失一般性, 假设 $\nu^B(r_\varepsilon) \leqslant 1$ 和 $\nu^B(r_\varepsilon^{-1}) < 1+\varepsilon$. 由定理 2.2 得 L 在 $(\mathcal{N}^B(\cdot,\cdot),\nu^B)$ 中是内射的，因此存在 r_ε^{-1} 的延拓 $r'_\varepsilon : \ell_1^{n_\varepsilon} \to L$ 满足 $\nu^B(r'_\varepsilon) = \nu^B(r_\varepsilon^{-1}) < 1+\varepsilon$. 于是图

$$\begin{array}{ccccc} & & \ell_1^{n_\varepsilon} & & \\ & \overset{J\circ r_\varepsilon}{\nearrow} & & \overset{\frac{r'_\varepsilon}{1+\varepsilon}}{\searrow} & \\ L & & \overset{id_L}{\longrightarrow} & & L \end{array}$$

在点范数拓扑的意义下近似交换，其中满足 $\nu^B(J\circ r_\varepsilon) \leqslant 1$ 和 $\nu^B\big(\frac{r'_\varepsilon}{1+\varepsilon}\big) < 1$.

引理 3.3　假设 L 是有限维的 Banach 空间，$\{f_\alpha\} \subseteq L^*, f \in L^*$, 使得 $f_\alpha \to f$(其中收敛是点收敛), 则 $\|f_\alpha - f\| \to 0$.

证　假设 $\dim L = n$, 选取 L 的一组向量基 $\{e_j\}_{j=1}^n$, L^* 的对偶基 $\{f_i\}_{i=1}^n$ 满足

$$f_i(e_j) = \delta_{ij}.$$

因此有

$$f_\alpha = \sum_{i=1}^n f_\alpha(e_i) f_i$$

和

$$f = \sum_{i=1}^n f(e_i) f_i.$$

由假设可得

$$\begin{aligned}\|f_\alpha - f\| &= \Big\| \sum_{i=1}^n (f_\alpha(e_i) - f(e_i)) f_i \Big\| \\ &\leqslant \sum_{i=1}^n |f_\alpha(e_i) - f(e_i)| \cdot \|f_i\| \to 0.\end{aligned}$$

下面我们给出在 $(\mathcal{N}^B(\cdot,\cdot), \nu^B)$ 中 $\{\ell_1^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 有限可表示性的一个刻画.

定理 3.1　Banach 空间 E 是在 $(\mathcal{N}^B(\cdot,\cdot), \nu^B)$ 中 $\{\ell_1^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 有限可表示当且仅当 $E = \mathbb{C}$.

证　既然

$$\nu^B(id_{\mathbb{C}}) = \|id_{\mathbb{C}}\| = 1,$$

由定义 3.1 可推得 $\mathbb{C}$ 在 $(\mathcal{N}^B(\cdot,\cdot), \nu^B)$ 中是 $\{\ell_1^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 有限可表示的.

为了证明必要性，假设 E 在 $(\mathcal{N}^B(\cdot,\cdot), \nu^B)$ 中是 $\{\ell_1^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 有限可表示的. 对于任意有限维子空间 $L \subseteq E$, 由定义 3.1 可得 L 在 $(\mathcal{N}^B(\cdot,\cdot), \nu^B)$ 中是 $\{\ell_1^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 有限可表示的. 由引理 3.2 可得存在满足 $\nu^B(\varphi_\alpha) \leqslant 1$, $\nu^B(\psi_\alpha) \leqslant 1$ 的线性映射图

$$\begin{tikzcd} & \ell_1^{n_\alpha} \arrow[dr, "\psi_\alpha"] & \\ L \arrow[ur, "\varphi_\alpha"] \arrow[rr, "id_L"] & & L \end{tikzcd}$$

在点范数拓扑的意义下是近似交换的. 由引理 3.1 可得 $\nu^B(id_L) \leqslant 1$.

取对偶，得到下图

$$\begin{tikzcd} & \ell_\infty^{n_\alpha} \arrow[dl, "\varphi_\alpha^*"'] & \\ L^* & & L^* \arrow[ll, "id_{L^*}"'] \arrow[ul, "\psi_\alpha^*"'] \end{tikzcd}$$

对于任意的 $x^* \in L^*$ 和 $x \in L$, 有

$$(\varphi_\alpha^* \circ \psi_\alpha^*)(x^*)(x) = x^*((\psi_\alpha \circ \varphi_\alpha)(x)) \to x^*(x).$$

由引理 3.3 可得对于任意的 $x^* \in L^*$, 有

$$\|\varphi_\alpha^* \circ \psi_\alpha^*)(x^*) - x^*\| \to 0.$$

由于 $\|\varphi_\alpha^*\| = \|\varphi_\alpha\| \leqslant \nu^B(\varphi_\alpha) \leqslant 1$ 和 $\|\psi_\alpha^*\| = \|\psi_\alpha\| \leqslant \nu^B(\psi_\alpha) \leqslant 1$, 以及定理 2.1 (3), 可推出 $L^{***} = L^*$ 在 $(B(\cdot,\cdot), \|\cdot\|)$ 中是内射的. 由定理 2.1 (2), 可假设 $L^* = \ell_\infty^n$, 于是有 $L = \ell_1^n$. 下面我们仅需证明 $n = 1$.

如果 $n \geqslant 2$, 由定义 3.1 可知 ℓ_1^2 在 $(\mathcal{N}^B(\cdot,\cdot), \nu^B)$ 中是 $\{\ell_1^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 有限可表示的. 于是有 $\nu^B(id_{\ell_1^2}) \leqslant 1$. 因此由第一节中关于 ι^B 的定义和结果可得 $\iota^B(id_{\ell_1^2}) = \nu^B(id_{\ell_1^2}) \leqslant 1$. 于是对于每个有限维 Banach 空间 K, 有

$$\ell_1^2 \overset{\lambda}{\otimes} K = \ell_1^2 \overset{\gamma}{\otimes} K.$$

选择 $K = \ell_\infty^2$. 由文 [12] 中 (2.6.2) 式类似的结果可得

$$\begin{aligned}\ell_1^2 \overset{\lambda}{\otimes} \ell_\infty^2 &= \ell_1^2 \overset{\lambda}{\otimes} (\mathbb{C} \oplus_\infty \mathbb{C}) \\ &= (\ell_1^2 \overset{\lambda}{\otimes} \mathbb{C}) \oplus_\infty (\ell_1^2 \overset{\lambda}{\otimes} \mathbb{C}) \\ &= \ell_1^2 \oplus_\infty \ell_1^2\end{aligned}$$

和

$$\begin{aligned}\ell_1^2 \overset{\gamma}{\otimes} \ell_\infty^2 &= (\ell_\infty^2 \overset{\lambda}{\otimes} \ell_1^2)^* \\ &= (\ell_1^2 \oplus_\infty \ell_1^2)^* \\ &= \ell_\infty^2 \oplus_1 \ell_\infty^2.\end{aligned}$$

由于 $\ell_1^2 \oplus_\infty \ell_1^2$ 与 $\ell_\infty^2 \oplus_1 \ell_\infty^2$ 之间的恒等映射不是等距的，因此有

$$\ell_1^2 \overset{\lambda}{\otimes} \ell_\infty^2 \neq \ell_1^2 \overset{\gamma}{\otimes} \ell_\infty^2.$$

这个矛盾推出 ℓ_1^2 在 $(\mathcal{N}^B(\cdot,\cdot), \nu^B)$ 中不具有 $\{\ell_1^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 有限可表示性. 因此有 $n = 1$ 和 $L = \mathbb{C}$. 于是 E 的每一个有限维子空间都是 $\mathbb{C}$, 从而可得 $E = \mathbb{C}$.

参 考 文 献

[1] Grothendieck A. Products tensoriels topologiques et espaces nuclearies [J]. *Memoirs of the American Mathematical Society*, 16, Providence, Rhode Island, 1955.

[2] Defant A, Floret K. Tensor norms and operator ideals [M]. Amsterdam: North-Holland, 1993.

[3] Effros E G, Ruan Z J. Operator spaces [M]//London Mathematical Society Monographs, New Series 23, New York: The Clarendon Press, Oxford University Press, 2000.

[4] Dong P C, Jiang H Y. Local theory of integral mapping spaces [J]. *J Math Anal Appl*, 2018, 465:814–824.

[5] Nachbin L. A theorem of the Hahn-Banach type for linear transformation [J]. *Trans Amer Math Soc*, 1950, 68:28–46.

[6] Goodner D B. Projections in normed linear spaces [J]. *Trans Amer Math Soc*, 1950, 69:89–108.

[7] Kelley J L. Banach spaces with the extension property [J]. *Trans Amer Math Soc*, 1952, 72:323–326.

[8] Hasumi M. The extension property of complex Banach spaces [J]. *Tôhoku Math J*, 1958, 10:135–142.

[9] Grothendieck A. Une caractérisation vectorielle-métrique des espaces L^1 [J]. *Canad J Math*, 1955, 7:552–561.

[10] Lacey H E. The isometric theory of classical banach spaces [M]//Grundlehren Math Wiss, 208, New York: Springer-Verlag, 1974.

[11] Heinrich S. Ultraproducts in Banach space theory [J]. *J Reine Angew Math*, 1980, 313:72–104.

[12] Pisier G. Introduction to operator space theory [M]//London Math Soc Lecture Notes Series, 294, Cambridge: Cambridge University Press, 2003.

Generalized Hahn-Banach Theorem in Nuclear Mapping Spaces

DONG Pingchuan[1]　DONG Zhe[2]　JIANG Haiyi[3]

[1]Department of Mathematics, New York University, New York, NY 10012-1110, USA. E-mail: pd2170@nyu.edu

[2]Corresponding Author. School of Mathematical Sciences, Zhejiang University, Hangzhou 310027, China. E-mail: dongzhe@zju.edu.cn

[3]School of Mathematical Sciences, Zhejiang University, Hangzhou 310027, China. E-mail: jianghaiyi@zju.edu.cn

Abstract Classical Hahn-Banach theorem says that $\mathbb{C}$ is injective in the system of bounded mapping spaces $(B(\cdot,\cdot),\|\cdot\|)$. It is the key initial ingredient of functional analysis. In Section 2 the authors mainly investigate its analogue in the system of nuclear mapping spaces

$(\mathcal{N}^B(\cdot,\cdot),\nu^B)$. The authors obtain that any finite-dimensional Banach space is injective in the system $(\mathcal{N}^B(\cdot,\cdot),\nu^B)$. This can be considered as the generalized Hahn-Banach theorem in the system $(\mathcal{N}^B(\cdot,\cdot),\nu^B)$.

In the classical Banach space theory, a Banach space E is finitely representable in $\{\ell_1^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ in the system $(B(\cdot,\cdot),\|\cdot\|)$ if and only if E is isometric to a subspace of some ultraproduct $\prod \ell_1^{n(\alpha)}$. As one interesting application of Section 2, in Section 3 they study the finite representability in $\{\ell_1^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ in the system $(\mathcal{N}^B(\cdot,\cdot),\nu^B)$. They obtain that $\mathbb{C}$ is the unique Banach space which is finitely representable in $\{\ell_1^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ in the system $(\mathcal{N}^B(\cdot,\cdot),\nu^B)$. This is quite strange and different from the classical result in Banach space theory.

Keywords Hahn-Banach theorem, Nuclear mapping space, Injectivity, Finite representability

2000 MR Subject Classification 46B07

The English translation of this paper will be published in

Chinese Journal of Contemporary Mathematics, Vol. 41 No. 4, 2020

by ALLERTON PRESS, INC., USA