数 学 年 刊 A 辑
2020, 41(4):409–428
DOI: 10.16205/j.cnki.cama.2020.0029

平均场倒向重随机微分方程及其应用*

朱庆峰[1] 王天啸[2] 石玉峰[3]

提要 研究了平均场倒向随重机微分方程，得到了平均场倒向重随机微分方程解的存在唯一性. 基于平均场倒向重随机微分方程的解，给出了一类非局部随机偏微分方程解的概率解释. 讨论了平均场倒向重随机系统的最优控制问题，建立了庞特利亚金型的最大值原理. 最后讨论了一个平均场倒向重随机线性二次最优控制问题，展示了上述最大值原理的应用.

关键词 平均场，倒向重随机微分方程，非局部随机偏微分方程，最大值原理，线性二次最优控制

MR (2000) 主题分类 60H10, 60H15, 93E20

中图法分类 O211.6

文献标志码 A

文章编号 1000-8314(2020)04-0409-20

1 引 言

为了给出一类拟线性随机偏微分方程 (SPDEs) 的概率解释， Pardoux 和 Peng[1] 引入了如下倒向重随机微分方程 (BDSDEs):

$$Y_t = \xi + \int_t^T f(s, Y_s, Z_s)\mathrm{d}s + \int_t^T g(s, Y_s, Z_s)\overleftarrow{\mathrm{d}} B_s - \int_t^T Z_s \overrightarrow{\mathrm{d}} W_s, \quad 0 \leqslant t \leqslant T,$$

这里关于 $\{B_t\}$ 的积分是倒向积分，关于 $\{W_t\}$ 的积分是标准正向积分. 事实上，Pardoux 和 Peng[1] 开创了用 BDSDE 研究 SPDE 的新方法，由此得到了 SPDE 的一系列结果 (参见文 [2–16] 及相关文献). 最近倒向重随机系统的最优控制问题引起了广泛的研究兴趣，见文 [17–20].

1956 年， Kac[21] 提出了如下 McKean-Vlasov 随机微分方程 (SDEs):

$$\mathrm{d}X_t = b(X_t, \mu_t)\mathrm{d}t + \overrightarrow{\mathrm{d}} W_t, \quad t \in [0, T], \quad X_0 = x, \tag{1.1}$$

其中

$$b(X_t, \mu_t) = \int_\Omega b(X_t(\omega), X_t(\omega'))\mathbb{P}(\mathrm{d}\omega') = \mathbb{E}[b(\xi, X_t)]\Big|_{\xi = X_t},$$

本文 2018 年 11 月 17 日收到， 2020 年 8 月 10 日收到修改稿.

[1]山东财经大学数学与数量经济学院，山东省区块链金融重点实验室，济南 250014; 山东大学金融研究院和数学学院，济南 250100. E-mail: zhuqf508@163.com

[2]四川大学数学学院，成都 610065. E-mail: wtxiao2014@scu.edu.cn

[3]通信作者. 山东大学金融研究院和数学学院，济南 250100. E-mail: yfshi@sdu.edu.cn

*本文受到国家重点研发计划 (No. 2018YFA0703900)，国家自然科学基金 (No. 11871309, No. 11671229, No. 11971332, No. 11931011, No. 71871129, No. 11371226, No. 11301298)， 山东省自然科学基金 (No. ZR2019MA013)， 山东省高等教育科技计划项目 (No. J17KA162) 和泰山学者工程专项经费 (No. tsqn20161041) 项目的资助.

且 $b:\mathbb{R}^m\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 为有界的 Borel 可测函数， $\mu_t(\cdot)$ 为过程 X_t 的概率分布． 1966 年 McKean[22] 首次对方程 (1.1) 进行研究. 此后，许多学者在 McKean-Vlasov 随机微分方程的理论和应用方面做了大量的研究，见文 [23–29].

需要指出的是，方程 (1.1) 是如下方程的特例：

$$X_t=x+\int_0^t b(s,X_s,\mathbb{E}\phi^b[s,X_s,\xi]_{\xi=X_s})\mathrm{d}s+\int_0^t \sigma(s,X_s,\mathbb{E}\phi^\sigma[s,X_s,\xi]_{\xi=X_s})\overrightarrow{\mathrm{d}}W_s, \quad (1.2)$$

方程 (1.2) 可以看作是经典 SDEs 的自然推广. 数学平均场方法在物理、化学、经济、金融和博弈论等不同领域发挥着重要作用, 见文 [30–32]. 受 McKean-Vlasov 随机微分方程的启发，Buckdahn 等 [33] 采用纯随机方法研究了如下平均场倒向随机微分方程 (MF-BSDEs):

$$Y_t=\xi+\int_t^T \mathbb{E}'f(s,\omega,\omega',Y_s(\omega),Z_s(\omega),Y_s(\omega'),Z_s(\omega'))\mathrm{d}s-\int_t^T Z_s\overrightarrow{\mathrm{d}}W_s, \quad t\in[0,T]. \quad (1.3)$$

在本文中，我们引入如下形式的平均场倒向重随机微分方程 (MF-BDSDEs) ：

$$\begin{aligned}Y_t=\xi&+\int_t^T f(s,Y_s,Z_s,\Gamma^f(s,Y_s,Z_s))\mathrm{d}s\\&+\int_t^T g(s,Y_s,Z_s,\Gamma^g(s,Y_s,Z_s))\overleftarrow{\mathrm{d}}B_s-\int_t^T Z_s\overrightarrow{\mathrm{d}}W_s, \end{aligned}\quad (1.4)$$

其中

$$[\Gamma^l(s,Y_s,Z_s)](\omega)\doteq\int_\Omega \theta^l(s,\omega,\omega',Y_s(\omega),Z_s(\omega),Y_s(\omega'),Z_s(\omega'))\mathbb{P}(\mathrm{d}\omega'), \quad l=f,g.$$

为了方便起见，在不引起混淆的情况下，我们使用记号

$$\mathbb{E}'[\theta^l(s,Y_s,Z_s,Y'_s,Z'_s)]\doteq\Gamma^l(s,Y_s,Z_s),$$

借鉴文 [1] 的基本思想, 我们首先讨论 MF-BDSDE (1.4) 解的存在性和唯一性, 这扩展了文 [1, 34] 的结果. 需要指出的是，MF-BDSDE 不仅仅是从数学角度对 BDSDE 和 MF-BSDE 的自然推广，我们对这些问题的研究也有以下两个方面的动机.

众所周知, 近年来 SPDEs 的研究日益成为一个热门问题, 其中 McKean-Vlasov 型的 SPDEs 在文 [29] 中被讨论. 实际上，这类方程是由大量 SDEs 的经验分布以及平均场相互作用得到的连续极限，更多细节请参考文 [27–28]. 另一方面， Buckdahn 等 [34] 研究了一类非局部确定性偏微分方程. 利用倒向半群方法, 借助 Markov 型的 MF-BSDE (1.3) 和 McKean-Vlasov 型的 SDEs, 得到了一类非局部偏微分方程粘性解的存在唯一性. 综合上述两方面的结果，本文将对一类非局域 SPDEs 进行讨论. 由于我们的倒向方程允许依赖于 $Z^{0,x_0}(\cdot)$, 因此本文中的非局部偏微分方程并不是文 [34] 中确定性偏微分方程到随机情况的直接推广. 在我们的 SPDEs 中需要一些额外的条件，详细信息请参阅下面的 (4.3). 另一方面，与文 [1, 34] 中的情况相比，由于 SPDEs 的非局域性和对应解 $u(t,x)$ 的可测性，我们需要引入 $u'(t,x)$, 详情请参见下面的注 4.1. 我们不研究这类方程的极限结果，而是从其他方面来研究. 利用这类 SPDEs 与解耦的平均场正倒双随机微分方程之间的联系，得出了此类 SPDEs 解的概率解释，从而把文 [1] 中的结果推广到平均场情形.

另一个动机来源于对最优控制问题和随机微分对策问题的研究. 一方面，文 [35–38] 研究了平均场 (正向) SDEs 的最优控制问题，得到了相应的最大值原理. 另一方面，文 [17–19] 研究了倒向重随机系统的最优控制问题，其中还研究了相应的线性二次最优控制问题和非零和微分博弈问题. 综合上述两方面的结果，本文讨论平均场倒向重随机系统

的最优控制问题．由于方程 (5.1) 中的系数 $\Gamma^l, l=f,g$ 比文 [35–37] 中相应的系数更一般化，我们必须在伴随方程中引入 $\mathbb{E}^*[\cdot]$，它不同于 $\mathbb{E}'[\cdot]$，这种技术首先由 Shi 等 [39] 引入的．此外，由于 θ^f 、 θ^g 和 l 被允许依赖于 $u(\cdot,\omega')$，我们的最大值原理 (5.9) 中出现了一些新的项，我们用 $\mathbb{E}^*[\cdot]$ 表示．我们相信这些新特性将导致一些其他有趣的结果，我们希望在未来仔细探索和研究它们．

在本文完成之际，我们了解到 Xu[9] 讨论了某种平均场 BDSDEs，并建立了与 SPDEs 的联系．对比文 [9] 中的结果，我们本文中的结果有以下几点不同．首先，我们注意到在处理非局部 SPDEs 的概率解释时，文 [9] 中有一个不足之处．正如我们上面提到的 (具体见注 4.1)，在研究此类一般性问题时，文 [9] 中应该涉及到一个新的项 $u'(t,x)$，它不同于 $u(t,x)$，这是与文 [1, 34] 中相应结果的根本区别，否则，就会出现结构和可测性的矛盾．其次，我们研究了 MF-BDSDE 的最优控制问题，而文 [9] 给出了 MF-BDSDEs 的比较定理．第三，我们处理存在性和唯一性结果的方法与文 [9] 中的方法完全不同．

本文结构如下：在第 2 节中，我们给出了文中用到的一些符号．在第 3 节中，我们考虑了 MF-BDSDE (1.4) 解的存在性和唯一性．在第 4 节中，我们通过 MF-BDSDEs 给出了一类非局部 SPDEs 解的概率解释．在第 5 节中，我们讨论了 MF-BDSDEs 的最优控制问题．在第 6 节中，为展示第 5 节结果的应用，我们研究了一个平均场倒向双随机 LQ 控制问题．

2　预备知识

在本文中， $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ 是一个完备概率空间， $\{W_t; 0\leqslant t\leqslant T\}$ 和 $\{B_t; 0\leqslant t\leqslant T\}$ 是两个定义在 $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ 上分别取值于 $\mathbb{R}^d$ 和 $\mathbb{R}^l$ 的布朗 (Brown) 运动．设 $\mathcal{N}$ 表示 $\mathcal{F}$ 中的所有 P- 零元素集．定义

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_t^W &\doteq \sigma\{W_r;\ 0\leqslant r\leqslant t\}\vee\mathcal{N},\\
\mathcal{F}_{t,T}^B &\doteq \sigma\{B_T-B_r;\ t\leqslant r\leqslant T\}\vee\mathcal{N},\\
\mathcal{F}_t &\doteq \mathcal{F}_t^W\vee\mathcal{F}_{t,T}^B,\quad \forall t\in[0,T].
\end{aligned}$$

注意到集合 $\{\mathcal{F}_{t,T}^B, t\in[0,T]\}$ 是递增的， $\{\mathcal{F}_{t,T}^B, t\in[0,T]\}$ 是递减的，从而 $\{\mathcal{F}_t, t\in[0,T]\}$ 既不递增也不递减，从而不构成信息流．

假设 $(\Omega^2,\mathcal{F}^2,\mathbb{P}^2)=(\Omega\times\Omega,\mathcal{F}\otimes\mathcal{F},\mathbb{P}\otimes\mathbb{P})$ 是空间 $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ 与自身乘积空间的完备化，这里对于任意 $t\in[0,T]$, $\mathcal{F}_t^2=\mathcal{F}_t\otimes\mathcal{F}_t$, $\mathcal{F}_t\otimes\mathcal{F}_t$ 是 $\mathcal{F}_t\times\mathcal{F}_t$ 的完备化．任意定义在 Ω 上的随机变量 $\xi=\xi(\omega)$ 可被自然地推广到空间 Ω^2，即 $\xi'(\omega,\omega')=\xi(\omega)$, $(\omega,\omega')\in\Omega^2$．记 $H=\mathbb{R}^n$，等等，我们定义

$$\begin{aligned}
L^1(\Omega^2,\mathcal{F}^2,\mathbb{P}^2;H)=\{\xi\mid\xi:\Omega^2\to H,\ &\text{是 }\mathcal{F}^2-\text{可测且满足}\\
&\mathbb{E}^2|\xi|\equiv\int_{\Omega^2}|\xi(\omega',\omega)|\mathbb{P}(\mathrm{d}\omega')\mathbb{P}(\mathrm{d}\omega)<\infty\}.
\end{aligned}$$

对任意的 $\eta\in L^1(\Omega^2,\mathcal{F}^2,\mathbb{P}^2;H)$，记

$$\mathbb{E}'\eta(\omega,\cdot)=\int_\Omega\eta(\omega,\omega')\mathbb{P}(\mathrm{d}\omega'),\quad \mathbb{E}^*\eta.(\omega)=\int_\Omega\eta(\omega',\omega)\mathbb{P}(\mathrm{d}\omega').$$

特别地，如果 $\eta_1(\omega,\omega')=\eta_1(\omega')$, $\eta_2(\omega,\omega')=\eta_2(\omega)$, 那么

$$\mathbb{E}'\eta_1=\int_\Omega \eta_1(\omega')\mathbb{P}(\mathrm{d}\omega')=\mathbb{E}\eta_1,\quad \mathbb{E}^*\eta_2=\int_\Omega \eta_2(\omega)\mathbb{P}(\mathrm{d}\omega)=\mathbb{E}\eta_2.$$

当 ω 和 ω' 同时出现时，为了区分 ω 和 ω', 我们使用记号 $\mathbb{E}'$ 和 $\mathbb{E}^*$. 从现在开始，当讨论 MF-BDSDE (1.4) 时，映射 Γ^f 和 Γ^g 都是通过 $\mathbb{E}'$ 来定义的. 显然，算子 Γ^f 是非局部的，也就是说 $\Gamma^f(s,Y(s),Z(s))$ 在 ω 处的值 $\Gamma^f(s,\omega,Y(s,\omega),Z(s,\omega))$ 依赖于整个集合

$$\{(Y(s,\omega'),Z(s,\omega'))\ \big|\ \omega'\in\Omega\},$$

而不仅仅是 $(Y(s,\omega),Z(s,\omega))$.

最后，介绍后续中需要的一些函数空间：

$$\begin{aligned}&S^2([0,T];\mathbb{R}^n)\\=&\Big\{\varphi:[0,T]\times\Omega\to\mathbb{R}^n\ \Big|\ \varphi_t \text{ 是 } \mathcal{F}_t-\text{可测的连续过程满足}\\&\mathbb{E}(\sup_{0\leqslant t\leqslant T}|\varphi_t|^2)<\infty\Big\},\\&M^2(0,T;\mathbb{R}^n)\\=&\{\varphi:[0,T]\times\Omega\to\mathbb{R}^n\ \Big|\ \varphi_t \text{ 是 } \mathcal{F}_t-\text{可测的过程且满足}\\&\mathbb{E}\int_0^T|\varphi_t|^2\mathrm{d}t<\infty\},\\&L^2(\Omega,\mathcal{F}_T,P;\mathbb{R}^n)\\=&\{\xi:[0,T]\times\Omega\to\mathbb{R}^n\ \Big|\ \xi \text{ 是 } \mathcal{F}_T-\text{可测的随机变量且满足}\\&\mathbb{E}|\xi|^2<\infty\}.\end{aligned}$$

3 MF-BDSDEs 解的存在唯一性

本节讨论 MF-BDSDE(1.4) 解的存在唯一性，为了方便，将 MF-BDSDE(1.4) 重新写为：

$$\begin{aligned}Y_t=\xi&+\int_t^T f(s,Y_s,Z_s,\Gamma^f(s,Y_s,Z_s))\mathrm{d}s\\&+\int_t^T g(s,Y_s,Z_s,\Gamma^g(s,Y_s,Z_s))\overleftarrow{\mathrm{d}}B_s-\int_t^T Z_s\overrightarrow{\mathrm{d}}W_s,\end{aligned}\tag{3.1}$$

其中

$$[\Gamma^l(s,Y_s,Z_s)](\omega)\doteq\int_\Omega\theta^l(s,\omega,\omega',Y_s(\omega),Z_s(\omega),Y_s(\omega'),Z_s(\omega'))\mathbb{P}(\mathrm{d}\omega'),\quad l=f,g.$$

我们假设

(H1) (i) $\xi\in L^2(\Omega,\mathcal{F}_T,\mathbb{P};\mathbb{R}^n)$;

$f:\Omega\times[0,T]\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^{n\times d}\times\mathbb{R}^{k_1}\to\mathbb{R}^n$ 是可测的，且对所有 $(t,y,z,\gamma)\in[0,T]\times\mathbb{R}^{n+n\times d+k_1}$, $(t,\omega)\mapsto f(t,\omega,y,z,\gamma)$ 是 $\mathcal{F}_t$- 可测的；

$g:\Omega\times[0,T]\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^{n\times d}\times\mathbb{R}^{k_2}\to\mathbb{R}^{n\times l}$ 是可测的，且对所有 $(t,y,z,\gamma)\in[0,T]\times\mathbb{R}^{n+n\times d+k_2}$, $(t,\omega)\mapsto g(t,\omega,y,z,\gamma)$ 是 $\mathcal{F}_t$- 可测的；

$\theta^f:[0,T]\times\Omega^2\times\mathbb{R}^{2n+2n\times 2d}\to\mathbb{R}^{k_1}$ 是可测的，且对所有 $(t,y,z,y',z')\in[0,T]\times\mathbb{R}^{2n+2n\times 2d}$, 函数 $(t,\omega,\omega')\mapsto\theta^l(t,\omega,\omega',y,z,y',z')$ 是 $[0,T]$ 上 $\mathcal{F}_t^2$- 可测的;

$\theta^g:[0,T]\times\Omega^2\times\mathbb{R}^{2n+2n\times 2d}\to\mathbb{R}^{k_2}$ 是可测的，且对所有 $(t,y,z,y',z')\in[0,T]\times\mathbb{R}^{2n+2n\times 2d}$, 函数 $(t,\omega,\omega')\mapsto\theta^l(t,\omega,\omega',y,z,y',z')$ 是 $[0,T]$ 上 $\mathcal{F}_t^2$- 可测的.

(ii) f 和 g 关于 (y,z,γ) 满足一致 Lipschitz 条件，也就是说，存在正常数 L_i, K_i 和 α_j, 对于 $i=y,z,y',z',\gamma$, $j=1,2,3,4$, 满足:

$$
\begin{aligned}
&|f(t,y_1,z_1,\gamma_1)-f(t,y_2,z_2,\gamma_2)|\\
\leqslant{}& L_y|y_1-y_2|+L_z|z_1-z_2|+L_\gamma|\gamma_1-\gamma_2|,\\
&|g(t,y_1,z_1,\gamma_1)-g(t,y_2,z_2,\gamma_2)|^2\\
\leqslant{}& K_y^2|y_1-y_2|^2+\alpha_1|z_1-z_2|^2+\alpha_2|\gamma_1-\gamma_2|^2,\\
&|\theta^f(t,\omega,\omega',y_1,z_1,y_1',z_1')-\theta^f(t,\omega,\omega',y_2,z_2,y_2',z_2')|\\
\leqslant{}& L_y|y_1-y_2|+L_z|z_1-z_2|+L_{y'}|y_1'-y_2'|+L_{z'}|z_1'-z_2'|,\\
&|\theta^g(t,\omega,\omega',y_1,z_1,y_1',z_1')-\theta^g(t,\omega,\omega',y_2,z_2,y_2',z_2')|^2\\
\leqslant{}& K_y^2|y_1-y_2|^2+K_{y'}^2|y_1'-y_2'|^2+\alpha_3|z_1-z_2|^2+\alpha_4|z_1'-z_2'|^2,\\
&\forall(t,\omega,\omega')\in[0,T]\times\Omega^2,\ (y_i,z_i,y_i',z_i')\in(\mathbb{R}^{n+n\times d})^2,\ i=1,2,
\end{aligned}
$$

且

$$
\mathbb{E}\int_0^T|\mathbb{E}'\theta_0^l(t,\omega,\omega')|^2\mathrm{d}t<\infty,\quad \mathbb{E}\int_0^T|l_0(t,\omega)|^2\mathrm{d}t<\infty,\quad l=f,g,
$$

这里 $\theta_0^l(t,\omega,\omega')=\theta^l(t,\omega,\omega',0,0,0,0)$, $l_0(t,\omega)=l(t,\omega,0,0,0)$. 假设 $\alpha_1+\alpha_2\alpha_3+\alpha_2\alpha_4<1$.

注 3.1 对于 $l=f,g$, 由于 $\mathbb{E}\int_0^T|\mathbb{E}'\theta_0^l(t,\omega,\omega')|^2\mathrm{d}t<\infty$, 则存在常数 L_θ 满足 $|\theta_0^l(t,\omega,\omega')|\leqslant L_\theta$. 令 $L=\max\{L_i,K_i,\alpha_j\mid i=y,z,y',z',\theta;j=1,2,3,4\}$, 在 (H1) 成立下，可得

$$
|\theta^l(t,\omega,\omega',Y(t,\omega),Z(t,\omega),y,z)|\leqslant L(1+|Y(t,\omega)|+|Z(t,\omega)|+|y|+|z|),\quad l=f,g,
$$

因此

$$
|\Gamma^l(t,Y(t),Z(t))|\leqslant L(1+|Y(t)|+|Z(t)|+\mathbb{E}|Y(t)|+\mathbb{E}|Z(t)|),\quad l=f,g.
$$

类似地，对任意 $(Y_1(\cdot),Z_1(\cdot)),(Y_2(\cdot),Z_2(\cdot))\in S^2([0,T];\mathbb{R}^n)\times M^2([0,T];\mathbb{R}^{n\times d})$,

$$
\begin{aligned}
&|\Gamma^f(t,Y_1(t),Z_1(t))-\Gamma^f(t,Y_2(t),Z_2(t))|\\
\leqslant{}& L_y|Y_1(t)-Y_2(t)|+L_z|Z_1(t)-Z_2(t)|+L_{y'}\mathbb{E}|Y_1(t)-Y_2(t)|+L_{z'}\mathbb{E}|Z_1(t)-Z_2(t)|,\\
&|\Gamma^g(t,Y_1(t),Z_1(t))-\Gamma^g(t,Y_2(t),Z_2(t))|^2\\
\leqslant{}& K_y^2|Y_1(t)-Y_2(t)|^2+K_{y'}^2\mathbb{E}|Y_1(t)-Y_2(t)|^2+\alpha_3|Z_1(t)-Z_2(t)|^2+\alpha_4\mathbb{E}|Z_1(t)-Z_2(t)|^2.
\end{aligned}
$$

上述两个估计在接下来的定理 3.2 中起到关键作用.

定理 3.1 假设 (H1) 成立，则 MF-BDSDE(3.1) 存在唯一解 $(Y,Z)\in S^2([0,T];\mathbb{R}^n)\times M^2(0,T;\mathbb{R}^{n\times d})$.

证 对任意 $(y,z)\in S^2(0,T;\mathbb{R}^n)\times M^2(0,T;\mathbb{R}^{n\times d})$, 考虑如下 MF-BDSDE:

$$\begin{aligned}Y_t=\xi&+\int_t^T f(s,Y_s,Z_s,\mathbb{E}'[\theta^l(s,Y_s,Z_s,y_s',z_s')])\mathrm{d}s\\&+\int_t^T g(s,Y_s,Z_s,\mathbb{E}'[\theta^l(s,Y_s,Z_s,y_s',z_s')])\overleftarrow{\mathrm{d}}B_s-\int_t^T Z_s\overrightarrow{\mathrm{d}}W_s.\end{aligned}$$

由文 [1] 中的定理 1.1, 可知存在唯一解 $(Y,Z)\in S^2([0,T];\mathbb{R}^n)\times M^2(0,T;\mathbb{R}^{n\times d})$. 因此，如果记 $\Theta(y,z)=(Y,Z)$, 则 Θ 是从 $S^2([0,T];\mathbb{R}^n)\times M^2(0,T;\mathbb{R}^{n\times d})$ 到自身的映射. 下面证明 Θ 是压缩的. 为此，取任意 $(y^i,z^i)\in S^2([0,T];\mathbb{R}^n)\times M^2(0,T;\mathbb{R}^{n\times d})$ $(i=1,2)$, 记

$$(Y^i,Z^i)=\Theta(y^i,z^i).$$

令 $(\widehat{Y},\widehat{Z})=(Y^1-Y^2,Z^1-Z^2)$ 和 $(\widehat{y},\widehat{z})=(y^1-y^2,z^1-z^2)$. 对 $\mathrm{e}^{\beta t}|\widehat{Y}_t|^2$ 应用 Itô 公式，可得

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}\mathrm{e}^{\beta t}|\widehat{Y}_t|^2+\mathbb{E}\int_t^T\mathrm{e}^{\beta s}|\widehat{Z}_s|^2\mathrm{d}s+\mathbb{E}\int_t^T\beta\mathrm{e}^{\beta s}|\widehat{Y}_s|^2\mathrm{d}s\\&=2\mathbb{E}\int_t^T\mathrm{e}^{\beta s}\widehat{Y}_s\widehat{f}(s)\mathrm{d}s+\mathbb{E}\int_t^T\mathrm{e}^{\beta s}|\widehat{g}(s)|^2\mathrm{d}s,\end{aligned}$$

这里

$$\begin{aligned}\widehat{f}(s)&=f(s,Y_s^1,Z_s^1,\mathbb{E}'[\theta^f(s,Y_s^1,Z_s^1,y_s^{1'},z_s^{1'})])\\&\quad-f(s,Y_s^2,Z_s^2,\mathbb{E}'[\theta^f(s,Y_s^2,Z_s^2,y_s^{2'},z_s^{2'})]),\\\widehat{g}(s)&=g(s,Y_s^1,Z_s^1,\mathbb{E}'[\theta^g(s,Y_s^1,Z_s^1,y_s^{1'},z_s^{1'})])\\&\quad-g(s,Y_s^2,Z_s^2,\mathbb{E}'[\theta^g(s,Y_s^2,Z_s^2,y_s^{2'},z_s^{2'})]).\end{aligned}$$

因此，由假设 (H1), 注 3.1 和不等式 $2ab\leqslant\frac{1}{\delta}a^2+\delta b^2$, 可得

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}\mathrm{e}^{\beta t}|\widehat{Y}_t|^2+\mathbb{E}\int_t^T\mathrm{e}^{\beta s}|\widehat{Z}_s|^2\mathrm{d}s+\mathbb{E}\int_t^T\beta\mathrm{e}^{\beta s}|\widehat{Y}_s|^2\mathrm{d}s\\&\leqslant 2\mathbb{E}\int_t^T\mathrm{e}^{\beta s}[(1+L_\gamma)|\widehat{Y}_s|(L_y|\widehat{Y}_s|+L_z|\widehat{Z}_s|)\\&\quad+L_\gamma|\widehat{Y}_s|(L_{y'}\mathbb{E}|\widehat{y}_s|+L_{z'}\mathbb{E}|\widehat{z}_s|)]\mathrm{d}s\\&\quad+\mathbb{E}\int_t^T\mathrm{e}^{\beta s}[K_y^2(1+\alpha_2)|\widehat{Y}_s|^2+(\alpha_1+\alpha_2\alpha_3)|\widehat{Z}_s|^2\\&\quad+\alpha_2K_{y'}^2\mathbb{E}|\widehat{y}_s|^2+\alpha_2\alpha_4\mathbb{E}|\widehat{z}_s|^2]\mathrm{d}s\\&\leqslant \mathrm{M}_1\mathbb{E}\int_t^T\mathrm{e}^{\beta s}|\widehat{Y}_s|^2\mathrm{d}s+\mathrm{M}_2\mathbb{E}\int_t^T\mathrm{e}^{\beta s}|\widehat{Z}_s|^2\mathrm{d}s\\&\quad+\mathrm{M}_3\mathbb{E}\int_t^T\mathrm{e}^{\beta s}|\widehat{y}_s|^2\mathrm{d}s+\mathrm{M}_4\mathbb{E}\int_t^T\mathrm{e}^{\beta s}|\widehat{z}_s|^2\mathrm{d}s,\end{aligned}$$

这里

$$\begin{aligned}\mathrm{M}_1&=K_y^2(1+\alpha_2)+(1+L_\gamma)(L_y+L_zC)+2L_\gamma^2+L_\gamma L_{z'}C,\\\mathrm{M}_2&=\frac{(1+L_\gamma)L_z}{C}+(\alpha_1+\alpha_2\alpha_3),\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\mathrm{M}_3 &= \frac{1}{2}L_{y'}^2 + \alpha_2 K_{y'}^2,\\
\mathrm{M}_4 &= \frac{L_\gamma L_{z'}}{C} + \alpha_2\alpha_4.
\end{aligned}
$$

通过计算，可得

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{E}\int_t^T \frac{\beta-\mathrm{M}_1}{1-\mathrm{M}_2}\mathrm{e}^{\beta s}|\widehat{Y}_s|^2\mathrm{d}s + \mathbb{E}\int_t^T \mathrm{e}^{\beta s}|\widehat{Z}_s|^2\mathrm{d}s\\
&\leqslant \frac{\mathrm{M}_4}{1-\mathrm{M}_2}\Big[\mathbb{E}\int_t^T \frac{\mathrm{M}_3}{\mathrm{M}_4}\mathrm{e}^{\beta s}|\widehat{y}_s|^2\mathrm{d}s + \mathbb{E}\int_t^T \mathrm{e}^{\beta s}|\widehat{z}_s|^2\mathrm{d}s\Big].
\end{aligned}
$$

由 α_i 的假设，则 Θ 是 $M^2(0,T;\mathbb{R}^{n+n\times d})$ 上的压缩映射，因此存在唯一不动点 $(Y,Z)\in M^2(0,T;\mathbb{R}^{n+n\times d})$, 作为方程 (3.1) 的解．并且容易验证 $Y(\cdot)\in S^2(0,T;\mathbb{R}^n)$. 定理得证.

注 3.2 注意到本小节中的结果涵盖了文 [1, 34] 中的结果. 事实上, 如果 $L_\gamma=\alpha_2=0$, 或者 $K_y=\alpha_1=\alpha_2=0$, 则其结果分别退化为文 [1, 34] 中的情形.

接下来介绍如下形式的平均场正向重随机微分方程:

$$
\begin{aligned}
P_t &= \eta + \int_0^t f(s,P_s,Q_s,\Gamma^f(s,P_s,Q_s))\mathrm{d}s\\
&\quad + \int_0^t g(s,P_s,Q_s,\Gamma^g(s,P_s,Q_s))\overrightarrow{\mathrm{d}}W_s - \int_0^t Q_s\overleftarrow{\mathrm{d}}B_s,\quad t\in[0,T],
\end{aligned}\tag{3.2}
$$

这里 η 是 $\mathcal{F}_0$- 可测的. 注意到在后续最优控制的问题中，方程 (3.2) 作为伴随方程出现. 我们把方程 (3.2) 转化为类似于方程 (3.1) 的形式. 定义

$$
\begin{aligned}
&\widetilde{B}_t = B_T - B_{T-t},\quad \widetilde{W}_t = W_T - W_{T-t},\quad \widetilde{\mathcal{F}}_t \doteq \mathcal{F}_{t,T}^{\widetilde{W}}\vee\mathcal{F}_t^{\widetilde{B}},\\
&\widetilde{P}_t = P_{T-t},\quad \widetilde{Q}_t = Q_{T-t},\quad t\in[0,T],
\end{aligned}
$$

则 $\widetilde{\mathcal{F}}_t=\mathcal{F}_{T-t}$, η 是 $\widetilde{\mathcal{F}}_T$- 可测的， $\widetilde{P}(t)$, $\widetilde{Q}(t)$ 是 $\widetilde{\mathcal{F}}_t$- 可测的，且

$$
\begin{aligned}
\widetilde{P}_t &= \eta + \int_t^T f(s,\widetilde{P}_s,\widetilde{Q}_s,\Gamma^f(s,\widetilde{P}_s,\widetilde{Q}_s))\mathrm{d}s\\
&\quad + \int_t^T g(s,\widetilde{P}_s,\widetilde{Q}_s,\Gamma^g(s,\widetilde{P}_s,\widetilde{Q}_s))\overleftarrow{\mathrm{d}}\widetilde{W}_s - \int_t^T \widetilde{Q}_s\overrightarrow{\mathrm{d}}\widetilde{B}_s.
\end{aligned}\tag{3.3}
$$

注意到方程 (3.3) 类似于方程 (3.1), 那么，由定理 3.1 方程 (3.3) 存在唯一解，我们有如下定理.

定理 3.2 假设 (H1) 成立，那么方程 (3.2) 存在唯一解 $(P_t,Q_t)\in S^2([0,T];\mathbb{R}^n)\times M^2(0,T;\mathbb{R}^{n\times d})$.

4 非局部 SPDEs 解的概率表示

Pardoux 和 Peng[1] 首次建立了 BDSDEs 与二阶拟线性 SPDEs 系统之间的联系，给出了抛物型二阶 SPDEs 的概率解释．此后，该问题得到了大量研究，参见文 [2, 4, 8, 11–12, 40]. 这一节可以看作是这一问题的延续．换句话说，我们将利用 MF-BDSDEs 理论来提供一类非局部 SPDEs 解的概率公式．对以任意 $x_0\in\mathbb{R}^m$, $(t,x)\in[0,T]\times\mathbb{R}^m$ 为初

始条件，考虑如下 SDEs:

$$X_s^{t,x}=x+\int_t^s\Gamma^b(r,X_r^{t,x})\mathrm{d}r+\int_t^s\Gamma^\sigma(r,X_r^{t,x})\overrightarrow{\mathrm{d}}W_r,\quad s\geqslant t,\tag{4.1}$$

和倒向方程

$$\begin{aligned}Y_s^{t,x}&=\mathbb{E}'[h(X_T^{t,x},(X_T^{0,x_0})')]+\int_s^T\Gamma_1^f(r,X_r^{t,x},Y_r^{t,x},Z_r^{t,x})\mathrm{d}r\\&\quad+\int_s^T\Gamma_1^g(r,X_r^{t,x},Y_r^{t,x},Z_r^{t,x})\overleftarrow{\mathrm{d}}B_r-\int_s^TZ_r^{t,x}\overrightarrow{\mathrm{d}}W_r,\quad s\geqslant t,\end{aligned}\tag{4.2}$$

这里

$$\begin{aligned}&\Gamma^k(r,X_r^{t,x})\\=&\int_\Omega k(r,X_r^{t,x}(\omega),X_r^{0,x_0}(\omega'))\mathbb{P}(\mathrm{d}\omega')=:\mathbb{E}'[k(r,X_r^{t,x},(X_r^{0,x_0})')],\\&\Gamma_1^l(r,X_r^{t,x},Y_r^{t,x},Z_r^{t,x})\\=&\int_\Omega\theta^l(r,X_r^{t,x}(\omega),Y_r^{t,x}(\omega),Z_r^{t,x}(\omega),X_r^{0,x_0}(\omega'),Y_r^{0,x_0}(\omega'),Z_r^{0,x_0}(\omega'))\mathbb{P}(\mathrm{d}\omega')\\=:&\ \mathbb{E}'[\theta^l(r,X_r^{t,x},Y_r^{t,x},Z_r^{t,x},(X_r^{0,x_0})',(Y_r^{0,x_0})',(Z_r^{0,x_0})')],\end{aligned}$$

其中 $k=b,\sigma$; $l=f,g$, 且

$$\begin{aligned}&b:[0,T]\times\mathbb{R}^m\times\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^m,\quad\sigma:[0,T]\times\mathbb{R}^m\times\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^{m\times d},\\&\theta^f:[0,T]\times\mathbb{R}^m\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^{n\times d}\times\mathbb{R}^m\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^{n\times d}\to\mathbb{R}^n,\\&\theta^g:[0,T]\times\mathbb{R}^m\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^{n\times d}\times\mathbb{R}^m\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^{n\times d}\to\mathbb{R}^{n\times l},\\&h:\mathbb{R}^m\times\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^n.\end{aligned}$$

当系数满足线性增长和 Lipschitz 条件时， SDE(4.1) 存在唯一解 (见 [34]). 类似地，当 h, θ^f 和 θ^g 满足适当的条件时，由上述定理 3.1, 方程 (4.2) 存在唯一解.

假设 $\theta^f(t,x,x',\cdot,\cdot,\cdot)$ 和 $\theta^g(t,x,x',\cdot,\cdot,\cdot)$ 关于 t, x 和 x' 一致满足定理 3.1 的条件，那么，方程 (4.2) 存在唯一解 $(Y_t,Z_t)\in S^2([0,T];\mathbb{R}^n)\times M^2(0,T;\mathbb{R}^{n\times d})$.

接下来我们建立 MF-BDSDE (4.2) 和如下非局部 SPDE 的联系：

$$\begin{aligned}\mathrm{d}u(t,x)=&-(\mathcal{L}u(t,x)+\mathbb{E}'\theta^f(t,x,u(t,x),\triangledown u(t,x)\cdot\mathbb{E}'[\sigma(t,x,(X_t^{0,x_0})')],(X_t^{0,x_0})',\\&u'(t,(X_t^{0,x_0})'),[\triangledown u'(t,a)\cdot\mathbb{E}'\sigma(t,a,(X_t^{0,x_0})')]\Big|_{a=X_t^{0,x_0}}))\mathrm{d}t\\&-\mathbb{E}'\theta^g(t,x,u(t,x),\triangledown u(t,x)\cdot\mathbb{E}'[\sigma(t,x,(X_t^{0,x_0})')],(X_t^{0,x_0})',\\&u'(t,(X_t^{0,x_0})'),[\triangledown u'(t,a)\cdot\mathbb{E}'\sigma(t,a,(X_t^{0,x_0})')]\Big|_{a=X_t^{0,x_0}})\overleftarrow{\mathrm{d}}B_t,\\u(T,x)=&\ \mathbb{E}'[h(x,(X_T^{0,x_0})')],\end{aligned}\tag{4.3}$$

这里 $u:\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}^m\times\Omega\to\mathbb{R}^n$, $\mathcal{L}u=(Lu_1,\cdots,Lu_n)^{\mathrm{T}}$, 满足：

$$\begin{aligned}Lu_i(t,x)\doteq&\ \frac{1}{2}\mathrm{tr}(\mathbb{E}'[\sigma(t,x,(X_t^{0,x_0})')]\mathbb{E}'[\sigma(t,x,(X_t^{0,x_0})')]^{\mathrm{T}}D^2u(t,x))\\&+\triangledown u(t,x)\cdot\mathbb{E}'[b(t,x,(X_t^{0,x_0})')],\end{aligned}$$

且

$$u'(t,(X_t^{0,x_0})') \doteq u(t,\omega',X_t^{0,x_0}(\omega')),\quad t\in[0,T]. \tag{4.4}$$

我们有如下定理.

定理 4.1 假设 b, σ, f 和 g 满足线性增长和 Lipschitz 条件， $h_{xx}(x,(X_T^{0,x_0}))$ 存在且 $\mathbb{E}\mathbb{E}'|h(X_T^{t,x},(X_T^{0,x_0})')|^2<\infty$. 假设 SPDE(4.3) 存在解 $u(t,x)\in C^{1,2}(\Omega\times[0,T]\times\mathbb{R}^m;\mathbb{R}^n)$, 那么，对于给定的 (t,x), $u(t,x)$ 有如下表示：

$$u(t,x)=Y_t^{t,x}, \tag{4.5}$$

这里 $Y_t^{t,x}$ 由方程 (4.1) 和 (4.2) 确定. 并且，方程 (4.3) 的解 $u(t,x)$ 也是唯一的.

证 对 $u(t,X_t)$ 应用 Itô 公式，可得

$$\begin{aligned}u(T,X_T^{t,x})-u(t,x)=&\int_t^T\Big[\frac{\partial u}{\partial r}(r,X_r^{t,x})+\mathcal{L}u(r,X_r^{t,x})\Big]\mathrm{d}r\\&+\int_t^T\bigtriangledown u(r,X_r^{t,x})\cdot\mathbb{E}'[\sigma(r,X_r^{t,x},(X_r^{0,x_0})')]\overrightarrow{\mathrm{d}}W_r.\end{aligned}$$

由 $u(t,x)$ 满足 SPDE(4.3), 可知

$$\begin{aligned}&u(T,X_T^{t,x})-u(t,x)\\=&-\int_t^T\mathbb{E}'\theta^f(s,X_s^{t,x},u(s,X_s^{t,x}),\bigtriangledown u(s,X_s^{t,x})\cdot\mathbb{E}'[\sigma(s,X_s^{t,x},(X_s^{0,x_0})')],\\&(X_s^{0,x_0})',u'(s,(X_s^{0,x_0})'),[\bigtriangledown u'(s,a)\cdot\mathbb{E}'\sigma(s,a,(X_s^{0,x_0})')]\Big|_{a=X_s^{0,x_0}})\mathrm{d}s\\&-\int_t^T\mathbb{E}'\theta^g(s,X_s^{t,x},u(s,X_s^{t,x}),\bigtriangledown u(s,X_s^{t,x})\cdot\mathbb{E}'[\sigma(s,X_s^{t,x},(X_s^{0,x_0})')],\\&(X_s^{0,x_0})',u'(s,(X_s^{0,x_0})'),[\bigtriangledown u'(s,a)\cdot\mathbb{E}'\sigma(s,a,(X_s^{0,x_0})')]\Big|_{a=X_s^{0,x_0}})\overleftarrow{\mathrm{d}}B_s\\&+\int_t^T\bigtriangledown u(s,X_s^{t,x})\cdot\mathbb{E}'[\sigma(s,X_s^{t,x},(X_s^{0,x_0})')]\overrightarrow{\mathrm{d}}W_s.\end{aligned}$$

由方程 (4.1) 和 (4.2) 解的唯一性易知，对于 $s\in[0,T]$, $(u(s,X_s^{t,x}),\bigtriangledown u(s,X_s^{t,x})\cdot\mathbb{E}'[\sigma(s,X_s^{t,x},(X_s^{0,x_0})')])$ 是方程 (4.3) 的解. 从而

$$u(t,x)=Y_t^{t,x},\quad t\in[0,T],\ x\in\mathbb{R}^m.$$

在上述条件下， $Y_\cdot^{t,x}$ 是唯一解，那么 SPDE(4.3) 的解 $u(t,x)$ 也是唯一的.

注 4.1 方程 (4.5) 可以称为 SPDE(4.3) 的随机 Feynman-Kac 公式，是研究 SPDEs 的重要工具. 例如，由定理 4.1 可知，如果 SPDE (4.3) 的解存在的话，那么一定是唯一解.

注 4.2 注意到方程 (4.3) 中引入的 u' 使得我们的讨论更一般化. 确切地说，一方面，对比文 [1] 中的 SPDEs, $u'(t,(X_t^{0,x_0}))$ 是必需的，这是因为我们的 SPDE 是非局部的. 另一方面，对比文 [34], 由于 $u(t,x)$ 特殊的可测性，本小节中我们经常把 $u(t,(X_t^{0,x_0})')$ 替换为 $u'(t,(X_t^{0,x_0})')$. 据我们所知，由于

$$Y_s^{t,x}(\omega)=u(s,\omega,X_s^{t,x}(\omega)),$$

因此

$$Y_s^{0,x_0}(\omega') = u(s,\omega',X_s^{0,x_0}(\omega')) = u'(s,(X_s^{0,x_0})').$$

显然，如果 $\theta^g=0$, 也就是说，方程 (4.3) 退化为确定的 PDE, 因此 $u'(t,(X_t^{0,x_0})')$ 将退化为 $u(t,(X_t^{0,x_0})')$, 这正是文 [34] 中讨论的情形.

注 4.3 在我们的框架下，方程 (4.2) 允许依赖于 $Z^{0,x_0}(\cdot)$, 因此一些刻画方程 (4.3) 的非局部性论述是必须的. 这是区别于文 [34] 中的讨论.

5 平均场倒向重随机系统的最优控制问题

本节我们研究平均场倒向重随机系统的最优控制问题，推导出一个必要性最大值原理. 为记号简单，令 $m=n=d=l=k_1=k_2=1$.

给定凸子集 $U\subset\mathbb{R}^k$, 允许控制集定义为

$$\mathcal{U}_{ad}=\Big\{v:[0,T]\times\Omega\to U|v\ \text{是}\ \mathcal{F}_t-\text{可测的},\ \mathbb{E}\int_0^T|v_t|^2\mathrm{d}t<+\infty\Big\},$$

对于任意 $v\in\mathcal{U}_{ad}$, $\xi\in L^2(\Omega,\mathcal{F}_T,P;\mathbb{R})$, 考虑如下 MF-BDSDE:

$$Y_t^v=\xi+\int_t^T\Gamma^f(s,Y_s^v,Z_s^v,v_s)\mathrm{d}s-\int_t^T Z_s^v\overrightarrow{\mathrm{d}}W_s+\int_t^T\Gamma^g(s,Y_s^v,Z_s^v,v_s)\overleftarrow{\mathrm{d}}B_s, \tag{5.1}$$

其中

$$\begin{aligned}&\Gamma^i(s,Y_s^v,Z_s^v,v_s)\\&=\int_\Omega\theta^i(s,\omega,\omega',Y_s^v(\omega),Z_s^v(\omega),v_s(\omega),Y_s^v(\omega'),Z_s^v(\omega'),v_s(\omega'))\mathbb{P}(\mathrm{d}\omega'),\quad i=f,g,\end{aligned}$$

且

$$\begin{aligned}&\theta^f:\Omega^2\times[0,T]\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times U\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times U\to\mathbb{R},\\&\theta^g:\Omega^2\times[0,T]\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times U\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times U\to\mathbb{R}.\end{aligned}$$

性能指标为

$$J(v(\cdot))=\mathbb{E}\int_0^T\Gamma^l(s,Y_s^v,Z_s^v,v_s)\mathrm{d}s+\mathbb{E}[\mathbb{E}'h(Y_0^v(\omega),Y_0^v(\omega'))], \tag{5.2}$$

其中

$$\begin{aligned}&\Gamma^l(s,Y_s^v,Z_s^v,v_s)\\&=\int_\Omega l(s,\omega,\omega',Y_s^v(\omega),Z_s^v(\omega),v_s(\omega),Y_s^v(\omega'),Z_s^v(\omega'),v_s(\omega'))\mathbb{P}(\mathrm{d}\omega')\end{aligned}$$

且

$$\begin{aligned}&h:\Omega^2\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R},\\&l:\Omega^2\times[0,T]\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times U\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times U\to\mathbb{R}.\end{aligned}$$

我们的控制问题是在 $\mathcal{U}_{ad}$ 上寻找允许控制 $v(\cdot)$, 使得性能指标 $J(v(\cdot))$ 达到最小值.

假设

(H2) (i) θ^f, θ^g, l, h 关于 y, y', z, z', v, v' 是连续可微的，l 和 h 的导数是线性增长的.

(ii) θ^f, θ^g 关于 (y,z,y',z',v,v') 满足一致 Lipschitz 条件，即存在正常数 L_i, K_i, α_j, 对于 $i=y,z,y',z',v,v'$, $j=3,4$, 使得

$$
\begin{aligned}
&|\theta^f(t,\omega,\omega',y_1,z_1,y_1',z_1',v_1,v_1')-\theta^f(t,\omega,\omega',y_2,z_2,y_2',z_2',v_2,v_2')|\\
\leqslant{}& L_y|y_1-y_2|+L_z|z_1-z_2|+L_{y'}|y_1'-y_2'|+L_{z'}|z_1'-z_2'|+L_v|v_1-v_2|+L_{v'}|v_1'-v_2'|,\\
&|\theta^g(t,\omega,\omega',y_1,z_1,y_1',z_1',v_1,v_1')-\theta^g(t,\omega,\omega',y_2,z_2,y_2',z_2',v_2,v_2')|^2\\
\leqslant{}& K_y^2|y_1-y_2|^2+K_{y'}^2|y_1'-y_2'|^2+K_v^2|v_1-v_2|^2\\
&+K_{v'}^2|v_1'-v_2'|^2+\alpha_3|z_1-z_2|^2+\alpha_4|z_1'-z_2'|^2,\\
&\forall(t,\omega,\omega')\in[0,T]\times\Omega^2,\ (y_i,z_i,y_i',z_i',v_i,v_i')\in\mathbb{R}^6,\quad i=1,2,
\end{aligned}
$$

且

$$
\mathbb{E}\int_0^T|\mathbb{E}'\theta_0^l(t,\omega,\omega')|^2\mathrm{d}t<\infty,\quad l=f,g,
$$

其中 $\theta_0^l(t,\omega,\omega')=\theta^l(t,\omega,\omega',0,0,0,0,0,0)$, $\alpha_3+\alpha_4<1$.

在上述假设下，对于任意 $v(\cdot)\in\mathcal{U}_{ad}$, 由定理 3.1, 方程 (5.1) 存在唯一的解 $(Y^v,Z^v)\in S^2([0,T];\mathbb{R})\times M^2(0,T;\mathbb{R})$, 并且性能指标 J 的定义是合理的.

假定 $\widehat{u}(\cdot)$ 是最优控制，$(\widehat{Y}(\cdot),\widehat{Z}(\cdot))$ 是相应的最优轨迹. $v(\cdot)$ 满足 $\widehat{u}(\cdot)+v(\cdot)\in\mathcal{U}_{ad}$. 由 $\mathcal{U}_{ad}$ 的凸性，那么对任意 $0\leqslant\varepsilon\leqslant1$, $u^\varepsilon(\cdot)=\widehat{u}(\cdot)+\varepsilon v(\cdot)$ 也属于 $\mathcal{U}_{ad}$. 由定理 3.1 可知，相应于 u^ε, 方程 (5.1) 存在唯一解，其解记为 $(Y^\varepsilon(\cdot),Z^\varepsilon(\cdot))$. 我们首先证明如下引理.

引理 5.1 假设 (H2) 成立，对任意 $t\in[0,T]$, 可得

$$
E|Y_t^\varepsilon-\widehat{Y}_t|^2\leqslant C\varepsilon^2,\quad E\int_t^T|Z_s^\varepsilon-\widehat{Z}_s|^2\mathrm{d}s\leqslant C\varepsilon^2.
$$

证 注意到 $Y_t^\varepsilon-\widehat{Y}_t$ 满足如下 MF-BDSDE:

$$
\begin{aligned}
Y_t^\varepsilon-\widehat{Y}_t={}&\int_t^T[\Gamma^f(s,Y_s^\varepsilon,Z_s^\varepsilon,u_s^\varepsilon)-\Gamma^f(s,\widehat{Y}_s,\widehat{Z}_s,\widehat{u}_s)]\mathrm{d}s\\
&+\int_t^T[\Gamma^g(s,Y_s^\varepsilon,Z_s^\varepsilon,u_s^\varepsilon)-\Gamma^g(s,\widehat{Y}_s,\widehat{Z}_s,\widehat{u}_s)]\overleftarrow{\mathrm{d}}B_s\\
&-\int_t^T(Z_s^\varepsilon-\widehat{Z}_s)\overrightarrow{\mathrm{d}}W_s.
\end{aligned}
$$

对 $|Y_t^\varepsilon-\widehat{Y}_t|^2$ 应用 Itô 公式，可得

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{E}\Big(|Y_t^\varepsilon-\widehat{Y}_t|^2+\int_t^T|Z_s^\varepsilon-\widehat{Z}_s|^2\mathrm{d}s\Big)\\
={}&2\mathbb{E}\int_t^T\langle Y_s^\varepsilon-\widehat{Y}_s,\Gamma^f(s,Y_s^\varepsilon,Z_s^\varepsilon,u_s^\varepsilon)-\Gamma^f(s,\widehat{Y}_s,\widehat{Z}_s,\widehat{u}_s)\rangle\mathrm{d}s\\
&+\mathbb{E}\int_t^T|\Gamma^g(s,Y_s^\varepsilon,Z_s^\varepsilon,u_s^\varepsilon)-\Gamma^g(s,\widehat{Y}_s,\widehat{Z}_s,\widehat{u}_s)|^2\mathrm{d}s.
\end{aligned}
$$

由假设 (H2), 可得

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}|Y_t^\varepsilon-\widehat{Y}_t|^2+\mathbb{E}\int_t^T|Z_s^\varepsilon-\widehat{Z}_s|^2\mathrm{d}s\\ \leqslant\ &k_1\mathbb{E}\int_t^T|Y_s^\varepsilon-\widehat{Y}_s|^2\mathrm{d}s+k_2\varepsilon^2\mathbb{E}\int_t^T|v_s|^2\mathrm{d}s,\end{aligned}$$

这里 k_i $(i=1,2)$ 是依赖于 (H2) 的常数. 由 Gronwall 不等式和 Burkholder-Davis-Gundy 不等式，结果得证.

为记号简便，引入

$$\begin{aligned}\widehat{\alpha}(\cdot)&=\alpha(\cdot,\omega,\omega',\widehat{Y}_\cdot(\omega),\widehat{Z}_\cdot(\omega),\widehat{u}_\cdot(\omega),\widehat{Y}_\cdot(\omega'),\widehat{Z}_\cdot(\omega'),\widehat{u}_\cdot(\omega')),\\ \alpha^\varepsilon(\cdot)&=\alpha(\cdot,\omega,\omega',Y_\cdot^\varepsilon(\omega),Z_\cdot^\varepsilon(\omega),u_\cdot^\varepsilon(\omega),Y_\cdot^\varepsilon(\omega'),Z_\cdot^\varepsilon(\omega'),u_\cdot^\varepsilon(\omega')),\end{aligned}$$

这里 $\omega,\omega'\in\Omega$, $\alpha=\theta^f,\theta^g,l$. 我们引入如下变分方程:

$$\xi_t=\psi_t+\int_t^T F_1(s,\xi_s,\eta_s)\mathrm{d}s+\int_t^T G_1(s,\xi_s,\eta_s)\overleftarrow{\mathrm{d}}B_s-\int_t^T\eta_s\overrightarrow{\mathrm{d}}W_s,\tag{5.3}$$

其中

$$\begin{aligned}F_1(s,\xi_s,\eta_s)&=\mathbb{E}'[\widehat{\theta}_y^f(s)\xi_s+\widehat{\theta}_z^f(s)\eta_s+\widehat{\theta}_{y'}^f(s)\xi_s'+\widehat{\theta}_{z'}^f(s)\eta_s'],\\ G_1(s,\xi_s,\eta_s)&=\mathbb{E}'[\widehat{\theta}_y^g(s)\xi_s+\widehat{\theta}_z^g(s)\eta_s+\widehat{\theta}_{y'}^g(s)\xi_s'+\widehat{\theta}_{z'}^g(s)\eta_s'],\end{aligned}$$

且

$$\psi(t)=\int_t^T\mathbb{E}'[\widehat{\theta}_v^f(s)v_s+\widehat{\theta}_{v'}^f(s)v_s']\mathrm{d}s+\int_t^T\mathbb{E}'[\widehat{\theta}_v^g(s)v_s+\widehat{\theta}_{v'}^g(s)v_s']\overleftarrow{\mathrm{d}}B_s.$$

记

$$\begin{aligned}\mathbb{E}'[\widehat{\theta}_y^f(s)\xi_s]&=\int_\Omega\widehat{\theta}_y^f(s,\omega,\omega')\xi_s(\omega)\mathbb{P}(\mathrm{d}\omega'),\\ \mathbb{E}'[\widehat{\theta}_{y'}^f(s)\xi_s']&=\int_\Omega\widehat{\theta}_{y'}^f(s,\omega,\omega')\xi_s(\omega')\mathbb{P}(\mathrm{d}\omega').\end{aligned}$$

在假设 (H2) 下，由定理 3.1 可知方程 (5.3) 存在唯一 $(\xi_t,\eta_t)\in S^2([0,T];\mathbb{R})\times M^2(0,T;\mathbb{R})$.

引理 5.2 记

$$y_t^\varepsilon=\frac{Y_t^\varepsilon-\widehat{Y}_t}{\varepsilon}-\xi_t,\quad z_t^\varepsilon=\frac{Z_t^\varepsilon-\widehat{Z}_t}{\varepsilon}-\eta_t,$$

那么

$$\lim_{\varepsilon\to0}\sup_{t\in[0,T]}\mathbb{E}|y_t^\varepsilon|^2=0,\quad\lim_{\varepsilon\to0}\mathbb{E}\int_0^T|z_t^\varepsilon|^2\mathrm{d}t=0.\tag{5.4}$$

证 记 $(y^\varepsilon,z^\varepsilon)$ 是如下方程的解:

$$\begin{cases}-\mathrm{d}y_t^\varepsilon=\mathbb{E}'[f_y^\varepsilon(t)y_t^\varepsilon+f_z^\varepsilon(t)z_t^\varepsilon+f_{y'}^\varepsilon(t)y_t^{'\varepsilon}+f_{z'}^\varepsilon(t)z_t^{'\varepsilon}+f_1^\varepsilon(t)]\mathrm{d}t\\ \qquad\qquad+\mathbb{E}'[g_y^\varepsilon(t)y_t^\varepsilon+g_z^\varepsilon(t)z_t^\varepsilon+g_{y'}^\varepsilon(t)y_t^{'\varepsilon}+g_{z'}^\varepsilon(t)z_t^{'\varepsilon}+g_1^\varepsilon(t)]\overleftarrow{\mathrm{d}}B_t\\ \qquad\qquad-z_t^\varepsilon\overrightarrow{\mathrm{d}}W_t,\\ y_T^\varepsilon=0,\end{cases}$$

其中 $\delta=f,g$, $\overline{Y}_t(\omega)=\widehat{Y}_t(\omega)+\lambda(Y_t^{\varepsilon}(\omega)-\widehat{Y}_t(\omega))$, $\overline{u}_t(\omega)=\widehat{u}_t(\omega)+\lambda(u_t^{\varepsilon}(\omega)-\widehat{u}_t(\omega))$,

$$\delta_y^{\varepsilon}(\cdot)=\int_0^1\theta_y^{\delta}(\cdot,\overline{Y}_\cdot(\omega),\overline{Z}_\cdot(\omega),\overline{u}_\cdot(\omega),\overline{Y}_\cdot(\omega'),\overline{Z}_\cdot(\omega'),\overline{u}_\cdot(\omega'))d\lambda,$$

且

$$\begin{aligned}\delta_1^{\varepsilon}(\cdot)=&[\delta_y^{\varepsilon}(\cdot)-\widehat{\theta}_y^{\delta}(\cdot)]\xi_\cdot(\omega)+[\delta_z^{\varepsilon}(\cdot)-\widehat{\theta}_z^{\delta}(\cdot)]\eta_\cdot(\omega)+[\delta_{y'}^{\varepsilon}(\cdot)-\widehat{\theta}_{y'}^{\delta}(\cdot)]\xi_\cdot(\omega')\\&+[\delta_{z'}^{\varepsilon}(\cdot)-\widehat{\theta}_{z'}^{\delta}(\cdot)]\eta_\cdot(\omega')+[\delta_v^{\varepsilon}(\cdot)-\widehat{\theta}_v^{\delta}(\cdot)]v_\cdot(\omega)+[\delta_{v'}^{\varepsilon}(\cdot)-\widehat{\theta}_{v'}^{\delta}(\cdot)]v_\cdot(\omega').\end{aligned}$$

在 $[t,T]$ 上对 $|y_t^{\varepsilon}|^2$ 应用 Itô 公式，可得

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}|y_t^{\varepsilon}|^2+\mathbb{E}\int_t^T|z_s^{\varepsilon}|^2\mathrm{d}s\\=&2\mathbb{E}\int_t^T\langle y_s^{\varepsilon},\mathbb{E}'[f_y^{\varepsilon}(s)y_s^{\varepsilon}+f_z^{\varepsilon}(s)z_s^{\varepsilon}+f_{y'}^{\varepsilon}(s)y_s^{'\varepsilon}+f_{z'}^{\varepsilon}(s)z_s^{'\varepsilon}+f_1^{\varepsilon}(s)]\rangle\mathrm{d}s\\&+\mathbb{E}\int_t^T|\mathbb{E}'[g_y^{\varepsilon}(s)y_s^{\varepsilon}+g_z^{\varepsilon}(s)z_s^{\varepsilon}+g_{y'}^{\varepsilon}(s)y_s^{'\varepsilon}+g_{z'}^{\varepsilon}(s)z_s^{'\varepsilon}+g_1^{\varepsilon}(s)]|^2\mathrm{d}s.\end{aligned}$$

由假设 (H2), 可得

$$\mathbb{E}|y_t^{\varepsilon}|^2+\mathbb{E}\int_t^T|z_s^{\varepsilon}|^2\mathrm{d}s\leqslant k\mathbb{E}\int_t^T|y_s^{\varepsilon}|^2\mathrm{d}s+C_{\varepsilon},$$

这里 k 是适当的常数，当 $\varepsilon\to0$ 时， $C_{\varepsilon}\to0$. 由 Grownwall 不等式，结论得证.

由于 $\widehat{u}(\cdot)$ 是最优控制，那么

$$\varepsilon^{-1}[J(u^{\varepsilon}(\cdot))-J(\widehat{u}(\cdot))]\geqslant0. \tag{5.5}$$

结合引理 5.2, 可得如下结论.

引理 5.3　假设 (H2) 成立，那么如下变分不等式成立：

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}\int_0^T\mathbb{E}'[\widehat{l}_y(s)\xi_s+\widehat{l}_z(s)\eta_s+\widehat{l}_{y'}(s)\xi_s'+\widehat{l}_{z'}(s)\eta_s'+\widehat{l}_v(s)v_s+\widehat{l}_{v'}(s)v_s']\mathrm{d}s\\&+\mathbb{E}\mathbb{E}'[h_y(\widehat{Y}_0(\omega),\widehat{Y}_0(\omega'))\xi_0(\omega)+h_{y'}(\widehat{Y}_0(\omega),\widehat{Y}_0(\omega'))\xi_0(\omega')]\geqslant0,\end{aligned} \tag{5.6}$$

其中

$$\mathbb{E}'[\widehat{l}_{y'}(s)\xi_s']=\int_{\Omega}\widehat{l}_{y'}(s,\omega,\omega')\xi_s(\omega')\mathbb{P}(\mathrm{d}\omega').$$

证　由 (5.4) 中的第一个式子，可得

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}\mathbb{E}'\varepsilon^{-1}[h(Y_0^{\varepsilon}(\omega),Y_0^{\varepsilon}(\omega'))-h(\widehat{Y}_0(\omega),\widehat{Y}_0(\omega'))]\\=&\mathbb{E}\mathbb{E}'\varepsilon^{-1}\int_0^1h_y(\overline{Y}_0(\omega),\overline{Y}_0(\omega'))(Y_0^{\varepsilon}(\omega)-\widehat{Y}_0(\omega))d\lambda\\&+\mathbb{E}\mathbb{E}'\varepsilon^{-1}\int_0^1h_{y'}(\overline{Y}_0(\omega),\overline{Y}_0(\omega'))(Y_0^{\varepsilon}(\omega')-\widehat{Y}_0(\omega'))d\lambda\\\to&\mathbb{E}\mathbb{E}'[h_y(\widehat{Y}_0(\omega),\widehat{Y}_0(\omega'))\xi_0(\omega)+h_{y'}(\widehat{Y}_0(\omega),\widehat{Y}_0(\omega'))\xi_0(\omega')],\quad\varepsilon\to0,\end{aligned}$$

其中 $\overline{Y}_0(\omega)=\widehat{Y}_0(\omega)+\lambda(Y_0^{\varepsilon}(\omega)-\widehat{Y}_0(\omega))$. 类似地，当 $\varepsilon\to0$ 时，有

$$\varepsilon^{-1}\Big\{\mathbb{E}\int_0^T\mathbb{E}'[l^{\varepsilon}(t)-\widehat{l}(t)]\mathrm{d}t\Big\}$$

$$\to \mathbb{E}\int_0^T \mathbb{E}'[\widehat{l}_y(s)\xi_s+\widehat{l}_z(s)\eta_s+\widehat{l}_{y'}(s)\xi'_s+\widehat{l}_{z'}(s)\eta'_s+\widehat{l}_u(s)v_s+\widehat{l}_{v'}(s)v'_s]\mathrm{d}s.$$

因此不等式 (5.6) 得证.

考虑伴随方程:

$$\begin{aligned}p_t &= \mathbb{E}'h_y(\widehat{Y}_0(\omega),\widehat{Y}_0(\omega'))+\mathbb{E}^*h_{y'}(\widehat{Y}_0(\omega^*),\widehat{Y}_0(\omega))\\ &\quad+\int_0^t F_2(s,,p_s,q_s)\mathrm{d}s+\int_0^t G_2(s,p_s,q_s)\overrightarrow{\mathrm{d}}W_s-\int_0^t q_s\overleftarrow{\mathrm{d}}B_s,\end{aligned}\tag{5.7}$$

其中

$$\begin{aligned}F_2(s,p_s,q_s)&=\mathbb{E}'[\widehat{\theta}^f_y(s)p_s+\widehat{\theta}^g_y(s)q_s+\widehat{l}_y(s)]+\mathbb{E}^*[\widehat{\theta}^f_{y'}(s)p^*_s+\widehat{\theta}^g_{y'}(s)q^*_s+\widehat{l}_{y'}(s)],\\ G_2(s,p_s,q_s)&=\mathbb{E}'[\widehat{\theta}^f_z(s)p_s+\widehat{\theta}^g_z(s)q_s+\widehat{l}_z(s)]+\mathbb{E}^*[\widehat{\theta}^f_{z'}(s)p^*_s+\widehat{\theta}^g_{z'}(s)q^*_s+\widehat{l}_{z'}(s)],\end{aligned}$$

且

$$\begin{aligned}\mathbb{E}^*\widehat{l}_{y'}(s)&=\int_\Omega \widehat{l}_{y'}(s,\omega^*,\omega)\mathbb{P}(\mathrm{d}\omega^*),\\ \mathbb{E}^*[\widehat{\theta}^f_{y'}(s)p^*_s]&=\int_\Omega \widehat{\theta}^f_{y'}(s,\omega^*,\omega)p(s,\omega^*)\mathbb{P}(\mathrm{d}\omega^*).\end{aligned}$$

伴随方程 (5.7) 是方程 (3.2) 在系数有界下的特殊形式. 假设 (H2) 成立，由定理 3.2 可知方程 (5.7) 存在唯一解 (p_t,q_t).

定义 Hamiltonian 函数 $H:\Omega\times\Omega\times[0,T]\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 如下:

$$\begin{aligned}&H(t,\omega,\omega',y_1,z_1,v_1,y_2,z_2,v_2,p,q)\\ &\doteq \theta^f(t,\omega,\omega',y_1,z_1,v_1,y_2,z_2,v_2)p+\theta^g(t,\omega,\omega',y_1,z_1,v_1,y_2,z_2,v_2)q\\ &\quad+l(t,\omega,\omega',y_1,z_1,v_1,y_2,z_2,v_2).\end{aligned}\tag{5.8}$$

由变分不等式 (5.6), 我们给出 MF-BDSDEs 随机控制问题的随机最大值原理.

定理 5.1 (随机最大值原理) 设 $(\widehat{Y}(\cdot),\widehat{Z}(\cdot),\widehat{u}(\cdot))$ 是控制问题 $\{(5.1),(5.2)\}$ 的最优轨迹，那么 $\forall v\in U$, a.e. $t\in[0,T]$, a.s.,

$$[\mathbb{E}'\widehat{H}_v(t,\omega,\omega')+\mathbb{E}^*\widehat{H}_{v'}(t,\omega^*,\omega)]\cdot(v-\widehat{u}_t)\geqslant 0,\tag{5.9}$$

其中

$$\widehat{H}(t,\omega,\omega')\doteq H(t,\omega,\omega',\widehat{Y}_t(\omega),\widehat{Z}_t(\omega),\widehat{u}_t(\omega),\widehat{Y}_t(\omega'),\widehat{Z}_t(\omega'),\widehat{u}_t(\omega'),p_t(\omega),q_t(\omega)).\tag{5.10}$$

证 对 $\langle\xi_t,p_t\rangle$ 应用 Itô 公式，可得

$$\begin{aligned}-\mathbb{E}\xi_0p_0&=\mathbb{E}\int_0^T\mathbb{E}'[l_y(s)\xi_s+l_z(s)\eta_s+l_{y'}(s)\xi'_s+l_{z'}(s)\eta'_s]\mathrm{d}s\\ &\quad-\mathbb{E}\int_0^T\mathbb{E}'[\widehat{\theta}^f_{v'}(s)v'_sp_s+\widehat{\theta}^g_{v'}(s)v'_sq_s]\mathrm{d}s\\ &\quad-\mathbb{E}\int_0^T\mathbb{E}'[\widehat{\theta}^f_v(s)v_sp_s+\widehat{\theta}^g_v(s)v_sq_s]\mathrm{d}s.\end{aligned}$$

由上述变分不等式 (5.6), 可得

$$\mathbb{E}\int_0^T\mathbb{E}'[\widehat{\theta}^f_{v'}(s)v'_sp_s+\widehat{\theta}^g_{v'}(s)v'_sq_s+\widehat{l}_{v'}(s)v'_s]\mathrm{d}s$$

$$+\mathbb{E}\int_0^T \mathbb{E}'[\widehat{\theta}_v^f(s)v_sp_s+\widehat{\theta}_v^g(s)v_sq_s+\widehat{l}_v(s)v_s]\mathrm{d}s\geqslant 0.$$

由 Hamiltonian 函数的定义，可得

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\int_0^T&[\mathbb{E}^*H_{v'}(t,\widehat{Y}_t(\omega^*),\widehat{Z}_t(\omega^*),\widehat{u}_t(\omega^*),\widehat{Y}_t(\omega),\widehat{Z}_t(\omega),\widehat{u}_t(\omega),p_t(\omega^*),q_t(\omega^*))\\&+\mathbb{E}'H_v(t,\widehat{Y}_t(\omega),\widehat{Z}_t(\omega),\widehat{u}_t(\omega),\widehat{Y}_t(\omega'),\widehat{Z}_t(\omega'),\widehat{u}_t(\omega'),p_t(\omega),q_t(\omega))]\cdot v_t\mathrm{d}t\geqslant 0.\end{aligned}$$

对任意 $v\in U$, F 是 $\sigma-$ 代数 $\mathcal{F}_t$ 的任意元素，令

$$\overline{v}_s=\begin{cases}\widehat{u}_s, & s\in[0,t),\\ v, & s\in[t,,t+\varepsilon),\ \omega\in F,\\ \widehat{u}_s, & s\in[t,,t+\varepsilon),\ \omega\in\Omega-F,\\ \widehat{u}_s, & s\in[t+\varepsilon,T],\end{cases}$$

可知 $\overline{v}_s\in\mathcal{U}_{ad}$. 由于 v_t 满足 $\widehat{u}_t+v_t\in\mathcal{U}_{ad}$, 取 $v_t=\overline{v}_t-\widehat{u}_t$, 上述不等式可改写为

$$\mathbb{E}\mathbf{1}_F\int_t^{t+\varepsilon}[\mathbb{E}'\widehat{H}_v(s,\omega,\omega')+\mathbb{E}^*\widehat{H}_{v'}(s,\omega^*,\omega)]\cdot(v-\widehat{u}_s)\mathrm{d}s\geqslant 0,$$

这里 $\widehat{H}$ 满足 (5.10). 在 $\varepsilon=0$ 处关于变量 ε 求微分，可得

$$\mathbb{E}\mathbf{1}_F[\mathbb{E}'\widehat{H}_v(t,\omega,\omega')+\mathbb{E}^*\widehat{H}_{v'}(t,\omega^*,\omega)]\cdot(v-\widehat{u}_t)\geqslant 0,$$

因此 (5.9) 成立.

6　平均场倒向重随机 LQ 问题

这一节，我们把上述最大值原理应用于平均场倒向重随机 LQ 问题. 令

$$h(Y_0(\omega),Y_0(\omega'))=\frac{1}{2}Q_0^1Y_0(\omega)^2+\frac{1}{2}Q_0^2Y_0^2(\omega')$$

和

$$\begin{aligned}&f(s,\omega,\omega',Y_s(\omega),Z_s(\omega),v_s(\omega),Y_s(\omega'),Z_s(\omega'),v_s(\omega'))\\=&A_s^1Y_s(\omega)+B_s^1Z_s(\omega)+C_s^1v_s(\omega)+A_s^2Y_s(\omega')+B_s^2Z_s(\omega')+C_s^2v_s(\omega'),\\&g(s,\omega,\omega',Y_s(\omega),Z_s(\omega),v_s(\omega),Y_s(\omega'),Z_s(\omega'),v_s(\omega'))\\=&D_s^1Y_s(\omega)+E_s^1Z_s(\omega)+F_s^1v_s(\omega)+D_s^2Y_s(\omega')+E_s^2Z_s(\omega')+F_s^2v_s(\omega'),\\&l(s,\omega,\omega',Y_s(\omega),Z_s(\omega),v_s(\omega),Y_s(\omega'),Z_s(\omega'),v_s(\omega'))\\=&\frac{1}{2}[M_s^1Y_s^2(\omega)+N_s^1Z_s^2(\omega)+R_s^1v_s^2(\omega)+M_s^2Y_s^2(\omega')+N_s^2Z_s^2(\omega')+R_s^2v_s^2(\omega')],\end{aligned}$$

其中 $A^i:[0,T]\times\Omega^2\to\mathbb{R}$ 是有界的，$(s,\omega,\omega')\mapsto A^i(s,\omega,\omega')$ 是 $\mathcal{F}_s^2$- 可测的 (类似地，其他系数满足以上假设), M^i,N^i 是非负的，R^i 是正数. 状态方程为

$$\begin{aligned}Y_t^v(\omega)=\xi&+\int_t^T\{[\mathbb{E}'A_s^1]Y_s^v(\omega)+[\mathbb{E}'B_s^1]Z_s^v(\omega)+[\mathbb{E}'C_s^1]v_s(\omega)\}\mathrm{d}s\\&+\int_t^T\mathbb{E}'[A_s^2Y_s^v(\omega')+B_s^2Z_s^v(\omega')+C_s^2v_s(\omega')]\mathrm{d}s\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+\int_t^T\{[\mathbb{E}'D_s^1]Y_s^v(\omega)+[\mathbb{E}'E_s^1]Z_s^v(\omega)+[\mathbb{E}'F_s^1]v_s(\omega)\}\overleftarrow{\mathrm{d}}B_s\\
&+\int_t^T\{\mathbb{E}'[D_s^2Y_s^v(\omega')+E_s^2Z_s^v(\omega')+F_s^2v_s(\omega')]\}\overleftarrow{\mathrm{d}}B_s\\
&-\int_t^T Z_s^v(\omega)\overrightarrow{\mathrm{d}}W_s. \qquad (6.1)
\end{aligned}
$$

性能指标为

$$
\begin{aligned}
&J(v(\cdot))\\
=&\frac{1}{2}\mathbb{E}\Big(\int_0^T\mathbb{E}'[M_s^1|Y_s^v(\omega)|^2+N_s^1|Z_s^v(\omega)|^2+R_s^1|v_s(\omega)|^2]\mathrm{d}s+\mathbb{E}'[Q_0^1|Y_0^v(\omega)|^2]\Big)\\
&+\frac{1}{2}\mathbb{E}\Big(\int_0^T\mathbb{E}'[M_s^2|Y_s^v(\omega')|^2+N_s^2|Z_s^v(\omega')|^2+R_s^2|v_s(\omega')|^2]\mathrm{d}s+\mathbb{E}'[Q_0^2|Y_0^v(\omega')|^2]\Big).
\end{aligned}
$$

为了记号简便，把 $A^i(s.\omega,\omega')$ 记为 $A^i(s)$. Hamiltonian 函数为

$$
\begin{aligned}
&H(s,\omega,\omega',y_1,z_1,v_1,y_2,z_2,v_2,p,q)\\
=&[A_s^1y_1+B_s^1z_1+C_s^1v_1+A_s^2y_2+B_s^2z_2+C_s^2v_2]p\\
&+[D_s^1y_1+E_s^1z_1+F_s^1v_1+D_s^2y_2+E_s^2z_2+F_s^2v_2]q\\
&+\frac{1}{2}[M_s^1y_1^2+N_s^1z_1^2+R_s^1v_1^2+M_s^2y_2^2+N_s^2z_2^2+R_s^2v_2^2].
\end{aligned}
$$

由定理 5.1, 可得

$$
0=\mathbb{E}'[C_s^1p_s+F_s^1q_s+R_s^1\widehat{u}_s]+\mathbb{E}^*[C_s^2p_s^*+F_s^2q_s^*+R_s^2\widehat{u}_s], \qquad (6.2)
$$

其中

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}^*[C_s^1p_s]&=\int_\Omega C_s^1(\omega,\omega')p_s(\omega)\mathbb{P}(\mathrm{d}\omega'),\\
\mathbb{E}^*[R_s^2\widehat{u}_s]&=\int_\Omega R_s^2(\omega^*,\omega)u_s(\omega)\mathbb{P}(\mathrm{d}\omega^*),\\
\mathbb{E}^*[C_s^2p_s^*]&=\int_\Omega C_s^2(\omega^*,\omega)p_s(\omega^*)\mathbb{P}(\mathrm{d}\omega^*),
\end{aligned}
$$

以及

$$
\begin{aligned}
p_t=&\mathbb{E}'[Q_0^1\widehat{Y}_0(\omega)]+\mathbb{E}^*[Q_0^2\widehat{Y}_0(\omega)]\\
&+\int_0^t F_2(s,p_s,q_s)\mathrm{d}s+\int_0^t G_2(s,p_s,q_s)\overrightarrow{\mathrm{d}}W_s-\int_0^t q_s\overleftarrow{\mathrm{d}}B_s, \qquad (6.3)
\end{aligned}
$$

且

$$
\begin{aligned}
F_2(s,p_s,q_s)&=\mathbb{E}'[A_s^1p_s+D_s^1q_s+M_s^1\widehat{Y}_s(\omega)]+\mathbb{E}^*[A_s^2p_s^*+D_s^2q_s^*+M_s^2\widehat{Y}_s(\omega')],\\
G_2(s,p_s,q_s)&=\mathbb{E}'[B_s^1p_s+E_s^1q_s+N_s^1\widehat{Z}_s(\omega)]+\mathbb{E}^*[B_s^2p_s^*+E_s^2q_s^*+N_s^2\widehat{Z}_s(\omega')].
\end{aligned}
$$

定理 6.1 假设存在 $\widehat{u}$ 满足 (6.2), 其中 (p,q) 是方程 (6.3) 的解，则上述倒向 LQ 问题存在唯一解.

证 首先，我们有

$$
J(v)-J(\widehat{u})
$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{2}\mathbb{E}\int_0^T \mathbb{E}'[M_s^1(|Y_s^v(\omega)|^2 - |\widehat{Y}_s(\omega)|^2) + N_s^1(|Z_s^v(\omega)|^2 - |\widehat{Z}_s(\omega)|^2)]\mathrm{d}s \\
&\quad + \frac{1}{2}\mathbb{E}\int_0^T \mathbb{E}'[R_s^1(|v_s(\omega)|^2 - |\widehat{u}_s(\omega)|^2) + M_s^2(|Y_s^v(\omega')|^2 - |\widehat{Y}_s(\omega')|^2)]\mathrm{d}s \\
&\quad + \frac{1}{2}\mathbb{E}\int_0^T \mathbb{E}'[N_s^2(|Z_s^v(\omega')|^2 - |\widehat{Z}_s(\omega')|^2) + R_s^2(|v_s(\omega')|^2 - |\widehat{u}_s(\omega')|^2)]\mathrm{d}s \\
&\quad + \frac{1}{2}\mathbb{E}\mathbb{E}'[Q_0^1(|Y_0^v(\omega)|^2 - |\widehat{Y}_0(\omega)|^2) + Q_0^2(|Y_0^v(\omega')|^2 - |\widehat{Y}_0(\omega')|^2)] \\
&\geqslant \mathbb{E}\int_0^T \mathbb{E}'[M_s^1\widehat{Y}_s(\omega)(Y_s^v(\omega) - \widehat{Y}_s(\omega)) + N_s^1\widehat{Z}_s(\omega)(Z_s^v(\omega) - \widehat{Z}_s(\omega))]\mathrm{d}s \\
&\quad + \mathbb{E}\int_0^T \mathbb{E}'[R_s^1\widehat{u}_s(\omega)(v_s(\omega) - \widehat{u}_s(\omega)) + M_s^2\widehat{Y}_s(\omega')(Y_s^v(\omega') - \widehat{Y}_s(\omega'))]\mathrm{d}s \\
&\quad + \mathbb{E}\int_0^T \mathbb{E}'[N_s^2\widehat{Z}_s(\omega')(Z_s^v(\omega') - \widehat{Z}_s(\omega')) + R_s^2\widehat{u}_s(\omega')(v_s(\omega') - \widehat{u}_s(\omega'))]\mathrm{d}s \\
&\quad + \mathbb{E}\mathbb{E}'[Q_0^1\widehat{Y}_0(\omega)(Y_0^v(\omega) - \widehat{Y}_0(\omega)) + Q_0^2\widehat{Y}_0(\omega')(Y_0^v(\omega') - \widehat{Y}_0(\omega'))].
\end{aligned}
$$

另一方面，在 $[0,T]$ 上对 $p_s(\omega)(Y_s^v(\omega) - \widehat{Y}_s(\omega))$ 应用 Itô 公式，可得

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{E}\mathbb{E}'[Q_0^1\widehat{Y}_0(\omega)(Y_0^v(\omega) - \widehat{Y}_0(\omega)) + Q_0^2\widehat{Y}_0(\omega')(Y_0^v(\omega') - \widehat{Y}_0(\omega'))] \\
&= \mathbb{E}\int_0^T \mathbb{E}'[C_s^1 p_s(\omega) + F_s^1 q_s(\omega)](v_s(\omega) - \widehat{u}_s(\omega))\mathrm{d}s \\
&\quad - \mathbb{E}\int_0^T \mathbb{E}'[M_s^1\widehat{Y}_s(\omega)(Y_s^v(\omega) - \widehat{Y}_s(\omega)) + N_s^1\widehat{Z}_s(\omega)(Z_s^v(\omega) - \widehat{Z}_s(\omega))]\mathrm{d}s \\
&\quad + \mathbb{E}\int_0^T \mathbb{E}'[C_s^2(v_s(\omega') - \widehat{u}_s(\omega'))p_s(\omega) + F_s^2(v_s(\omega') - \widehat{u}_s(\omega'))q_s(\omega)]\mathrm{d}s \\
&\quad - \mathbb{E}\int_0^T \mathbb{E}'[M_s^2\widehat{Y}_s(\omega')(Y_s^v(\omega') - \widehat{Y}_s(\omega')) + N_s^2\widehat{Z}_s(\omega')(Z_s^v(\omega') - \widehat{Z}_s(\omega'))]\mathrm{d}s.
\end{aligned}
$$

综上可得

$$
\begin{aligned}
&J(v) - J(\widehat{u}) \\
&\geqslant \mathbb{E}\int_0^T \mathbb{E}'[C_s^1 p_s(\omega) + F_s^1 q_s(\omega)](v_s(\omega) - \widehat{u}_s(\omega))\mathrm{d}s \\
&\quad + \mathbb{E}\int_0^T \mathbb{E}'[R_s^1\widehat{u}_s(\omega)(v_s(\omega) - \widehat{u}_s(\omega)) + R_s^2\widehat{u}_s(\omega')(v_s(\omega') - \widehat{u}_s(\omega'))]\mathrm{d}s \\
&\quad + \mathbb{E}\int_0^T \mathbb{E}'[C_s^2(v_s(\omega') - \widehat{u}_s(\omega'))p_s(\omega) + F_s^2(v_s(\omega') - \widehat{u}_s(\omega'))q_s(\omega)]\mathrm{d}s \\
&= \mathbb{E}\int_0^T \mathbb{E}'[C_s^1 p_s(\omega) + F_s^1 q_s(\omega)](v_s(\omega) - \widehat{u}_s(\omega))\mathrm{d}s \\
&\quad + \mathbb{E}\int_0^T [[\mathbb{E}'R_s^1]\widehat{u}_s(\omega)(v_s(\omega) - \widehat{u}_s(\omega)) + \mathbb{E}^*[R_s^2\widehat{u}_s](v_s(\omega) - \widehat{u}_s(\omega))]\mathrm{d}s \\
&\quad + \mathbb{E}\int_0^T \mathbb{E}^*[C_s^2 p_s^* + F_s^2 q_s^*](v_s(\omega) - \widehat{u}_s(\omega))\mathrm{d}s.
\end{aligned}
$$

由 (6.2) 可知， $J(v) - J(\widehat{u}) \geqslant 0$, 也就是说 $\widehat{u}$ 是最优控制．由于证明唯一性的方法是经典

的，且类似于文 [18] 的论述，我们略去.

致谢 感谢审稿人的认真审阅和宝贵建议.

参 考 文 献

[1] Pardoux E, Peng S G. Backward doubly stochastic differential equations and systems of quasilinear parabolic SPDEs [J]. *Probab Theory Related Fields*, 1994, 98(2):209–227.

[2] Bally V, Matoussi A. Weak solutions for SPDEs and backward doubly stochastic differential equations [J]. *J Theoret Probab*, 2001, 14(1):125–164.

[3] Bahlali K, Gatt R, Mansouri B, Mtiraoui A. Backward doubly SDEs and SPDEs with superlinear growth generators [J]. *Stoch Dynam*, 2017, 17(1):1–31.

[4] Hu L Y, Ren Y. Stochastic PDIEs with nonlinear Neumann boundary conditions and generalized backward doubly stochastic differential equations driven by Lévy processes [J]. *J Comput Appl Math*, 2009, 229(1):230–239.

[5] Janković S, Djordjević J, Jovanović M. On a class of backward doubly stochastic differential equations [J]. *Appl Math Comput*, 2011, 217(21):8754–8764.

[6] Lin Q. Backward doubly stochastic differential equations with weak assumptions on the coefficients [J]. *Appl Math Comput*, 2011, 217(22):9322–9333.

[7] Matoussi A, Piozin L, Popier A. Stochastic partial differential equations with singular terminal condition [J]. *Stoch Proc Appl*, 2017, 127(3):831–876.

[8] Ren Y, Lin A H, Hu L Y. Stochastic PDIEs and backward doubly stochastic differential equations driven by Lévy processes [J]. *J Comput Appl Math*, 2009, 223(2):901–907.

[9] Xu R M. Mean-Field backward doubly stochastic differential equations and related SPDEs [J]. *Bound Value Probl*, 2012, 2012:114, DOI:10.1186/1687-2770-2012-114.

[10] Xu X M. Anticipated backward doubly stochastic differential equations [J]. *Appl Math Comput*, 2013, 220(3):53–62.

[11] Zhang Q, Zhao H Z. Stationary solutions of SPDEs and infinite horizon BDSDEs [J]. *J Funct Anal*, 2007, 252(1):171–219.

[12] Zhang Q, Zhao H Z. Stationary solutions of SPDEs and infinite horizon BDSDEs under non-Lipschitz coefficients [J]. *J Differential Equations*, 2010, 248(5):953–991.

[13] Zhang Q, Zhao H Z. SPDEs with polynomial growth coefficients and the Malliavin calculus method [J]. *Stoch Proc Appl*, 2013, 123(6):2228–2271.

[14] Zhang Q, Zhao H Z. Backward doubly stochastic differential equations with polynomial growth coefficients [J]. *Discrete Con Dyn A*, 2015, 35(11):5285–5315.

[15] Zhu Q F, Shi Y F. Backward doubly stochastic differential equations with jumps and stochastic partial differential-integral equations [J]. *Chin Ann Math Ser B*, 2012, 33(1):127–142.

[16] Zhu Q F, Shi Y F. Forward-backward doubly stochastic differential equations and related stochastic partial differential equations [J]. *Sci China Math*, 2012, 55(12):2517–2534.

[17] Bahlali S, Gherbal B. Optimality conditions of controlled backward doubly stochastic differential equations [J]. *Random Oper Stoch Equ*, 2010, 18(3):247–265.

[18] Han Y C, Peng S G, Wu Z. Maximum principle for backward doubly stochastic control systems with applications [J]. *SIAM J Control Optim*, 2010, 48(7):4224–4241.

[19] Zhang L Q, Shi Y F. Maximum principle for forward-backward doubly stochastic control systems and applications [J]. *ESAIM: COCV*, 2011, 17(4):1174–1197.

[20] Shi Y F, Zhu Q F. Partially observed optimal controls of forward-backward doubly stochastic systems [J]. *ESAIM: COCV*, 2013, 19(3):828–843.

[21] Kac M. Foundations of kinetic theory [J]. *Proc 3rd Berkeley Sympos Math Statist Prob*, 1956, 3:171–197.

[22] McKean H P. A class of Markov processes associated with nonlinear parabolic equations [J]. *Proc Natl Acad Sci USA*, 1966, 56(6):1907–1911.

[23] Ahmed N U. Nonlinear diffusion governed by McKean-Vlasov equation on Hilbert space and optimal control [J]. *SIAM J Control Optim* 2007, 46(1):356–378.

[24] Ahmed N U, Ding X. A semilinear McKean-Vlasov stochastic evolution equation in Hilbert space [J]. *Stoch Proc Appl*, 1995, 60(1):65–85.

[25] Borkar V S, Kumar K S. McKean-Vlasov limit in portfolio optimization [J]. *Stoch Anal Appl*, 2010, 28(5):884–906.

[26] Chan T. Dynamics of the McKean-Vlasov equation [J]. *Ann Probab*, 1994, 22(1):431–441.

[27] Crisan D, Xiong J. Approximate McKean-Vlasov representations for a class of SPDEs [J]. *Stochastics*, 2010, 82(1):53–68.

[28] Kotelenez P M. A class of quasilinear stochastic partial differential equations of McKean-Vlasov type with mass conservation [J]. *Prob Theory Rel Fields*, 1995, 102(2):159–188.

[29] Kotelenez P M, Kurtz T G. Macroscopic limit for stochastic partial differential equations of McKean-Vlasov type [J]. *Prob Theory Rel Fields*, 2010, 146(1):189–222.

[30] Lasry J M, Lions P L. Mean field games [J]. *Japan J Math*, 2007, 2(1):229–260.

[31] Dawson D A. Critical dynamics and fluctuations for a mean-field model of cooperative behavior [J]. *J Statist Phys*, 1983, 31(1):29–85.

[32] Huang M Y, Malhamé R P, Caines P E. Large population stochastic dynamic games: closed-loop McKean-Vlasov systems and the Nash certainty equivalence principle [J]. *Comm Inform Systems*, 2006, 6(3):221–252.

[33] Buckdahn R, Djehiche B, Li J, et al. Mean-field backward stochastic differential equations: a limit approach [J]. *Ann Probab*, 2009, 37(4):1524–1565.

[34] Buckdahn R, Li J, Peng S G. Mean-field backward stochastic differential equations and related partial differential equations [J]. *Stoch Proc Appl*, 2009, 119(10):3133–3154.

[35] Andersson D, Djehiche B. A maximum principle for SDEs of mean-field type [J]. *Appl Math Optim*, 2011, 63(3):341–356.

[36] Buckdahn R, Djehiche B, Li J. A general stochastic maximum principle for SDEs of mean-field type [J]. *Appl Math Optim*, 2011, 64(2):197–216.

[37] Meyer-Brandis T, Øksendal B, Zhou X Y. A mean-field stochastic maximum principle via Malliavin calculus [J]. *Stochastics*, 2012, 84:643–666.

[38] Li J. Stochastic maximum principle in the mean-field controls [J]. *Automatica*, 2012, 48(2):366–373.

[39] Shi Y F, Wang T X, Yong J M. Mean-Field backward stochastic Volterra integral equations [J]. *Discrete Con Dyn B*, 2013, 18(7):1929–1967.

[40] Wen J Q, Shi Y F. Backward doubly stochastic differential equations with random coefficients and quasilinear stochastic PDEs [J]. *J Math Anal Appl*, 2019, 476(1):86–100.

Mean-Field Backward Doubly Stochastic Differential Equations and Its Applications

ZHU Qingfeng[1] WANG Tianxiao[2] SHI Yufeng[3]

[1]School of Mathematics and Quantitative Economics, Shandong University of Finance and Economics, Shandong Key Laboratory of Blockchain Finance, Jinan 250014, China; Institute for Financial Studies and School of Mathematics, Shandong University, Jinan 250100, China. E-mail: zhuqf508@163.com

[2]School of Mathematics, Sichuan University, Chengdu 610065, China. E-mail: wtxiao2014@scu.edu.cn

[3]Corresponding author. Institute for Financial Studies and School of Mathematics, Shandong University, Jinan 250100, China. E-mail: yfshi@sdu.edu.cn

Abstract In this paper, mean-field backward doubly stochastic differential equations (MF-BDSDEs in short) are introduced and studied. The existence and uniqueness of solutions for MF-BDSDEs is established. One probabilistic interpretation for the solutions to a class of nonlocal stochastic partial differential equations is given. A maximum principle of Pontryagin's type is established for optimal control problems of MF-BDSDEs. Finally, one backward linear quadratic optimal control problem of mean-field type is discussed to illustrate the direct application of the maximum principle.

Keywords Mean-Field, Backward doubly stochastic differential equations, Nonlocal stochastic partial differential equations, Maximum principle, Linear quadratic optimal control

2000 MR Subject Classification 60H10, 60H15, 93E20

The English translation of this paper will be published in
Chinese Journal of Contemporary Mathematics, Vol. 41 No. 4, 2020
by ALLERTON PRESS, INC., USA