数 学 年 刊 A 辑
2020, 41(4):429–448
DOI: 10.16205/j.cnki.cama.2020.0030

$\mathbb{R}^N$ 上一类拟线性椭圆型方程广义解的多重性*

贾 高[1] 陈 洁[2] 张龙杰[3]

提要 本文在 $\mathbb{R}^N$ 上研究一类拟线性椭圆型方程广义解的多重性. 借助下半连续泛函的不光滑临界点理论, 得到了方程的解集是无穷和无界的.

关键词 广义解, 下半连续泛函, 不光滑临界点理论
MR (2000) 主题分类 35D99, 46S20, 58E05
中图法分类 O175.3
文献标志码 A
文章编号 1000-8314(2020)04-0429-20

1 引言与主要结果

本文研究下列拟线性方程无穷多广义解 (见定义 1.1) 的存在性:

$$-\mathrm{div}(F_\xi(x,u,\nabla u))+F_s(x,u,\nabla u)+b(x)u=g(x,u),\quad 在\ \mathbb{R}^N 中, \tag{1.1}$$

其中 $N>2$, $b(x)$ 为给定的连续函数且满足

$$b(x)\geqslant 0,\quad \forall\, x\in\mathbb{R}^N,\qquad \lim_{|x|\to+\infty}b(x)=+\infty.$$

$F_s(x,s,\xi)$ 和 $F_\xi(x,s,\xi)$ 分别表示 $F(x,s,\xi)$ 关于 s 和 ξ 的导数.

设 $f:E\to\mathbb{R}\cup\{+\infty\}$,

$$f(u)=\int_{\mathbb{R}^N}F(x,u,\nabla u)\mathrm{d}x+\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N}b(x)|u|^2\mathrm{d}x-\int_{\mathbb{R}^N}G(x,u)\mathrm{d}x, \tag{1.2}$$

其中 $G(x,s)=\int_0^s g(x,t)\mathrm{d}t$, 那么问题 (1.1) 的广义解与泛函 f 的临界点相对应. 这样, 研究问题 (1.1) 的广义解就转化为寻找泛函 f 的临界点.

关于拟线性椭圆型方程的研究有许多学者涉及, 见文 [1–13] 及其他参考文献, 但我们研究的问题更具有一般性. Canino 在文 [5] 中研究下列拟线性问题解的多重性:

$$\sum_{i,j=1}^n D_j(a_{ij}(x,u)D_iu)+\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^n\frac{\partial a_{ij}}{\partial s}(x,u)D_iuD_ju=g(x,u),$$

但必须满足条件 $|a_{ij}(x,s)|\leqslant M$, $\left|\frac{\partial a_{ij}}{\partial s}(x,s)\right|\leqslant M$ 和 Ω 是有界区域. 在文 [6] 中, 作者在类似假设之下: $a_{ij}(x,s)\in L^\infty(R^n\times R)$ 及 $\frac{\partial a_{ij}}{\partial s}(x,s)\in L^\infty(R^n\times R)$, 研究上述问题解的存在性. Pellacci 和 Squassina[11] 在 $b(x)=0$ 和 Ω 是有界情形研究了问题 (1.1). 当

本文 2018 年 3 月 5 日收到.
[1]上海理工大学理学院, 上海 200093. E-mail: gaojia89@163.com
[2]湘一芙蓉第二中学, 长沙 410016. E-mail: 503073704@qq.com
[3]东京大学数学科学研究生院, 东京 153-8914, 日本. E-mail:zhanglj919@gmail.com
*本文受到国家自然科学基金 (No. 11171220) 的资助.

$F(x,s,\xi)=A(x,s)|\xi|^2$ 和 $A(x,s)$ 是有界时, Aouaoui[2] 也研究了问题 (1.1) 在满足条件 $0<\theta G(x,s)\leqslant g(x,s)s,\ \theta>2,\ |g(x,s)s|\leqslant c_0|s|^p,\ 1\leqslant p<\frac{N+2}{N-2}$ 下解的存在性.

在本文, 我们的工作是将文 [11] 中的结果推广到 R^N, 而且不需要假设 $F(x,s,\xi)=A(x,s)|\xi|^2$ 和 $A(x,s)$ 有界.

全文中, 用 E 表示 Banach 空间

$$E=\Big\{u\in L^2(\mathbb{R}^N)\mid\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla u|^2\mathrm{d}x<+\infty,\quad\int_{\mathbb{R}^N}b(x)|u(x)|^2\mathrm{d}x<+\infty\Big\}.$$

我们指出, E 是一个 Hilbert 空间, 内积定义为

$$(u,v)_E=\int_{\mathbb{R}^N}(\nabla u\cdot\nabla v+b(x)u\cdot v)\mathrm{d}x,\quad u,v\in E,$$

范数定义为 $\|u\|=\big(\int_{\mathbb{R}^N}(|\nabla u|^2+b(x)u^2)\mathrm{d}x\big)^{\frac{1}{2}}$.

在阐述我们的主要结果前, 先给出如下基本假设:

(F_1) 设函数 $F(x,s,\xi):\mathbb{R}^N\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^N\to\mathbb{R}$ 满足:

(1) 对 $\forall(s,\xi)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^N$, $F(x,s,\xi)$ 关于 x 可测;

(2) 对几乎所有的 $x\in\mathbb{R}^N$, $F(x,s,\xi)$ 关于 (s,ξ) 是 C^1 的;

(F_2) 对几乎所有的 $x\in\mathbb{R}^N$ 和所有 $s\in\mathbb{R}$, 函数 $F(x,s,\xi)$ 关于 ξ 是严格凸的;

(F_3) 存在常数 $\alpha_0>0$ 和正值增函数 $\alpha\in C(\mathbb{R})$, 使得

$$\alpha_0|\xi|^2\leqslant F(x,s,\xi)\leqslant\alpha(|s|)|\xi|^2,\quad\text{a.e. }x\in\mathbb{R}^N,\quad\forall(s,\xi)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^N;\tag{1.3}$$

(F_4) 存在常数 $D>0$ 和正的增函数 $\beta\in C(\mathbb{R})$, 使得

$$|F_s(x,s,\xi)|\leqslant\beta(|s|)|\xi|^2,\quad\text{a.e. }x\in\mathbb{R}^N,\quad\forall(s,\xi)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^N,\tag{1.4}$$

$$F_s(x,s,\xi)s\geqslant0,\quad\forall s\in\mathbb{R},\ |s|\geqslant D;\tag{1.5}$$

(F_5) 对 $2<p<\frac{2N}{N-2}$, 有

$$\lim_{|s|\to\infty}\frac{\alpha(|s|)}{|s|^{p-2}}=0;\tag{1.6}$$

(F_6) 对 $2<p<\frac{2N}{N-2}$, 存在 $\delta>0$, 使得

$$pF(x,s,\xi)-F_s(x,s,\xi)s-F_\xi(x,s,\xi)\cdot\xi\geqslant\delta|\xi|^2,\quad\forall s\in\mathbb{R};\tag{1.7}$$

(g_1) 设 Carathéodory 函数 $g(\cdot,\cdot):\mathbb{R}^N\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 满足 $g(x,0)=0,$ a.e. $x\in\mathbb{R}^N$, 对任意 $\varepsilon>0$, 存在 $h_\varepsilon\in L^{\frac{2N}{N+2}}(\mathbb{R}^N)$, 使得

$$|g(x,s)|\leqslant h_\varepsilon(x)+\varepsilon|s|^{\frac{N+2}{N-2}},\quad\text{a.e. }x\in\mathbb{R}^N,\quad\forall s\in\mathbb{R};\tag{1.8}$$

(g_2) 对 $2<p<\frac{2N}{N-2}$, 存在函数 $h_1,\ h_3\in L^1(\mathbb{R}^N)$, $h_2,h_4\in L^{\frac{2N}{N+2}}(\mathbb{R}^N)$ 和 $k\in L^\infty(\mathbb{R}^N)$ 且 $k>0$ a.e.$x\in\mathbb{R}^N$, 使得

$$pG(x,s)\leqslant g(x,s)s+h_1(x)+h_2(x)|s|,\tag{1.9}$$

$$G(x,s)\geqslant k(x)|s|^p-h_3(x)-h_4(x)|s|,\tag{1.10}$$

a.e. $x\in\mathbb{R}^N$, $s\in\mathbb{R}$.

注 1.1　(i) E 是加权 Sobolev 空间 (见 [2]). 容易得到, 当 $2 \leqslant z \leqslant 2^*$ 时, 有 $E \hookrightarrow L^z(\mathbb{R}^N)$; 当 $2 \leqslant z < 2^*$ 时, 有 $E \hookrightarrow\hookrightarrow L^z(\mathbb{R}^N)$.

(ii) 在 (1.8) 和 (1.9) 的条件下, 从 E 到 E^* 的映射 $u \mapsto g(x,u)$ 是紧的.

(iii) 容易看出条件 (g_1) 和 (g_2) 弱于文 [2] 中的条件 (H_3) 和 (H_4).

(iv) 利用 (F_1)–(F_3), 可以得到 $F_\xi(x,s,\xi)$ 满足下列增长条件:

$$\alpha_0|\xi|^2 \leqslant F_\xi(x,s,\xi)\cdot\xi \leqslant 4\alpha(|s|)|\xi|^2.$$

(v) 对 $p=3$, 则下列函数满足假设 $(\mathrm{F}_1)-(\mathrm{F}_6)$:

$$F(x,s,\xi) = ((2\sin|x|^2+4)\arctan(s^2)+20)|\xi|^2.$$

(vi) 下列函数满足假设 (g_1) 和 (g_2):

$$g(x,s) = q(x)|s|^{p-2}s, \quad 2<p<\frac{2N}{N-2}, \quad q(x)>0, \quad q(x)\in L^{\frac{N+2}{N+2-(p-1)(N-2)}}(\mathbb{R}^N).$$

注意到, 如果 $F_\xi(x,s,\xi)$ 和 $F_s(x,s,\xi)$ 关于 s 是有界的, 那么 f 是 Gâteaux 可导的 (见 [1–2, 5–6]). 然而在我们讨论的情形下, 对 $u\in E$, 即使 $v\in E\cap L^\infty(\mathbb{R}^N)$, $f'(u)(v)$ 也可能不存在. 为了能进一步研究 f 的性质, 我们定义 E 的子空间. 设 $u\in E$, 定义

$$W_u = \{v\in E: F_\xi(x,u,\nabla u)\cdot\nabla v\in L^1(\mathbb{R}^N), F_s(x,u,\nabla u)v\in L^1(\mathbb{R}^N)\}. \tag{1.11}$$

容易验证 W_u 在 E 中稠密.

下面, 我们给出广义解的定义.

定义 1.1　设 $\omega\in E^*$, 称 u 是方程

$$-\mathrm{div}(F_\xi(x,u,\nabla u)) + F_s(s,u,\nabla u) + b(x)u = \omega, \text{ 在 } \mathbb{R}^N \text{ 中}$$

的广义解, 如果 $u\in E$, 并且满足

$$\begin{cases} F_\xi(x,u,\nabla u)\cdot\nabla u\in L^1(\mathbb{R}^N), \quad F_s(x,u,\nabla u)u\in L^1(\mathbb{R}^N), \\ \displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} F_\xi(x,u,\nabla u)\cdot\nabla v\mathrm{d}x + \int_{\mathbb{R}^N} F_s(x,u,\nabla u)v\mathrm{d}x + \int_{\mathbb{R}^N} b(x)uv\mathrm{d}x = \langle\omega,v\rangle, \quad \forall v\in W_u. \end{cases}$$

我们的目标是借助文 [11] 和 [14] 中关于下半连续泛函的临界点理论, 在 $g(x,s)$ 关于 s 是奇的, 而 $F(x,s,\xi)$ 关于 s 和 ξ 都是偶的条件下获得问题 (1.1) 解的多重性结果. 本文的主要结果是下述定理.

定理 1.1　假设条件 $(\mathrm{F}_1)-(\mathrm{F}_6)$ 和 (g_1)–(g_2) 成立, 进一步假设

$$F(x,-s,-\xi) = F(x,s,\xi), \quad g(x,-s) = -g(x,s), \tag{1.12}$$

a.e. $x\in\mathbb{R}^N$, $\forall(s,\xi)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^N$, 则问题 (1.1) 存在广义解序列 $\{u_k\}\subset E$, 且 $f(u_k)\to+\infty$, 当 $k\to\infty$ 时.

2　预备知识

在本节, 我们先介绍与本文有密切联系的不光滑临界点理论的相关知识 (见 [2, 5, 14]).

定义泛函 $J: E \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$:

$$J(v) = \int_{\mathbb{R}^N} F(x, v, \nabla v) + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} b(x)|v|^2, \tag{2.1}$$

其中 $F(x,s,\xi)$ 满足 (F_1)–(F_4), 考虑泛函 $I: E \to \mathbb{R}$:

$$I(v) = -\int_{\mathbb{R}^N} G(x, v),$$

其中 $G(x,s) = \int_0^s g(x,t)\mathrm{d}t$, $g: \mathbb{R}^N \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 是 Carathéodory 函数, 且满足假设 (g_1), 那么由条件 (F_3) 可以推得 $f(v) = J(v) + I(v)$ 是下半连续的.

对 $u \in D(L) \triangleq \{u \in E, L(u) \in L^2(\mathbb{R}^N)\}$, 定义算子 $L(u) = -\Delta u + b(\cdot)u$. 注意到 $L^{-1}: L^2(\mathbb{R}^N) \to L^2(\mathbb{R}^N)$ 有界、线性和自反. 由 E 紧嵌入到 $L^2(\mathbb{R}^N)$ 知 L^{-1} 是紧的. 由此, 我们能推出存在算子 L 的特征值序列 $\{\lambda_j\}_{j\geqslant 1}$, 使得

$$0 < \lambda_1 < \lambda_2 \leqslant \cdots, \quad \lambda_k \to +\infty \ (k \to +\infty),$$

而且第一特征值 λ_1 可表示为

$$\lambda_1 = \inf\{\|u\|^2 : u \in E, \|u\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} = 1\}.$$

下面的讨论中, 在没有特殊说明的情形下, X 表示赋予度量 d 的度量空间, $B_\delta(u)$ 表示中心为 u, 半径为 δ 的开球.

定义 2.1 (见 [2, 5]) 设泛函 $f: X \to \mathbb{R}$ 是连续的, 若存在 $\delta > 0$ 和连续映射

$$\mathcal{H}: B_\delta(u) \times [0,\delta] \to X$$

满足

$$d(\mathcal{H}(\nu,t),\nu) \leqslant t, \quad f(\mathcal{H}(\nu,t)) \leqslant f(\nu) - \sigma t, \quad \forall (\nu,t) \in B_\delta(u) \times [0,\delta],$$

则称 σ 的上确界为泛函 f 在 u 处的弱斜率, 记为 $|\mathrm{d}f|(u)$.

定义 2.2 设 $f: X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ 是下半连续泛函, 称 $\mathrm{dom}(f) = \{u \in X : f(u) < +\infty\}$ 为 f 的有效域; 定义泛函 $\mathcal{G}_f: \mathrm{epi}(f) \to \mathbb{R}$, 使得 $\mathcal{G}_f(u,\eta) = \eta$, 其中 $\mathrm{epi}(f) = \{(u,\eta) \in X \times \mathbb{R} : f(u) \leqslant \eta\}$.

对 $\mathrm{epi}(f)$ 赋予度量 $d((u,\eta),(v,\mu)) = (d(u,v)^2 + (\eta - \mu)^2)^{\frac{1}{2}}$. 因为 $\mathcal{G}_f$ 的 Lipschitz 常数为 1, 故 $|d\mathcal{G}_f|(u,\eta) \leqslant 1$.

定义 2.3 设 X 是完备度量空间, $f: X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ 是下半连续泛函. 如果存在 $u \in \mathrm{dom}(f)$, 使得 $|df|(u) = 0$, 则称 u 是 f 的一个 (下) 临界点; 如果 $u \in \mathrm{dom}(f)$ 是 f 的一个 (下) 临界点, 且 $f(u) = c$, 则实数 c 被称为泛函 f 的一个 (下) 临界值.

定义 2.4 设 X 是完备度量空间, $f: X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ 是下半连续泛函, $c \in \mathbb{R}$. 如果对 $\mathrm{dom}(f)$ 中每个满足

$$|df|(u_n) \to 0, \quad f(u_n) \to c \ (n \to \infty)$$

的序列 $\{u_n\}$ 都存在 X 中强收敛的子列 $\{u_{n_k}\}$, 则称 f 满足 $(PS)_c$ 条件, 称序列 $\{u_n\}$ 为 f 的一个 $(PS)_c$ 序列.

对 $u \in E$, 我们定义 E 的另一个子空间

$$V_u = \{v \in E \cap L^\infty(\mathbb{R}^N) : u \in L^\infty(\{x \in \mathbb{R}^N : v(x) \neq 0\})\}. \tag{2.2}$$

注 2.1　V_u 在 W_u 中稠密.

定义 2.5　设 $c \in \mathbb{R}$ 是一个实数. 我们称序列 $\{u_n\}$ 是 f 在水平 c 的具体的 Concrete Palais-Smale 序列 (简称 $(CPS)_c$ 序列), 如果存在 $w_n \in E^*$, $w_n \to 0$ $(n \to \infty)$, 使得对每个 $n \geqslant 1$, 有 $F_\xi(x, u_n, \nabla u_n) \cdot \nabla u_n \in L^1(\mathbb{R}^N)$, 并且满足

$$f(u_n) \to c, \text{ 当 } n \to \infty\text{时}, \tag{2.3}$$

$$\int_{\mathbb{R}^N} F_\xi(x, u_n, \nabla u_n) \cdot \nabla v + \int_{\mathbb{R}^N} F_s(x, u_n, \nabla u_n) v + \int_{\mathbb{R}^N} b(x) u_n v - \int_{\mathbb{R}^N} g(x, u_n) v$$
$$= \langle w_n, v\rangle, \quad \forall v \in V_{u_n}. \tag{2.4}$$

如果 f 的每个 $(CPS)_c$ 序列在 E 中有强收敛子列, 我们称 f 在水平 c 满足具体的 Palais-Smale 条件 (简称 $(CPS)_c$ 条件).

命题 2.1　(见 [6])　设 $f : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ 是下半连续泛函, $u \in \mathrm{dom}(f)$, 对 $\eta \in \mathbb{R}$, 记

$$f^\eta = \{u \in X : f(u) < \eta\}. \tag{2.5}$$

假设存在 $\delta > 0$, $\eta > f(u)$, $\sigma > 0$ 和连续映射 $\mathcal{H} : B_\delta(u) \cap f^\eta \times [0, \delta] \to X$, 使得

$$d(\mathcal{H}(\nu, t), \nu) \leqslant t, \quad \forall \nu \in B_\delta(u) \cap f^\eta,$$
$$f(\mathcal{H}(\nu, t)) \leqslant f(\nu) - \sigma t, \quad \forall \nu \in B_\delta(u) \cap f^\eta,$$

则 $|df|(u) \geqslant \sigma$.

命题 2.2　(见 [6])　设 X 是赋范线性空间, $J : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ 是下半连续泛函, $I : X \to \mathbb{R}$ 是 C^1 泛函且 $f = J + I$, 则下面的事实成立:

(a) 对每个 $(u, \eta) \in \mathrm{epi}(f)$, 有

$$|d\mathcal{G}_f|(u, \eta) = 1 \Leftrightarrow |d\mathcal{G}_J|(u, \eta - I(u)) = 1;$$

(b) 如果 J 和 I 是偶泛函, 则对每个 $\eta \geqslant f(0)$, 有

$$|d_{\mathbb{Z}_2}\mathcal{G}_f|(0, \eta) = 1 \Leftrightarrow |d_{\mathbb{Z}_2}\mathcal{G}_J|(0, \eta - I(0)) = 1;$$

(c) 如果 $u \in \mathrm{dom}(f)$ 和 $I'(u) = 0$, 则 $|df|(u) = |dJ|(u)$.

注 2.2　对任意 $(u, \eta) \in \mathrm{epi}(f)$, 则

$$f(u) < \eta \Rightarrow |d\mathcal{G}_f|(u, \eta) = 1. \tag{2.6}$$

命题 2.3　(见 [14])　设 $(u, \eta) \in \mathrm{epi}(f)$, 假设 $\varrho > 0$, 对每个 $\delta > 0$, 存在一个连续映射

$$\mathcal{H} : \{w \in B_\delta(u) : f(w) < \eta + \delta\} \times [0, \delta] \to X,$$

当 $w \in B_\delta(u)$, $f(w) < \eta + \delta$ 和 $t \in [0, \delta]$ 时, 满足

$$d(\mathcal{H}(w, t), w) \leqslant \varrho t, \quad f(\mathcal{H}(w, t)) \leqslant (1 - t) f(w) + t(f(u) + \varrho),$$

则 $|d\mathcal{G}_f|(u,\eta)=1$. 另外, 如果 f 是偶泛函, $u=0$, 且满足 $\mathcal{H}(-w,t)=-\mathcal{H}(w,t)$, 则 $|d_{\mathbb{Z}_2}\mathcal{G}_f|(0,\eta)=1$.

3 基本引理

为了运用抽象临界点理论研究我们的问题, 需要阐述和建立下列引理. 首先介绍 Ambrosetti-Rabinowitz 山路型引理[15−16].

引理 3.1 设 X 是 Banach 空间, 设 $f:X\to\mathbb{R}\cup\{+\infty\}$ 为下半连续偶泛函. 假设存在 X 的严格增长的有限维子空间序列 $\{W_m\}$, 具有下列性质:

(1) 存在 $\rho>0$, $\gamma>f(0)$ 和一个余维数有限的子空间 $V\subset X$, 满足

$$f(u)\geqslant\gamma,\quad \forall u\in V=\{u:\|u\|=\rho\};$$

(2) 存在属于 (ρ,∞) 中的序列 $\{R_m\}$, 使得

$$f(u)\leqslant f(0),\quad \forall u\in W_m=\{u:\|u\|\geqslant R_m\};$$

(3) 对 $c\geqslant\gamma$, f 满足 $(PS)_c$ 条件, 且满足 (2.6);

(4) 对 $\eta>f(0)$, 有 $|d_{\mathbb{Z}_2}\mathcal{G}_f|(0,\eta)\neq 0$;

则 f 存在临界点序列 $\{u_m\}$, 且满足 $f(u_m)\to+\infty$ $(m\to+\infty)$.

考虑 $X=E$, 对 (2.1) 定义的泛函 $J:E\to\mathbb{R}\cup\{+\infty\}$, 利用假设 (F_3), 容易验证 J 是下半连续的. 为了证明定理 1.1, 必须证明泛函 f 满足 (2.6). 为此, 定义截断函数 $T_k:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$:

$$T_k(s)=s,\quad |s|\leqslant k;\quad T_k(s)=k\frac{s}{|s|},\quad |s|\geqslant k;\tag{3.1}$$

其中 $k\geqslant 1$.

引理 3.2 假设 (F_1)–(F_4) 都成立, 则对每个 $(u,\eta)\in\mathrm{epi}(J)$, 有 $|d\mathcal{G}_J|(u,\eta)=1$. 进一步, 如果 $F(x,-s,-\xi)=F(x,s,\xi)$, $\forall\eta>J(0)(=0)$, 则有 $|d_{\mathbb{Z}_2}\mathcal{G}_J|(0,\eta)=1$.

证 设 $(u,\eta)\in\mathrm{epi}(J)$, $\varrho>0$, 则存在 $\delta=\delta(\varrho)\in(0,1]$ 和 $k=k(\varrho)\geqslant 1$, 使得 $k\geqslant D$, 此处 D 是 (F_4) 中所给定, 且对每个 $v\in B_\delta(u)\subset E$, 有

$$\|T_k(v)-v\|\leqslant\|T_k(v)-T_k(u)\|+\|T_k(u)-u\|+\|u-v\|,$$

即对每个 $v\in B_\delta(u)\subset E$, 有

$$\|T_k(v)-v\|<\varrho.\tag{3.2}$$

由 (F_3) 和 (3.1), 得到

$$F(x,v,\nabla T_k(v))\leqslant\alpha(k)|\nabla v|^2,$$

则对 $v\in B_\delta(u)$ 和足够小的 δ, 有

$$\begin{aligned}&\int_{\mathbb{R}^N}F(x,v,\nabla T_k(v))+\frac12\int_{\mathbb{R}^N}b(x)|T_k(v)|^2\\&<\int_{\mathbb{R}^N}F(x,u,\nabla T_k(u))+\frac12\int_{\mathbb{R}^N}b(x)|T_k(u)|^2+\varrho\end{aligned}$$

$$\leqslant \int_{\mathbb{R}^N} F(x,u,\nabla u) + \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} b(x)|u|^2 + \varrho. \tag{3.3}$$

进一步断言: 对每个 $t \in [0,\delta]$ 和 $v \in B(u,\delta)$, 成立

$$J((1-t)v + tT_k(v)) \leqslant (1-t)J(v) + t(J(u)+\varrho). \tag{3.4}$$

事实上, 由 (F_1) 和 (F_2), 存在 $\theta \in (0,1)$, 使得

$$\begin{aligned}&F(x,(1-t)v + tT_k(v),(1-t)\nabla v + t\nabla T_k(v)) - F(x,v,\nabla v)\\&\leqslant tF_s(x, v+\theta t(T_k(v)-v),(1-t)\nabla v + t\nabla T_k(v))(T_k(v)-v)\\&\quad + t(F(x,v,\nabla T_k(v)) - F(x,v,\nabla v)).\end{aligned} \tag{3.5}$$

由 (3.1), (3.2), (3.5) 和 (F_4), 可得

$$\begin{aligned}J((1-t)v + tT_k(v)) &\leqslant (1-t)\int_{\mathbb{R}^N} F(x,v,\nabla v) + \frac{(1-t)}{2}\int_{\mathbb{R}^N} b(x)|v|^2\\&\quad + \int_{\mathbb{R}^N} tF(x,v,\nabla T_k(v)) + \frac{t}{2}\int_{\mathbb{R}^N} b(x)|T_k(v)|^2\\&\leqslant (1-t)J(v) + t(J(u)+\varrho).\end{aligned}$$

故断言 (3.4) 得证.

取

$$\mathcal{H} : \{v \in B_\delta(u) : J(v) < \eta + \delta\} \times [0,\delta] \to E$$

和

$$\mathcal{H}(v,t) = (1-t)v + tT_k(v),$$

结合 (3.3) 和 (3.4), 对 $v \in B_\delta(u), J(v) < \eta+\delta$ 和 $t \in [0,\delta]$, 有 $d(\mathcal{H}(v,t),v) \leqslant \varrho t$ 和

$$J(\mathcal{H}(v,t)) \leqslant (1-t)J(v) + t(J(u)+\varrho),$$

由命题 2.3, 可得 $|d\mathcal{G}_J|(u,\eta) = 1$. 最后, 因为 $\mathcal{H}(-v,t) = -\mathcal{H}(v,t)$, 所以当 $F(x,-s,-\xi) = F(x,s,\xi)$ 时, 有 $|d_{\mathbb{Z}_2}\mathcal{G}_J|(0,\eta) = 1$.

引理 3.3　假设 (F_1)–(F_4) 和 (g_1) 都成立, 则对每个 $(u,\eta) \in \mathrm{epi}(f)$, 成立

$$|d\mathcal{G}_f|(u,\eta) = 1.$$

进一步, 如果 $F(x,-s,-\xi) = F(x,s,\xi)$, $g(x,-s) = -g(x,s)$, 则对每个 $\eta > f(0)$, 有 $|d_{\mathbb{Z}_2}\mathcal{G}_f|(0,\eta) = 1$.

证　因为 G 是 C^1 的, 由引理 3.2 和命题 2.2 知结论成立.

在下面的引理中, 我们将寻求泛函 J 方向导数存在的条件.

引理 3.4　假设 (F_1)–(F_4) 成立, 则对每个 $u \in \mathrm{dom}(J)$ 和 $v \in V_u$, 方向导数 $J'(u)(v)$ 均存在. 进一步有

$$F_s(x,u,\nabla u)v \in L^1(\mathbb{R}^N), \quad F_\xi(x,u,\nabla u)\cdot\nabla v \in L^1(\mathbb{R}^N)$$

和

$$J'(u)(v) = \int_{\mathbb{R}^N} F_\xi(x,u,\nabla u)\cdot\nabla v + \int_{\mathbb{R}^N} F_s(x,u,\nabla u)v + \int_{\mathbb{R}^N} b(x)uv.$$

证 设 $u \in \mathrm{dom}(J)$ 和 $v \in V_u$, 对每个 $t \in \mathbb{R}$ 和几乎处处 $x \in \mathbb{R}^N$, 令

$$R(x,t) = F(x, u(x) + tv(x), \nabla u(x) + t\nabla v(x)).$$

由 (F_3), 我们得到 $|R(x,t)| \leqslant \alpha(|u(x) + tv(x)|)|\nabla u(x) + t\nabla v(x)|^2$. 又因为 $v \in V_u$, 故 $R(x,t) \in L^1(\mathbb{R}^N)$.

进一步, 通过直接计算, 可得

$$\frac{\partial R}{\partial t}(x,t) = F_s(x, u+tv, \nabla u + t\nabla v)v + F_\xi(x, u+tv, \nabla u + t\nabla v) \cdot \nabla v.$$

由 (F_4) (1.4) 和注 1.1(iv), 对每个 $x \in \mathbb{R}^N$, $v(x) \neq 0$, 有

$$\Big|\frac{\partial R}{\partial t}(x,t)\Big| \leqslant \|v\|_{L^\infty}\beta(\|u\|_{L^\infty} + \|v\|_{L^\infty})(|\nabla u| + |\nabla v|)^2 + \alpha(\|u\|_{L^\infty} + \|v\|_{L^\infty})(|\nabla u| + |\nabla v|)|\nabla v|.$$

注意到上述不等号的右边的函数属于 $L^1(\mathbb{R}^N)$, 因此可以得到

$$J'(u)(v) = \lim_{t\to 0}\frac{J(u+tv) - J(u)}{t} = \int_{\mathbb{R}^N} F_\xi(x,u,\nabla u)\cdot\nabla v + \int_{\mathbb{R}^N} F_s(x,u,\nabla u)v + \int_{\mathbb{R}^N} b(x)uv.$$

为了得到关于泛函 J 的弱斜率的基本估计, 需要引入截断函数 $H \in C^\infty(\mathbb{R})$:

$$H(s) = 1,\ s \in [-1,1];\quad H(s) = 0,\ s \in (-\infty,-2)\cup(2,+\infty);\quad |H'(s)| \leqslant 2. \tag{3.6}$$

引理 3.5 假设 (F_1)–(F_4) 成立, 则对每个 $u \in \mathrm{dom}(J)$ 和每个 $w \in E^*$, 成立不等式

$$\begin{aligned}&|d(J-w)|(u)\\ \geqslant &\sup_{v\in V_u, \|v\|\leqslant 1}\Big\{\int_{\mathbb{R}^N} F_\xi(x,u,\nabla u)\cdot\nabla v + \int_{\mathbb{R}^N} F_s(x,u,\nabla u)v + \int_{\mathbb{R}^N} b(x)uv - \langle w, v\rangle\Big\}.\end{aligned} \tag{3.7}$$

证 第 1 步. 如果 $|d(J-w)|(u) = \infty$ 或者

$$\sup_{v\in V_u, \|v\|\leqslant 1}\Big\{\int_{\mathbb{R}^N} F_\xi(x,u,\nabla u)\cdot\nabla v + \int_{\mathbb{R}^N} F_s(x,u,\nabla u)v + \int_{\mathbb{R}^N} b(x)uv - \langle w, v\rangle\Big\} = 0,$$

则结论成立. 否则, 设 $u \in \mathrm{dom}(J)$ 和 $\eta \in \mathbb{R}^+$, 且满足 $J(u) < \eta$. 如果 $\overline{\sigma} > 0$ 且满足

$$\overline{\sigma} < \sup\Big\{\int_{\mathbb{R}^N} F_\xi(x,u,\nabla u)\cdot\nabla v + \int_{\mathbb{R}^N} F_s(x,u,\nabla u)v + \int_{\mathbb{R}^N} b(x)uv - \langle w, v\rangle\Big\},$$

那么存在 $\overline{v} \in V_u$, 成立 $\|\overline{v}\| \leqslant 1$ 和

$$\int_{\mathbb{R}^N} F_\xi(x,u,\nabla u)\cdot\nabla\overline{v} + \int_{\mathbb{R}^N} F_s(x,u,\nabla u)\overline{v} + \int_{\mathbb{R}^N} b(x)u\overline{v} - \langle w, \overline{v}\rangle < -\overline{\sigma}. \tag{3.8}$$

第 2 步. 设 $H(s)$ 是 (3.6) 所定义. 我们将证明: 对固定 $\varepsilon > 0$, 存在 $k_0 \geqslant 1$, 使得

$$\Big\|H\Big(\frac{u}{k_0}\Big)\overline{v}\Big\| < 1 + \varepsilon \tag{3.9}$$

和

$$\begin{aligned}&\int_{\mathbb{R}^N} F_\xi(x,u,\nabla u)\cdot\nabla\Big(H\Big(\frac{u}{k_0}\Big)\overline{v}\Big) + \int_{\mathbb{R}^N} F_s(x,u,\nabla u)H\Big(\frac{u}{k_0}\Big)\overline{v}\\ &+ \int_{\mathbb{R}^N} b(x)uH\Big(\frac{u}{k_0}\Big)\overline{v} - \Big\langle w, H\Big(\frac{u}{k_0}\Big)\overline{v}\Big\rangle < -\overline{\sigma}.\end{aligned} \tag{3.10}$$

设 $v_k = H\big(\frac{u}{k}\big)\overline{v}$, 显然, 对每个 $k \geqslant 1$, 有 $v_k \in V_u$ 和在 E 中 $v_k \to \overline{v}(k \to \infty)$.

注意到

$$H\Big(\frac{u}{k_0}\Big)=\begin{cases}0, & |u|\geqslant 2k_0,\\ 1, & |u|\leqslant k_0,\end{cases}$$

因此当 $k_0\to\infty$, 有 $\big\|H(\frac{u}{k_0})\overline{v}-\overline{v}\big\|\to 0$, 即对足够大的 k_0, 有 $\big\|H(\frac{u}{k_0})\overline{v}-\overline{v}\big\|<\varepsilon$. 结合 $\|\overline{v}\|\leqslant 1$, 便推出 (3.9).

进一步地, 由引理 3.4 知

$$\langle J'(u),v_k\rangle=\int_{\mathbb{R}^N}F_\xi(x,u,\nabla u)\cdot\nabla v_k+\int_{\mathbb{R}^N}F_s(x,u,\nabla u)v_k+\int_{\mathbb{R}^N}b(x)uv_k.$$

另外, 当 $k\to\infty$ 时, 有

$$F_s(x,u(x),\nabla u(x))v_k(x)\to F_s(x,u(x),\nabla u(x))\overline{v}(x),\qquad \text{a.e. } x\in\mathbb{R}^N,$$

$$F_\xi(x,u(x),\nabla u(x))\cdot\nabla v_k(x)\to F_\xi(x,u(x),\nabla u(x))\cdot\nabla\overline{v}(x),\qquad \text{a.e. } x\in\mathbb{R}^N.$$

特别地, 有

$$\Big|F_s(x,u,\nabla u)H\Big(\frac{u}{k}\Big)\overline{v}\Big|\leqslant|F_s(x,u,\nabla u)\overline{v}|,$$

$$|F_\xi(x,u,\nabla u)\cdot\nabla v_k(x)|\leqslant|F_\xi(x,u,\nabla u)||\nabla\overline{v}|+2|\overline{v}||F_\xi(x,u,\nabla u)\cdot\nabla u|.$$

因为 $\overline{v}\in V_u$, 利用 (F_4)–(1.4), 注 1.1–(iv), $v_k\rightharpoonup\overline{v}$ 以及 Lebesgue 控制收敛定理, 有

$$\lim_{k\to\infty}\int_{\mathbb{R}^N}F_s(x,u,\nabla u)v_k=\int_{\mathbb{R}^N}F_s(x,u,\nabla u)\overline{v},$$

$$\lim_{k\to\infty}\int_{\mathbb{R}^N}F_\xi(x,u,\nabla u)\cdot\nabla v_k=\int_{\mathbb{R}^N}F_\xi(x,u,\nabla u)\cdot\nabla\overline{v},$$

$$\lim_{k\to\infty}\int_{\mathbb{R}^N}b(x)uv_k=\int_{\mathbb{R}^N}b(x)u\overline{v}.$$

结合 (3.8), 便得到 (3.10).

第 3 步. 证明存在 $\delta_1>0$, 使得当 $z\in B_{\delta_1}(u)\cap J^\eta$ 时 (J^η 是由 (2.5) 所定义), 成立

$$\Big\|H\Big(\frac{z}{k_0}\Big)\overline{v}\Big\|\leqslant 1+\varepsilon \tag{3.11}$$

和

$$\int_{\mathbb{R}^N}F_\xi(x,z,\nabla z)\cdot\nabla\Big(H\Big(\frac{z}{k_0}\Big)\overline{v}\Big)+\int_{\mathbb{R}^N}F_s(x,z,\nabla z)H\Big(\frac{z}{k_0}\Big)\overline{v}$$
$$+\int_{\mathbb{R}^N}b(x)zH\Big(\frac{z}{k_0}\Big)\overline{v}-\Big\langle w,H\Big(\frac{z}{k_0}\Big)\overline{v}\Big\rangle<-\overline{\sigma}. \tag{3.12}$$

事实上, 如果取 $u_n\in J^\eta$, 由于在 E 中有 $u_n\to u$, 若令 $v_n=H(\frac{u_n}{k_0})\overline{v}$, 显然在 E 中有 $v_n\to H(\frac{u}{k_0})\overline{v}$. 结合 (3.9), 便知 (3.11) 成立.

另一方面, 注意到 $v_n\in V_{u_n}$, 由引理 3.4 知, 利用 (F_4)–(1.4) 和注 1.1–(iv), 则有

$$|F_s(x,u_n,\nabla u_n)v_n|\leqslant\beta(2k_0)\|\overline{v}\|_{L^\infty}|\nabla u_n|^2,$$

$$|F_\xi(x,u_n,\nabla u_n)\cdot\nabla v_n|\leqslant\alpha(2k_0)|\nabla u_n|\Big[\frac{2}{k_0}\|\overline{v}\|_{L^\infty}|\nabla u_n|+|\nabla\overline{v}|\Big].$$

因此, 可得

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}^N}F_s(x,u_n,\nabla u_n)v_n=\int_{\mathbb{R}^N}F_s(x,u,\nabla u)H\Big(\frac{u}{k_0}\Big)\overline{v},$$

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}^N} F_\xi(x,u_n,\nabla u_n)\cdot\nabla v_n=\int_{\mathbb{R}^N} F_\xi(x,u,\nabla u)\cdot\nabla\Big[H\Big(\frac{u}{k_0}\Big)\overline{v}\Big],$$
$$\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}^N} b(x)u_nv_n=\int_{\mathbb{R}^N} b(x)uH\Big(\frac{u}{k_0}\Big)\overline{v},$$

结合 (3.10), 可以得到 (3.12).

第 4 步. 注意到 (3.12) 等价于 $J'(z)\big(H\big(\frac{z}{k_0}\big)\overline{v}\big)-\big\langle w,H\big(\frac{z}{k_0}\big)\overline{v}\big\rangle<-\overline{\sigma}$. 因此, 存在 $\delta<\delta_1$, 对每个 $t\in[0,\delta]$ 和 $z\in B_\delta(u)\cap J^\eta$, 成立

$$J\Big(z+\frac{t}{1+\varepsilon}H\Big(\frac{z}{k_0}\Big)\overline{v}\Big)-J(z)-\Big\langle w,\frac{t}{1+\varepsilon}H\Big(\frac{z}{k_0}\Big)\overline{v}\Big\rangle\leqslant-\frac{\overline{\sigma}}{1+\varepsilon}t. \tag{3.13}$$

最后, 定义连续映射 $\mathcal{H}:B_\delta(u)\cap J^\eta\times[0,\delta]\to E$:

$$\mathcal{H}(z,t)=z+\frac{t}{1+\varepsilon}H\Big(\frac{z}{k_0}\Big)\overline{v}.$$

由 (3.11) 和 (3.13), 得到

$$J(\mathcal{H}(z,t))-\Big\langle w,z+\frac{t}{1+\varepsilon}H\Big(\frac{z}{k_0}\Big)\overline{v}\Big\rangle\leqslant J(z)-\langle w,z\rangle-\frac{\overline{\sigma}}{1+\varepsilon}t.$$

因此, $\mathcal{H}$ 满足命题 2.1, 则 $|d(J-w)|(u)>\frac{\overline{\sigma}}{1+\varepsilon}$. 由 ε 的任意性, 便证得结论成立.

引理 3.6 假设 (F_1)–(F_4) 和 (g_1) 成立, 则对每个 $u\in\mathrm{dom}(f)$ 满足 $|df|(u)<\infty$, 存在 $w\in E^*$, 使得当 $\|w\|_{E^*}\leqslant|df|(u)$ 和 $\forall v\in V_u$ 时, 有

$$\int_{\mathbb{R}^N}F_\xi(x,u,\nabla u)\cdot\nabla v+\int_{\mathbb{R}^N}F_s(x,u,\nabla u)v+\int_{\mathbb{R}^N}b(x)uv-\int_{\mathbb{R}^N}g(x,u)v=\langle w,v\rangle.$$

证 对 $u\in\mathrm{dom}(f)$ 且 $|df|(u)<\infty$, 设

$$\widehat{I}(v)=I(v)+\int_{\mathbb{R}^N}g(x,u)v,\quad \widehat{J}(v)=J(v)-\int_{\mathbb{R}^N}g(x,u)v.$$

因为 $\widehat{I}$ 是 C^1 泛函且 $\widehat{I}'(u)=0$, 由命题 2.2(c), 有 $|df|(u)=|d\widehat{J}|(u)$. 再利用引理 3.5, 存在 $w\in E^*$ 且 $\|w\|_{E^*}\leqslant|df|(u)$, 对任意 $v\in V_u$, 成立

$$\int_{\mathbb{R}^N}F_\xi(x,u,\nabla u)\cdot\nabla v+\int_{\mathbb{R}^N}F_s(x,u,\nabla u)v+\int_{\mathbb{R}^N}b(x)uv-\int_{\mathbb{R}^N}g(x,u)v=\langle w,v\rangle.$$

引理 3.7 假设 (F_1)–(F_4) 成立, 则对 $u\in\mathrm{dom}(J)$, 有

$$\int_{\mathbb{R}^N}F_\xi(x,u,\nabla u)\cdot\nabla u+\int_{\mathbb{R}^N}F_s(x,u,\nabla u)u+\int_{\mathbb{R}^N}b(x)|u|^2\leqslant|dJ|(u)\|u\|. \tag{3.14}$$

特别地, 如果 $|dJ|(u)<\infty$, 那么有

$$F_\xi(x,u,\nabla u)\cdot\nabla u\in L^1(\mathbb{R}^N),\quad F_s(x,u,\nabla u)u\in L^1(\mathbb{R}^N).$$

证 对 $u\in\mathrm{dom}\ (J)$, 如果 $|dJ|(u)=\infty$ 或

$$\int_{\mathbb{R}^N}F_\xi(x,u,\nabla u)\cdot\nabla u+\int_{\mathbb{R}^N}F_s(x,u,\nabla u)u+\int_{\mathbb{R}^N}b(x)|u|^2\leqslant0,$$

则结论成立. 否则, 设 $k\geqslant1$, $u\in\mathrm{dom}(J)$ 且 $|dJ|(u)<\infty$ 和 $\sigma>0$, 使得

$$\int_{\mathbb{R}^N}F_\xi(x,u,\nabla u)\cdot\nabla T_k(u)+\int_{\mathbb{R}^N}F_s(x,u,\nabla u)T_k(u)+\int_{\mathbb{R}^N}b(x)uT_k(u)>\sigma\|T_k(u)\|,$$

其中 $T_k(u)$ 由 (3.1) 中定义. 接下来我们将证明 $|dJ|(u)\geqslant\sigma$.

对于给定的 $\varepsilon > 0$, 可以断言: 存在 $\delta_1 > 0$, 使得对每一个 $w \in E$ 且 $\|w-u\| < \delta_1$, 有

$$\|T_k(w)\| \leqslant (1+\varepsilon)\|T_k(u)\| \tag{3.15}$$

和

$$\begin{aligned}&\int_{\mathbb{R}^N} F_\xi(x,w,\nabla w)\cdot\nabla T_k(w) + \int_{\mathbb{R}^N} F_s(x,w,\nabla w)T_k(w)\\&+\int_{\mathbb{R}^N} b(x)wT_k(w) > \sigma\|T_k(u)\|.\end{aligned} \tag{3.16}$$

事实上, 如果取 $w_n \in E$, 使得在 E 中 $w_n \to u$, 则 (3.15) 成立. 另一方面, 由 (F_4)–(1.5), 有

$$F_s(x,w_n(x),\nabla w_n(x))w_n(x) \geqslant -D\beta(D)|\nabla w_n(x)|^2.$$

由注 1.1–(iv), 可得

$$F_\xi(x,w_n(x),\nabla w_n(x))\cdot\nabla T_k(w_n(x)) \geqslant 0.$$

注意到, 在 E 中有 $w_n \to u$, 利用 Fatou 引理, 可得

$$\begin{aligned}&\liminf_{n\to\infty}\Big[\int_{\mathbb{R}^N} F_\xi(x,w_n,\nabla w_n)\cdot\nabla T_k(w_n) + \int_{\mathbb{R}^N} F_s(x,w_n,\nabla w_n)T_k(w_n)\\&\quad+\int_{\mathbb{R}^N} b(x)w_nT_k(w_n)\Big]\\&\geqslant \int_{\mathbb{R}^N} F_\xi(x,u,\nabla u)\cdot\nabla T_k(u) + \int_{\mathbb{R}^N} F_s(x,u,\nabla u)T_k(u) + \int_{\mathbb{R}^N} b(x)uT_k(u)\\&> \sigma\|T_k(u)\|,\end{aligned}$$

故 (3.16) 成立.

取连续映射 $\mathcal{H}: B_{\delta_1}(u)\times[0,\delta_1] \to E$, 定义为

$$\mathcal{H}(w,t) = w - \frac{t}{\|T_k(u)\|(1+\varepsilon)}T_k(w).$$

由 (3.15) 和 (3.16), 存在 $\delta < \delta_1$, 使得对每个 $t \in [0,\delta]$ 和 $w \in E$, $\|w-u\| < \delta$ 和 $J(w) < J(u)+\delta$, 有

$$(\mathcal{H}(w,t),w) \leqslant t, \quad J(\mathcal{H}(w,t)) - J(w) \leqslant -\frac{\sigma t}{1+\varepsilon},$$

则由 ε 的任意性, 有 $|dJ|(u) \geqslant \sigma$. 因此, 对每个 $k \geqslant 1$, 有

$$\int_{\mathbb{R}^N} F_\xi(x,u,\nabla u)\cdot\nabla T_k(u) + \int_{\mathbb{R}^N} F_s(x,u,\nabla u)T_k(u) + \int_{\mathbb{R}^N} b(x)uT_k(u) \leqslant |dJ|(u)\|T_k(u)\|.$$

令 $k\to\infty$, 根据单调收敛定理, 便得到 (3.14).

我们拟运用文 [5] 中的方法扩大允许测试函数类. 假设有函数 $u \in E$, 使得

$$\int_{\mathbb{R}^N} F_\xi(x,u,\nabla u)\cdot\nabla z + \int_{\mathbb{R}^N} F_s(x,u,\nabla u)z + \int_{\mathbb{R}^N} b(x)uz = \langle w,z\rangle, \quad \forall z \in V_u, \tag{3.17}$$

其中 V_u 由 (2.2) 给出, $w \in E^*$, 一个自然的问题是能否在 $E\cap L^\infty(\mathbb{R}^N)$ 中找到测试函数? 下面的引理给出肯定的回答.

引理 3.8 假设 (F_1)–(F_4) 成立, 设 $w \in E^*$ 和 $u \in E$ 满足 (3.17). 进一步, 假设

$F_\xi(x,u,\nabla u)\cdot\nabla u\in L^1(\mathbb{R}^N)$, $v\in E\cap L^\infty(\mathbb{R}^N)$ 和 $\eta\in L^1(\mathbb{R}^N)$, 使得

$$F_\xi(x,u,\nabla u)\cdot\nabla v+F_s(x,u,\nabla u)v\geqslant\eta, \tag{3.18}$$

则有 $F_\xi(x,u,\nabla u)\cdot\nabla v+F_s(x,u,\nabla u)v\in L^1(\mathbb{R}^N)$ 和

$$\int_{\mathbb{R}^N}F_\xi(x,u,\nabla u)\cdot\nabla v+\int_{\mathbb{R}^N}F_s(x,u,\nabla u)v+\int_{\mathbb{R}^N}b(x)uv=\langle w,v\rangle.$$

证 因为 $v\in E\cap L^\infty(\mathbb{R}^N)$, 那么 $H\big(\frac{u}{k}\big)v\in V_u$. 由 (3.17), 对 $k\geqslant 1$, 可得

$$\begin{aligned}&\int_{\mathbb{R}^N}F_\xi(x,u,\nabla u)\cdot\nabla\Big[H\Big(\frac{u}{k}\Big)v\Big]+\int_{\mathbb{R}^N}F_s(x,u,\nabla u)H\Big(\frac{u}{k}\Big)v+\int_{\mathbb{R}^N}b(x)uH\Big(\frac{u}{k}\Big)v\\&=\Big\langle w,H\Big(\frac{u}{k}\Big)v\Big\rangle.\end{aligned}\tag{3.19}$$

注意到

$$\int_{\mathbb{R}^N}\Big|F_\xi(x,u,\nabla u)\cdot\nabla uH'\Big(\frac{u}{k}\Big)\frac{v}{k}\Big|\leqslant\frac{2}{k}\|v\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)}\int_{\mathbb{R}^N}F_\xi(x,u,\nabla u)\cdot\nabla u,$$

由 $F_\xi(x,u,\nabla u)\cdot\nabla u\in L^1(\mathbb{R}^N)$, Lebesgue 控制收敛定理和弱收敛的定义, 有

$$\begin{aligned}&\lim_{k\to\infty}\int_{\mathbb{R}^N}F_\xi(x,u,\nabla u)\cdot\nabla uH'\Big(\frac{u}{k}\Big)\frac{v}{k}=0,\\&\lim_{k\to\infty}\Big\langle w,H\Big(\frac{u}{k}\Big)v\Big\rangle=\langle w,v\rangle,\\&\lim_{k\to\infty}\int_{\mathbb{R}^N}b(x)wH\Big(\frac{u}{k}\Big)v=\int_{\mathbb{R}^N}b(x)wv.\end{aligned}$$

从 (3.18) 便得到

$$(F_\xi(x,u,\nabla u)\cdot\nabla v+F_s(x,u,\nabla u)v)H\Big(\frac{u}{k}\Big)\geqslant H\Big(\frac{u}{k}\Big)\eta\geqslant-\eta^-\in L^1(\mathbb{R}^N).$$

利用 (3.19) 及 Fatou 引理, 我们有

$$\int_{\mathbb{R}^N}F_\xi(x,u,\nabla u)\cdot\nabla v+\int_{\mathbb{R}^N}F_s(x,u,\nabla u)v+\int_{\mathbb{R}^N}b(x)uv\leqslant\langle w,v\rangle.$$

由上式结合 (3.18), 有

$$F_\xi(x,u,\nabla u)\cdot\nabla v+F_s(x,u,\nabla u)v\in L^1(\mathbb{R}^N). \tag{3.20}$$

另一方面, 因为

$$\Big|[F_\xi(x,u,\nabla u)\cdot\nabla v+F_s(x,u,\nabla u)v]H\Big(\frac{u}{k}\Big)\Big|\leqslant|F_\xi(x,u,\nabla u)\cdot\nabla v+F_s(x,u,\nabla u)v|,$$

对 (3.19) 取极限, 并利用 (3.20) 和 Lebesgue 控制收敛定理, 便得到结论.

在下面的讨论中, 我们将证明: 在适当的假设下, 若 u 满足 (3.17), 那么 u 是相应问题的广义解.

引理 3.9 假设 (F_2) 和 (1.3)–(1.5) 都成立, 设 $w\in E^*$ 和 $u\in E$ 满足 (3.17). 进一步, 假设 $F_\xi(x,u,\nabla u)\cdot\nabla u\in L^1(\mathbb{R}^N)$, $v\in E$ 及 $\eta\in L^1(\mathbb{R}^N)$, 且满足

$$F_s(x,u,\nabla u)v\geqslant\eta,\quad F_\xi(x,u,\nabla u)\cdot\nabla v\geqslant\eta, \tag{3.21}$$

则有 $F_s(x,u,\nabla u)v\in L^1(\mathbb{R}^N)$, $F_\xi(x,u,\nabla u)\cdot\nabla v\in L^1(\mathbb{R}^N)$, 以及

$$\int_{\mathbb{R}^N}F_\xi(x,u,\nabla u)\cdot\nabla v+\int_{\mathbb{R}^N}F_s(x,u,\nabla u)v+\int_{\mathbb{R}^N}b(x)u\cdot v=\langle w,v\rangle. \tag{3.22}$$

特别地, 有 $F_s(x,u,\nabla u)$, $F_s(x,u,\nabla u)u\in L^1(\mathbb{R}^N)$ 和

$$\int_{\mathbb{R}^N} F_\xi(x,u,\nabla u)\cdot\nabla u+\int_{\mathbb{R}^N} F_s(x,u,\nabla u)u+\int_{\mathbb{R}^N} b(x)|u|^2=\langle w,u\rangle,$$

即 u 是方程

$$-\mathrm{div}(F_\xi(x,u,\nabla u))+F_s(x,u,\nabla u)+b(x)u=w \tag{3.23}$$

的广义解.

证　设 $k\geqslant 1$, 对 $v\in E$, 有 $T_k(u)\in E\cap L^\infty(\mathbb{R}^N)$ 和 $-v^-\leqslant T_k(v)\leqslant v^+$, 则由 (3.21) 可得

$$F_s(x,u,\nabla u)T_k(v)\geqslant -\eta^-\in L^1(\mathbb{R}^N). \tag{3.24}$$

进一步还有

$$F_\xi(x,u,\nabla u)\cdot\nabla T_k(v)\geqslant -\eta^-\in L^1(\mathbb{R}^N). \tag{3.25}$$

这样, 利用引理 3.8, 对 $k\geqslant 1$, 有

$$\begin{aligned}&\int_{\mathbb{R}^N} F_\xi(x,u,\nabla u)\cdot\nabla T_k(v)+\int_{\mathbb{R}^N} F_s(x,u,\nabla u)T_k(v)+\int_{\mathbb{R}^N} b(x)u\cdot T_k(v)\\&=\langle w,T_k(v)\rangle.\end{aligned} \tag{3.26}$$

因此, 利用 Fatou 引理, 可得

$$\int_{\mathbb{R}^N} F_\xi(x,u,\nabla u)\cdot\nabla v+\int_{\mathbb{R}^N} F_s(x,u,\nabla u)v+\int_{\mathbb{R}^N} b(x)u\cdot v\leqslant\langle w,v\rangle. \tag{3.27}$$

结合 (3.24), (3.25) 和 (3.27), 有

$$F_s(x,u,\nabla u)v\in L^1(\mathbb{R}^N),\quad F_\xi(x,u,\nabla u)\cdot\nabla v\in L^1(\mathbb{R}^N).$$

如果在 (3.26) 中, 令 $k\to\infty$, 利用 Lebesgue 控制收敛定理可得 (3.22). 特别地, 由 (F_4) 和注 1.1–(iv), 可选取 $v=u$.

最后, 因为

$$F_s(x,u,\nabla u)=F_s(x,u,\nabla u)\chi_{\{|u|<1\}}+F_s(x,u,\nabla u)\chi_{\{|u|\geqslant 1\}}$$

及

$$|F_s(x,u,\nabla u)\chi_{\{|u|\geqslant 1\}}|\leqslant|F_s(x,u,\nabla u)u|,$$

由 (1.4), 可得 $F_s(x,u,\nabla u)\in L^1(\mathbb{R}^N)$. 注意到如果 $v\in W_u$, 则 $\eta=F_\xi(x,u,\nabla u)\cdot\nabla v$ 和 $\eta=F_s(x,u,\nabla u)v$ 满足 (3.22). 因此, u 是方程 (3.23) 的广义解.

引理 3.10　假设 (F_1)–(F_4), (F_6) 和 (g_1)–(g_2) 成立, 则 f 的每个 $(CPS)_c$ 序列 $\{u_n\}$ 在 E 上有界.

证　给定 $(CPS)_c$ 序列 $\{u_n\}$, 即存在 $w_n\in E^*$ 且 $w_n\to 0$, 使得 u_n 和 w_n 满足 (2.3) 和 (2.4), 由引理 3.9, 可得

$$\begin{aligned}C+\|w_n\|_{E^*}\|u_n\|\geqslant&\int_{\mathbb{R}^N} pF(x,u_n,\nabla u_n)-\int_{\mathbb{R}^N} F_s(x,u_n,\nabla u_n)u_n-\int_{\mathbb{R}^N} F_\xi(x,u_n,\nabla u_n)\nabla u_n\\&+\Big(\frac{p}{2}-1\Big)\int_{\mathbb{R}^N} b(x)|u_n|^2+\int_{\mathbb{R}^N}(g(x,u_n)u_n-pG(x,u_n)).\end{aligned}$$

利用假设 (F_6), 有

$$\delta\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla u_n|^2+\Big(\frac{p}{2}-1\Big)\int_{\mathbb{R}^N}b(x)|u_n|^2\leqslant C+\|w_n\|_{E^*}\|u_n\|+\int_{\mathbb{R}^N}(h_1(x)+h_2(x)|u_n|),$$

再利用 Hölder 不等式, 得到

$$\delta\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla u_n|^2+\Big(\frac{p}{2}-1\Big)\int_{\mathbb{R}^N}b(x)|u_n|^2\leqslant C+\|w_n\|_{E^*}\|u_n\|+\int_{\mathbb{R}^N}h_1(x)+\|b_0\|_{\frac{2N}{N+2}}\|u_n\|_{\frac{2N}{N-2}},$$

即

$$\min\Big\{\delta,\frac{p}{2}-1\Big\}\|u_n\|^2\leqslant C+\|w_n\|_{E^*}\|u_n\|+C\|u_n\|.$$

因此, 序列 $\{u_n\}$ 在 E 上有界.

引理 3.11 假设 (F_2)–(F_4) 成立, 设 $\{u_n\}\subset E$ 是有界序列且 $F_\xi(x,u_n,\nabla u_n)\cdot\nabla u_n\in L^1(\mathbb{R}^N)$, 并设 $\{w_n\}\subset E^*$, 使得

$$\begin{aligned}&\int_{\mathbb{R}^N}F_\xi(x,u_n,\nabla u_n)\cdot\nabla v+\int_{\mathbb{R}^N}F_s(x,u_n,\nabla u_n)v\\&+\int_{\mathbb{R}^N}b(x)u_nv=\langle w_n,v\rangle,\quad\forall v\in V_{u_n}.\end{aligned}\tag{3.28}$$

如果在 E^* 中 $\{w_n\}$ 强收敛于 w, 则存在 $\{u_n\}$ 的子序列在 E 中强收敛于 u.

证 因为 $\{u_n\}$ 在 E 中有界, 因此存在 $\{u_n\}$ 的子列 (仍记为 $\{u_n\}$ 本身) 及 $u\in E$, 使得

$$\begin{aligned}&u_n\rightharpoonup u\ (\text{在 E 中});\ u_n\to u\ \Big(\text{在 }L^q(\mathbb{R}^N)\text{中},\ q\in\Big[1,\frac{2N}{N-2}\Big)\Big);\\&u_n(x)\to u(x),\quad\text{a.e. }x\in\mathbb{R}^N.\end{aligned}\tag{3.29}$$

根据文 [17] 中的定理 2.1, 则存在子列 (仍记为其本身) 且有

$$\nabla u_n(x)\to\nabla u(x),\quad\text{a.e.}x\in\mathbb{R}^N.\tag{3.30}$$

注意到, 根据引理 3.9, 对每个 n, 都有

$$\int_{\mathbb{R}^N}F_\xi(x,u_n,\nabla u_n)\cdot\nabla u_n+\int_{\mathbb{R}^N}F_s(x,u_n,\nabla u_n)u_n+\int_{\mathbb{R}^N}b(x)|u_n|^2=\langle w_n,u_n\rangle.$$

因此, 利用 $(\mathrm{F}_4)-$ (1.5) 便得到

$$\sup_{n\geqslant1}\int_{\mathbb{R}^N}F_\xi(x,u_n,\nabla u_n)\cdot\nabla u_n<\infty.\tag{3.31}$$

现在证明

$$\int_{\mathbb{R}^N}F_\xi(x,u,\nabla u)\cdot\nabla u+\int_{\mathbb{R}^N}F_s(x,u,\nabla u)u+\int_{\mathbb{R}^N}b(x)|u|^2=\langle w,u\rangle.\tag{3.32}$$

设 $k\geqslant1$, 考虑测试函数

$$v=\varphi\mathrm{e}^{-M_k(u_n-D)^-}H\Big(\frac{u_n}{k}\Big),\quad\varphi\in C_c^\infty(\mathbb{R}^N),\ \varphi\geqslant0,\tag{3.33}$$

其中 $M_k=\frac{\beta(2k)}{\alpha_0}$, 通过简单计算得到

$$\nabla v=\mathrm{e}^{-M_k(u_n-D)^-}\Big(\nabla\varphi H\Big(\frac{u_n}{k}\Big)-M_k\varphi\nabla(u_n-D)^-H\Big(\frac{u_n}{k}\Big)+\varphi H'\Big(\frac{u_n}{k}\Big)\frac{\nabla u_n}{k}\Big).$$

因为 $v \in V_{u_n}$, 故

$$\begin{aligned}&\int_{\mathbb{R}^N} F_\xi(x,u_n,\nabla u_n)\cdot \mathrm{e}^{-M_k(u_n-D)^-}H\Big(\frac{u_n}{k}\Big)\nabla\varphi+\int_{\mathbb{R}^N} b(x)u_n\varphi\mathrm{e}^{-M_k(u_n-D)^-}H\Big(\frac{u_n}{k}\Big)\\&+\int_{\mathbb{R}^N}(F_s(x,u_n,\nabla u_n)-M_kF_\xi(x,u_n,\nabla u_n)\cdot\nabla(u_n-D)^-)\varphi\mathrm{e}^{-M_k(u_n-D)^-}H\Big(\frac{u_n}{k}\Big)\\=&-\int_{\mathbb{R}^N}F_\xi(x,u_n,\nabla u_n)\cdot\varphi\mathrm{e}^{-M_k(u_n-D)^-}H'\Big(\frac{u_n}{k}\Big)\frac{\nabla u_n}{k}\\&+\Big\langle w_n,\varphi\mathrm{e}^{-M_k(u_n-D)^-}H\Big(\frac{u_n}{k}\Big)\Big\rangle.\end{aligned}\tag{3.34}$$

利用注 1.1–(iv), (F_4)–(1.4) 和 (3.33), 便有

$$\begin{cases}H\Big(\dfrac{u_n}{k}\Big)=0, & 若\ u_n\leqslant -2k,\\(F_s(x,u_n,\nabla u_n)-M_kF_\xi(x,u_n,\nabla u_n)\cdot\nabla(u_n-D)^-)H\Big(\dfrac{u_n}{k}\Big)\geqslant 0, & 若\ -2k\leqslant u_n\leqslant D,\\\nabla(u_n-D)^-=0, & 若\ u_n\geqslant D.\end{cases}$$

从而得到

$$(F_s(x,u_n,\nabla u_n)-M_kF_\xi(x,u_n,\nabla u_n)\cdot\nabla(u_n-D)^-)\varphi\mathrm{e}^{-M_k(u_n-D)^-}H\Big(\frac{u_n}{k}\Big)\geqslant 0.$$

另一方面, 由注 1.1–(iv), (3.29) 和 (3.30), 那么当 $n\to\infty$ 时, 成立

$$\begin{aligned}&\int_{\mathbb{R}^N}F_\xi(x,u_n,\nabla u_n)\mathrm{e}^{-M_k(u_n-D)^-}H\Big(\frac{u_n}{k}\Big)\nabla\varphi\to\int_{\mathbb{R}^N}F_\xi(x,u,\nabla u)\mathrm{e}^{-M_k(u-D)^-}H\Big(\frac{u}{k}\Big)\nabla\varphi,\\&\Big\langle w_n,\varphi\mathrm{e}^{-M_k(u_n-D)^-}H\Big(\frac{u_n}{k}\Big)\Big\rangle\to\Big\langle w,\varphi\mathrm{e}^{-M_k(u-D)^-}H\Big(\frac{u}{k}\Big)\Big\rangle,\\&\int_{\mathbb{R}^N}b(x)u_n\varphi\mathrm{e}^{-M_k(u_n-D)^-}H\Big(\frac{u_n}{k}\Big)\to\int_{\mathbb{R}^N}b(x)u\varphi\mathrm{e}^{-M_k(u-D)^-}H\Big(\frac{u}{k}\Big).\end{aligned}$$

由 (3.31), 存在正常数 C, 使得

$$\Big|\int_{\mathbb{R}^N}F_\xi(x,u_n,\nabla u_n)\cdot\varphi\mathrm{e}^{-M_k(u_n-D)^-}H'\Big(\frac{u_n}{k}\Big)\frac{\nabla u_n}{k}\Big|\leqslant\frac{C}{k}.$$

在 (3.34) 中取极限 $n\to\infty$, 利用 Fatou 引理, 则对任意 $\varphi\in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ 且 $\varphi\geqslant 0$, 可得

$$\begin{aligned}&\int_{\mathbb{R}^N}F_\xi(x,u,\nabla u)\cdot\mathrm{e}^{-M_k(u-D)^-}H\Big(\frac{u}{k}\Big)\nabla\varphi+\int_{\mathbb{R}^N}b(x)u\varphi\mathrm{e}^{-M_k(u-D)^-}H\Big(\frac{u}{k}\Big)\\&+\int_{\mathbb{R}^N}F_s(x,u,\nabla u)\varphi\mathrm{e}^{-M_k(u-D)^-}H\Big(\frac{u}{k}\Big)-\int_{\mathbb{R}^N}M_kF_\xi(x,u,\nabla u)\\&\cdot\nabla u^-\varphi\mathrm{e}^{-M_k(u-D)^-}H\Big(\frac{u}{k}\Big)\leqslant-\frac{C}{k}+\Big\langle w,\varphi\mathrm{e}^{-M_k(u-D)^-}H\Big(\frac{u}{k}\Big)\Big\rangle.\end{aligned}\tag{3.35}$$

从而对 $\varphi\in E\cap L^\infty(\mathbb{R}^N)$ 和 $\varphi\geqslant 0$, 有 (3.35) 成立. 如果取 $\varphi=\mathrm{e}^{M_k(u-D)^-}\psi,\quad\psi\in V_u,\ \psi\geqslant 0$, 又可以得到

$$\begin{aligned}&\int_{\mathbb{R}^N}F_\xi(x,u,\nabla u)\cdot H\Big(\frac{u}{k}\Big)\nabla\psi+\int_{\mathbb{R}^N}F_s(x,u,\nabla u)H\Big(\frac{u}{k}\Big)\psi+\int_{\mathbb{R}^N}b(x)uH\Big(\frac{u}{k}\Big)\psi\\\leqslant&-\frac{C}{k}+\Big\langle w,H\Big(\frac{u}{k}\Big)\psi\Big\rangle.\end{aligned}\tag{3.36}$$

注意到

$$|F_\xi(x,u,\nabla u)\cdot H\Big(\frac{u}{k}\Big)\nabla\psi|\leqslant|F_\xi(x,u,\nabla u)||\nabla\psi|,$$

$$|F_s(x,u,\nabla u)H\Big(\frac{u}{k}\Big)\psi|\leqslant|F_s(x,u,\nabla u)\psi|,$$

且 $\psi\in V_u$, 利用 (F_4)–(1.4) 和注 1.1–(iv), 对 (3.36) 令 $k\to\infty$, 得到

$$\begin{aligned}&\int_{\mathbb{R}^N}F_\xi(x,u,\nabla u)\cdot\nabla\psi+\int_{\mathbb{R}^N}F_s(x,u,\nabla u)\psi+\int_{\mathbb{R}^N}b(x)u\psi\\&\leqslant\langle w,\psi\rangle,\quad\forall\psi\in V_u,\ \psi\geqslant0.\end{aligned}\tag{3.37}$$

如果在 (3.28) 中取测试函数 $v=\varphi\mathrm{e}^{-M_k(u_n+D)^+}H\big(\frac{u_n}{k}\big)$, 类似前面的分析, 可以得到与 (3.37) 反向的不等式, 这样, 就得到

$$\int_{\mathbb{R}^N}F_\xi(x,u,\nabla u)\cdot\nabla\psi+\int_{\mathbb{R}^N}F_s(x,u,\nabla u)\psi+\int_{\mathbb{R}^N}b(x)u\psi=\langle w,\psi\rangle,\quad\forall\psi\in V_u.\tag{3.38}$$

根据注 1.1–(iv), (3.31) 和 Fatou 引理, 可得

$$0\leqslant\int_{\mathbb{R}^N}F_\xi(x,u,\nabla u)\cdot\nabla u\leqslant\liminf_n\int_{\mathbb{R}^N}F_\xi(x,u_n,\nabla u_n)\cdot\nabla u_n<\infty.$$

因此有 $F_\xi(x,u,\nabla u)\cdot\nabla u\in L^1(\mathbb{R}^N)$. 进一步, 由引理 3.9, 那么 (3.32) 得证.

最后证明在 E 中 $\{u_n\}$ 强收敛于 u. 依据文 [18, Th.3.2] 的方法, 取如下测试函数 ζ:

$$\zeta(s)=\begin{cases}\dfrac{\beta(D)}{\alpha_0}|s|, & 若\ |s|<D,\\[2mm]\dfrac{\beta(D)}{\alpha_0}D, & 若\ |s|\geqslant D.\end{cases}\tag{3.39}$$

先证明成立:

$$\begin{aligned}&\limsup_n\Big(\int_{\mathbb{R}^N}F_\xi(x,u_n,\nabla u_n)\cdot\nabla u_n\mathrm{e}^{\zeta(u_n)}+\int_{\mathbb{R}^N}b(x)|u_n|^2\mathrm{e}^{\zeta(u_n)}\Big)\\&\leqslant\langle w,u\mathrm{e}^{\zeta(u)}\rangle-\int_{\mathbb{R}^N}[F_s(x,u,\nabla u)+F_\xi(x,u,\nabla u)\cdot\nabla u\zeta'(u)]u\mathrm{e}^{\zeta(u)}.\end{aligned}\tag{3.40}$$

因为 $v_n=u_n\mathrm{e}^{\zeta(u_n)}\in E$, 结合 (F_4)–(F_6) 与注 1.1–(iv), 便知 v_n 满足引理 3.9 的条件, 因此在 (3.28) 中取测试函数 v_n, 有

$$\begin{aligned}&\int_{\mathbb{R}^N}F_\xi(x,u_n,\nabla u_n)\cdot\nabla u_n\mathrm{e}^{\zeta(u_n)}+\int_{\mathbb{R}^N}b(x)|u_n|^2\mathrm{e}^{\zeta(u_n)}\\&=\langle w_n,u_n\rangle-\int_{\mathbb{R}^N}[F_s(x,u_n,\nabla u_n)+F_\xi(x,u_n,\nabla u_n)\cdot\nabla u_n\zeta'(u_n)]v_n.\end{aligned}$$

注意到在 E 中 $\{v_n\}$ 弱收敛于 $u\mathrm{e}^{\zeta(u)}$ 并且在 $\mathbb{R}^N$ 上几乎处处收敛, 由 (F_4) 和 (3.39), 则有

$$(F_s(x,u_n,\nabla u_n)+F_\xi(x,u_n,\nabla u_n)\cdot\nabla u_n\zeta'(u_n))v_n\geqslant0.$$

利用 Fatou 引理可得 (3.40).

另一方面由 (3.32) 和 (3.39), 可得

$$\begin{cases}F_\xi(x,u,\nabla u)\cdot\nabla[u\mathrm{e}^{\zeta(u)}]+F_s(x,u,\nabla u)u\mathrm{e}^{\zeta(u)}\in L^1(\mathbb{R}^N),\\F_\xi(x,u,\nabla u)\cdot\nabla[u\mathrm{e}^{\zeta(u)}]\in L^1(\mathbb{R}^N).\end{cases}\tag{3.41}$$

因此, 由引理 3.9, 有

$$\begin{aligned}&\int_{\mathbb{R}^N}F_\xi(x,u,\nabla u)\cdot\nabla[u\mathrm{e}^{\zeta(u)}]+\int_{\mathbb{R}^N}F_s(x,u,\nabla u)u\mathrm{e}^{\zeta(u)}+\int_{\mathbb{R}^N}b(x)|u|^2\mathrm{e}^{\zeta(u)}\\&=\langle w,u\mathrm{e}^{\zeta(u)}\rangle.\end{aligned}\tag{3.42}$$

再根据 (3.40) 和 (3.42), 可得

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^N}(F_\xi(x,u,\nabla u)\cdot\nabla u\mathrm{e}^{\zeta(u)}+b(x)|u|^2\mathrm{e}^{\zeta(u)})\\
\leqslant&\limsup_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}^N}(F_\xi(x,u_n,\nabla u_n)\cdot\nabla u_n\mathrm{e}^{\zeta(u_n)}+b(x)|u_n|^2\mathrm{e}^{\zeta(u_n)})\\
\leqslant&\int_{\mathbb{R}^N}(F_\xi(x,u,\nabla u)\cdot\nabla u\mathrm{e}^{\zeta(u)}+b(x)|u|^2\mathrm{e}^{\zeta(u)}).
\end{aligned}\tag{3.43}$$

由于在 E 中 $\{u_n\}$ 弱收敛于 u, 故

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}^N}b(x)u_nu=\int_{\mathbb{R}^N}b(x)u^2.\tag{3.44}$$

利用不等式

$$|\nabla u_n|^2+b(x)|u_n|^2\leqslant\frac{1}{\alpha_0}F_\xi(x,u_n,\nabla u_n)\cdot\nabla u_n\mathrm{e}^{\zeta(u_n)}+b(x)|u_n|^2\mathrm{e}^{\zeta(u_n)}$$

和 Fatou 引理, 容易得到

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}^N}(b(x)|u_n|^2+|\nabla u_n|^2)=\int_{\mathbb{R}^N}(b(x)u^2+|\nabla u|^2).\tag{3.45}$$

结合 (3.43)–(3.45), 得到

$$\limsup_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}^N}(|\nabla u_n-\nabla u|^2+b(x)(u_n-u)^2)\leqslant 0.$$

这就意味着在 E 中 $u_n\to u$. 从而引理 3.11 得证.

利用引理 3.11, 我们容易得到下面的引理.

引理 3.12　假设 (F_1)–(F_4) 和 (g_1) 成立, 设 $\{u_n\}$ 是 f 的 $(CPS)_c$ 序列, 且在 E 中有界, 则 $\{u_n\}$ 在 E 中有强收敛的子列.

综合引理 3.6, 引理 3.7 和引理 3.9, 我们立即得到下列结果.

引理 3.13　假设 (F_1)–(F_4) 和 (g_1) 成立, 如果 $u\in\mathrm{dom}(f)$ 满足 $|df|(u)=0$, 则 u 是方程

$$-\mathrm{div}(F_\xi(x,u,\nabla u))+F_s(x,u,\nabla u)+b(x)u=g(x,u),\quad x\in\mathbb{R}^N$$

的广义解.

下面的引理揭示了 $(PS)_c$ 条件和 $(CPS)_c$ 条件之间的关系.

引理 3.14　假设 (F_1)–(F_4), (F_6) 和 (g_1) 成立, 如果泛函 f 满足 $(CPS)_c$ 条件, 则它满足 $(PS)_c$ 条件.

证　设 $\{u_n\}\subset\mathrm{dom}(f)$, 使得

$$|df|(u_n)\to 0,\quad f(u_n)\to c.$$

利用引理 3.7, 可得

$$\begin{aligned}
&\sup\Big\{\int_{\mathbb{R}^N}F_\xi(x,u_n,\nabla u_n)\cdot\nabla v+\int_{\mathbb{R}^N}(F_s(x,u_n,\nabla u_n)+b(x)u_n\\
&-g(x,u_n))v,\ \|v\|\leqslant 1,v\in V_{u_n}\Big\}\leqslant|df|(u_n)\to 0,\quad \text{当 } n\to\infty\text{时}.
\end{aligned}$$

根据引理 3.6, 则存在 $w_n\in E^*$, 使得

$$\int_{\mathbb{R}^N}F_\xi(x,u_n,\nabla u_n)\cdot\nabla v+\int_{\mathbb{R}^N}(F_s(x,u_n,\nabla u_n)+b(x)u_n-g(x,u_n))v=\langle w_n,v\rangle$$

且 $\|w_n\|_{E^*}\leqslant|df|(u_n)\to 0$, 即在 E^* 中有 $w_n\to 0$.

引理 3.15 假设 (F_1)–(F_4) 和 (g_1)–(g_2) 成立, 则泛函 f 在每个水平 $c\in\mathbb{R}$ 都满足 $(PS)_c$ 条件.

证 设 $\{u_n\}$ 是 $\mathrm{dom}(f)$ 中的序列, 且满足 (2.3) 和 (2.4). 由引理 3.10 知序列 $\{u_n\}$ 在 E 中有界. 由引理 3.12 可得 f 满足 $(CPS)_c$ 条件. 进一步, 由引理 3.14, 知结论成立.

4 定理 1.1 的证明

在这一节, 我们将给出定理 1.1 的证明.

首先由 (F_3) 和 (g_2) 可推出 f 是下半连续泛函, 且容易验证 f 是偶泛函. 利用引理 3.15, f 在每个水平 c 满足 $(PS)_c$ 条件. 由引理 3.3, 可得泛函 f 满足引理 3.1 的条件 (c).

设由算子 $L(u)=-\Delta u+b(\cdot)u$ 的特征函数构成的标准正交基为 $\{v_j\}_{j\geqslant1}$, 设 $V_k=(\mathrm{span}\{v_1,v_2,\cdots,v_k\})^\perp$. 注意到 V_k 是无限维空间.

由条件 (1.8) 可推出, 对 $\varepsilon>0$, 可找到 p_ε 和 q_ε 满足 $p_\varepsilon\in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ 和 $\|q_\varepsilon\|_{L^{\frac{2N}{N+2}}}\leqslant\varepsilon$, 使得

$$|g(x,s)|\leqslant p_\varepsilon(x)+q_\varepsilon(x)+\varepsilon|s|^{\frac{N+2}{N-2}}.$$

设 $u\in V_k$, 则存在正常数 C, 成立

$$\begin{aligned}&\int_{\mathbb{R}^N}F(x,u,\nabla u)+\frac12\int_{\mathbb{R}^N}b(x)|u|^2-\int_{\mathbb{R}^N}G(x,u)\\&\geqslant\min\Big\{\frac12,\alpha_0\Big\}\|u\|^2-\|p_\varepsilon\|_{L^2}\|u\|_{L^2}-\|q_\varepsilon\|_{L^{\frac{2N}{N+2}}}\|u\|_{L^{\frac{2N}{N-2}}}-\varepsilon^{\frac{N-2}{2N}}\|u\|_{L^{\frac{2N}{N-2}}}^{\frac{2N}{N-2}}\\&\geqslant\min\Big\{\frac12,\alpha_0\Big\}\|u\|^2-\|p_\varepsilon\|_{L^2}\|u\|_{L^2}-\varepsilon C\|u\|-\varepsilon C\|u\|^{\frac{2N}{N-2}}.\end{aligned}$$

因为 $\lambda_k\to+\infty$, 从而当 k 足够大, 对所有的 $u\in V_k$ 且 $\|u\|=1$, 有

$$\|p_\varepsilon\|_{L^2}\|u\|_{L^2}\leqslant\min\Big\{\frac14,\frac{\alpha_0}{2}\Big\}\|u\|.$$

故对 $\varepsilon>0$(足够小), 由 $\|u\|=1$ 可推出对每个 $\gamma>0$ 有 $f(u)\geqslant\gamma$. 因此, 泛函 f 在 $V=V_k=(\mathrm{span}\{v_1,v_2,\cdots,v_k\})^\perp$ 上满足引理 3.1 的条件 (a).

另一方面, 考虑 E 的有限维子空间 W, 使得 $W\subset L^\infty(\mathbb{R}^N)$. 因为 W 是有限维空间, 则 W 上的所有范数等价. 由 (F_5) 条件可知, 存在正常数 R 和 C, 使得

$$\alpha(|s|)\leqslant C,\ |s|\leqslant R;\quad \alpha(|s|)\leqslant\varepsilon|s|^{p-2},\ |s|\geqslant R.$$

根据 (F_6) 和 (g_2) 可知, 对任给 $\varepsilon>0$, 存在 $u\in W$, 使得

$$\begin{aligned}f(u)&\leqslant\int_{\mathbb{R}^N}\alpha(|u|)|\nabla u|^2+\frac12\int_{\mathbb{R}^N}b(x)|u|^2-\int_{\mathbb{R}^N}k(x)|u|^p+\|h_3\|_{L^1}+C\|h_4\|_{L^{\frac{2N}{N+2}}}\|u\|\\&\leqslant\varepsilon\int_{\mathbb{R}^N}|u|^{p-2}|\nabla u|^2+C\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla u|^2+\frac12\int_{\mathbb{R}^N}b(x)|u|^2-\int_{\mathbb{R}^N}k(x)|u|^p\\&\quad+\|h_3\|_{L^1}+C\|h_4\|_{L^{\frac{2N}{N+2}}}\|u\|\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\leqslant \varepsilon\|u\|_{L^\infty}^{p-2}\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla u|^2 + C\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla u|^2 + \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N}b(x)|u|^2 - \int_{\mathbb{R}^N}k(x)|u|^p \\
&\quad + \|h_3\|_{L^1} + C\|h_4\|_{L^{\frac{2N}{N+2}}}\|u\| \\
&\leqslant (\varepsilon-1)C\|u\|^p + C\|u\|^2 + \|h_3\|_{L^1} + C\|h_4\|_{L^{\frac{2N}{N+2}}}\|u\|.
\end{aligned}
$$

取 $\varepsilon=\frac{1}{2}$, 可得当 $\|u\|\to+\infty$ 时, 有 $f(u)\to-\infty$, 这样引理 3.1 的条件 (b) 成立. 至此, 引理 3.1 的所有条件都得到满足. 因此存在临界点序列 $\{u_h\}\subset E$, 且当 $h\to+\infty$ 时, 成立 $f(u_h)\to+\infty$. 再利用引理 3.13, 便立即得到定理 1.1.

参 考 文 献

[1] Aouaoui S. Multiplicity result for some nonlocal anisotropic equation via nonsmooth critical point theory approach [J]. *Appl Math Comput*, 2011, 218:532–541.

[2] Aouaoui S. Multiplicity of solutions for quasilinear elliptic equations in $\mathbb{R}^N$ [J]. *J Math Anal Appl*, 2010, 370:639–648.

[3] Arcoya D, Boccardo L. Existence of critical points for some noncoercive functionals [J]. *Ann I H Poincaré*, 2001, 18:437–457.

[4] Boccardo L, Murat F, Puel J P. Existence de solutions non bornées pour certaines équations quasi-linéaires [J]. *Portugal Math*, 1982, 41:507–534.

[5] Canino A. Multiplicity of solutions for quasilinear elliptic equations [J]. *Topol Methods Nonlinear Anal*, 1995, 6:357–370.

[6] Gazzola F, Rădulescu V. A nonsmooth critical point theory approach to some nonlinear elliptic equations in R^N [J]. *Differential Integral Equations*, 2000, 13:47–60.

[7] Jia G, Huang L N. On a quasilinear elliptic equation with superlinear nonlinearities [J]. *Chin Ann Math Ser B*, 2016, 37(2):309–322.

[8] Li Z X, Shen Y T. Nonsmooth critical point theorems and its applications to quasilinear schrodinger equations [J]. *Acta Mathematica Scientia*, 2016, 36B(1):73–86.

[9] Liu J Q, Liu X Q, Wang Z Q. Multiple mixed states of nodal solutions for nonlinear Schrödinger systems [J]. *Calc Var*, 2015, 52:565–586.

[10] Louis J, Luo T J, Wang Z Q. Multiple normalized solutions for quasi-linear Schrödinger equations [J]. *J Differential Equations*, 2015, 259:3894–3928.

[11] Pellacci B, Squassina M. Unbounded critical points for a class of lower semicontinuous functionals [J]. *J Differential Equations*, 2004, 201:25–62.

[12] Shen Z F, Wan S Q. Existence of nontrivial solutions for p-Laplacian variational inclusion systems in R^N [J]. *Chin Ann Math Ser B*, 2011, 32(4):619–630.

[13] Tian Y, Henderson J. Three anti-periodic solutions for second-order impulsive differential inclusions via nonsmooth critical point theory [J]. *Nonlinear Analysis*, 2012, 75:6496–6505.

[14] Degiovanni M, Marzocchi M, Rădulescu V. Multiple solutions of hemivariational inequalities with area-type term [J]. *Calc Var*, 2000, 10:355–387.

[15] Ambrosetti A, Rabinowitz P H. Dual variational methods in critical point theory and applications [J]. *J Funct Anal*, 1973, 14:349–381.

[16] Jabri Y. The mountain pass theorem [M]. Cambridge: Cambridge University Press, 2003.

[17] Boccardo L, Murat F. Almost everywhere convergence of the gradients of solutions to elliptic and parabolic equations [J]. *Nonlinear Anal*, 1992, 19:581–597.

[18] Squassina M. Existence of weak solutions to general Euler's equations via nonsmooth critical point theory [J]. *Ann Fac Sci Toulouse Math*, 2000, 9:113–131.

Multiplicity of Generalized Solutions for a Class of Quasilinear Elliptic Equations in $\mathbb{R}^N$

JIA Gao[1] CHEN Jie[2] ZHANG Longjie[3]

[1]College of Science, University of Shanghai for Science and Technology, Shanghai 200093, China. E-mail: gaojia89@163.com

[2]Xiangyifurong Second Middle School, Changsha 410016, China.
E-mail: 503073704@qq.com

[3]Graduate School of Mathematical Sciences, The University of Tokyo, Tokyo 153-8914, Japan. E-mail:zhanglj919@gmail.com

Abstract This paper deals with the multiplicity of generalized solutions for a class of quasilinear elliptic equations in $\mathbb{R}^N$. By using an approach of abstract critical point theory for lower semicontinuous functionals, it is proved that the set of solutions is infinite and unbounded.

Keywords Generalized solutions, Lower semicontinuous functional, Nonsmooth critical point theory

2000 MR Subject Classification 35D99, 46S20, 58E05

The English translation of this paper will be published in
Chinese Journal of Contemporary Mathematics, Vol. 41 No. 4, 2020
by ALLERTON PRESS, INC., USA