数 学 年 刊 A 辑
2020, 41(4):449–464
DOI: 10.16205/j.cnki.cama.2020.0031

关于 Brunnian 辫子群的相对李代数的基*

何莉莹[1] 李京艳[2]

提要 Brunnian 辫子群与球面上的同伦群关系密切. 在本文中, 研究了 Brunnian 辫子群相对于纯辫子群的相对李代数 $L^P(\mathrm{Brun}_n)$, 通过其与 Brunnian 辫子群相对于自由群的相对李代数 $L^{F_{n-1}}(\mathrm{Brun}_n)$ 的关系, 并借助自由群的李代数 $L(F_{n-1})$ 的 Hall 基给出相对李代数 $L^P(\mathrm{Brun}_n)$ 的基.

关键词 Brunnian 辫子群, 相对李代数, 自由群, Hall 基
MR (2000) 主题分类 57M, 55, 20F36, 17B60, 20E99
中图法分类 O152.4
文献标志码 A
文章编号 1000-8314(2020)04-0449-16

§1 引 言

我们先回忆一些相关的概念. 平面 R^2 上的 n 阶有序构型空间 [1] 定义为:

$$F(R^2,n)=\{(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in(R^2)^n\mid i\neq j,\ x_i\neq x_j\}.$$

对称群 $\sum_n$ 通过置换坐标作用于 $F(R^2,n)$. Artin 辫子群 B_n 定义为轨道空间 $F(R^2,n)\big/\sum_n$ 的基本群, 即 $B_n=\pi_1\big(F(R^2,n)\big/\sum_n\big)$ (参见文 [2]). 在文 [3] 中, Artin 给出了群 B_n 的一个组合描述, 它有 $(n-1)$ 个生成元 $\sigma_1,\sigma_2,\cdots,\sigma_{n-1}$, 以及下面两种类型的关系组:

$$\begin{cases}\sigma_i\sigma_j=\sigma_j\sigma_i, & |i-j|>1;\\ \sigma_i\sigma_{i+1}\sigma_i=\sigma_{i+1}\sigma_i\sigma_{i+1}.\end{cases}\tag{1.1}$$

这里生成元 σ_i 的几何描述可以表示为第 i 根弦从上方与第 $(i+1)$ 根弦交错, 其余的弦保持不变. 如图 1 所示, 这里 $\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$ 为初始点集.

每根 n-弦辫子对初始点集 $\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$ 进行置换. 称对初始点集平凡置换的辫子组成的 B_n 的子群为 Artin 纯辫子群, 记为 P_n. 从拓扑角度看, P_n 为有序构型空间 $F(R^2,n)$ 的基本群, 即 $P_n=\pi_1(F(R^2,n))$. 令 $a_{i,j}=\sigma_{j-1}\cdots\sigma_{i+1}\sigma_i^2\sigma_{i+1}^{-1}\cdots\sigma_{j-1}^{-1}$ $(1\leqslant i<j\leqslant n)$. 从文 [4] 可知, 纯辫子群 P_n 由 $a_{i,j}$ $(1\leqslant i<j\leqslant n)$ 生成, 且满足以下 4 个关系:

$$\begin{cases}a_{i,j}a_{k,l}=a_{k,l}a_{i,j}, & i<j<k<l;\ i<k<l<j;\\ a_{i,j}a_{i,k}a_{j,k}=a_{i,k}a_{j,k}a_{i,j}, & i<j<k;\\ a_{i,k}a_{j,k}a_{i,j}=a_{j,k}a_{i,j}a_{i,k}, & i<j<k;\\ a_{i,k}a_{j,k}a_{j,l}a_{j,k}^{-1}=a_{j,k}a_{j,l}a_{j,k}^{-1}a_{i,k}, & i<j<k<l.\end{cases}\tag{1.2}$$

本文 2017 年 8 月 8 日收到, 2018 年 6 月 29 日收到修改稿.

[1]河北师范大学数学科学学院, 石家庄 050024. E-mail: heliying1633@163.com
[2]通信作者. 石家庄市北郡小学, 石家庄 050000. E-mail: yanjinglee@163.com

*本文受到国家自然科学基金资助项目 (No. 11201314, No. 11302136), 石家庄铁道大学研究生创新项目 (No. YC201735) 和石家庄铁道大学优青基金的资助.

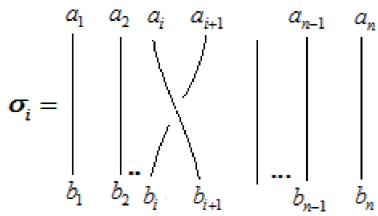

图 1

这里 $a_{i,j}$ 的几何图示见图 2.

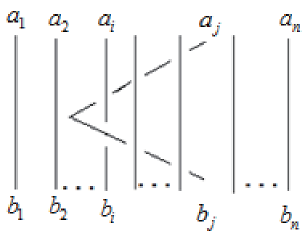

图 2

辫子理论的一个重要结果是纯辫子的 Vassiliev 不变量可以由纯辫子群的降中心序列给出, 参见文 [5]. 同时, 纯辫子群的关联李代数给出了 Yang-Baxter 李代数, 参见文 [6–7], 新的进展可见于文 [8–10] 等. 这里一个群 G 的降中心序列及其关联李代数的定义为[11]: 设

$$\Gamma_1(G)=G,\quad \Gamma_{i+1}(G)=[\Gamma_i(G),G],\qquad i\geqslant 1,$$

则所得到的序列

$$G=\Gamma_1(G)\geqslant\Gamma_2(G)\geqslant\cdots\geqslant\Gamma_i(G)\geqslant\Gamma_{i+1}(G)\geqslant\cdots$$

称为群 G 的降中心序列. 群 G 的关联李代数为分次李代数

$$L(G)=\bigoplus_{i=1}^{\infty}\Gamma_i(G)\Big/\Gamma_{i+1}(G),$$

其中的分次李运算由群 G 的换位子诱导.

一个 n-弦辫子被称为 Brunnian 辫子, 如果: (1) 它是一个纯辫子;(2) 去掉其中任何一根弦后它变为平凡辫子. 所有 n 弦 Brunnian 辫子构成的群称为 Brunnian 辫子群, 记为 Brun_n. 容易看出 Brun_n 是 P_n 的一个正规子群 (参见文 [12–14]). 从文 [15, 定理4.3 (1)] 知,Brun_n 是下面多重换位子

$$[\cdots[[a_{1,n},a_{\sigma_{(2)},j_2}],a_{\sigma_{(3)},j_3}],\cdots,a_{\sigma_{(n-1)},j_{n-1}}]$$

在 P_n 中的正规闭包, 其中 $\sigma \in \sum_{n-2}$ 作用在 $\{2, 3, \cdots, n-1\}$ 上, $1 \leqslant j_2, \cdots, j_{n-1} \leqslant n, j_s \neq \sigma(s)$ 对于 $2 \leqslant s \leqslant n-1$ 均成立, 且当 $i > j$ 时,$a_{j,i} = a_{i,j}$ 成立.

Brunnian 辫子作为特殊的纯辫子, 其 Vassiliev 不变量由如下的相对李代数

$$L^P(\mathrm{Brun}_n) = \bigoplus_{q=1}^{\infty} \Gamma_q(P_n) \bigcap \mathrm{Brun}_n \Big/ \Gamma_{q+1}(P_n) \bigcap \mathrm{Brun}_n \tag{1.3}$$

给出, 即纯辫子群的降中心序列限制于 Brunnian 辫子群所诱导的李代数, 参见文 [16]. 相对李代数 $L^P(\mathrm{Brun}_n)$ 仍有很多问题需要进一步探讨. 本文探讨 $L^P(\mathrm{Brun}_n)$ 作为分次有限秩自由 Abelian 群的基. 我们的主要结果 (定理 4.3) 给出了在 Hall 基意义下的基. 证明方法即通过在自由群上建立双 $-\Delta-$ 结构, 将问题简化为自由群的相对李代数, 然后解决自由群情况下的问题.

确定 $L^P(\mathrm{Brun}_n)$ 作为分次有限秩自由 Abelian 群的基能够为研究与 Brunnian 辫子相关的辫子或链环的 Vassiliev 不变量提供帮助. 例如, 可以研究一组特殊的辫子 $\alpha \circ \beta$ 的闭包得到的链环 $\widehat{\alpha \circ \beta}$ 的 Vassiliev 不变量, 这里 α 是一个给定的 n-弦辫子, β 是任意一个 n-弦 Brunnian 辫子. 对于 $\alpha = 1$ 的情况可以粗略地描述如下: 假设 $\widehat{\beta}$ 是由 n 根弦的 Brunnian 辫子得到的 n-链环, 则存在唯一的 r, 使得 $\beta \in \Gamma_r(P_n) \bigcap \mathrm{Brun}_n$, 但是 $\beta \notin \Gamma_{r+1}(P_n) \bigcap \mathrm{Brun}_n$, 从而 $\widehat{\beta}$ 的 Vassiliev 不变量由 β 在 $\Gamma_r(P_n) \bigcap \mathrm{Brun}_n \Big/ \Gamma_{r+1}(P_n) \bigcap \mathrm{Brun}_n$ 的投影 $\overline{\beta}$ 给出. 我们的工作确定了 $\Gamma_r(P_n) \bigcap \mathrm{Brun}_n \Big/ \Gamma_{r+1}(P_n) \bigcap \mathrm{Brun}_n$ 的基, 从而 $\overline{\beta}$ 表达为这组基的线性组合的系数所确定的整数序列, 给出了 $\widehat{\beta}$ 的 Vassiliev 不变量的数字表达.

文章的第 2 节, 在自由群上构造了双 $-\Delta-$ 结构. 在此双 $-\Delta-$ 结构下, 第 3 节证明 Brunnian 辫子群相对于纯辫子群的相对李代数与 Brunnian 辫子群相对于自由群的相对李代数同构. 第 4 节, 确定了 Brunnian 辫子群相对于自由群的相对李代数作为分次交换群的基可以由经典的自由李代数的 Hall-基的一个子集来刻画, 并完成本文主要定理 (定理 4.3) 的证明.

§2 自由群上的双 $-\Delta-$ 构造

在这一部分, 主要研究自由群上的双 $-\Delta-$ 构造. 首先回顾双 $-\Delta-$ 集的定义.

定义 2.1 设 S_n 是一个集合,$S = \{S_n\}_{n \geqslant 0}$ 称为双 $-\Delta-$ 集, 如果存在面映射 $\partial_i : S_n \to S_{n-1}$ 和上面映射 $\partial^i : S_{n-1} \to S_n$ $(0 \leqslant i \leqslant n)$, 使得下面的等式成立:

$$\begin{aligned}
&(1)\ \partial_j \partial_i = \partial_i \partial_{j+1}, \quad j \geqslant i;\\
&(2)\ \partial^j \partial^i = \partial^{i+1} \partial^j, \quad j \leqslant i;\\
&(3)\ \partial_j \partial^i = \begin{cases} \partial^{i-1} \partial_j, & j < i;\\ id, & j = i;\\ \partial^i \partial_{j-1}, & j > i. \end{cases}
\end{aligned} \tag{2.1}$$

换句话说, S 是一个 $\Delta-$ 集, 同时也是一个上 $-\Delta-$ 集, 并且满足关系式 (3). 此外, 如果对于任意的 n, S_n 是一个群且所有的面映射和上面映射都是群同态, 则称 $S = \{S_n\}_{n \geqslant 0}$

为双 $-\Delta-$ 群.

含有 n 个生成元的自由群记作 $F_n=\langle x_0,x_1,\cdots,x_{n-1}\rangle$, 令 $\mathbb{F}_n=F_{n+1}$, 则自由群构成的序列为 $\mathbb{F}=\{\mathbb{F}_n\}_{n\geqslant 0}$, 下面构造 $\mathbb{F}=\{\mathbb{F}_n\}_{n\geqslant 0}$ 上的双 $-\Delta-$ 群由于双 $-\Delta-$ 群中的面映射和上面映射是群同态, 从而只需定义 $\mathbb{F}_n$ 中生成元在面映射和上面映射下的像即可. 定义 $\mathbb{F}_n$ 的面映射 $\partial_i:\mathbb{F}_n\to\mathbb{F}_{n-1}$, $0\leqslant i\leqslant n$ 为

$$\partial_i(x_j)=\begin{cases}x_j, & j<i;\\ 1, & j=i;\\ x_{j-1}, & j>i.\end{cases}$$

上面映射 $\partial^i:\mathbb{F}_{n-1}\to\mathbb{F}_n$, $0\leqslant i\leqslant n$ 为

$$\partial^i(x_j)=\begin{cases}x_j, & j<i;\\ x_{j+1}, & j\geqslant i.\end{cases}$$

我们也可以将 ∂_i 和 ∂^i 写成矩阵的形式

$$\partial_i=\begin{pmatrix}x_0 & x_1 & \cdots & x_{i-1} & x_i & x_{i+1} & \cdots & x_n\\ \\ x_0 & x_1 & \cdots & x_{i-1} & 1 & x_i & \cdots & x_{n-1}\end{pmatrix},$$

$$\partial^i=\begin{pmatrix}x_0 & x_1 & \cdots & x_{i-1} & x_i & x_{i+1} & \cdots & x_{n-1}\\ \\ x_0 & x_1 & \cdots & x_{i-1} & x_{i+1} & x_{i+2} & \cdots & x_n\end{pmatrix}.$$

命题 2.1 自由群的序列 $\mathbb{F}=\{\mathbb{F}_n\}_{n\geqslant 0}$ 在上面定义的面映射和上面映射下是双 $-\Delta-$ 群.

证 只需验证面映射和上面映射满足等式 (2.1) 即可.

(1) 当 $j\geqslant i$ 时,

$$\partial_j\partial_i=\begin{pmatrix}x_0 & x_1 & \cdots & x_{i-1} & x_i & x_{i+1} & \cdots & x_{j-1} & x_j & x_{j+1} & x_{j+2} & \cdots & x_n\\ x_0 & x_1 & \cdots & x_{i-1} & 1 & x_i & \cdots & x_{j-2} & x_{j-1} & x_j & x_{j+1} & \cdots & x_{n-1}\\ x_0 & x_1 & \cdots & x_{i-1} & 1 & x_i & \cdots & x_{j-2} & x_{j-1} & 1 & x_j & \cdots & x_{n-2}\end{pmatrix},$$

$$\partial_i\partial_{j+1}=\begin{pmatrix}x_0 & x_1 & \cdots & x_{i-1} & x_i & x_{i+1} & \cdots & x_{j-1} & x_j & x_{j+1} & x_{j+2} & \cdots & x_n\\ x_0 & x_1 & \cdots & x_{i-1} & x_i & x_{i+1} & \cdots & x_{j-1} & x_j & 1 & x_{j+1} & \cdots & x_{n-1}\\ x_0 & x_1 & \cdots & x_{i-1} & 1 & x_i & \cdots & x_{j-2} & x_{j-1} & 1 & x_j & \cdots & x_{n-2}\end{pmatrix},$$

从而等式 $\partial_j\partial_i=\partial_i\partial_{j+1}$ 在 $j\geqslant i$ 时成立.

(2) 当 $j\leqslant i$ 时,

$$\partial^j\partial^i=\begin{pmatrix}x_0 & x_1 & \cdots & x_{j-1} & x_j & x_{j+1} & \cdots & x_{i-1} & x_i & x_{i+1} & \cdots & x_{n-2}\\ x_0 & x_1 & \cdots & x_{j-1} & x_j & x_{j+1} & \cdots & x_{i-1} & x_{i+1} & x_{i+2} & \cdots & x_{n-1}\\ x_0 & x_1 & \cdots & x_{j-1} & x_{j+1} & x_{j+2} & \cdots & x_i & x_{i+2} & x_{i+3} & \cdots & x_n\end{pmatrix},$$

$$\partial^{i+1}\partial^{j}=\begin{pmatrix}x_0 & x_1 & \cdots & x_{j-1} & x_j & x_{j+1} & \cdots & x_{i-1} & x_i & x_{i+1} & \cdots & x_{n-2}\\ x_0 & x_1 & \cdots & x_{j-1} & x_{j+1} & x_{j+2} & \cdots & x_i & x_{i+1} & x_{i+2} & \cdots & x_{n-1}\\ x_0 & x_1 & \cdots & x_{j-1} & x_{j+1} & x_{j+2} & \cdots & x_i & x_{i+2} & x_{i+3} & \cdots & x_n\end{pmatrix},$$

从而等式 $\partial^j\partial^i=\partial^{i+1}\partial^j$ 在 $j\leqslant i$ 时成立.

(3) 当 $j<i$ 时,

$$\partial_j\partial^{i}=\begin{pmatrix}x_0 & x_1 & \cdots & x_{j-1} & x_j & x_{j+1} & \cdots & x_{i-1} & x_i & x_{i+1} & \cdots & x_{n-1}\\ x_0 & x_1 & \cdots & x_{j-1} & x_j & x_{j+1} & \cdots & x_{i-1} & x_{i+1} & x_{i+2} & \cdots & x_n\\ x_0 & x_1 & \cdots & x_{j-1} & 1 & x_j & \cdots & x_{i-2} & x_i & x_{i+1} & \cdots & x_{n-1}\end{pmatrix},$$

$$\partial^{i-1}\partial_{j}=\begin{pmatrix}x_0 & x_1 & \cdots & x_{j-1} & x_j & x_{j+1} & \cdots & x_{i-1} & x_i & x_{i+1} & \cdots & x_{n-1}\\ x_0 & x_1 & \cdots & x_{j-1} & 1 & x_j & \cdots & x_{i-2} & x_{i-1} & x_i & \cdots & x_{n-2}\\ x_0 & x_1 & \cdots & x_{j-1} & 1 & x_j & \cdots & x_{i-2} & x_i & x_{i+1} & \cdots & x_{n-1}\end{pmatrix},$$

从而等式 $\partial_j\partial^i=\partial^{i-1}\partial_j$ 在 $j<i$ 时成立.

当 $i=j$ 时,

$$\partial_j\partial^{j}=\begin{pmatrix}x_0 & x_1 & \cdots & x_{j-1} & x_j & x_{j+1} & \cdots & x_{n-1}\\ x_0 & x_1 & \cdots & x_{j-1} & x_{j+1} & x_{j+2} & \cdots & x_n\\ x_0 & x_1 & \cdots & x_{j-1} & x_j & x_{j+1} & \cdots & x_{n-1}\end{pmatrix},$$

从而等式 $\partial_j\partial^i=id$ 在 $j=i$ 时成立.

当 $j>i$ 时,

$$\partial_j\partial^{i}=\begin{pmatrix}x_0 & x_1 & \cdots & x_{i-1} & x_i & x_{i+1} & \cdots & x_{j-1} & x_j & x_{j+1} & \cdots & x_{n-1}\\ x_0 & x_1 & \cdots & x_{i-1} & x_{i+1} & x_{i+2} & \cdots & x_j & x_{j+1} & x_{j+2} & \cdots & x_n\\ x_0 & x_1 & \cdots & x_{i-1} & x_{i+1} & x_{i+2} & \cdots & 1 & x_j & x_{j+1} & \cdots & x_{n-1}\end{pmatrix},$$

$$\partial^{i}\partial_{j-1}=\begin{pmatrix}x_0 & x_1 & \cdots & x_{i-1} & x_i & x_{i+1} & \cdots & x_{j-1} & x_j & x_{j+1} & \cdots & x_{n-1}\\ x_0 & x_1 & \cdots & x_{i-1} & x_i & x_{i+1} & \cdots & 1 & x_{j-1} & x_j & \cdots & x_{n-2}\\ x_0 & x_1 & \cdots & x_{i-1} & x_{i+1} & x_{i+2} & \cdots & 1 & x_j & x_{j+1} & \cdots & x_{n-1}\end{pmatrix},$$

从而等式 $\partial_j\partial^i=\partial^i\partial_{j-1}$ 在 $j>i$ 时成立.

综上, $\mathbb{F}=\{\mathbb{F}_n\}_{n\geqslant 0}$ 在上面定义的面映射和上面映射下是双 $-\Delta-$ 群.

推论 2.1　对于每一个 $q\geqslant 1$, $\{\Gamma_q(\mathbb{F}_n)\}_{n\geqslant 0}$ 是双 $-\Delta-$ 群.

证　由于 $\Gamma_{i+1}(\mathbb{F}_n)=[\Gamma_i(\mathbb{F}_n),\mathbb{F}_n]$, 并且 $\mathbb{F}=\{\mathbb{F}_n\}_{n\geqslant 0}$ 中的面映射和上面映射都是群同态, 从而 $\{\Gamma_q(\mathbb{F}_n)\}_{n\geqslant 0}$ 是双 $-\Delta-$ 群.

$\Delta-$ 群 $\mathcal{G}=\{G_n\}_{n\geqslant 0}$ 中的 Moore 复形 $\mathcal{NG}=\{\mathcal{N}_n(\mathcal{G})\}_{n\geqslant 0}$ 和 Moore 闭链群 $\mathcal{ZG}=\{\mathcal{Z}_n(\mathcal{G})\}_{n\geqslant 0}$ 分别定义为

$$\mathcal{N}_n(\mathcal{G})=\bigcap_{i=1}^{n}\ker(\partial_i:G_n\to G_{n-1}),$$

$$\mathcal{Z}_n(\mathcal{G}) = \bigcap_{i=0}^{n} \ker(\partial_i : G_n \to G_{n-1}).$$

当 $\mathcal{G} = \mathbb{F} = \{\mathbb{F}_n\}_{n\geqslant 0}$ 时, $\mathcal{Z}_n(\mathbb{F}) = \bigcap\limits_{i=0}^{n} \ker(\partial_i : \mathbb{F}_n \to \mathbb{F}_{n-1})$.

命题 2.2 [17, 命题 1.2.10] 双 $-\Delta-$ 群的序列 $\mathcal{G}' \longrightarrow \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{G}''$ 是短正合序列, 当且仅当序列 $\mathcal{Z}\mathcal{G}' \longrightarrow \mathcal{Z}\mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{Z}\mathcal{G}''$ 是短正合序列.

§3 相对李代数 $L^P(\mathrm{Brun}_n)$

在这一部分主要研究 Brunnian 辫子群相对于自由群的相对李代数 $L^{F_{n-1}}(\mathrm{Brun}_n)$ 与 Brunnian 辫子群相对于纯辫子群的相对李代数 $L^P(\mathrm{Brun}_n)$ 的关系. 先回顾相对李代数的一些相关知识.

定义 3.1 设 G 是一个群, H 为群 G 的正规子群, 则可得到降中心序列

$$H = \Gamma_1(G)\bigcap H \geqslant \Gamma_2(G)\bigcap H \geqslant \cdots \geqslant \Gamma_k(G)\bigcap H \geqslant \Gamma_{k+1}(G)\bigcap H \geqslant \cdots,$$

及分次李代数

$$\bigoplus_{q=1}^{\infty} L_q^G(H) = \bigoplus_{q=1}^{\infty} \Gamma_q(G)\bigcap H \Big/ \Gamma_{q+1}(G)\bigcap H,$$

称李代数 $L^G(H) = \bigoplus\limits_{q=1}^{\infty} \Gamma_q(G)\bigcap H \Big/ \Gamma_{q+1}(G)\bigcap H$ 为 H 相对于 G 的相对李代数.

在辫子群构成的序列 $\{B_n\}_{n\geqslant 1}$ 上定义 $d_k : B_n \longrightarrow B_{n-1}$ $(1 \leqslant k \leqslant n)$($d_k(\beta)$ 表示去掉辫子 β 的第 k 根弦) 和 $d^k : B_{n-1} \longrightarrow B_n$ $(0 \leqslant k \leqslant n-1)$ ($d^k(\beta)$ 表示在辫子 β 的第 k 根弦与第 $(k+1)$ 根弦之间再添加一根平凡辫子), 则可知 d_k 作用在 B_n 的生成元 $\sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_{n-1}$ 上, 满足

$$d_k(\sigma_j) = \begin{cases} \sigma_{j-1}, & k < j; \\ 1, & k = j, j+1; \\ \sigma_j, & k > j+1. \end{cases} \tag{3.1}$$

d^k 作用在 B_n 的生成元 $\sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_{n-1}$ 上, 满足

$$d^k(\sigma_j) = \begin{cases} \sigma_{j+1}, & k < j; \\ \sigma_{j+1}\sigma_j\sigma_{j+1}^{-1}, & k = j; \\ \sigma_j, & k > j. \end{cases} \tag{3.2}$$

进而可以得到 d_k 作用在 P_n 的生成元 $a_{i,j}$ 上, 满足

$$d_k(a_{i,j}) = \begin{cases} a_{i-1,j-1}, & k < i; \\ 1, & k = i, j; \\ a_{i,j-1}, & i < k < j; \\ a_{i,j}, & k > j. \end{cases} \tag{3.3}$$

d^k 作用在 P_n 的生成元 $a_{i,j}$ 上, 满足

$$d^k(a_{i,j}) = \begin{cases} a_{i+1,j+1}, & k < i; \\ a_{i,j+1}, & i \leqslant k < j; \\ a_{i,j}, & k \geqslant j. \end{cases} \tag{3.4}$$

设 F_{n-1} 是由 $a_{1,n}, a_{2,n}, \cdots, a_{n-1,n}$ 生成的 P_n 的子群, 则 F_{n-1} 为自由群. 辫子群上的运算作用在 F_{n-1} 的生成元上可用矩阵表示为

$$d_i = \begin{pmatrix} a_{1,n} & a_{2,n} & \cdots & a_{i-1,n} & a_{i,n} & a_{i+1,n} & \cdots & a_{n-1,n} \\ a_{1,n-1} & a_{2,n-1} & \cdots & a_{i-1,n-1} & 1 & a_{i,n-1} & \cdots & a_{n-2,n-1} \end{pmatrix},$$

$$d^i = \begin{pmatrix} a_{1,n-1} & a_{2,n-1} & \cdots & a_{i-1,n-1} & a_{i,n-1} & a_{i+1,n-1} & \cdots & a_{n-2,n-1} \\ a_{1,n} & a_{2,n} & \cdots & a_{i-1,n} & a_{i,n} & a_{i+2,n} & \cdots & a_{n-1,n} \end{pmatrix}.$$

令 $x_{i-1} = a_{i,n}$, $\partial_{i-1} = d_i$ $(1 \leqslant i \leqslant n-1)$, $\partial^i = d^i$ $(0 \leqslant i \leqslant n-1)$. 在 $n \geqslant 3$ 时, 由命题 2.1 知该自由群的序列 $\{F_{n-1}\}$ 在上述面映射和上面映射下构成双 $-\triangle-$ 群.

纯辫子群的李代数 $L(P_n) = \bigoplus\limits_{q=1}^{\infty} \Gamma_q(P_n)/\Gamma_{q+1}(P_n)$ 的表示在文 [6] 中有所描述. 它是由 $A_{i,j}$ $(1 \leqslant i < j \leqslant n)$ 生成的自由李代数 $L[A_{i,j} \mid 1 \leqslant i < j \leqslant n]$ 模掉下面的关系组得到的:

$$\begin{cases} [A_{i,j}, A_{s,t}] = 0, & \{i,j\} \bigcap \{s,t\} = \emptyset; \\ [A_{i,j}, A_{i,k} + A_{j,k}] = 0, & i < j < k; \\ [A_{i,k}, A_{i,j} + A_{j,k}] = 0, & i < j < k, \end{cases} \tag{3.5}$$

其中 $A_{i,j}$ 是纯辫子群 P_n 的生成元 $a_{i,j}$ 在 $L_1(P_n)$ 中的像.

辫子群上的运算 $d_k : B_n \longrightarrow B_{n-1}$ $(1 \leqslant k \leqslant n)$ 诱导了纯辫子群的李代数 $L(P_n)$ 上的运算 $L(d_k) : L(P_n) \longrightarrow L(P_{n-1})$, 且满足

$$L(d_k)(A_{i,j}) = \begin{cases} A_{i,j}, & i < j < k; \\ 0, & k = i, j; \\ A_{i,j-1}, & i < k < j; \\ A_{i-1,j-i}, & k < i < j. \end{cases} \tag{3.6}$$

辫子群上的运算 $d^k : B_{n-1} \longrightarrow B_n$ $(0 \leqslant k \leqslant n-1)$ 诱导了纯辫子群的李代数 $L(P_{n-1})$ 上的运算 $L(d^k) : L(P_{n-1}) \longrightarrow L(P_n)$, 且满足

$$L(d^k)(A_{i,j}) = \begin{cases} A_{i+1,j+1}, & k < i; \\ A_{i,j+1}, & i \leqslant k < j; \\ A_{i,j}, & k \geqslant j. \end{cases} \tag{3.7}$$

为了方便, 将李代数上的面映射 $L(d_k)$ 和上面映射 $L(d^k)$ 也简记为 d_k 和 d^k.

由于 Brun_n 为 P_n 的正规子群, 从而有 Brun_n 相对于 P_n 的相对李代数:

$$L^P(\mathrm{Brun}_n) = \bigoplus_{q=1}^{\infty} \Gamma_q(P_n) \bigcap \mathrm{Brun}_n \Big/ \Gamma_{q+1}(P_n) \bigcap \mathrm{Brun}_n.$$

关于此相对李代数有下列命题.

命题 3.1 [16, 命题 2.3] 相对李代数 $L^P(\mathrm{Brun}_n)$ 与 $L(P_n)$ 的子李代数

$$\bigcap_{i=1}^{n}\ker(d_i: L(P_n)\to\ L(P_{n-1}))$$

同构.

自由群 $F_{n-1}=\langle a_{1,n},a_{2,n},\cdots,a_{n-1,n}\rangle$ 的降中心序列为

$$F_{n-1}=\Gamma_1(F_{n-1})\geqslant\Gamma_2(F_{n-1})\geqslant\cdots\geqslant\Gamma_i(F_{n-1})\geqslant\Gamma_{i+1}(F_{n-1})\geqslant\cdots,$$

其中

$$\Gamma_1(F_{n-1})=F_{n-1},\qquad \Gamma_{i+1}(F_{n-1})=[\Gamma_i(F_{n-1}),F_{n-1}],\quad i=1,2,\cdots.$$

从而自由群 F_{n-1} 的李代数为

$$L(F_{n-1})=\bigoplus_{q=1}^{\infty}\Gamma_q(F_{n-1})/\Gamma_{q+1}(F_{n-1}),$$

并且此李代数的结构在文 [18] 中已进行了详细的描述, 在文 [5] 中还给出 $L(P_n)$ 的一个子代数与 $L(F_{n-1})$ 的子代数之间的关系.

命题 3.2 [5, 命题 3.6] $L(P_n)$ 的子李代数 $\bigcap\limits_{i=1}^{n}\ker(d_i: L(P_n)\to L(P_{n-1}))$ 与 $L(F_{n-1})$ 的子李代数 $\bigcap\limits_{i=0}^{n-2}\ker(\partial_i=d_{i+1}: L(F_{n-1})\to L(F_{n-2}))$ 同构.

从 Brunnian 辫子群的定义可知:

$$\begin{aligned}\mathrm{Brun}_n&=\bigcap_{i=1}^{n}\ker(d_i: P_n\to P_{n-1})\\&=\bigcap_{i=0}^{n-2}\ker(\partial_i=d_{i+1}: F_{n-1}\to F_{n-2}).\end{aligned}$$

从而可知 Brun_n 是 F_{n-1} 的正规子群, 进而可以定义 Brunnian 辫子群相对于自由群 F_{n-1} 的相对李代数:

$$L^{F_{n-1}}(\mathrm{Brun}_n)=\bigoplus_{q=1}^{\infty}\Gamma_q(F_{n-1})\bigcap\mathrm{Brun}_n\Big/\Gamma_{q+1}(F_{n-1})\bigcap\mathrm{Brun}_n.$$

对于这两个相对李代数 $L^{F_{n-1}}(\mathrm{Brun}_n)$ 与 $L^P(\mathrm{Brun}_n)$, 有如下结论.

定理 3.1 Brunnian 辫子群相对于自由群的相对李代数 $L^{F_{n-1}}(\mathrm{Brun}_n)$ 与 Brunnian 辫子群相对于纯辫子群的相对李代数 $L^P(\mathrm{Brun}_n)$ 同构.

证 序列 $\Gamma_{q+1}(F_{n-1})\longrightarrow\Gamma_q(F_{n-1})\longrightarrow\Gamma_q(F_{n-1})\Big/\Gamma_{q+1}(F_{n-1})$ 是正合序列, 由命题 2.2 知, 分次群的序列

$$\mathcal{Z}(\Gamma_{q+1}(F_{n-1}))\longrightarrow\mathcal{Z}(\Gamma_q(F_{n-1}))\longrightarrow\mathcal{Z}\Big(\Gamma_q(F_{n-1})\Big/\Gamma_{q+1}(F_{n-1})\Big)$$

是正合序列. 从而序列

$$\mathcal{Z}_{n-2}(\Gamma_{q+1}(F_{n-1}))\longrightarrow\mathcal{Z}_{n-2}(\Gamma_q(F_{n-1}))\longrightarrow\mathcal{Z}_{n-2}\Big(\Gamma_q(F_{n-1})\Big/\Gamma_{q+1}(F_{n-1})\Big)$$

是正合序列.

$$
\begin{aligned}
&\mathcal{Z}_{n-2}(\Gamma_q(F_{n-1}))\\
=&\bigcap_{i=0}^{n-2}\ker(d_{i+1}:\Gamma_q(F_{n-1})\longrightarrow\Gamma_q(F_{n-2}))\\
=&\bigcap_{i=0}^{n-2}(\Gamma_q(F_{n-1})\bigcap\ \ker(d_{i+1}:F_{n-1}\to F_{n-2}))\\
=&\mathrm{Brun}_n\bigcap\ \Gamma_q(F_{n-1}),\\
&\mathcal{Z}_{n-2}\Big(\Gamma_q(F_{n-1})\Big/\Gamma_{q+1}(F_{n-1})\Big)\\
=&\bigcap_{i=0}^{n-2}\ker\Big(d_{i+1}:\Gamma_q(F_{n-1})\Big/\Gamma_{q+1}(F_{n-1})\to\Gamma_q(F_{n-2})\Big/\Gamma_{q+1}(F_{n-2})\Big)\\
=&\bigcap_{i=0}^{n-2}\ker(d_{i+1}:L_q(F_{n-1})\to L_q(F_{n-2})),\\
&L_q^{F_{n-1}}(\mathrm{Brun}_n)\\
=&\Gamma_q(F_{n-1})\bigcap\mathrm{Brun}_n\Big/\Gamma_{q+1}(F_{n-1})\bigcap\mathrm{Brun}_n\\
=&\mathcal{Z}_{n-2}(\Gamma_q(F_{n-1}))\Big/\mathcal{Z}_{n-2}(\Gamma_{q+1}(F_{n-1}))\\
\cong&\mathcal{Z}_{n-2}\Big(\Gamma_q(F_{n-1})\Big/\Gamma_{q+1}(F_{n-1})\Big)\\
=&\bigcap_{i=0}^{n-2}\ker(d_{i+1}:L_q(F_{n-1})\to L_q(F_{n-2})).
\end{aligned}
$$

由命题 3.2 知

$$\bigcap_{i=1}^{n}\ker(d_i:L(P_n)\longrightarrow L(P_{n-1}))\cong\ \bigcap_{i=0}^{n-2}\ker(d_{i+1}:L(F_{n-1})\longrightarrow L(F_{n-2})).$$

由命题 3.1 知

$$L^P(\mathrm{Brun}_n)\cong\bigcap_{i=1}^{n}\ker(d_i:L(P_n)\to L(P_{n-1})).$$

从而可得 $L^P(\mathrm{Brun}_n)\cong\ L^{F_{n-1}}(\mathrm{Brun}_n)$.

需要指出: 在一般情况下, 假设群 G 有一个子群 G_1 以及 G_1 有个子群 G_0, 那么 G_0 相对于 G_1 的相对李代数与 G_0 相对于 G 的相对李代数是不同构的. 例如, 含有两个生成元的自由群 F_2 有正规子群 $\Gamma_2(F_2)=[F_2,F_2]$, $\Gamma_2(F_2)$ 有正规子群 $\Gamma_3(F_2)=[[F_2,F_2],F_2]$, 而 $\Gamma_3(F_2)$ 相对于 $\Gamma_2(F_2)$ 的相对李代数 $L^{\Gamma_2(F_2)}(\Gamma_3(F_2))=\bigoplus\limits_{q=1}^{\infty}\Gamma_q(\Gamma_2(F_2))\bigcap\Gamma_3(F_2)\Big/\Gamma_{q+1}(\Gamma_2(F_2))\bigcap\Gamma_3(F_2)$ 与 $\Gamma_3(F_2)$ 相对于 F_2 的相对李代数

$$L^{F_2}(\Gamma_3(F_2))=\bigoplus_{q=1}^{\infty}\Gamma_q(F_2)\bigcap\Gamma_3(F_2)\Big/\Gamma_{q+1}(F_2)\bigcap\Gamma_3(F_2)$$

不同构. 因为当 $q=1$ 时,

$$L_1^{F_2}(\Gamma_3(F_2))=\Gamma_1(F_2)\bigcap\Gamma_3(F_2)\Big/\Gamma_2(F_2)\bigcap\Gamma_3(F_2)=\Gamma_3(F_2)\Big/\Gamma_3(F_2)=1,$$

$$L_1^{\Gamma_2(F_2)}(\Gamma_3(F_2))=\Gamma_1(\Gamma_2(F_2))\bigcap\Gamma_3(F_2)\Big/\Gamma_2(\Gamma_2(F_2))\bigcap\Gamma_3(F_2)=\Gamma_3(F_2)\Big/\Gamma_2(\Gamma_2(F_2)).$$

当 $n=3$ 时, 相对李代数 $L^{F_2}(\mathrm{Brun}_3)$ 又与自由群 F_2 的李代数 $L(F_2)$ 有关.

命题 3.3 对于 3 根弦的 Brunnian 辫子群 Brun_3, 有

$$L^{F_2}(\mathrm{Brun}_3)=\bigoplus_{k=2}^{\infty}\Gamma_k(F_2)\Big/\Gamma_{k+1}(F_2).$$

证 由 $\mathrm{Brun}_3=[F_2,F_2]\leqslant F_2$ 知,

$$\mathrm{Brun}_3\bigcap\Gamma_1(F_2)=\mathrm{Brun}_3,\quad \mathrm{Brun}_3\bigcap\Gamma_2(F_2)=\mathrm{Brun}_3.$$

当 $k\geqslant 3$ 时, $\mathrm{Brun}_3\bigcap\Gamma_k(F_2)=\Gamma_k(F_2)$, 故

$$\begin{aligned}L_1^{F_2}(\mathrm{Brun}_3)&=\mathrm{Brun}_3\bigcap\Gamma_1(F_2)\Big/\mathrm{Brun}_3\bigcap\Gamma_2(F_2)=\mathrm{Brun}_3\Big/\mathrm{Brun}_3=1,\\ L_2^{F_2}(\mathrm{Brun}_3)&=\mathrm{Brun}_3\bigcap\Gamma_2(F_2)\Big/\mathrm{Brun}_3\bigcap\Gamma_3(F_2)=\mathrm{Brun}_3\Big/\Gamma_3(F_2)\\ &=\Gamma_2(F_2)\Big/\Gamma_3(F_2)=L_2(F_2).\end{aligned}$$

当 $k\geqslant 3$ 时,

$$L_k^{F_2}(\mathrm{Brun}_3)=\mathrm{Brun}_3\bigcap\Gamma_k(F_2)\Big/\mathrm{Brun}_3\bigcap\Gamma_{k+1}(F_2)=\Gamma_k(F_2)\Big/\Gamma_{k+1}(F_2)=L_k(F_2),$$

故

$$L^{F_2}(\mathrm{Brun}_3)=\bigoplus_{k=1}^{\infty}\mathrm{Brun}_3\bigcap\Gamma_k(F_2)\Big/\mathrm{Brun}_3\bigcap\Gamma_{k+1}(F_2)=\bigoplus_{k=2}^{\infty}\Gamma_k(F_2)\Big/\Gamma_{k+1}(F_2).$$

注 3.1 当 $n=3$ 时, 我们知道特殊线性群 $SL(2,Z)$ 是 B_3 的商群, 参见文 [19].

§4 相对李代数 $L^P(\mathrm{Brun}_n)$ 的 Hall 基

在研究相对李代数 $L^P(\mathrm{Brun}_n)$ 的 Hall 基之前, 我们先给出自由李代数[20−21]的一组 Hall 基的定义. 设 $X=\{y_1,y_2,\cdots,y_k\}$, $L(X)$ 是由 k 个生成元 $y_1,y_2,\cdots,y_k$ 自由生成的自由李代数. 由 X 生成的 Hall 集合包含于 $L(X)$, 记为 $\mathrm{Hall}(L(X))$.

首先给出一个换位子重数的定义[22]: 换位子的重数指元素所含因子的个数. 重数是 1 的换位子只有 $y_1,y_2,\cdots,y_k$; 对于重数大于 1 的换位子 m, 有唯一的组成形式 $m=[m',m'']$, 且 m 的重数是 m' 与 m'' 的重数之和. Hall 基归纳定义如下:

(1) 当重数 $q=1$, $\mathrm{Hall}_1(L(X))$ 的一组基为 $y_1,y_2,\cdots,y_k$, 规定当 $i<j$ 时, $y_i<y_j$; $r(y_i)=0$; $s(y_i)=i$. 这里 $r(y_i)$ 表示 y_i 的秩, $s(y_i)$ 表示不超过 y_i 的基的个数, 称为 y_i 的序;

(2) 假设重数 $q<n$ 时, $\mathrm{Hall}_q(L(X))$ 的基和序已经定义, 并规定若 m', m'' 均为 $\mathrm{Hall}(L(X))$ 的基, 当 m' 的重数小于 m'' 的重数时, 则有 $m'<m''$;

(3) 当重数 $q=n$,n 重换位子 m 的组成形式为 $m=[m_1,m_2]$, 这里 m_1 和 m_2 属于 $\mathrm{Hall}(L(X))$ 的基并且 $m_2<m_1$, $r(m_1)\leqslant s(m_2)$, m 的秩定义为 $r(m)=r([m_1,m_2])=s(m_2)$, 并给所有 n 重 Hall 基一个排序.

从 Hall 基的定义可知, 自由李代数的 Hall 基与所含生成元的个数有关. 例如 $k=3$ 时, n 重 Hall 基可以记作:

$n=1:$ $y_1,\ \ y_2,\ \ y_3;$

$n=2:$ $[y_2,y_1],\ \ [y_3,y_1],\ \ [y_3,y_2];$

$n=3:$ $[[y_2,y_1],y_1],\ \ [[y_2,y_1],y_2],\ \ [[y_2,y_1],y_3],\ \ [[y_3,y_1],y_1],[[y_3,y_1],y_2],\ \ [[y_3,y_1],y_3],$
$[[y_3,y_2],y_2],[[y_3,y_2],y_3];$

$n=4:$ $[[[y_2,y_1],y_1],y_1],\ \ [[[y_2,y_1],y_1],y_2],\ \ [[[y_2,y_1],y_1],y_3],\ \ [[[y_2,y_1],y_2],y_2],\ [[[y_2,y_1],y_2],y_3],$
$[[[y_2,y_1],y_3],y_3],\ \ [[[y_3,y_1],y_1],y_1],\ \ [[[y_3,y_1],y_1],y_2],\ \ [[[y_3,y_1],y_1],y_3],\ [[[y_3,y_1],y_2],y_2],$
$[[[y_3,y_1],y_2],y_3],\ \ [[[y_3,y_1],y_3],y_3],\ \ [[[y_3,y_2],y_2],y_2],\ \ [[[y_3,y_2],y_2],y_3],[[[y_3,y_2],y_3],y_3],$
$[[y_3,y_1],[y_2,y_1]],\ \ [[y_3,y_2],[y_2,y_1]],\ \ [[y_3,y_2],[y_3,y_1]].$

当 $n\geqslant 5$ 时, 按照定义我们也可以一一列出, 但是由于文章篇幅有限, 这里不再一一计算.

由于群 F_{n-1} 比 P_n 更简单, 因此通过研究相对李代数 $L^{F_{n-1}}(\mathrm{Brun}_n)$ 的 Hall 基来给出相对李代数 $L^P(\mathrm{Brun}_n)$ 的 Hall 基也更简便. 这一节主要通过相对李代数 $L^{F_{n-1}}(\mathrm{Brun}_n)$ 与李代数 $L(F_{n-1})$ 的 Hall 子集的关系, 借助李代数 $L(F_{n-1})$ 的 Hall 基给出相对李代数 $L^{F_{n-1}}(\mathrm{Brun}_n)$ 的 Hall 基.

根据双 $-\Delta-$ 群的定义以及 $\mathbb{F}=\{\mathbb{F}_n\}_{n\geqslant 0}$ 上的面映射以及上面映射, 有如下引理.

引理 4.1　对任意的 $q\geqslant 0, L_q(\mathbb{F})=\{L_q(\mathbb{F}_n)\}_{n\geqslant 0}$ 是双 $-\Delta-$ 群.

引理 4.2 [17, 命题 1.2.9] 令 $\mathcal{G}=\{G_n\}_{n\geqslant 0}$ 是双 $-\Delta-$ 群, 则 G_n 是形式如下的子群的半直积

$$\partial^{i_k}\partial^{i_{k-1}}\cdots\partial^{i_1}(\mathcal{Z}_{n-k}(\mathcal{G})),$$

其中 $0\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_k\leqslant n, 0\leqslant k\leqslant n$, 且乘积的顺序从右到左.

推论 4.1 [16, 推论 4.3]令 $\mathcal{G}=\{G_n\}_{n\geqslant 0}$ 是双 $-\Delta-$ 群且 G_n 是交换群, 则对于每一个 n, 都存在直和分解

$$G_n=\bigoplus_{\substack{0\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_k\leqslant n\\ 0\leqslant k\leqslant n}}\partial^{i_k}\partial^{i_{k-1}}\cdots\partial^{i_1}(\mathcal{Z}_{n-k}(\mathcal{G})).$$

令 $\mathcal{G}=L_q(\mathbb{F})$, 则根据命题 3.1 和定理 3.1 证明过程有 $\mathcal{Z}_n(L_q(\mathbb{F}))=L_q^{F_{n+1}}(\mathrm{Brun}_{n+2})$. 根据推论 4.1, 我们得到下面的分解.

定理 4.1　对于每一个 $n\geqslant 3$ 和 q, 存在分解

$$L_q(F_{n-1})=\bigoplus_{\substack{0\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_k\leqslant n-2\\ 0\leqslant k\leqslant n-2}}d^{i_k}d^{i_{k-1}}\cdots d^{i_1}(L_q^{F_{n-k-1}}(\mathrm{Brun}_{n-k})).$$

根据定理 4.1, 有

$$\begin{aligned}L_q(F_{n-1}) &= \mathbb{Z}(\underset{\text{all } A_{i,n} \text{ occur}}{\mathrm{Hall}(L_q(F_{n-1}))}) \bigoplus \mathbb{Z}(\underset{\text{some } A_{i,n} \text{ not appear}}{\mathrm{Hall}(L_q(F_{n-1}))}) \\ &= L_q^{F_{n-1}}(\mathrm{Brun}_n) \bigoplus \Big(\bigoplus_{\substack{0\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_k\leqslant n-2 \\ 1\leqslant k\leqslant n-2}} d^{i_k} d^{i_{k-1}} \cdots d^{i_1} (L_q^{F_{n-k-1}}(\mathrm{Brun}_{n-k})) \Big).\end{aligned}$$

为了书写方便, 将 $\mathbb{Z}(\underset{\text{all } A_{i,n} \text{ occur}}{\mathrm{Hall}\ (L_q(F_{n-1}))})$ 简记为 $\mathrm{Hall}_q^L(F_{n-1})$. 下面将验证 $L_q^{F_{n-1}}(\mathrm{Brun}_n)$ 与 $\mathrm{Hall}_q^L(F_{n-1})$ 的关系, 首先需要先验证下面的引理.

引理 4.3 任取自由群的李代数的子集 $\mathrm{Hall}_q^L(F_{n-1})$ 中的元素 α, 则必有

$$\alpha \in L_q^{F_{n-1}}(\mathrm{Brun}_n),$$

即 $\mathrm{Hall}_q^L(F_{n-1}) \subset L_q^{F_{n-1}}(\mathrm{Brun}_n)$.

证 对于任意 $\alpha \in \mathrm{Hall}_q^L(F_{n-1})$, 由于每个 $A_{i,n}$ 至少出现一次, 则对于任意 $k \in \{1,2,\cdots,n-1\}$, 均有 $d_k\alpha = 0$, 从而有 $\alpha \in L_q^{F_{n-1}}(\mathrm{Brun}_n)$, 由 α 的任意性, 可得 $\mathrm{Hall}_q^L(F_{n-1}) \subset L_q^{F_{n-1}}(\mathrm{Brun}_n)$.

引理 4.4 对于每一个 $n \geqslant 3$ 和 q, $L_q(F_{n-1})$ 的子集

$$\bigoplus_{\substack{0\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_k\leqslant n-2 \\ 1\leqslant k\leqslant n-2}} d^{i_k} d^{i_{k-1}} \cdots d^{i_1} (L_q^{F_{n-k-1}}(\mathrm{Brun}_{n-k}))$$

与子集 $d^0L_q(F_{n-2}) + d^1L_q(F_{n-2}) + \cdots + d^{n-2}L_q(F_{n-2})$ 相等.

证 由 $L_q^{F_{n-k-1}}(\mathrm{Brun}_{n-k}) = \bigcap\limits_{i=0}^{n-k-2} \ker(d_{i+1} : L_q(F_{n-k-1}) \longrightarrow L_q(F_{n-k-2})) \subset L_q(F_{n-k-1})$, 可得

$$\begin{aligned}d^{i_1} L_q^{F_{n-k-1}}(\mathrm{Brun}_{n-k}) &\subset d^{i_1} L_q(F_{n-k-1}) \subset L_q(F_{n-k}), \\ d^{i_2} d^{i_1} L_q^{F_{n-k-1}}(\mathrm{Brun}_{n-k}) &\subset d^{i_2} L_q(F_{n-k}) \subset L_q(F_{n-k+1}), \\ &\vdots \\ d^{i_k} d^{i_{k-1}} \cdots d^{i_1} L_q^{F_{n-k-1}}(\mathrm{Brun}_{n-k}) &\subset d^{i_k} L_q(F_{n-2}),\end{aligned}$$

从而有

$$\bigoplus_{\substack{0\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_k\leqslant n-2 \\ 1\leqslant k\leqslant n-2}} d^{i_k} d^{i_{k-1}} \cdots d^{i_1} (L_q^{F_{n-k-1}}(\mathrm{Brun}_{n-k})) \subset d^0 L_q(F_{n-2}) + \cdots + d^{n-2} L_q(F_{n-2}).$$

反过来,

$$L_q(F_{n-2}) = \bigoplus_{\substack{0\leqslant j_1<j_2<\cdots<j_k\leqslant n-3 \\ 0\leqslant k\leqslant n-3}} d^{j_k} d^{j_{k-1}} \cdots d^{j_1} (L_q^{F_{n-k-2}}(\mathrm{Brun}_{n-k-1})),$$

对任意 $i\in\{0,1,\cdots,n-2\}$,

$$d^iL_q(F_{n-2})=d^i\left(\bigoplus_{\substack{0\leqslant j_1<j_2<\cdots<j_k\leqslant n-3\\0\leqslant k\leqslant n-3}}d^{j_k}d^{j_{k-1}}\cdots d^{j_1}(L_q^{F_{n-k-2}}(\mathrm{Brun}_{n-k-1}))\right)$$
$$=\bigoplus_{\substack{0\leqslant q_1<q_2<\cdots<q_k\leqslant n-3\\0\leqslant k\leqslant n-3}}d^{q_k}d^{q_{k-1}}\cdots d^{q_1}d^m(L_q^{F_{n-k-2}}(\mathrm{Brun}_{n-k-1})),$$

这里 $m\in\{0,1,\cdots,n-2\}$.

又因为 $d^m(L_q^{F_{n-k-2}}(\mathrm{Brun}_{n-k-1}))\subset L_q^{F_{n-k-1}}(\mathrm{Brun}_{n-k})$, 进而有

$$d^iL_q(F_{n-2})\subset\bigoplus_{\substack{0\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_k\leqslant n-2\\1\leqslant k\leqslant n-2}}d^{i_k}d^{i_{k-1}}\cdots d^{i_1}(L_q^{F_{n-k-1}}(\mathrm{Brun}_{n-k})).$$

因为 i 是任意的, 从而

$$d^0L_q(F_{n-2})+\cdots+d^{n-2}L_q(F_{n-2})\subset\bigoplus_{\substack{0\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_k\leqslant n-2\\1\leqslant k\leqslant n-2}}d^{i_k}d^{i_{k-1}}\cdots d^{i_1}(L_q^{F_{n-k-1}}(\mathrm{Brun}_{n-k})).$$

综上, 可得

$$\bigoplus_{\substack{0\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_k\leqslant n-2\\1\leqslant k\leqslant n-2}}d^{i_k}d^{i_{k-1}}\cdots d^{i_1}(L_q^{F_{n-k-1}}(\mathrm{Brun}_{n-k}))=d^0L_q(F_{n-2})+\cdots+d^{n-2}L_q(F_{n-2}).$$

引理 4.5　对于每一个 $n\geqslant 3$ 和 q, $L_q(F_{n-1})$ 的子集 $\underset{\text{some }A_{i,n}\text{ not appear}}{\mathbb{Z}(\mathrm{Hall}\ (L_q(F_{n-1})))}$ 与 $d^0L_q(F_{n-2})+d^1L_q(F_{n-2})+\cdots+d^{n-2}L_q(F_{n-2})$ 相等.

证　对任意的 $\alpha\in\underset{\text{some }A_{i,n}\text{ not appear}}{\mathbb{Z}(\mathrm{Hall}\ (L_q(F_{n-1})))}$, 若 $A_{i,n}$ 不出现, 则 $\alpha\in d^{i-1}L_q(F_{n-2})$, 从而有

$$\underset{\text{some }A_{i,n}\text{ not appear}}{\mathbb{Z}(\mathrm{Hall}\ (L_q(F_{n-1})))}\subset d^0L_q(F_{n-2})+d^1L_q(F_{n-2})+\cdots+d^{n-2}L_q(F_{n-2}).$$

对任意 $\alpha\in d^iL_q(F_{n-2})$, 下证 $\alpha\in\underset{\text{some }A_{i,n}\text{ not appear}}{\mathbb{Z}(\mathrm{Hall}\ (L_q(F_{n-1})))}$. 因为 $\alpha\in d^iL_q(F_{n-2})\subset L_q(F_{n-1})$, 所以 $\alpha\in L_q(F_{n-1})=\mathrm{Hall}_q^L(F_{n-1})\bigoplus\underset{\text{some }A_{i,n}\text{ not appear}}{\mathbb{Z}(\mathrm{Hall}\ (L_q(F_{n-1})))}$, 从而存在 $\alpha_1\in\mathrm{Hall}_q^L(F_{n-1})$, $\alpha_2\in\underset{\text{some }A_{i,n}\text{ not appear}}{\mathbb{Z}(\mathrm{Hall}\ (L_q(F_{n-1})))}$, 使得 $\alpha=\alpha_1+\alpha_2\in d^iL_q(F_{n-2})$. 从而有 $\alpha_1=\alpha-\alpha_2\in\underset{\text{some }A_{i,n}\text{ not appear}}{\mathbb{Z}(\mathrm{Hall}\ (L_q(F_{n-1})))}$. 即 $\alpha_1\in\underset{\text{some }A_{i,n}\text{ not appear}}{\mathbb{Z}(\mathrm{Hall}\ (L_q(F_{n-1})))}\bigcap\mathrm{Hall}_q^L(F_{n-1})$, 进而我们得到 $\alpha_1=0,\alpha=\alpha_2\in\underset{\text{some }A_{i,n}\text{ not appear}}{\mathbb{Z}(\mathrm{Hall}\ (L_q(F_{n-1})))}$, 从而有 $d^iL_q(F_{n-2})\subset\underset{\text{some }A_{i,n}\text{ not appear}}{\mathbb{Z}(\mathrm{Hall}\ (L_q(F_{n-1})))}$, 又因为 d^i 是任意的, 从而有

$$d^0L_q(F_{n-2})+d^1L_q(F_{n-2})+\cdots+d^{n-2}L_q(F_{n-2})\subset\underset{\text{some }A_{i,n}\text{ not appear}}{\mathbb{Z}(\mathrm{Hall}(L_q(F_{n-1})))}.$$

综上可得

$$d^0L_q(F_{n-2})+d^1L_q(F_{n-2})+\cdots+d^{n-2}L_q(F_{n-2})=\underset{\text{some }A_{i,n}\text{ not appear}}{\mathbb{Z}(\mathrm{Hall}\ (L_q(F_{n-1})))}.$$

定理 4.2 对于每一个 $n \geqslant 3$ 和 q, Brunnian 辫子群相对于自由群的相对李代数 $L_q^{F_{n-1}}(\mathrm{Brun}_n)$ 与 $L_q(F_{n-1})$ 的子集 $\mathrm{Hall}_q^L(F_{n-1})$ 相等.

证 由引理 4.4 和引理 4.5, 可知

$$\bigoplus_{\substack{0\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_k\leqslant n-2\\ 1\leqslant k\leqslant n-2}} d^{i_k}d^{i_{k-1}}\cdots d^{i_1}(L_q^{F_{n-k-1}}(\mathrm{Brun}_{n-k})) = \mathbb{Z}(\underset{\text{some } A_{i,n} \text{ not appear}}{\mathrm{Hall}}\ (L_q(F_{n-1}))).$$

令 $W = \bigoplus_{\substack{0\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_k\leqslant n-2\\ 1\leqslant k\leqslant n-2}} d^{i_k}d^{i_{k-1}}\cdots d^{i_1}(L_q^{F_{n-k-1}}(\mathrm{Brun}_{n-k})) = \mathbb{Z}(\underset{\text{some } A_{i,n} \text{ not appear}}{\mathrm{Hall}}\ (L_q(F_{n-1})))$, 则有

$$L_q^{F_{n-1}}(\mathrm{Brun}_n)\bigoplus W = \mathrm{Hall}_q^L(F_{n-1})\bigoplus W.$$

对 $\forall\ x \in L_q^{F_{n-1}}(\mathrm{Brun}_n)$, 由 $L_q^{F_{n-1}}(\mathrm{Brun}_n)\bigoplus W = \mathrm{Hall}_q^L(F_{n-1})\bigoplus W$ 可知, 存在 $x_1 \in \mathrm{Hall}_q^L(F_{n-1})$, $y \in W$, 使得 $x = x_1 + y$. 又因为 $\mathrm{Hall}_q^L(F_{n-1}) \subset L_q^{F_{n-1}}(\mathrm{Brun}_n)$, 所以有 $x_1 \in L_q^{F_{n-1}}(\mathrm{Brun}_n)$, $y = x - x_1 \in L_q^{F_{n-1}}(\mathrm{Brun}_n)$. 从而有 $y \in W\bigcap L_q^{F_{n-1}}(\mathrm{Brun}_n)$, 进而可知 $y = 0$. 从而有 $x = x_1 \in \mathrm{Hall}_q^L(F_{n-1})$. 从而可得 $L_q^{F_{n-1}}(\mathrm{Brun}_n) \subset \mathrm{Hall}_q^L(F_{n-1})$. 结合引理 4.3 可得 $L_q^{F_{n-1}}(\mathrm{Brun}_n) = \mathrm{Hall}_q^L(F_{n-1})$.

定理 4.3 Brunnian 辫子群相对于纯辫子群的相对李代数 $L_q^P(\mathrm{Brun}_n)$ 与自由李代数的子集 $\mathrm{Hall}_q^L(F_{n-1})$ 同构.

证 由定理 3.1 及定理 4.2 得到.

根据定理 4.3, 我们可以给出 $L_q^P(\mathrm{Brun}_n)$ 的一组基.

例 4.1 当 $n = 4$ 时, 依照 Hall 基的算法, 可以得到 $L_q^P(\mathrm{Brun}_4)$ 的一组基:

当 $q \leqslant 2$ 时, 基为 0;

当 $q = 3$ 时, $L_3^P(\mathrm{Brun}_4)$ 的一组基为 $[[A_{3,4}, A_{1,4}], A_{2,4}]$, $[[A_{2,4}, A_{1,4}], A_{3,4}]$;

当 $q = 4$ 时, $L_4^P(\mathrm{Brun}_4)$ 的一组基为 $[[[A_{3,4}, A_{1,4}], A_{1,4}], A_{2,4}]$, $[[[A_{3,4}, A_{1,4}], A_{2,4}], A_{2,4}]$, $[[[A_{2,4}, A_{1,4}], A_{1,4}], A_{3,4}]$, $[[[A_{2,4}, A_{1,4}], A_{2,4}], A_{3,4}]$, $[[[A_{3,4}, A_{1,4}], A_{2,4}], A_{3,4}]$, $[[[A_{2,4}, A_{1,4}], A_{3,4}], A_{3,4}]$, $[[A_{3,4}, A_{1,4}], [A_{2,4}, A_{1,4}]]$, $[[A_{3,4}, A_{2,4}], [A_{2,4}, A_{1,4}]]$, $[[A_{3,4}, A_{2,4}], [A_{3,4}, A_{1,4}]]$;

当 $q = 5$ 时, $\dim(L_5^P(\mathrm{Brun}_4)) = 30$, 这里不再一一列出.

注 4.1 用定理 4.3 的方法计算出的 $L_q^P(\mathrm{Brun}_n)$ 的一组基要比 $L_q^P(\mathrm{Brun}_n)$ 生成元的集合更精细.

参 考 文 献

[1] Fadell E, Neuwirth L. Configuration spaces [J]. *Math Scand*, 1962, 10:111–118.

[2] Birman J S. Braids, links, and mapping class groups [M]//Annals of Mathematics Studies, Vol 82, Tokyo: University of Tokyo Press, 1974.

[3] Artin E. Theory of braids [J]. *Annals of Mathematics*, 1947, 48(1):101–126.

[4] Vershinin V V. Braid groups, their properties and generalizations [J]. *Handbook of Algebra, Elsevier,* 2006, 4:427–465.

[5] Stanford T. Braid commutators and Vassiliev invariants [J]. *Pacific Journal of Mathemattics*, 1996, 174(1):269–276.

[6] Kohno T. série de Poincaré-Koszul associée aux groupes de tresses pures [J]. *Invent Math*, 1985, 82(1):57–75.

[7] Kohno T. Monodromy representations of braid groups and Yang-Baxter equations [J]. *Ann Inst Fourier* (*Grenoble*), 1987, 37(4):139–160.

[8] Cohen F R, Kohno T, Xicoténcatl M A. Orbit configuration spaces associated to discrete subgroups of PSL(1,R) [J]. *J Pure Appl Algebra*, 2009, 213:2289–2300.

[9] González-Meneses J, Paris L. Vassiliev invariants for braids on surfaces [J]. *Trans Amer Math Soc*, 2004, 356:219–243.

[10] Kaabi N, Vershinin V V. On Vassiliev invariants of braid groups of the sphere [J]. *Atti Semin Mat Fis Univ Modena Reggio Emilia*, 2011, 58:213–232.

[11] Goncalves D L, Guaschi J. The lower central and derived series of the braid groups of the projective plane [J]. *J Algebra*, 2011, 331:96–129.

[12] Berrick J, Cohen F R, Wong Y L, et al. Configurations, braids and the homotopy groups [J]. *J Amer Math Soc*, 2006, 19(2):265–326.

[13] Bardakov V G, Mikhailov R, Vershinin V V, et al. Brunnian braids on surfaces [J]. *Algebraic and Geometric Topology*, 2012, 12:1607–1648.

[14] Li J Y, Wu J. Artin braid groups and homotopy groups [J]. *Proc London Math Soc*, 2009, 99(3):521–556.

[15] Wu J, Mikhailov R V. Homotopy groups as centres of fnitely presented groups [J]. *Izvestiya Mathematics*, 2013, 77(3):581–593.

[16] Li J Y, Vershinin V V, Wu J. Brunnian braids and Lie algebras [J]. *Journal of Algebra*, 2015, 439:270–293.

[17] Wu J. On maps from loop suspension to loop spacces and the shuffle relations on the Cohen groups [J]. *Mem Amer Math Soc*, 2006, 180(851):171–172.

[18] Magnus W, Karrass A, Solitar D. Combinatorial group theory: presentation of groups in terms of generators and relations [J]. *Interscience Publishers*, 1966, 8(1):190–199.

[19] Tuba I. Braid representations and tensor categories [D]. University of California, 2000.

[20] Reutenauer C. Free Lie algebras [M]. London Mathematical Society Monographs. New Series, vol.7, London: Oxford Science Publications, The Clarendon Press, Oxford University Press, 1993.

[21] Širvsov A I. Subalgebras of free Lie algebras [J]. *Mat Sb* (*NS*), 1953, 33(75):441–452 (in Russian).

[22] Whitehead George W. Elements of homotopy theory [M]. Graduate Texts in Mathematics, 61, New York, Berlin: Springer-Verlag, 1978.

A Basis for the Relative Lie Algebra of Brunnian Braids

HE Liying[1] LI Jingyan[2]

[1]School of Mathematical Science, Hebei Normal University, Shijiazhuang 050024, China. E-mail:heliying1633@163.com

[2]Corresponding author. Shijiazhuang Beijun Primary School, Shijiazhuang 050000, China. E-mail: yanjinglee@163.com

Abstract Brunnian braids have interesting relations with homotopy groups of spheres. In this paper, the authors investigate the Lie algebra of the descending central series related to subgroup of the pure group. In order to determine the basis for the relative Lie algebra $L^P(\mathrm{Brun}_n)$, the authors study the relationship of $L^P(\mathrm{Brun}_n)$ and $L^{F_{n-1}}(\mathrm{Brun}_n)$. With the help of the Hall basis of free Lie algebra $L(F_{n-1})$, the basis of relative Lie algebra $L^P(\mathrm{Brun}_n)$ is given.

Keywords Brunnian braid, Relative Lie algebra, Free group, Hall basis

2000 MR Subject Classification 57M, 55, 20F36, 17B60, 20E99