数 学 年 刊 A 辑
2020, 41(4):465–472
DOI: 10.16205/j.cnki.cama.2020.0032

仿射李代数的水平零的 Whittaker 模 *

沈彩霞 [1]　夏利猛 [2]

提要　对任意的仿射李代数 $\widetilde{\mathfrak{g}}$, 作者构造了一类水平为零的 imaginary Whittaker $\widetilde{\mathfrak{g}}$- 模. 同时证明了这类模在某些给定条件下是单的.

关键词　仿射李代数， Whittaker 模，水平零，不可约
MR (2000) 主题分类　17B37
中图法分类　O152.1
文献标志码　A
文章编号　1000-8314(2020)04-0465-8

1 引　言

有限维复半单李代数 $\mathfrak{g}$ 上的 Whittaker 模是首先由 Kostant 在文 [1] 中定义的. 他证明了 (在同构意义下) 李代数 $\mathfrak{g}$ 的包络代数 $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ 中心 $\mathcal{Z}(\mathfrak{g})$ 的理想和这些模之间处在双射关系. 特别地，不可约 Whittaker 模对应到 $\mathcal{Z}(\mathfrak{g})$ 的极大理想. Block[2] 把所有的 $sl_2(\mathbb{C})$ 的不可约模分为三类：最高 (最低) 权模，Whittaker 模和局部化得到的第三类模. 量子包络代数 $\mathcal{U}_q(sl_2)$ 的 Whittaker 模是由 Ondrus 在文 [3] 中分类的. 他还研究了这些模的张量积 [4]. Miličić 和 Soergel[5] 和 McDowell[6] 等人对任意的有限维复半单李代数的 Whittaker 模做出了研究.

最近有很多文章对无限维李代数的 Whittaker 模做出了研究. 文 [7] 中，Christodoulopoulou 分类了有限和无限 Heisenberg 代数的 Whittaker 模. 他还研究了非扭的仿射李代数上的一类 imaginary Whittaker 模，其中非零水平的那部分模被证明是不可约的. 广义 Weyl 代数， Virasoro 李代数， twisted Heisenberg 代数的和薛定谔 -Witt 代数的 Whittaker 模在文 [8–12] 中得到了研究. Wang 研究了自由阿贝尔群阶化无限维李代数的 Whittaker 模 [13].

在本文中，我们构造了任意仿射李代数的一类零水平的 Whittaker 模，并且这类模被证明是不可约的.

2 预备知识

用 $\widetilde{\mathfrak{g}}$ 表示复数域 $\mathbb{C}$ 上的仿射李代数. 设 $\mathfrak{g}$ 和 $\widetilde{\mathfrak{g}}$ 相关的有限维半单李代数，其具有 Cartan 子代数 $\mathfrak{h}$, 单根系 $\Pi=\{\alpha_1,\cdots,\alpha_n\}$ 和根系 $\dot{\Delta}$. 令 $\dot{Q}^+=\big\{\sum\limits_{i=1}^{n}m_i\alpha_i\mid m_i\in\mathbb{Z}_{\geqslant 0},\forall i\big\}$, 且 $\dot{\Delta}=\dot{\Delta}_-\cup\dot{\Delta}_+$ 是正负根系分解，其中 $\dot{\Delta}_\pm=\dot{\Delta}\cap(\pm\dot{Q}^+)$. 当有两种不同根长度时，分别用 $\dot{\Delta}_S$ 和 $\dot{\Delta}_L$ 表示 $\dot{\Delta}$ 中的短根集合和长根集合.

本文 2015 年 11 月 2 日收到， 2020 年 6 月 9 日收到修改稿.

[1]江苏大学数学科学学院，江苏　镇江 212013. E-mail: shencaixia@ujs.edu.cn
[2]江苏大学应用系统分析研究院，江苏　镇江 212013. E-mail: xialimeng@ujs.edu.cn

*本文受到国家自然科学基金 (No. 11871249, No. 11771142) 和江苏省自然科学基金 (No. BK20171294) 的资助.

仿射李代数 $\widetilde{\mathfrak{g}}$ 有 Cartan 子代数 $\widetilde{\mathfrak{h}}=\mathfrak{h}\oplus\mathbb{C}c\oplus\mathbb{C}d$, 其中 c 是中心元素， d 是次数导子. 关于 Cartan 子代数 $\widetilde{\mathfrak{h}}$, $\widetilde{\mathfrak{g}}$ 有根空间分解

$$\widetilde{\mathfrak{g}}=\widetilde{\mathfrak{h}}\oplus\bigoplus_{\alpha\in\Delta}\widetilde{\mathfrak{g}}_\alpha.$$

其根系为 $\Delta=\Delta^{\rm re}\cup\Delta^{\rm im}$, 其中虚根集合 $\Delta^{\rm im}=\{n\delta\mid n\in\mathbb{Z}\}$ 包含不可分虚根 δ 的所有整数倍，实根系为 $\Delta^{\rm re}=\Delta^{\rm re}_-\cup\Delta^{\rm re}_+$, 其中 $\Delta^{\rm re}_-=-\Delta^{\rm re}_+$ 且

$$\Delta^{\rm re}_+=\begin{cases}\{\alpha+n\delta\mid\alpha\in\dot{\Delta}_+,n\in\mathbb{Z}\}, & \text{非扭的情况},\\ \{\alpha+n\delta\mid\alpha\in(\dot{\Delta}_S)_+,n\in\mathbb{Z}\}\cup\{\alpha+rn\delta\mid\alpha\in(\dot{\Delta}_L)_+,n\in\mathbb{Z}\}, & \text{扭的但不是}A_{2l}^{(2)}\text{类型},\\ \{\alpha+n\delta\mid\alpha\in\dot{\Delta}_+,n\in\mathbb{Z}\}\cup\{2\alpha+(2n-1)\delta\mid\alpha\in(\dot{\Delta}_S)_+,n\in\mathbb{Z}\}, & A_{2l}^{(2)}\text{型},\end{cases}$$

其中非扭情况下 $r=1$, $D_4^{(3)}$ 型情况下 $r=3$, 其他的情况都是 $r=2$.

令 Δ_0 为约化根系的集合，即

$$\Delta_0=\begin{cases}\dot{\Delta}_+, & \text{非}A_{2l}^{(2)}\text{型},\\ \dot{\Delta}_+\cup\{2\alpha\mid\alpha\in(\dot{\Delta}_S)_+\}, & A_{2l}^{(2)}\text{型},\end{cases}$$

这是 $\dot{Q}^+$ 的一个有限子集. 对任意 $\alpha,\beta\in\dot{Q}^+$, 若 $\alpha=\sum\limits_{i=1}^n a_i\alpha_i,\beta=\sum\limits_{i=1}^n b_i\alpha_i$, 则定义 $\alpha\leqslant\beta$ 当且仅当 $(a_1,\cdots,a_n)\leqslant(b_1,\cdots,n_n)$ 在字典序下成立. 假设 $|\Delta_0|=R$, 令 $\beta_1,\cdots,\beta_R$ 为 Δ_0 中元素在该序下的完整排列.

令 $\mathfrak{n}^\pm=\bigoplus\limits_{\alpha\in\Delta^{\rm re}_+}\widetilde{\mathfrak{g}}_{\pm\alpha}$, $\mathfrak{n}_0=\bigoplus\limits_{\alpha\in\Delta^{\rm im}}\widetilde{\mathfrak{g}}_\alpha$, 则 $\widetilde{\mathfrak{g}}$ 有如下三角分解:

$$\widetilde{\mathfrak{g}}=\mathfrak{n}^-\oplus(\widetilde{\mathfrak{h}}\oplus\mathfrak{n}_0)\oplus\mathfrak{n}^+.$$

令 $\{e_\alpha,h_i\mid 1\leqslant i\leqslant n,\alpha\in\dot{\Delta}\}$ 是 $\mathfrak{g}$ 的一组 Chevalley 基，则

$$\bigoplus_{\alpha\in\dot{\Delta},m\in\mathbb{Z}}\widetilde{\mathfrak{g}}_{\alpha+rm\delta}\oplus\bigoplus_{m\in\mathbb{Z}}\widetilde{\mathfrak{g}}_{rm\delta}\oplus\widetilde{\mathfrak{h}}$$

是 $\widetilde{\mathfrak{g}}$ 的一个子代数，并且该代数是非扭仿射的，可以将其确定为

$$\mathfrak{g}\otimes[t,t^{-1}]\oplus\mathbb{C}c\oplus\mathbb{C}d,$$

它有一组基元素 $e_{\alpha+m\delta}:=e_\alpha\otimes t^m,h_i(m):=h_i\otimes t^m,c,d$, 其中 $\alpha\in\dot{\Delta},1\leqslant i\leqslant n$, $m\in r\mathbb{Z}$. 进而我们可以将其扩展成 $\widetilde{\mathfrak{g}}$ 的包含

$$\{e_{\alpha+m\delta}\mid\alpha+m\delta\in\Delta\}$$

的一组基，使得

$$0\neq[e_{\beta_j-(M+m)\delta},e_{-\beta_j+m\delta}]\in\mathbb{C}[e_{\beta_j-M\delta},e_{-\beta_j}],\quad\beta_j\in\dot{\Delta},$$

$$0\neq[e_{\beta_j-(M+m)\delta},e_{-\beta_j+m\delta}]\in\mathbb{C}[e_{\frac{\beta_j}{2}-M\delta},e_{-\frac{\beta_j}{2}}],\quad\beta_j\in 2\dot{\Delta}_S,$$

对任意的 $1\leqslant j\leqslant R$ 成立.

关于 $\widetilde{\mathfrak{g}}$ 的结构和实现的更多细节可以参考文 [14] 的第七章.

3 Whittaker 模的构造

子空间 $\mathfrak{t}=\mathfrak{n}_0\oplus\mathbb{C}c$ 是 $\widetilde{\mathfrak{g}}$ 的一个 Heisenberg 子代数并且 $\mathfrak{t}/\mathbb{C}c$ 是交换的. 任意一个满足 $\eta(c)=0$ 的 $\eta\in\mathfrak{t}^*$ 都诱导了一个从 $\mathcal{U}(\mathfrak{t})$ 到 $\mathbb{C}$ 的代数同态. 同时若 $\eta:\mathcal{U}(\mathfrak{t})\to\mathbb{C}$ 是一个代数同态，则一定有 $\eta(c)=0$. 因此可以用对偶空间 $(\mathfrak{n}_0)^*$ 确定 $\hom_{\rm alg}(\mathcal{U}(\mathfrak{t}),\mathbb{C})$.

令 $\eta \in (\mathfrak{n}_0)^*$, $\mathbb{C}_\eta = \mathbb{C}\widetilde{v}$ 是一个一维的 $\mathfrak{t}$- 模，其中 $c \cdot \widetilde{v} = 0$ 且对任意的 $x \in \mathfrak{n}$, 有

$$x \cdot \widetilde{v} = \eta(x)\widetilde{v}.$$

令 $\mathbb{C}_\eta[d] = \mathbb{C}[d] \otimes \widetilde{v}$, $v = 1 \otimes \widetilde{v}$, 则 $\mathbb{C}_\eta[d]$ 是一个 $\mathfrak{t} \oplus \mathbb{C}d$- 模.

命题 3.1　令 $\eta \in (\mathfrak{n}_0)^*$, 则作为 $\mathfrak{t} \oplus \mathbb{C}d$- 模，$\mathbb{C}_\eta[d]$ 是不可约的当且仅当 $\eta \neq 0$.

证　如果 $\eta = 0$, 则对任意的正整数 k, 线性空间 $d^k\mathbb{C}[d]v$ 是一个真子模.

如果 $\eta \neq 0$, 则存在 $m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ 和 $x \in \widetilde{\mathfrak{g}}_{m\delta}$, 使得 $\eta(x) = 1$, 那么对所有多项式 $f(d) = \sum\limits_{i=1}^{k} a_i d^i (a_k \neq 0, k > 0)$, 都有

$$\begin{aligned} x \cdot (f(d)v) - f(d)v &= [x, f(d)]v \\ &= \sum_{i=1}^{k} a_i [x, d^i] v \\ &= -mka_k d^{k-1} v + g(d)v \neq 0, \end{aligned}$$

其中 $-mka_k \neq 0$ 且 $g(d)$ 是次数小于 $k-1$ 的多项式. 对 k 归纳，可以推导出 v 属于 $f(d)v$ 生成的子模. 由于 $\mathbb{C}_\eta[d] = \mathcal{U}(\mathfrak{t} \oplus \mathbb{C}d)v$, 因此 $\mathbb{C}_\eta[d]$ 是不可约的.

对所有 $\lambda \in \mathfrak{h}^*$, 定义 $\mathfrak{h}$ 在 $\mathbb{C}_\eta[d]$ 上的作用：

$$h \cdot f(d)v = \lambda(h) f(d)v, \quad \forall h \in \mathfrak{h}.$$

此时 $\mathbb{C}[d]v$ 成为一个 $\widetilde{\mathfrak{h}} \oplus \mathfrak{n}_0$- 模，记为 $\mathbb{C}_{\eta,\lambda}[d]$. 特别地，用 $\mathbb{C}_{\eta,\lambda}$ 表示子空间 $\mathbb{C}v$.

令 $\mathfrak{p} = (\widetilde{\mathfrak{h}} \oplus \mathfrak{n}_0) \oplus \mathfrak{n}^+$, 则 $\mathfrak{p}$ 是 $\widetilde{\mathfrak{g}}$ 的一个抛物子代数且 $\mathfrak{n}^+$ 是 $\mathfrak{p}$ 的一个理想. 对任意的 $w \in \mathbb{C}_{\eta,\lambda}[d]$, 定义 $\mathfrak{n}^+ w = 0$, 则在 $\mathbb{C}_{\eta,\lambda}[d]$ 上定义了一个 $\mathcal{U}(\mathfrak{p})$- 模结构. 记

$$V_{\eta,\lambda} = \mathcal{U}(\widetilde{\mathfrak{g}}) \otimes_{\mathcal{U}(\mathfrak{p})} \mathbb{C}_{\eta,\lambda}[d].$$

定义 $\mathcal{U}(\widetilde{\mathfrak{g}})$ 在 $V_{\eta,\lambda}$ 上的作用为在张量因子 $\mathcal{U}(\widetilde{\mathfrak{g}})$ 上左乘. 我们称 $V_{\eta,\lambda}$ 是 $\widetilde{\mathfrak{g}}$ 的一个水平零的 (η, λ)- 型的 imaginary Whittaker 模.

命题 3.2　(i) 作为 $\mathcal{U}(\mathfrak{n}^-)$- 模,

$$V_{\eta,\lambda} \cong \mathcal{U}(\mathfrak{n}^-) \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[d]v.$$

进而，$V_{\eta,\lambda}$ 是一个自由 $\mathcal{U}(\mathfrak{n}^-)$- 模.

(ii) 作为 $\mathfrak{h}$- 模，有权空间分解

$$V_{\eta,\lambda} = \bigoplus_{\mu \in \dot{Q}^+} V_{\eta,\lambda}^{\lambda-\mu},$$

其中

$$V_{\eta,\lambda}^{\lambda-\mu} \cong \mathcal{U}(\mathfrak{n}^-)^{-\mu} \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[d],$$
$$\mathcal{U}(\mathfrak{n}^-)^{-\mu} = \{u \in \mathcal{U}(\mathfrak{n}^-) \mid [h, u] = -\mu u, \quad \forall h \in \mathfrak{h}\}.$$

特别地，$V_{\eta,\lambda}^{\lambda} \cong \mathbb{C}_{\eta,\lambda}[d]$.

证　证明过程和文 [7] 中命题 43.(i), (iii) 非常相似.

定理 3.1　令 $\eta \in (\mathfrak{n}_0)^*, \lambda \in \mathfrak{h}$. 如果 η 满足如下条件 (C^-), 则 $V_{\eta,\lambda}$ 是一个不可约的 $\widetilde{\mathfrak{g}}$- 模：

(C^-) 对所有正整数 K, 存在正整数 $M \in r\mathbb{Z}$, 使得 $\eta(h_i(-M)) > 0$ 且对任意的 $1 \leqslant i \leqslant n$ 和 $-K-M \leqslant m \leqslant K-M$ 有 $\eta(\widetilde{\mathfrak{g}}_{m\delta}) = 0$.

例 3.1 如果令 $\eta \in (\mathfrak{n}_0)^*$ 并且

$$\eta(h_i(m)) = \sum_{k=1}^{\infty} \delta_{-m, \frac{k(k+1)}{2}},$$

则 η 满足上述条件 (C^-). 事实上，在 $(\mathfrak{n}_0)^*$ 中存在无穷多元素满足条件 (C^-).

4 定理 3.1 的证明

对任意的 $1 \leqslant j \leqslant R$ 和 $k, l \in \mathbb{Z}$, 若 $\beta_j + k\delta, -\beta_j + l\delta \in \Delta$, 我们用 $h_{j,k,l}$ 表示李括号 $[e_{\beta_j+k\delta}, e_{-\beta_j+l\delta}]$.

引理 4.1 假设 $\eta \in (\mathfrak{n}_0)^*$ 满足条件 (C^-) 并且 $\{m_1, \cdots, m_k\} \subset \mathbb{Z}$ 是有限集. 如果对任意的 $1 \leqslant i \leqslant k$ 有 $-\beta_j + m_i\delta \in \Delta$, 则存在正整数 $M \in r\mathbb{Z}$, 使得

$$\eta([e_{\beta_j-(M+m_1)\delta}, e_{-\beta_j+m_i\delta}]) \neq 0,$$

当且仅当 $i = 1$, 其中 $1 \leqslant j \leqslant R$.

证 由于 $-\beta_j + m_1\delta \in \Delta$ 且 $M \in r\mathbb{Z}$, 则 $\beta_j - (M+m_1)\delta \in \Delta$ 和 $[e_{\beta_j-(M+m_1)\delta}, e_{-\beta_j+m_i\delta}] \neq 0$ 成立. 对每个 $\alpha \in \dot{\Delta}^+$, 存在非零 n- 元组 $(b_1, \cdots, b_n) \in (\mathbb{Z}_{\geqslant 0})^n$, 使得李括号 $[e_{\alpha-M\delta}, e_{-\alpha}]$ 等于 $\sum\limits_{i=1}^{n} b_i h_i(-M)$, 则

$$\eta([e_{\beta_j-(M+m_1)\delta}, e_{-\beta_j+m_i\delta}]) = c_0 \sum_{i=1}^{n} b_i \eta(h_i(-M)) \neq 0,$$

其中 c_0 是一个非零常数. 因为 η 满足条件 (C^-), 令 $K = 2\max\{|m_1|, \cdots, |m_k|\} + 1$, 则 $-K-M < -(M+m_1) + m_i < K-M$, 同时 $-(M+m_1) + m_i = -M$ 当且仅当 $m_1 = m_i$, 由 η 的性质，得到 $\eta([e_{\beta_j-(M+m_1)\delta}, e_{-\beta_j+m_i\delta}]) = 0$ 对所有 $i \neq 1$ 成立.

定义符号 $\underline{\kappa} = (\kappa_1, \cdots, \kappa_R)$, 其中对所有 $1 \leqslant r \leqslant R$, κ_r 表示一个从 $\mathbb{Z}$ 到 $\mathbb{Z}_{\geqslant 0}$ 的函数. 令 $\mathcal{I}$ 是所有满足下述条件的 $\underline{\kappa} = (\kappa_1, \cdots, \kappa_R)$ 构成的集合:

(c1) 对所有 r, $\kappa_r : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$ 有有限支集;

(c2) 对所有 $\beta_r + k\delta \notin \Delta$, $1 \leqslant r \leqslant R$, 有 $\kappa_r(k) = 0$.

对每个 $\underline{\kappa} \in \mathcal{I}$, 定义

$$F_r^{\kappa_r} = \cdots e_{-\beta_r+(k-1)\delta}^{\kappa_r(k-1)} e_{-\beta_r+k\delta}^{\kappa_r(k)} e_{-\beta_r+(k+1)\delta}^{\kappa_r(k+1)} \cdots,$$

$$F^{\underline{\kappa}} = F_1^{\kappa_1} F_2^{\kappa_2} \cdots F_R^{\kappa_R},$$

则 $\mathcal{U}(\mathfrak{n}^-)$ 有一组基 $\{F^{\underline{\kappa}} \mid \underline{\kappa} \in \mathcal{I}\}$.

用 $(F^{\underline{\kappa}})_{[r,k]}$ 表示把 $F^{\underline{\kappa}}$ 中的 $e_{-\beta_r+k\delta}$ 次数从 $\kappa_r(k)$ 改成 $\kappa_r(k) - 1$ 得到的元素.

引理 4.2 设 $\underline{\kappa} \in \mathcal{I}$. 如果 r 是最小的使得 $\kappa_j(k) = 0$ 对所有 $j < r$ 和 $k \in \mathbb{Z}$ 都成立的指标，则对所有 $m \in \mathbb{Z}$, 存在某个 $u \in \mathcal{U}(\mathfrak{n}^-)$, 使得

$$[e_{\beta_r+m\delta}, F^{\underline{\kappa}}] = u + \sum_{\kappa_r(k)>0} \kappa_r(k) (F^{\underline{\kappa}})_{[r,k]} h_{r,m,k}.$$

证 由 β_i 的定义,

$$[e_{\beta_r+m\delta}, F_j^{\kappa_j}] \in \mathcal{U}(\mathfrak{n}^-)$$

对所有 $j>r$ 成立, 并且

$$[h_{r,m,k}, F^{\underline{\kappa}}] \in \mathcal{U}(\mathfrak{n}^-)$$

对所有 $\underline{\kappa} \in \mathcal{I}$ 成立. 由 r 的定义, $\kappa_r(k)(F^{\underline{\kappa}})_{[r,k]} \in \mathcal{U}(\mathfrak{n}^-)$, 则

$$\begin{aligned}
&[e_{\beta_r+m\delta}, F^{\underline{\kappa}}]\\
&= F_r^{\kappa_r}\Big[e_{\beta_r+m\delta}, \prod_{j=r+1}^{R} F_j^{\kappa_j}\Big] + [e_{\beta_r+m\delta}, F_r^{\kappa_r}]\prod_{j=r+1}^{R} F_j^{\kappa_j}\\
&= F_r^{\kappa_r}\Big[e_{\beta_r+m\delta}, \prod_{j=r+1}^{R} F_j^{\kappa_j}\Big] + \sum_{s\geqslant 1}\Big(\cdots e_{-\beta_r+k_{s-1}\delta}[e_{\beta_r+m\delta}, e_{-\beta_r+k_s\delta}]e_{-\beta_r+k_{s+1}\delta}\cdots\prod_{j=r+1}^{R} F_j^{\kappa_j}\Big)\\
&= F_r^{\kappa_r}\Big[e_{\beta_r+m\delta}, \prod_{j=r+1}^{R} F_j^{\kappa_j}\Big] + \sum_{s\geqslant 1}\Big(\cdots e_{-\beta_r+k_{s-1}\delta}\Big[h_{r,m,k_s}, e_{-\beta_r+k_{s+1}\delta}\cdots\prod_{j=r+1}^{R} F_j^{\kappa_j}\Big]\Big)\\
&\quad + \sum_{\kappa_r(k)>0}\kappa_r(k)(F^{\underline{\kappa}})_{[r,k]}h_{r,m,k},
\end{aligned}$$

其中 $F_r^{\beta_r} = e_{-\beta_r+k_1\delta}e_{-\beta_r+k_2\delta}\cdots$ 是有限乘积. 因此可以得到

$$F_r^{\kappa_r}\Big[e_{\beta_r+m\delta}, \prod_{j=r+1}^{R} F_j^{\kappa_j}\Big] + \sum_{s\geqslant 1}\Big(\cdots e_{-\beta_r+k_{s-1}\delta}\Big[h_{r,m,k_s}, e_{-\beta_r+k_{s+1}\delta}\cdots\prod_{j=r+1}^{R} F_j^{\kappa_j}\Big]\Big) \in \mathcal{U}(\mathfrak{n}^-).$$

引理成立.

引理 4.3 设 $\mathcal{I}_1$ 是 $\mathcal{I}$ 的一个非空有限子集, 则 $\{F^{\underline{\kappa}} \mid \underline{\kappa} \in \mathcal{I}_1\}$ 是线性无关的. 如果对所有 $\underline{\kappa} \in \mathcal{I}_1$ 都成立 $\kappa_r(k)>0$, 则 $\{(F^{\underline{\kappa}})_{[r,k]} \mid \underline{\kappa} \in \mathcal{I}_1\}$ 也是线性无关的.

证 因为 $\{F^{\underline{\kappa}} \mid \underline{\kappa} \in \mathcal{I}\}$ 是 $\mathcal{U}(\mathfrak{n}^-)$ 的一组基, 所以集合 $\{F^{\underline{\kappa}} \mid \underline{\kappa} \in \mathcal{I}_1\}$ 是线性无关的. 如果 $\kappa_r(k)>0$ 对所有 $\underline{\kappa} \in \mathcal{I}_1$ 成立, 则 $\{(F^{\underline{\kappa}})_{[r,k]} \mid \underline{\kappa} \in \mathcal{I}_1\}$ 也是 $\{F^{\underline{\kappa}} \mid \underline{\kappa} \in \mathcal{I}\}$ 的一个非空子集, 因而它是线性无关的.

对所有 $\underline{\kappa} \in \mathcal{I}$ 定义 $S(\underline{\kappa}) = \{k \in \mathbb{Z} \mid \text{存在 } j, \text{使得}\kappa_j(k)>0\}$. 对所有 $x = \sum a_{\underline{\kappa},s}F^{\underline{\kappa}} \otimes d^s v \in V_{\eta,\lambda}$, 定义

$$\begin{aligned}
S(x) &= \bigcup_{a_{\underline{\kappa},s}\neq 0} S(\underline{\kappa}),\\
B(x) &= \max\{|k| \mid k \in S(x)\},\\
T(x) &= \max\Big\{\sum_{j=1}^{R}\sum_{k\in\mathbb{Z}}\kappa_j(k)\Big| a_{\underline{\kappa},s}\neq 0\Big\}.
\end{aligned}$$

现在开始证明定理 3.1.

设 J 是 $V_{\eta,\lambda}$ 的一个非零 $\mathcal{U}(\tilde{\mathfrak{g}})$- 子模. 只需证明 $J\cap\mathbb{C}_{\lambda,\eta}[d] \neq \{0\}$.

由命题 3.2, 存在 $\mu \in \dot{Q}^+$, 使得 $J\cap V_{\eta,\lambda}^{\lambda-\mu} \neq \{0\}$. 假设 $0 \neq x \in J\cap V_{\eta,\lambda}^{\lambda-\mu}$, 则它有如下

唯一表达式:

$$x=\sum_{s=1}^{q}\sum_{\underline{\kappa}}a_{\underline{\kappa},s}F^{\underline{\kappa}}\otimes d^{s}v.$$

我们可以假设 $S(x)$ 不空，否则 $x\in\mathbb{C}_{\lambda,\eta}[d]$. 证明完毕.

令 $K=B(x)(T(x)+2)$, r 是使得 $\kappa_j(k)=0,\forall k\in\mathbb{Z},j<r$ 且 $a_{\underline{\kappa},s}\neq 0$ 的最小的. 因为 $x\notin\mathbb{C}_{\lambda,\eta}[d]$, 我们可以断定 $1\leqslant r\leqslant R$. 由于 η 满足条件 (C^-), 可以找到正整数 $M\in r\mathbb{Z}$ 使得 $M>K$, 满足对所有 $1\leqslant i\leqslant n$ 和 $-K-M\leqslant m\leqslant K-M$, 使得 $\eta(h_i(-M))>0$ 和 $\eta(\widetilde{\mathfrak{g}}_{m\delta})=0$. 由引理 4.1, 如果 $-K-M<i+j<K-M$, 则 $\eta(h_{r,i,j})\neq 0$ 当且仅当 $i+j=-M$.

对每个使得 $a_{\underline{\kappa},s}\neq 0$ 和 $\kappa_r(k_0)>0$ 的给定的 k_0, 由引理 4.2,

$$\begin{aligned}e_{\beta_r-(M+k_0)\delta}\cdot x&=\sum_{s=1}^{q}\sum_{\underline{\kappa}}a_{\underline{\kappa},s}[e_{\beta_r-(M+k_0)\delta},F^{\underline{\kappa}}]\otimes d^{s}v\\&=\sum_{s=1}^{q}u_s\otimes d^sv+\sum_{s=1}^{q_1}\sum_{\kappa_r(k)>0}a_{\underline{\kappa}}\kappa_r(k)(F^{\underline{\kappa}})_{[r,k]}h_{r,-M-k_0,k}\otimes d^sv\\&=\sum_{s=1}^{q}u_s\otimes d^sv+\sum_{s=1}^{q_1}\sum_{\kappa_r(k)>0}a_{\underline{\kappa},s}\kappa_r(k)(F^{\underline{\kappa}})_{[r,k]}\otimes h_{r,-M-k_0,k}d^sv\\&=\sum_{s=1}^{q}u_s\otimes d^sv+\sum_{s=1}^{q_2}\sum_{\kappa_r(k_0)>0}a_{\underline{\kappa},s}\kappa_r(k_0)(F^{\underline{\kappa}})_{[r,k_0]}\otimes h_{r,-M-k_0,k_0}d^sv,\end{aligned}$$

其中 $q_1,q_2\in\mathbb{Z}_{\geqslant 0}$ 满足 $q_2\leqslant q_1\leqslant q$. 设

$$u_s=\sum a_{\underline{\kappa}',s}F^{\underline{\kappa}'}\otimes d^sv,$$

则对任意 $1\leqslant s\leqslant q$, 或者 $u_s=0$, 或者对任意的 $a_{\underline{\kappa}',s}\neq 0$, 集合

$$S(F^{\underline{\kappa}'})\cap\big\{-M+j_1+\cdots+j_p\mid 1\leqslant p\leqslant T(x),j_i\in S(x),\forall 1\leqslant i\leqslant p\big\}$$

只包含一个元素. 另外,

$$\begin{aligned}|-M+j_1+\cdots+j_p|&\geqslant M-|j_1|-\cdots-|j_p|\\&>K-pB(x)\geqslant 2B(x)\geqslant B(x),\end{aligned}$$

因此 $-M+j_1+\cdots+j_p\notin S(x)$. 然而, $S((F^{\underline{\kappa}})_{[r,k_0]})\subseteq S(x)$ 对所有 $a_{\underline{\kappa},s}\neq 0,\kappa_r(k_0)>0$ 和 $1\leqslant s\leqslant q_2$ 成立，则 $e_{\beta_r-(M+k_0)\delta}\cdot x=0$ 意味着

$$\sum_{s=1}^{q_2}\sum_{\kappa_r(k_0)>0}a_{\underline{\kappa},s}\kappa_r(k_0)(F^{\underline{\kappa}})_{[r,k_0]}\otimes h_{r,-M-k_0,k_0}d^sv=0.$$

如果 $e_{\beta_r-(M+k_0)\delta}\cdot x=0$, 可以得出

$$\begin{aligned}0&=\sum_{s=1}^{q_2}\sum_{\kappa_r(k_0)>0}a_{\underline{\kappa},s}\kappa_r(k_0)(F^{\underline{\kappa}})_{[r,k_0]}\otimes h_{r,-M-k_0,k_0}d^sv\\&=\eta(h_{r,-M-k_0,k_0})\sum_{\kappa_r(k_0)>0}a_{\underline{\kappa},q_2}\kappa_r(k_0)(F^{\underline{\kappa}})_{[r,k_0]}\otimes d^{q_2}v+d\ \text{的次数}\ s<q_2,\end{aligned}$$

和

$$\Big(\sum_{\kappa_r(k_0)>0} a_{\underline{\kappa},q_2}\kappa_r(k_0)(F^{\underline{\kappa}})_{[r,k_0]}\Big)\otimes d^{q_2}v=0,$$

进一步得出 $\sum\limits_{\kappa_r(k_0)>0} a_{\underline{\kappa},q_2}\kappa_r(k_0)(F^{\underline{\kappa}})_{[r,k_0]}=0$. 由引理 4.3, $a_{\underline{\kappa},q_2}=0$ 对所有 $\kappa_r(k_0)>0$, 这和 r 的极小性矛盾. 于是 $e_{\beta_r-(M+k_0)\delta}\cdot x\neq 0$.

显然, $e_{\beta_r-(M+k_0)\delta}\cdot x\in V_{\eta,\lambda}^{\lambda-\mu+\beta_r}$. 对权做归纳, 可以找到有限多个 $w_j=E_{\beta_{r_j}-M_j\delta}$, 使得 $\cdots w_j\cdots w_2w_1x\in V_{\eta,\lambda}^{\lambda}=\mathbb{C}_{\eta,\lambda}[d]$. 证明完毕.

5 进一步的讨论

定理 5.1 令 $\eta\in(\mathfrak{n}_0)^*,\lambda\in\mathfrak{h}$. 如果 η 满足如下条件 (C^+), 则 $V_{\eta,\lambda}$ 是一个不可约的 $\widetilde{\mathfrak{g}}$- 模:

(C^+) 对所有正整数 K, 存在正整数 $M\in r\mathbb{Z}$, 使得 $\eta(h_i(M))>0$ 且对任意的 $1\leqslant i\leqslant n$ 和 $-K+M\leqslant m\leqslant K+M$, 有 $\eta(\widetilde{\mathfrak{g}}_{m\delta})=0$.

证 李代数 $\widetilde{\mathfrak{g}}$ 存在映射 $d\mapsto -d,\delta\mapsto-\delta,c\mapsto -c$ 确定的自同构. 在该自同构下, 条件 (C^+) 等价于条件 (C^-).

令 $\widehat{\mathfrak{g}}=\mathfrak{n}^-\oplus(\mathfrak{h}\oplus\mathfrak{n}_0)\oplus\mathfrak{n}^+$, 则 $V_{\eta,\lambda}$ 是一个 $\widehat{\mathfrak{g}}$- 模. 对任意的 $j\in\mathbb{Z}_{\geqslant 0}$, 定义

$$V_{\eta,\lambda}^s=\sum_{j=0}^{s}\mathcal{U}(\mathfrak{n}^-)\otimes d^jv.$$

定理 5.2 设 $\eta\in(\mathfrak{n}_0)^*,\lambda\in\mathfrak{h}$, 则 $V_{\eta,\lambda}^s$ 是 $V_{\eta,\lambda}$ 的一个 $\widehat{\mathfrak{g}}$- 子模并且作为 $\widehat{\mathfrak{g}}$- 模有

$$V_{\eta,\lambda}^{s+1}/V_{\eta,\lambda}^s\cong V_{\eta,\lambda}^0.$$

如果 η 满足条件 (C^-) 或者 (C^+), 则 $V_{\eta,\lambda}^0=\mathcal{U}(\mathfrak{n}^-)\otimes v$ 是一个不可约 $\widehat{\mathfrak{g}}$- 模.

证 定理的第一部分通过下面的计算得到: 对所有的 $x\in\mathfrak{n}^{\pm}$ 和 $s\in\mathbb{Z}_{\geqslant 0}$,

$$x\cdot(d^sv)=\eta(x)d^sv+g(d)v\neq 0,$$

其中 $g(d)$ 是一个依赖于 s 的多项式且 $g(d)$ 的次数小于 s.

$V_{\eta,\lambda}^0$ 的不可约性的证明和定理 3.1 以及定理 5.1 类似.

参 考 文 献

[1] Kostant B. On Whittaker vectors and representation theory [J]. *Invent Math*, 1978, 48:101–184.

[2] Block R. The irreducible representations of the Lie algebra sl_2 and of the Weyl algebra [J]. *Adv Math*, 1981, 39(1):69–110.

[3] Ondrus M. Whittaker modules for $U_q(sl_2)$ [J]. *J Algebra*, 2005, 289:192–213.

[4] Ondrus M. Tensor products and Whittaker vectors for quantum groups [J]. *Comm Algebra*, 2007, 35(8):2506–2523.

[5] Miličić D, Soergel W. The composition series of modules induced from Whittaker modules [J]. *Comment Math Helv*, 1997, 72:503–520.

[6] McDowell E. On modules induced from Whittaker modules [J]. *J Algebra*, 1985, 96:161–177.

[7] Christodoulopoulou K. Whittaker modules for Heisenberg algebras and imaginary Whittaker modules for affine Lie algebras [J]. *Journal of Algebra*, 2008, 320:2871–2890.

[8] Benkart G, Ondrus M. Whittaker modules for generalized Weyl algebras [J]. *Representation Theory*, 2009, 13:141–164.

[9] Guo X, Lü R, Zhao K. Irreducible modules over the Virasoro algebra [J]. *Documenta Mathematica*, 2011, 16:709–721.

[10] Liu D, Wu Y, Zhu L. Whittaker modules for the twisted Heisenberg-Virasoro algebra [J]. *J Math Phys*, 2010, 51:023524.

[11] Liu X, Guo X. Whittaker modules over loop Virasoro algebra [J]. *Frontiers of Mathematics in China*, 2013, 8(2):393–410.

[12] Zhang X, Tan S, Lian H. Whittaker modules for the Schrödinger-Witt algebra [J]. *J Math Phys*, 2010, 51:083524.

[13] Wang B. Whittaker modules for graded Lie algebras [J]. *Algebras and Representation Theory*, 2011, 14(4):691–702.

[14] Kac V G. Infinite-dimensional Lie algebras, 3rd ed, [M]. Cambridge, UK: Cambridge University Press, 1990.

The Imaginary Whittaker Modules of Level Zero for Affine Lie Algebras

SHEN Caixia[1] XIA Limeng[2]

[1]Faculty of Science, Jiangsu University, Zhenjiang 212013, Jiangsu, China.
E-mail: shencaixia@ujs.edu.cn

[2]Institute of Applied System Analysis, Jiangsu University, Zhenjiang 212013, Jiangsu, China. E-mail: xialimeng@ujs.edu.cn

Abstract In this paper, for an arbitrary affine Lie algebra $\widetilde{\mathfrak{g}}$, the authors construct a class of imaginary Whittaker modules of zero-level for $\widetilde{\mathfrak{g}}$. It is also proved that such modules are irreducible under some given condition.

Keywords Affine Lie algebras, Whittaker modules, Level zero, Irreducible

2000 MR Subject Classification 17B37

The English translation of this paper will be published in
Chinese Journal of Contemporary Mathematics, Vol. 41 No. 4, 2020
by ALLERTON PRESS, INC., USA