数 学 年 刊 A 辑
2021, 42(2):159–170
DOI: 10.16205/j.cnki.cama.2021.0013

无限管状区域上次调和函数的边界性质*

乔 蕾[1]

提要 作者刻画了定义在无限管状区域中次调和函数的边界性质. 通过证明一类新型的 Phragmén-Lindelöf 定理, 不仅得到了与之相关最大模极限的存在性定理, 而且还得到了其具体的表达式.

关键词 管状区域, 次调和函数, 边界性质
MR (2000) 主题分类 31B05, 31B10, 31B25, 35J05, 35J10, 35J25
中图法分类 O174.5
文献标志码 A
文章编号 1000-8314(2021)02-0159-12

1 引 言

设 $\mathbb{R}$ 表示所有实数组成的集合. $\mathbb{R}^n$ $(n \geqslant 2)$ 是 n 维 Euclid 空间. 如果集合 $E \subset \mathbb{R}^n$, 则 ∂E 和 $\overline{E}$ 分别表示 E 的边界和闭包. 记点 $P = (X, y)$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中任意一点, 其中 $X = (x_1, x_2, \cdots, x_{n-1})$.

设 Ω 是 $\mathbb{R}^{n-1}$ 中任意具有光滑边界的有界区域. 将集合 (见 [1–3])

$$\Omega \times \mathbb{R} = \{(X, y) \in \mathbb{R}^n; X \in \Omega, y \in \mathbb{R}\}$$

称之为无限管状区域, 记为 $\mathcal{T}_n(\Omega)$. 若 $I \subset \mathbb{R}$, 则将集合 $\Omega \times I$ 和 $\partial\Omega \times I$ 分别简记为 $\mathcal{T}_n(\Omega; I)$ 和 $\mathcal{S}_n(\Omega; I)$. 特别地, 记 $\mathcal{S}_n(\Omega; (-\infty, +\infty))$ 为 $\mathcal{S}_n(\Omega)$, 表示 $\partial\mathcal{T}_n(\Omega)$.

考虑 Dirichlet 问题 (见 [4, 第41页])

$$\begin{aligned} (\Delta_{n-1} + \lambda) f = 0, &\quad \Omega, \\ f = 0, &\quad \partial\Omega, \end{aligned}$$

其中 Laplace 算子定义如下:

$$\Delta_{n-1} = \begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}, & n = 2, \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{n-1} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}, & n \geqslant 3. \end{cases}$$

记上述边界值问题的最小正的特征值为 λ, 与其相对应正规化后正的特征函数为 $f(X)$.

为了方便起见, 假定若 $n \geqslant 3$, 则 Ω 是 $C^{2,\varsigma}$-区域 $(0 < \varsigma < 1)$, 它能被有限个互不相交的闭超曲面所覆盖 (关于 $C^{2,\varsigma}$-区域的定义, 读者可参见文 [5, 第88–89页]).

本文 2020 年 1 月 7 日收到, 2020 年 12 月 2 日收到修改稿.
[1]河南财经政法大学数学与信息科学学院, 郑州 450046. E-mail: leiquiao@163.com
*本文受到河南省高等学校青年骨干教师培养计划 (No. 2017GGJS085) 和河南财经政法大学青年拔尖人才项目的资助.

设 u 是定义在 $\mathcal{T}_n(\Omega)$ 中的任意函数. 为了后面叙述方便起见, 本文我们将采用下面的记号:

$$u^+=\max\{u,0\},\quad u^-=-\min\{u,0\},\quad M_u(y)=\sup_{X\in\Omega}u(X,y),\quad l=\max_{X\in\Omega}f(X),$$

$$S_u(y)=\sup_{X\in\Omega}\Big\{\frac{u(X,y)}{f(X)}\Big\},$$

$$K_u=\limsup_{y\to\infty}\exp(-\sqrt{\lambda}y)S_u(y),$$

$$I_u=\sup_{(X,y)\in\mathcal{T}_n(\Omega)}u(X,y)\exp(-\sqrt{\lambda}y)f^{-1}(X),$$

$$L_u=\limsup_{y\to-\infty}\exp(\sqrt{\lambda}y)S_u(y),$$

$$J_u=\sup_{(X,y)\in\mathcal{T}_n(\Omega)}u(X,y)\exp(\sqrt{\lambda}y)f^{-1}(X).$$

若积分

$$\int_\Omega u(X,y)f(X)\mathrm{d}X$$

存在, 则记其为 $N(u)(y)$, 其中 $\mathrm{d}X=\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_{n-1}$. 若极限

$$\lim_{y\to\infty}\exp(-\sqrt{\lambda}y)N(u)(y)\quad 和\quad \lim_{y\to-\infty}\exp(\sqrt{\lambda}y)N(u)(y)$$

存在, 则分别记其有穷或者无穷的极限为 $\mu(u)$ 和 $\nu(u)$(见 [1–2, 6–11]).

定义 1.1 设 $c\in\mathbb{R}$. 若 u 是无限管状区域中的次调和函数且满足

$$\limsup_{(X,y)\to(X_0,y_0)\in\mathcal{S}_n(\Omega),(X,y)\in\mathcal{T}_n(\Omega)}u(X,y)\leqslant c,\tag{1.1}$$

则将满足上述条件的所有函数的全体组成的集合记为 $\mathfrak{F}(c)$(见 [12–13]).

张艳慧等在文 [14–18] 中已经建立了半空间中的 Phragmén-Lindelöf 定理并给出了广泛的应用. 对于任意的 $u\in\mathfrak{F}(0)$, 应用广义的 Liouville 定理, 文 [3] 给出了相应的 Phragmén-Lindelöf 定理.

定理 1.1 (见 [1, 3]) 设 $u\in\mathfrak{F}(0)$. 若

$$\mu(u^+)<+\infty\tag{1.2}$$

且

$$\nu(u^+)<+\infty,\tag{1.3}$$

则对于任意的 $(X,y)\in\mathcal{T}_n(\Omega)$, 有

$$u(X,y)\leqslant(\mu(u)\exp(\sqrt{\lambda}y)+\nu(u)\exp(-\sqrt{\lambda}y))f(X).\tag{1.4}$$

Yoshida 也在文 [1, 定理7.5] 中证明了下面的结论.

定理 1.2 设 $u\in\mathfrak{F}(0)$. 若

$$\liminf_{y\to\infty}\exp(-\sqrt{\lambda}y)M_u(y)<+\infty\tag{1.5}$$

且

$$\liminf_{y\to-\infty}\exp(\sqrt{\lambda}y)M_u(y) < +\infty, \tag{1.6}$$

则 (1.4) 成立, 其中 $(X,y)\in\mathcal{T}_n(\Omega)$.

2 主要结论

关于半空间中次调和函数的边界性质, Phragmén-Lindelöf 定理, Masaev 定理, 凹凸性, 有界性和调和控制定理及其它们的应用, 请读者参见文 [14, 19–22]. 锥中次调和函数也具有相应的这些性质, 相关学者在文 [1–2, 23–28] 中也给出了详细的刻画.

受定理 1.1, 定理 1.2 和上述文献的启发, 我们很自然地提出下列问题.

问题 2.1 若定理 1.1 中的研究对象 $u\in\mathfrak{F}(0)$ 被更弱的边界条件 $u\in\mathfrak{F}(c)$ 来替代, 类似于定理 1.1 的结论是否成立?

问题 2.2 当 $u\in\mathfrak{F}(c)$ 时, 定理 1.2 中两个关于次调和函数最大模的极限

$$A_u=\lim_{y\to\infty}\exp(-\sqrt{\lambda}y)M_u(y) \quad 和 \quad B_u=\lim_{y\to-\infty}\exp(\sqrt{\lambda}y)M_u(y)$$

是否存在? 如果不存在的话, 是否可以给出反例? 如果存在的话, 是否可以给出具体的表达式?

在文 [2–3] 中, 作者应用调和控制原理研究了无限管状区域上次调和函数的边界性质, 但这种方法因为边界条件的弱化, 无法用来解决上述两个问题. 针对这种困难, 受文 [1] 的启发, 本文我们应用了改进的 Nevanlinna 范数理论和 Martin 边界值理论回答了上述问题. 这些问题的解决将会是对管中位势理论的有益补充.

为此, 设 $l>0$ 且 $m(t)$ 是定义在 $\mathbb{R}$ 上的有限实值函数. 对于任意的 $t_1,t_2\in\mathbb{R}$ $(t_1<t_2)$, 定义行列式 $M(t;m,l,t_1,t_2)$ $(t\in\mathbb{R})$ 为 (见 [1, 第283页])

$$\begin{vmatrix} m(t) & \exp(\sqrt{l}t) & \exp(-\sqrt{l}t) \\ m(t_1) & \exp(\sqrt{l}t_1) & \exp(-\sqrt{l}t_1) \\ m(t_2) & \exp(\sqrt{l}t_2) & \exp(-\sqrt{l}t_2) \end{vmatrix}.$$

若 $M(t;m,l,t_1,t_2)\geqslant 0$ $(t_1\leqslant t\leqslant t_2)$, 则称 $m(t)$ 是 $\mathbb{R}$ 上的 l-凸函数.

注 2.1 若 $u\in\mathfrak{F}(0)$, 则 $N(u)(y)<\infty$ 且 $N(u)(y)$ 是 $\mathbb{R}$ 上的 l-凸函数 (见 [1]).

注 2.2 $m(t)$ 是 $\mathbb{R}$ 上的 l-凸函数当且仅当 $\exp(\sqrt{l}t)m(t)$ 是 $\mathbb{R}$ 上关于 $\exp(2\sqrt{l}t)$ 的凸函数. $m(t)$ 是 $\mathbb{R}$ 上的 l-凸函数当且仅当 $\exp(-\sqrt{l}t)m(t)$ 是 $\mathbb{R}$ 上关于 $\exp(-2\sqrt{l}t)$ 的凸函数 (见 [1]).

下面的结论回答了问题 2.1 中所提出的问题.

定理 2.1 设 $u\in\mathfrak{F}(c)$. 若 (1.2) 和 (1.3) 成立, 则对于任意的 $(X,y)\in\mathcal{T}_n(\Omega)$, 有

$$u(X,y)\leqslant c^+ +(\mu(u)\exp(\sqrt{\lambda}y)+\nu(u)\exp(-\sqrt{\lambda}y))f(X). \tag{2.1}$$

注 2.3 本文第 3 部分引理 3.2 证明的第 2 步, 我们将通过反例来说明 (2.1) 中的 c^+ 不能换成 c. 也就是说当 $c\leqslant 0$ 时, (2.1) 即为 (1.4). 定理 1.1 中的边界条件可以用更弱的边界条件来替代.

受文 [1, 定理 6.1, 定理 7.6] 的启发, 作为定理 2.1 的应用, 下面的结论回答了问题 2.2 中提出的问题, 即在更弱的边界条件下, 证明了两个关于次调和函数最大模的极限的存在性, 并给出了具体的值.

定理 2.2 设 $u\in\mathfrak{F}(c)$. 若 (1.3) 成立, 则极限 $A_u(0\leqslant A_u\leqslant+\infty)$ 存在且

$$A_u=(K_u)^+l, \tag{2.2}$$

其中

$$(K_u)^+=\mu(u^+). \tag{2.3}$$

类似地, 若 (1.2) 成立, 则极限 $B_u(0\leqslant B_u\leqslant+\infty)$ 存在且 $B_u=(L_u)^+l$, 其中 $(L_u)^+=\nu(u^+)$.

注 2.4 由 $\mu(u)$ 和 K_u 的定义易知 $\mu(u)\leqslant K_u$. 另由定理 1.2 可知 $\mu(u)\geqslant K_u$. 故若 (1.5) 和 (1.6) 成立, 则必有 $\mu(u)=K_u$.

作为定理 2.2 和本文第 3 部分引理 3.4 的应用, 我们也可以得到下面结论.

定理 2.3 设 $u\in\mathfrak{F}(c)$. 若

$$\liminf_{y\to-\infty}\exp(\sqrt{\lambda}y)M_u(y)\leqslant 0, \tag{2.4}$$

则 $A_u=(I_u)^+l$. 类似地, 若

$$\liminf_{y\to\infty}\exp(-\sqrt{\lambda}y)M_u(y)\leqslant 0, \tag{2.5}$$

则 $B_u=(J_u)^+l$.

在文 [3] 中, Yoshida 考虑的都是无限管状区域中次调和函数正部的相关性质. 受此启发, 本文的最后, 我们补充给出一个其负部的性质.

由注 2.4, 知

$$\mu(u^+)=K_{u^+}=(K_u)^+=(\mu(u))^+.$$

因为

$$N(u)(y)=N(u^+)(y)-N(u^-)(y),$$

同时结合第 3 部分引理 3.4 可得下面的推论.

推论 2.1 设 $u\in\mathfrak{F}(c)$. 若 (1.2) 和 (1.3) 成立且 $\mu(u)\geqslant 0$, 则

$$\lim_{y\to\infty}\exp(-\sqrt{\lambda}y)N(u^-)(y)=0.$$

类似地, 若 (1.2) 和 (1.3) 成立且 $\nu(u)\geqslant 0$, 则

$$\lim_{y\to-\infty}\exp(\sqrt{\lambda}y)N(u^-)(y)=0.$$

3 引 理

引理 3.1 (见 [1, 定理7.2]) 设 $u\in\mathfrak{F}(0)$, 则下面的结论成立:
(i) 极限 $\mu(u)$ 和 $\nu(u)$ 存在 $(-\infty<\mu(u),\nu(u)\leqslant+\infty)$;
(ii) 若 $\nu(u)\leqslant 0$, 则 $N(u)(y)\exp(-\sqrt{\lambda}y)$ 是定义在 $\mathbb{R}$ 上的非减函数;

(iii) 若 $\mu(u)\leqslant 0$, 则 $N(u)(y)\exp(\sqrt{\lambda}y)$ 是定义在 $\mathbb{R}$ 上的非增函数.

引理 3.2 设 $u\in\mathfrak{F}(c)$. 若

$$\mu(u^+)=\nu(u^+)=0, \tag{3.1}$$

则对于任意的 $(X,y)\in\mathcal{T}_n(\Omega)$, 有

$$u(X,y)\leqslant c^+. \tag{3.2}$$

证 为了方便读者阅读, 我们将证明过程分为两步.

第 1 步 假定 $c=0$(见 [1, 定理7.4]).

因为在 $c\neq 0$ 的时候, 我们可以考虑 $u(X,y)-c$. 故首先假定 $c=0$. 由注 2.1 知, $N(u)(y)$ 是 $\mathbb{R}$ 上的 l-凸函数. 设 $c_1>0$, 因为 $u(X,y)$ 在截断管 $\mathcal{T}_n(\Omega;(-c_1,c_1))$ 中有上界, 故 $\nu(u)\leqslant 0$.

由引理 3.1 知, $N(u^+)(y)\exp(-\sqrt{\lambda}y)$ 是定义在 $\mathbb{R}$ 上的非减函数. 由 (3.1) 知, 得 $N(u^+)(y)\equiv 0$. 故对于任意的 $y\in\mathbb{R}$, 知 $u^+(X,y)$ 在 Ω 上几乎处处为零. 从而由 $u^+(X,y)$ 的体积中值定理知, 对于任意的 $(X,y)\in\mathcal{T}_n(\Omega)$, 有 $u(X,y)\leqslant 0$.

第 2 步 证明 (3.2) 中的 c^+ 不能用 c 来替代.

也就是说, 若 $c<0$, 则条件 (3.2) 变成 $u(x)\leqslant c$ 是错误的.

在 $\mathcal{T}_n(\Omega)$ 中构造调和函数 h 如下:

$$\begin{cases}-1<h(X,y)<0, & (X,y)\in\mathcal{T}_n(\Omega),\\ h(X,y)=-1, & (X,y)\in\mathcal{S}_n(\Omega).\end{cases}$$

设 $c_2>0$, 因为截断管 $\mathcal{T}_n(\Omega;(-c_2,c_2))$ 是正则区域, 故边界值问题

$$\begin{cases}\Delta_n v(X,y)=0, & (X,y)\in\mathcal{T}_n(\Omega;(-c_2,c_2)),\\ v(X,y)=-1, & (X,y)\in\partial\mathcal{T}_n(\Omega;(-c_2,c_2))\end{cases}$$

有解, 记为 $h_{c_2}(X,y)$. 它在 $\mathcal{T}_n(\Omega;(-c_2,c_2))$ 内部没有非负的最大值, 但在边界上可以取到 (负的) 最小值. 故对于任意的 $(X,y)\in\mathcal{T}_n(\Omega;(-c_2,c_2))$, 有

$$-1<h_{c_2}(X,y)<0.$$

若 $0<c_3<c_4<\infty$, 则对于任意的 $(X,y)\in\Omega\times\{y\in\mathbb{R};|y|=c_3\}$, 有

$$h_{c_3}(X,y)=-1.$$

而此时, $h_{c_4}(X,y)>-1$. 故对于任意的 $(X,y)\in\mathcal{T}_n(\Omega;(-c_3,c_3))$, 有

$$-1<h_{c_3}(X,y)<h_{c_4}(X,y)<0.$$

因为

$$\lim_{c_2\to\infty}h_{c_2}(X,y)=h(X,y),$$

故 $h(X,y)$ 是 $\mathcal{T}_n(\Omega)$ 中的调和函数. 另由最大模原理知, 对于任意的 $(X,y)\in\mathcal{T}_n(\Omega)$, 有

$$-1<h(X,y)<0.$$

显然, 对于任意的 $(X,y)\in\mathcal{S}_n(\Omega)$, 有 $h(X,y)=-1$. 但是, 对于任意的 $(X,y)\in\mathcal{T}_n(\Omega)$, $h(X,y)$ 不为常数.

令

$$c_5 = \sup_{(X,y)\in\mathcal{T}_n(\Omega)} h(X,y),$$

则 $-1 < c_5 \leqslant 0$.

定义

$$h_0(X,y) = \frac{c_6}{c_5+1}(c_5 - h(X,y)).$$

若 $c_6 < 0$, 则

$$h_0(X,y)|_{\mathcal{S}_n(\Omega)} = c_6 < 0.$$

但

$$\sup_{(X,y)\in\mathcal{T}_n(\Omega)} h_0(X,y) = 0.$$

故条件 (3.2) 中的 c^+ 不能用 c 来替代. 综上, 引理 3.2 证毕.

设 $\delta > 0$. 对于任意的实数 y, 定义 (见 [1, 第295页])

$$E_\infty^u(y;\delta) = \{X \in \Omega : u(X,y) \leqslant -\delta\exp(\sqrt{\lambda}y)\}$$

和

$$\xi_u(\delta) = \limsup_{y\to\infty}\int_{E_\infty^u(y;\delta)} f(X)\mathrm{d}X.$$

引理 3.3 设 $u \in \mathfrak{F}(c)$ 且 $\delta > 0$. 若 (1.3) 成立且存在实数 y^*, 对于任意的 $(X,y) \in \mathcal{T}_n(\Omega;(y^*,\infty))$, 有 $u(X,y) \leqslant 0$, 则

$$u(X,y) \leqslant (\nu(u)\exp(-\sqrt{\lambda}y) - \delta\xi_u(\delta)\exp(\sqrt{\lambda}y))f(X), \tag{3.3}$$

其中 $(X,y) \in \mathcal{T}_n(\Omega)$.

证 因为 δ 是任意给定的正数, $\{y_k\}$ 是无限管状区域中的一个点列且满足

$$\lim_{k\to\infty} y_k = +\infty \qquad 和 \qquad \lim_{k\to\infty}\int_{E_\infty^u(y_k;\delta)} f(X)\mathrm{d}X = \xi_u(\delta).$$

故对于任意的 $y_k > y^*$, 有

$$N(u)(y_k) \leqslant \int_{E_\infty^u(y_k;\delta)} u(X,y_k)f(X)\mathrm{d}X \leqslant -\delta\exp(\sqrt{\lambda}y_k)\int_{E_\infty^u(y_k;\delta)} f(X)\mathrm{d}X$$

和

$$\mu(u) \leqslant -\delta\xi_u(\delta).$$

再由定理 1.2, 可知 (3.3) 成立.

引理 3.4 设 $u \in \mathfrak{F}(c)$. 若 (2.4) 成立, 则 $K_u > -\infty$ 且 $I_u = K_u$. 类似地, 若 (2.5) 成立, 则 $L_u > -\infty$ 且 $J_u = L_u$.

证 显然

$$I_u \geqslant K_u. \tag{3.4}$$

假定 $K_u<+\infty$. 下面将证明 $I_u=K_u$. 由定理 1.2, 则对于任意的 $(X,y)\in\mathcal{T}_n(\Omega)$, 有

$$u(X,y)\leqslant\mu(u)\exp(\sqrt{\lambda}y)f(X).$$

故

$$\mu(u)\geqslant I_u. \tag{3.5}$$

分别由引理 3.1 和注 2.4 可得 $\mu(u)>-\infty$ 和 $\mu(u)=K_u$. 再由 (3.4) 和 (3.5) 可知, 引理 3.4 的结论的前半部分成立. 同理, 可以证明其后半部分, 故略去.

设 y_1 和 y_2 是实数且满足 $y_1<y_2$, ψ 是定义在截断管边界 $\partial\mathcal{T}_n(\Omega;(y_1,y_2))$ 上的连续函数, 下面我们将截断管 $\mathcal{T}_n(\Omega;(y_1,y_2))$ 中与 ψ 相关的 Dirichlet 问题的解记为 $H_\psi((X,y);\mathcal{T}_n(\Omega;(y_1,y_2)))$.

引理 3.5 设 $u\in\mathfrak{F}(c)$, 则

(i) 条件 (1.2) 和 (1.3) 与条件 (1.5) 和 (1.6) 等价;

(ii) 若 (1.2) 和 (1.3) 成立, 则 $A_u\leqslant\mu(u^+)$ 且 $B_u\leqslant\nu(u^+)$.

证 证明 (i). 显然, 由 (1.5) 和 (1.6) 可以得到 (1.2) 和 (1.3). 下面, 我们将证明由 (1.2) 和 (1.3) 可以得到 (1.5) 和 (1.6).

设任意的 $(X,y)\in\mathcal{T}_n(\Omega)$. 取任意的实数 y_1 和 y_2 满足 $-\infty<y_1+1<y<y_2-1<\infty$. 若 $\psi(X,y)$ 是定义在 $\mathcal{S}_n(\Omega;(y_1,y_2))$ 上的边界函数且满足

$$\psi(X,y)=\begin{cases}u(X,y_i), & \Omega\times\{y_i\},\ i=1,2,\\ 0, & \mathcal{S}_n(\Omega;(y_1,y_2)),\end{cases}$$

则

$$\begin{aligned}u(X,y)&\lesssim H_\delta((X,y);\mathcal{T}_n(\Omega;(y_1,y_2)))\\&=\int_\Omega\frac{G_{\mathcal{T}_n(\Omega;(y_1,y_2))}((X,y),(X_1,y_1))}{\partial y}u^+(X_1,y_1)\mathrm{d}X\\&\quad-\int_\Omega\frac{G_{\mathcal{T}_n(\Omega;(y_1,y_2))}((X,y),(X_2,y_2))}{\partial y}u^+(X_2,y_2)\mathrm{d}X,\end{aligned}$$

其中 $G_{\mathcal{T}_n(\Omega;(y_1,y_2))}((X,y),\cdot)$ 是截断管 $\mathcal{T}_n(\Omega;(y_1,y_2))$ 中的 Green 函数.

因为

$$\frac{\partial(G_{\mathcal{T}_n(\Omega;(y_1,y_2))}((X,y),(X_1,y_1)))}{\partial y}\lesssim c_7f(X)f(X_1)$$

和

$$\frac{\partial(G_{\mathcal{T}_n(\Omega;(y_1,y_2))}((X,y),(X_2,y_2)))}{\partial y}\gtrsim -c_8f(X)f(X_2),$$

其中 c_7 和 c_8 为正常数 (锥中也有类似的不等式, 请读者详见文 [22, 第124页]), 故

$$\begin{aligned}u(X,y)\leqslant{}&(c_9\exp(\sqrt{\lambda}y_1)N(u^+)(y_1)\exp(-\sqrt{\lambda}y)\\&+c_{10}\exp(-\sqrt{\lambda}y_2)N(u^+)(y_2)\exp(\sqrt{\lambda}y))f(X),\end{aligned}\tag{3.6}$$

其中 c_9 和 c_{10} 为正常数.

在 (3.6) 中若令 $y_1 \to -\infty$ 且 $y_2 \to \infty$, 得

$$M_u(y) \leqslant (c_{11}\nu(u^+)\exp(-\sqrt{\lambda}y) + c_{12}\mu(u^+)\exp(\sqrt{\lambda}y))\max_{X\in\Omega} f(X). \tag{3.7}$$

故由 (1.2) 和 (1.3) 不仅得到 (1.5) 和 (1.6). 同时可以得到 (ii) 成立.

4 定理的证明

定理 2.1 的证明 定义

$$U(X,y) = u(X,y) - (\mu(u)\exp(\sqrt{\lambda}y) + \nu(u)\exp(-\sqrt{\lambda}y))f(X),$$

则 $U(X,y) \in \mathfrak{F}(c)$ 且 $\mu(U^+) = \nu(U^+) = 0$.

对 $U(X,y)$ 应用引理 3.2 即可完成对定理 2.1 的证明.

定理 2.2 的证明 该定理的证明受到了文 [1, 定理7.2] 的启发. 我们只证明定理 2.2 的前半部分. 因为定理 2.2 后半部分的证明类似, 故略去.

设

$$\tau = \liminf_{y\to\infty} \exp(-\sqrt{\lambda}y)M_u(y).$$

因为

$$N(u)(y) \leqslant M_u(y)\int_\Omega f(X)\mathrm{d}X,$$

由引理 3.1, 得

$$\mu(u) > -\infty, \tag{4.1}$$

故 $\tau > -\infty$.

下面, 我们分两种情形.

情形 1 $\tau = +\infty$.

在这种情形下, A_u 存在且 $A_u = +\infty$. 因为对于任意的实数 y, 都有

$$\exp(-\sqrt{\lambda}y)M_{u^+}(y) \leqslant l\exp(-\sqrt{\lambda}y)S_{u^+}(y). \tag{4.2}$$

故 $K_u = +\infty$. 即 (2.2) 成立.

情形 2 $\tau < +\infty$.

由定理 1.2 可知 $K_u < +\infty$. 同时, 由 (4.1), 得 $K_u > -\infty$.

子情形 2.1 $0 \leqslant K_u < +\infty$.

对于任意的 $\varepsilon > 0$, 存在实数 y_ε, 对于任意的 $(X,y) \in \mathcal{T}_n(\Omega;(y_\varepsilon,+\infty))$, 有

$$u(X,y) \leqslant (K_u+\varepsilon)\exp(\sqrt{\lambda}y)f(X).$$

故

$$\limsup_{y\to\infty} \exp(-\sqrt{\lambda}y)M_u(y) \leqslant K_u l. \tag{4.3}$$

假定 $\tau < K_u l$, 则存在正数 δ_1 和集合 $E_u \subset \Omega$, 使得

$$\int_{E_u} f(X)\mathrm{d}X > 0$$

且

$$K_u f(X) - \tau \geqslant 2\delta_1, \tag{4.4}$$

其中 $X \in E_u$.

定义 v_1 如下

$$v_1(X, y) = u(X, y) - (K_u + \varepsilon)\exp(\sqrt{\lambda} y) f(X), \tag{4.5}$$

其中 $(X, y) \in \mathcal{T}_n(\Omega)$.

对 v_1 应用引理 3.3, 对于任意的 $(X, y) \in \mathcal{T}_n(\Omega)$, 有

$$u(X, y) \leqslant [\{K_u + \varepsilon - \delta_1 \xi_{v_1}(\delta_1)\}\exp(\sqrt{\lambda} y) + \nu(v_1)\exp(-\sqrt{\lambda} y)] f(X).$$

故

$$K_u \leqslant K_u - \delta_1 \xi_{v_1}(\delta_1).$$

若能证明

$$\xi_{v_1}(\delta_1) > 0, \tag{4.6}$$

则可以得到一个矛盾.

下面来证明 (4.6), 取无限管状区域中的点列 $\{y_k\}$, 使得 $\lim\limits_{k\to\infty} y_k = +\infty$ 且

$$\exp(-\sqrt{\lambda} y_k) M_u(y_k) \leqslant \tau + \delta_1, \quad k = 1, 2, 3, \cdots.$$

由 (4.4) 和 (4.5), 对于任意的 $X \in E_u$, 可得

$$\exp(-\sqrt{\lambda} y_k) v_1(X, y_k) \leqslant \exp(-\sqrt{\lambda} y_k) u(X, y_k) - K_u f(X) \leqslant -\delta_1.$$

故

$$E_u \subset E_\infty^{v_1}(y_k; \delta_1), \quad k = 1, 2, 3, \cdots.$$

故

$$\xi_{v_1}(\delta_1) \geqslant \int_{E_u} f(X)\mathrm{d}X > 0.$$

由 (4.3), 我们证明了极限 A_u 的存在性和 (2.2).

子情形 2.2 $-\infty \leqslant K_u < 0$.

取充分小的 $\varepsilon > 0$, 使得 $K_u + \varepsilon < 0$, 则存在实数 y_ε, 对于任意的 $(X, y) \in \mathcal{T}_n(\Omega; (y_\varepsilon, +\infty))$, 有

$$u(X, y) \leqslant (K_u + \varepsilon)\exp(\sqrt{\lambda} y) f(X).$$

故

$$\limsup_{y\to\infty} \exp(-\sqrt{\lambda} y) M_u(y) \leqslant 0. \tag{4.7}$$

假定 $\tau < 0$. 存在无限管状区域中点列 $\{y_k\}$ 趋向于 ∞ 和一个正数 δ_2, 使得

$$\exp(-\sqrt{\lambda} y_k) M_u(y_k) \leqslant -2\delta_2, \quad k = 1, 2, 3, \cdots.$$

定义 v_2 如下

$$v_2(X, y) = u(X, y) - (K_u + \varepsilon)\exp(\sqrt{\lambda} y) f(X),$$

其中 $(X,y)\in\mathcal{T}_n(\Omega)$.

同样对 v_2 也应用引理 3.3, 对于任意的 $(X,y)\in\mathcal{T}_n(\Omega)$, 有

$$u(X,y)\leqslant[\{K_u+\varepsilon-\delta_2\xi_{v_2}(\delta_2)\}\exp(\sqrt{\lambda}y)+\nu(v_2)\exp(-\sqrt{\lambda}y)]f(X).$$

故

$$K_u\leqslant K_u-\delta_2\xi_{v_2}(\delta_2).$$

若能证明

$$\xi_{v_2}(\delta_2)>0, \tag{4.8}$$

则也可得到一个矛盾.

下面证明 (4.8). 定义

$$F_u=\{X\in\Omega;-K_uf(X)\leqslant\delta_2\}.$$

显然

$$\int_{F_u}f(X)\mathrm{d}X>0.$$

对于任意的 $X\in F_u$, 得

$$\exp(-\sqrt{\lambda}y_k)v_1(X,y_k)\leqslant\exp(-\sqrt{\lambda}y_k)u(X,y_k)-K_uf(X)\leqslant-\delta_2.$$

故

$$F_u\subset E_\infty^{v_2}(y_k;\delta_2),\quad k=1,2,3,\cdots.$$

从而, 得

$$\xi_{v_2}(\delta_2)\geqslant\int_{F_u}f(X)\mathrm{d}X>0.$$

故 $\tau\geqslant0$. 再由 (4.7), 可证明极限 A_u 的存在性和

$$A_u=0=(K_u)^+l.$$

最后, 我们将证明 (2.3) 成立.

若 $\mu(u^+)=+\infty$, 则 $A_{u^+}=+\infty$. 再由 (4.2), 得 $K_{u^+}=+\infty$. 因为

$$K_{u^+}=(K_u)^+, \tag{4.9}$$

可知 (2.3) 成立.

假定 $\mu(u^+)<+\infty$. 由引理 3.5(ii) 可得 $A_u<+\infty$. 再由注 2.4 可得 $K_{u^+}=\mu(u^+)$. 最后, 由 (4.9) 可知 (2.3) 也成立.

定理 2.2 证毕.

致谢 作者对审稿人表示衷心的感谢.

参 考 文 献

[1] Yoshida H. Nevanlinna norm of a subharmonic function on a cone or on a cylinder [J]. *Proc London Math Soc*, 1987, 54(3):267–299.

[2] Ronkin L I. Functions of completely regular growth [M]//Mathematics and its Applications, Soviet Ser, Vol 81, Dordrecht-Boston: Kluwer Academic Publ, 1990.

[3] Yoshida H. Harmonic majorization of a subharmonic function on a cone or on a cylinder [J]. *Pacific J Math,* 1991, 148(2):369–395.

[4] Rosenblum G, Solomyak M, Shubin M. Spectral theory of differential operators [M]. Moscow: VINITI, 1989.

[5] Gilbarg D, Trudinger N S. Elliptic partial differential equations of second order [M]. Berlin: Springer-Verlag, 1977.

[6] Horgan C O, Knowles J K. Recent developments concerning Saint-Venant's principle [J]. *Adv in Appl Mech,* 1983, 23(1):179–269.

[7] Horgan C O. Recent developments concerning Saint-Venant's principle: an update [J]. *AMR,* 1989, 42(11):295–303.

[8] Sánchez-Palencia E. Remarks on Saint Venant's principle and application to the matching problem, nonlinear partial differential equations and their applications [M]//Collège de France Seminar, Vol IX (Paris, 1985–1986), 362–375, Pitman Res Notes Math Ser, vol 181, Harlow: Longman Sci Tech, 1988.

[9] Horgan C O. Decay estimates for boundary-value problems in linear and nonlinear continuum mechanics [M]//Mathematical problems in elasticity, 47–89, Ser Adv Math Appl Sci, 38, River Edge, NJ: World Sci Publ, 1996.

[10] Ames K A, Payne L E. Decay estimates in steady pipe flow [J]. *SIAM J Math Anal,* 1989, 20(4):789–815.

[11] Edelstein W S. A spatial decay estimate for the heat equation [J]. *Z Angew Math Phys,* 1969, 20(3):900–905.

[12] Phragmén E, Lindelöf E. Sur une extension d'un principe classique de l'analyse et sur quelques propriétés des fonctions monogènes dans le voisinage d'un point singulier [J]. *Acta Math,* 1908, 31(1):381–406.

[13] Horgan C O, Payne L E. Phragmén-Lindelöf type results for harmonic functions with nonlinear boundary conditions [J]. *Arch Rational Mech Anal,* 1993, 122(2):123–144.

[14] Zhang Y H. Phragmén-Lindelöf theorems of subharmonic functions and their applications in the half space [J]. *Sci Sin Math,* 2015, 45(12):1931–1938.

[15] Zhang Y H, Kou K, Deng G T. Integral representation and asymptotic behavior of harmonic functions in half space [J]. *J Differential Equations,* 2014, 257(8):2753–2764.

[16] Zhang Y H, Deng G T, Kou K. Asymptotic behavior of fractional Laplacians in the half space [J]. *Appl Math Comput,* 2015, 254(1):125–132.

[17] Zhang Y H, Deng G T, Kou K. On the lower bound for a class of harmonic functions in the half space [J]. *Acta Math Sci Ser B Engl Ed,* 2012, 32(4):1487–1494.

[18] Zhang Y H. The Phragemén-Lindelöf principle of harmonic functions and conditions for Nevanlinna class in the half space [J]. *Math Methods Appl Sci,* 2019, 42(12):4360–4384.

[19] 张艳慧, 邓冠铁. 半空间中一类次调和函数的增长性质 [J]. 数学学报 (中文版), 2008, 51(2): 319–326.

[20] Yoshida H. A type of uniqueness for the Dirichlet problem on a half-space with continuous data [J]. *Pacific J Math*, 1996, 172(2):591–609.

[21] Brawn F T. Mean values of strongly subharmonic functions on half-spaces [J]. *J London Math Soc*, 1983, 27(2):257–266.

[22] Azarin V S. Generalization of a theorem of Hayman's on a subharmonic function in an n-dimensional cone [J]. *Mat Sb* (*NS*), 1965, 108(66):248–264.

[23] Miyamoto I, Yoshida H. On a-minimally thin sets at infinity in a cone [J]. *Hiroshima Math J,* 2007, 37(1):61–80.

[24] Wanby G. Convexity of means and growth of certain subharmonic functions in an n-dimensional cone [J]. *Ark Mat,* 1983, 21(1):29–43.

[25] Bandle C, Essén M. On positive solutions of Emden equations in cone-like domains [J]. *Arch Rational Mech Anal,* 1990, 112(4):319–338.

[26] Essén M, Lewis J L. The generalized Ahlfors-Heins theorem in certain d-dimensional cones [J]. *Math Scand,* 1973, 33(2):113–129.

[27] Yanagishita M. On the behavior at infinity for non-negative superharmonic functions in a cone [J]. *Adv Stud Pure Math,* 2006, 44(1):403–413.

[28] Yang X. Subharmonic functions of completely regular growth in a cone [J]. *Ark Mat,* 1994, 32(2):493–503.

Boundary Behaviors of Subharmonic Functions in an Infinite Tube Domain

QIAO Lei[1]

[1]School of Mathematics and Information Science, Henan University of Economics and Law, Zhengzhou 450046, China. E-mail: leiquiao@163.com

Abstract In this paper, the author mainly studies the boundary properties of subharmonic functions in a tube domain. By proving a new type of Phragmén-Lindelöf principle, the author not only prove the existence of the limits with respect to the maximum modulus of subharmonic functions in an infinite tube domain but also obtain the specific expressions of them.

Keywords Tube domain, Subharmonic function, Boundary behavior

2000 MR Subject Classification 31B05, 31B10, 31B25, 35J05, 35J10, 35J25

The English translation of this paper will be published in

Chinese Journal of Contemporary Mathematics, Vol. 42 No. 2, 2021

by ALLERTON PRESS, INC., USA