数 学 年 刊 A 辑
2021, 42(2):171–178
DOI: 10.16205/j.cnki.cama.2021.0014

涉及分担超平面的正规定则*

刘晓俊[1] 庞学诚[2] 杨锦华[3]

提要 在本文中, 作者继续讨论涉及分担超平面的全纯曲线的正规性, 得到了如下结果: 设 $\mathcal{F}$ 是一族从区域 $D \subset \mathbb{C}$ 到 $\mathbb{P}^N(\mathbb{C})$ 上的全纯曲线, $H_j = \{x \in \mathbb{P}^N(\mathbb{C}) : \langle \boldsymbol{x}, \alpha_j \rangle = 0\}$ 是 $\mathbb{P}^N(\mathbb{C})$ 中处于一般位置的超平面, 这里 $\alpha_j = (a_{j0}, \cdots, a_{jN})^{\mathrm{T}}$ 且 $a_{j0} \neq 0$, $j = 1, 2, \cdots, 2N+1$. 若对于任意的 $f \in \mathcal{F}$, 满足下列两个条件:

(i) 如果 $f(z) \in H_j$, 那么 $\nabla f \in H_j$, 这里 $j = 1, 2, \cdots, 2N+1$;

(ii) 如果 $f(z) \in \bigcup\limits_{j=1}^{2N+1} H_j$, 那么 $\frac{|\langle f(z), H_0 \rangle|}{\|f\| \|H_0\|} \geqslant \delta$, 这里 $0 < \delta < 1$ 是一个常数, 而 $H_0 = \{w_0 = 0\}$,

则 $\mathcal{F}$ 在 D 上正规.

关键词 正规族, 全纯映射, 导曲线, 分担超平面
MR (2000) 主题分类 32A19, 32H30, 30D45, 32H02
中图法分类 O174.56
文献标志码 A
文章编号 1000-8314(2021)02-0171-08

1 引 言

首先, 我们回顾全纯曲线族 $\mathcal{F}$ 在区域 $D \subset \mathbb{C}$ 上正规的定义, 是指对任意序列 $\{f_n\} \subset \mathcal{F}$, 存在子列 $\{f_{n_k}\} \subset \{f_n\}$, 使得 f_{n_k} 在 D 上按照富比尼 —— 施图迪 (Fubini-Study) 度量内闭一致收敛于全纯曲线 f.

在文 [1] 中, 杨刘、方彩云和庞学诚考虑了涉及分担超平面的全纯曲线的正规定则, 得到了如下定理.

定理 1.1 设 $\mathcal{F} \subset \mathcal{H}(D; \mathbb{P}^N(\mathbb{C}))$ 是一族从区域 $D \subset \mathbb{C}$ 到 $\mathbb{P}^N(\mathbb{C})$ 的全纯曲线, H_1, H_2, $\cdots$, H_q 是 $\mathbb{P}^N(\mathbb{C})$ 中 $q (\geqslant 2N+1)$ 个处于一般位置的超平面. 若对于任意的 $f, g \in \mathcal{F}$, f 与 g 在 D 上分担 H_j, 这里 $j = 1, 2, \cdots, q$, 则 $\mathcal{F}$ 在 D 上正规.

随后, 在文 [2] 中, 叶亚盛、庞学诚与杨刘又考虑了全纯曲线 f 与它的导曲线 ∇f(见定义 2.3) 分担超平面的情形, 证明了如下的定理.

定理 1.2 设 $\mathcal{F}$ 是一族从区域 $D \subset \mathbb{C}$ 映到 $\mathbb{P}^N(\mathbb{C})$ 的全纯曲线, H_1, H_2, $\cdots$, H_{2N+1} 是 $\mathbb{P}^N(\mathbb{C})$ 中处于一般位置的超平面, δ 是一个实数, 满足 $0 < \delta < 1$. 若对于任意的 $f \in \mathcal{F}$, 满足下列条件:

(i) 对所有的 $j = 1, 2, \cdots, 2N+1$, $f(z)$ 与 $\nabla f(z)$ 在 D 上分担 H_j;

本文 2019 年 10 月 15 日收到, 2020 年 10 月 30 日收到修改稿.
[1]上海理工大学理学院, 上海 200093. E-mail: xiaojunliu2007@hotmail.com
[2]华东师范大学数学科学学院, 上海 200241. E-mail: xcpang@math.ecnu.edu.cn
[3]新疆师范大学数学科学学院, 乌鲁木齐 830017. E-mail: 1511337295@qq.com
*本文受到国家自然科学基金 (No. 11871216, No. 12061077, No. 11961068) 的资助.

(ii) 若 $f(z)\in\bigcup\limits_{j=1}^{2N+1}H_j$, 则 $\frac{|\langle f(z),H_0\rangle|}{\|f\|\|H_0\|}\geqslant\delta$, 这里 $H_0=\{w_0=0\}$.

则 $\mathcal{F}$ 在 D 上正规.

但可惜的是, 根据在文 [2] 中分担超平面 H 的定义, 其不仅要求 $f^{-1}(H)=\nabla f^{-1}(H)$, 而且更要求在满足 $f^{-1}(H)=\nabla f^{-1}(H)$ 的那些点上有 $f(z)=\nabla f(z)$, 自然地可以提出如下的问题: 能否将后面那个条件在满足 $f^{-1}(H)=\nabla f^{-1}(H)$ 的点上有 $f(z)=\nabla f(z)$ 去掉?

在本文中, 受到文 [3] 中主要定理的证明过程所用到的方法的启发, 我们继续研究上述问题, 得到了在对超平面的首项系数做一定限制的条件下可以去掉该条件.

定理 1.3 设 $\mathcal{F}$ 是一族从区域 $D\subset\mathbb{C}$ 到 $\mathbb{P}^N(\mathbb{C})$ 上的全纯曲线, $H_j=\{x\in\mathbb{P}^N(\mathbb{C}):\langle\boldsymbol{x},\alpha_j\rangle=0\}$ 是 $\mathbb{P}^N(\mathbb{C})$ 中处于一般位置的超平面, 这里 $\alpha_j=(a_{j0},\cdots,a_{jN})^{\mathrm{T}}$ 且 $a_{j0}\neq0$, $j=1,2,\cdots,2N+1$. 若对于任意的 $f\in\mathcal{F}$, 满足下列两个条件:

(i) 如果 $f(z)\in H_j$, 那么 $\nabla f\in H_j$, 这里 $j=1,2,\cdots,2N+1$;

(ii) 如果 $f(z)\in\bigcup\limits_{j=1}^{2N+1}H_j$, 那么 $\frac{|\langle f(z),H_0\rangle|}{\|f\|\|H_0\|}\geqslant\delta$, 这里 $0<\delta<1$ 是一个常数, 而 $H_0=\{w_0=0\}$.

则 $\mathcal{F}$ 在 D 上正规.

注 1.1 由定理 1.2 的条件 (i) 和分担超平面的定义可得, 对任意点 $z_0\in D$, 若满足 $f(z_0)\in H_j$, 则有 $\nabla f(z_0)\in H_j$ 和 $\nabla f(z_0)=f(z_0)$, 这里 $j\in\{1,2,\cdots,2N+1\}$. 设 $\boldsymbol{f}=(f_0,f_1,\cdots,f_N)$ 是 f 在 z_0 的某邻域 U 上的既约表示, 再由定理 1.2 的条件 (ii), 我们有 $f_0(z_0)\neq0$. 因为 $\nabla f(z_0)=f(z_0)$, 所以

$$\nabla\boldsymbol{f}(z_0)=f_0(z_0)\boldsymbol{f}(z_0),$$

这里

$$\nabla\boldsymbol{f}(z)=(f_0^2,W(f_0,f_1),\cdots,W(f_0,f_N))(z)$$

是 ∇f(见定义 2.3) 在 U 上的既约表示. 这样, 对每个 $k\neq j$, $k=1,2,\cdots,2N+1$,

$$\frac{|\langle\nabla f(z_0),H_k\rangle|}{|f_0^2(z_0)|}=\frac{|\langle\nabla\boldsymbol{f}(z_0),H_k\rangle|}{|f_0^2(z_0)|}=\frac{|\langle f(z_0),H_k\rangle|}{|f_0(z_0)|}\leqslant\frac{\|f(z_0)\|\|H_k\|}{|f_0(z_0)|}\leqslant\frac{1}{\delta},$$

而对于 $k=j$,

$$\langle\nabla f(z_0),H_j\rangle=0.$$

因为 H_j $(j=1,2,\cdots,2N+1)$ 处于一般位置, 所以存在某个 $M>0$, 使得对于每个 $i=1,2,\cdots,N$,

$$\Big|\Big(\frac{f_i}{f_0}\Big)'\Big|(z_0)=\Big|\frac{W(f_0,f_i)}{f_0^2}\Big|(z_0)\leqslant M.$$

这就意味着对于所有的 $i=1,2,\cdots,N$, $\big(\frac{f_i}{f_0}\big)'$ 在那些满足 $f(z_0)\in H_j$ 的点上一致有界. 因此, 我们的主要定理就是在超平面 H_j $(j=1,2,\cdots,2N+1)$ 的首项系数非零的特殊情况下去掉了该额外条件.

在我们给出主要定理的证明之前, 先介绍一些符号. 在本文中, D 表示 $\mathbb{C}$ 中的区域. 对于 $z_0\in\mathbb{C}$ 和 $r>0$, 记 $\Delta(z_0,r)=\{z:|z-z_0|<r\}$ 以及 $\Delta'(z_0,r)=\{z:0<|z-z_0|<r\}$.

单位圆盘记作 Δ, 而 $\mathbb{C}^* = \mathbb{C}\setminus\{0\}$. 我们记 $f_n(z) \Longrightarrow f(z)$ 在 D 上表示序列 $\{f_n\}$ 按照 $\mathbb{P}^N(\mathbb{C})$ 上的富比尼 —— 施图迪 (Fubini-Study) 度量在 D 上内闭一致收敛于 f. 对于定义在 D 内的全纯映射 $f(z)$, f 在点 z 的球面导数记作 $f^\sharp(z) = \frac{|f\wedge f'|}{\|f\|^2}$.

在文中我们需要经常对于映射序列 $\{f_n\}_1^\infty$ 选取适当的子列, 即使在一个证明中有时也会用到. 因此, 为了避免多个下标所带来的麻烦, 我们仍旧将子列 $\{f_{n_k}\}$ 记作 $\{f_n\}$, 并将这一过程称作取子列, 然后重新标记其下标或简称为重新标记.

文章的结构如下: 在第 2 节中, 我们给出一些定义与符号; 在第 3 节中, 我们给出一些初步结果; 最后, 在第 4 节中, 我们给出定理 1.3 的证明.

2　定义与符号

2.1　复射影空间与超平面

首先, 我们回顾一些关于 $\mathbb{P}^N(\mathbb{C})$ 的定义与符号.

$\mathbb{P}^N(\mathbb{C}) = \mathbb{C}^{N+1}\backslash\{0\}/\sim$ 是 N 维复射影空间, 且对任意的 $\boldsymbol{x} = (x_0, x_1, \cdots, x_N)$, $\boldsymbol{y} = (y_0, y_1, \cdots, y_N) \in \mathbb{C}^{N+1}\backslash\{0\}$, $\boldsymbol{x} \sim \boldsymbol{y}$ 当且仅当存在某个 $\lambda \in \mathbb{C}^*$, 使得 $(x_0, x_1, \cdots, x_N) = \lambda(y_0, y_1, \cdots, y_N)$. $(x_0, x_1, \cdots, x_N)$ 的等价类记作 $[x_0 : x_1 : \cdots : x_N]$, 则 $\mathbb{P}^N(\mathbb{C}) = \{x = [x_0 : x_1 : \cdots : x_N] : \boldsymbol{x} = (x_0, x_1, \cdots, x_N) \in \mathbb{C}^{N+1}\backslash\{0\}\}$.

设 H_1, H_2, $\cdots$, H_q 是 $\mathbb{P}^N(\mathbb{C})$ 中的超平面, 由如下形式给出:

$$H_\ell = \{x \in \mathbb{P}^N(\mathbb{C}) : \langle \boldsymbol{x}, \alpha_\ell\rangle = a_{\ell 0}x_0 + a_{\ell 1}x_1 + \cdots + a_{\ell N}x_N = 0\},$$

其中 $\alpha_\ell = (a_{\ell 0}, a_{\ell 1}, \cdots, a_{\ell N})^{\mathrm{T}}$ 为非零法向量, 这里 $\ell = 1, 2, \cdots, q$.

定义 2.1　若对任意的单射 $\phi : \{0, 1, \cdots, N\} \longrightarrow \{1, 2, \cdots, q\}$, 向量组 $\alpha_{\phi(0)}$, $\cdots$, $\alpha_{\phi(N)}$ 都线性无关, 则称超平面 H_1, H_2, $\cdots$, H_q 处于一般位置.

2.2　全纯曲线

其次, 设 $f : D \longrightarrow \mathbb{P}^N(\mathbb{C})$ 是全纯曲线, U 是 D 的开子集. 任意在 U 内满足 $\mathbb{P}(\boldsymbol{f}(z)) \equiv f(z)$ 的全纯映射 $\boldsymbol{f} : U \longrightarrow \mathbb{C}^{N+1}$ 称作 f 在 U 上的既约表示, 这里 $\mathbb{P} : \mathbb{C}^{N+1}\backslash\{0\} \longrightarrow \mathbb{P}^N(\mathbb{C})$ 是典型的商映射.

定义 2.2　对 D 中任意开集 U, 若 $\boldsymbol{f} = (f_0, f_1, \cdots, f_N)$ 是 f 的一个既约表示, 则 f_0, f_1, $\cdots$, f_N 在 U 上全纯且没有公共零点.

设 $H = \{x \in \mathbb{P}^N(\mathbb{C}) : \langle \boldsymbol{x}, \alpha\rangle = 0\}$ 是一个超平面, 记 $\|H\| = \|\alpha\| = \max\limits_{0\leqslant i\leqslant N} |a_i|$. 在本文中, 我们仅考虑满足 $\|H\| = 1$ 的标准化超平面.

接着, 对全纯曲线 f 的任何一个既约表示 $\boldsymbol{f}$, 我们可定义全纯函数

$$\langle f(z), H\rangle = \langle \boldsymbol{f}(z), \alpha\rangle = \sum_{i=0}^{N} a_i f_i(z),$$

再置

$$\|f\| = \|\boldsymbol{f}(z)\| = \Big\{\sum_{i=0}^{N} |f_i(z)|^2\Big\}^{\frac{1}{2}}.$$

2.3 导曲线

最后, 按照文 [2] 中关于导曲线的定义, 我们有如下定义.

定义 2.3 设 f 是从 D 映到 $\mathbb{P}^N(\mathbb{C})$ 的全纯曲线, $f=(f_0, f_1, \cdots, f_N)$ 是 f 在 D 上的任意一个满足 $f_\mu(z)\not\equiv 0$ (这里 $\mu \in \{0, 1, \cdots, N\}$) 的既约表示, 则

$$\nabla_\mu f(z) = [W(f_\mu, f_0)/d : \cdots : W(f_\mu, f_{\mu-1})/d : f_\mu^2/d : W(f_\mu, f_{\mu+1})/d : \cdots : W(f_\mu, f_N)/d]$$

称做 f 关于第 μ 个分量的全纯导曲线, 这里 $d(z)$ 是全纯函数, 使得

$$f_\mu^2/d \quad 和 \quad W(f_\mu, f_i)/d, \quad i=0,1,\cdots,N;\ i\neq\mu$$

没有公共零点.

注 2.1 为简单起见, 我们将 $\nabla_0 f$ 记作 ∇f, 并且显然地有 $\nabla_\mu f$ 的定义与 f 的既约表示的选取无关.

3 主要引理

众所周知, Zalcman 正规原理 (见 [4–5]) 和 Pang-Zalcman 引理 (见 [6–7]) 在正规族理论中起着核心作用. 在我们给出主要定理的证明之前, 我们需要如下版本的关于从 $\Omega \subseteq \mathbb{C}^m$ 到 $\mathbb{P}^N(\mathbb{C})$ 的全纯映射的 Zalcman 引理.

引理 3.1 (见 [1, 3]) 设 $\mathcal{F}$ 是一族从 $\mathbb{C}^m$ 中的双曲区域 Ω 映到 $\mathbb{P}^N(\mathbb{C})$ 的全纯映射. $\mathcal{F}$ 在 Ω 上不正规当且仅当存在子列 $\{f_n\} \subset \mathcal{F}$, 点列 $\{z_n\} \subset \Omega$ 满足 $z_n \to z_0 \in \Omega$, 正数列 $\{\rho_n\}$ 满足 $\rho_n > 0$ 和 $\rho_n \to 0$, 使得

$$g_n(\xi) := f_n(z_n + \rho_n \xi)$$

在 $\mathbb{C}^m$ 上内闭一致收敛于从 $\mathbb{C}^m$ 映到 $\mathbb{P}^N(\mathbb{C})$ 的非常值全纯映射 g.

在我们主要定理的证明过程中, 我们还需要如下的 Hurwitz 引理.

引理 3.2 设 $\{f_n(z)\}$ 是定义在区域 $D \subset \mathbb{C}$ 内的一列全纯函数, $a \in \mathbb{C}$ 是任意一个复数, 且设 $f_n(z)$ 在 D 的任意一个紧子集上一致收敛于非常值的全纯函数 $f(z)$. 若存在点 $z_0 \in D$, 使得 $f(z_0) = a$, 则对于每一个充分大的 n, 方程 $f_n(z) = a$ 在 D 内有根. 此外, 存在 z_0 的某邻域 U, 使得 $f(z) - a$ 在 U 内根的总数与 $f_n(z) - a$ 在 U 内根的总数相同 (计重数).

证 因为 $f(z)$ 非常值且 $f(z_0) = a$, 所以由 $f(z) - a$ 的零点孤立性, 我们有存在 $\delta_0 > 0$, 使得对于任意的 δ, $0 < \delta < \delta_0$ 和对所有的 z, $0 < |z - z_0| \leqslant \delta$, $f(z) - a \neq 0$. 令 $m = \min\limits_{|z-z_0|=\delta} |f(z) - a| > 0$, 由引理的条件得 $f_n(z)$ 在 $\{z :\ |z - z_0| = \delta\}$ 上一致收敛于

$f(z)$, 故存在某个正整数 N, 使得对于每个 $n > N$ 和所有的 z, $|z - z_0| = \delta$,

$$|f_n(z) - f(z)| < m.$$

这样, 对于上述 z,

$$|f_n(z) - f(z)| < |f(z) - a|.$$

由 Rouché定理 (见 [9, p.153]), $f(z) - a$ 在 $U = \{z : |z - z_0| < \delta\}$ 内的零点总数与

$$f_n(z) - f(z) + f(z) - a = f_n(z) - a$$

在 U 内的零点总数相同 (计重数). 引理得证.

注 3.1 显然, 由引理 3.2 的证明过程得, 当 $n \to \infty$ 时, $f_n(z) - a$ 在 U 内的所有零点都会收敛到 z_0.

由 Nevanlinna 理论中关于线性退化的第二基本定理 (见 [10, p.141]) 可得如下结论.

引理 3.3 设 f: $\mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{P}^N(\mathbb{C})$ 是全纯曲线, $H_1, \cdots, H_q$ 是 $\mathbb{P}^N(\mathbb{C})$ 中 $q(\geqslant 2N+1)$ 个处于一般位置的超平面. 若对每个 $j = 1, \cdots, q$, 要么 $f(\mathbb{C})$ 落在 H_j 内, 要么 $f(\mathbb{C})$ 不取 H_j, 则 f 是常值.

4 定理 1.3 的证明

倘若不然, 不妨假设 $\mathcal{F}$ 在 D 上不正规, 那么由引理 3.1(这里, 我们取 $m = 1$) 得, 存在点列 $z_n \in D$, 正数列 $\rho_n \to 0$ 和全纯曲线列 $f_n \in \mathcal{F}$, 使得

$$g_n(\zeta) = f_n(z_n + \rho_n\zeta) \Rightarrow g(\zeta) \quad 在\mathbb{C}上, \tag{4.1}$$

其中 g 是 $\mathbb{C}$ 上的非常值全纯曲线.

断言 对每一个 $j \in \{1, 2, \cdots, 2N+1\}$, 要么 g 不取超平面 H_j, 要么有 $g(\mathbb{C}) \subset H_j$.

断言的证明 设 $\boldsymbol{g}(\zeta) = (g_0, g_1, \cdots, g_N)(\zeta)$ 是 g 的某个既约表示. 倘若不然, 不妨假设存在点 $\zeta_0 \in \mathbb{C}$, 使得 $\langle \boldsymbol{g}, \alpha_j\rangle(\zeta_0) = 0$, 但是 $\langle \boldsymbol{g}, \alpha_j\rangle(\zeta) \not\equiv 0$. 于是, 存在 ζ_0 的某充分小的邻域 $U := U(\zeta_0)$, 使得 $\langle \boldsymbol{g}, \alpha_j\rangle(\zeta)$ 在 U 内没有其他零点. 此外, 每一个 g_n 在 U 上都存在既约表示

$$\boldsymbol{g}_n(\zeta) = (g_{n0}(\zeta), \cdots, g_{nN}(\zeta)) = (f_{n0}(z_n + \rho_n\zeta), \cdots, f_{nN}(z_n + \rho_n\zeta)),$$

满足 $\{g_{ni}\}_{n=1}^{\infty}$ 在 U 上内闭一致收敛到全纯函数 g_i (这里 $i = 0, 1, \cdots, N$). 这样, $\sum\limits_{i=0}^{N} a_{ji}g_{ni}(\zeta)$ 在 U 上内闭一致收敛到 $\sum\limits_{i=0}^{N} a_{ji}g_i(\zeta)$. 由辐角原理得, 存在点列 $\{\zeta_n\}$, 收敛到 ζ_0, 使得对于充分大的所有 n, 都有 $\sum\limits_{i=0}^{N} a_{ji}g_{ni}(\zeta_n) = 0$, 也就是说,

$$\sum_{i=0}^{N} a_{ji}f_{ni}(z_n + \rho_n\zeta_n) = 0. \tag{4.2}$$

由定理 1.3 的条件 (ii), 有

$$|f_{n0}(z_n + \rho_n\zeta_n)| \geqslant \delta\|f_n(z_n + \rho_n\zeta_n)\|$$

和

$$|g_{n0}(\zeta_n)| \geqslant \delta\|\boldsymbol{g}_n(\zeta_n)\|.$$

置 $n\to\infty$, 推出 $|g_0(\zeta_0)| \geqslant \delta\|\boldsymbol{g}(\zeta_0)\| > 0$. 这样, $g_0(\zeta_0) \neq 0$.

适当缩小邻域 U, 不妨假设在 U 上有 $g_0(\zeta) \neq 0$ 和对于所有充分大的 n, $g_{n0}(\zeta) \neq 0$, 则对于每个这样的 n,

$$(g_{n0}^2(\zeta), W(g_{n1}, g_{n0})(\zeta), \cdots, W(g_{nN}, g_{n0})(\zeta))$$

是 $\nabla g_n(\zeta)$ 在 U 上的既约表示.

再由 (4.2) 和条件 (i) 得,

$$\Big[\sum_{i=1}^N a_{ji} W(f_{ni}, f_{n0}) + a_{j0} f_{n0}^2\Big](z_n + \rho_n\zeta_n) = 0,$$

则有

$$\sum_{i=1}^N a_{ji} \frac{W(f_{ni}, f_{n0})}{f_{n0}^2}(z_n + \rho_n\zeta_n) = -a_{j0}$$

和

$$\sum_{i=1}^N a_{ji}\Big(\frac{g_{ni}}{g_{n0}}\Big)'(\zeta_n) = \rho_n \sum_{i=1}^N a_{ji} \frac{W(f_{ni}, f_{n0})}{f_{n0}^2}(z_n + \rho_n\zeta_n) = -\rho_n a_{j0}.$$

令 $n\to\infty$, 有

$$\Big[\sum_{i=1}^N a_{ji}\frac{g_i}{g_0} + a_{j0}\Big]'(\zeta_0) = \sum_{i=1}^N a_{ji}\Big(\frac{g_i}{g_0}\Big)'(\zeta_0) = 0,$$

即可假设 ζ_0 是

$$\sum_{i=1}^N a_{ji}\frac{g_i}{g_0} + a_{j0}$$

的重数为 $m(\geqslant 2)$ 的零点.

那么, 有

$$\Big[\sum_{i=1}^N a_{ji}\frac{g_i}{g_0} + a_{j0}\Big]^{(m)}(\zeta_0) \neq 0. \tag{4.3}$$

由引理 3.2 得, 对于任意充分大的 n,

$$\sum_{i=1}^N a_{ji}\frac{g_{ni}}{g_{n0}} + a_{j0}$$

在 $U(\zeta_0)$ 内有 m 个零点 (计重数). 不妨将其记作 $\zeta_{n\ell}$. 因为

$$\Big[\sum_{i=1}^N a_{ji}\frac{g_{ni}}{g_{n0}} + a_{j0}\Big]'(\zeta_{n\ell}) = -\rho_n a_{j0} \neq 0,$$

所以 $\zeta_{n\ell}$ 是

$$\sum_{i=1}^N a_{ji}\frac{g_{ni}}{g_{n0}}(\zeta) + a_{j0}$$

的简单零点, 这里 $\ell = 1, 2, \cdots, m$.

这样,

$$\Big[\sum_{i=1}^{N} a_{ji}\frac{g_{ni}}{g_{n0}}(\zeta) + a_{j0}\Big]' + \rho_n a_{j0}$$

在 $U(\zeta_0)$ 内有至少 m 个不同零点 $\zeta_{n\ell}$, $\ell = 1, 2, \cdots, m$ 且 $\lim\limits_{n\to\infty}\zeta_{n\ell} = \zeta_0$. 因此, ζ_0 是

$$\Big[\sum_{i=1}^{N} a_{ji}\frac{g_i}{g_0}(\zeta) + a_{j0}\Big]'$$

的至少 m 重零点, 则

$$\Big[\sum_{i=1}^{N} a_{ji}\frac{g_i}{g_0} + a_{j0}\Big]^{(m)}(\zeta_0) = 0.$$

这与 (4.3) 矛盾. 断言得证.

由引理 3.3, 我们有 g 是常值, 矛盾.

于是, $\mathcal{F}$ 在 D 上正规.

参 考 文 献

[1] Yang L, Fang C Y, Pang X C. Normal families of holomorphic mappings into complex projective space concerning shared hyperplanes [J]. *Pac J Math*, 2014, 272(1):245–256.

[2] Ye Y S, Pang X C, Yang L. An extension of Schwick's theorem for normal families [J]. *Ann Pol Math*, 2015, 115(1):23–31.

[3] 庞学城. 亚纯函数的正规族与正规函数 [J]. 数学年刊 A 辑, 2000, 21(5):601–604.

[4] Zalcman L. A heuristic principle in complex function theory [J]. *Amer Math Monthly*, 1975, 82:813–817.

[5] Zalcman L. Normal families: new perspectives [J]. *Bull Amer Math Soc* (*NS*), 1998, 35:215–230.

[6] Pang X C. Bloch's principle and normal criterion [J]. *Sci China Ser A*, 1989, 32:782–791.

[7] Pang X C, Zalcman L. Normal families and shared values [J]. *Bull London Math Soc*, 2000, 32:325–331.

[8] Thai D D, Trang P N T, Huong P D. Families of normal maps in several complex variables and hyperbolicity of complex spaces [J]. *Complex Var Theory Appl*, 2003, 48(6):469–482.

[9] Ahlfors L. Complex analysis [M]. 3rd ed, New York: McGraw-Hill, 1979.

[10] Ru M. Nevanlinna theory and its relation to diophantine approximation [M]. Singapore: World Sci, 2001.

A Criterion of Normality Concerning Shared Hyperplanes

LIU Xiaojun[1] PANG Xuecheng[2] YANG Jinhua[3]

[1]College of Science, University of Shanghai for Science and Technology, Shanghai 200093, China. E-mail: xiaojunliu2007@hotmail.com

[2]School of Mathematical Sciences, East China Normal University, Shanghai 200241, China. E-mail: xcpang@math.ecnu.edu.cn

[3]School of Mathematical Sciences, Xinjiang Normal University, Urumqi 830017, China. E-mail: 1511337295@qq.com

Abstract In this paper, the authors continue to discuss the normality of holomorphic curves concerning shared hyperplanes and get the following result: Let $\mathcal{F}$ be a family of holomorphic maps of a domain $D \subset \mathbb{C}$ to $\mathbb{P}^N(\mathbb{C})$. Let $H_j = \{x \in \mathbb{P}^N(\mathbb{C}) : \langle \boldsymbol{x}, \alpha_j \rangle = 0\}$ be hyperplanes in $\mathbb{P}^N(\mathbb{C})$ located in general position, where $\alpha_j = (a_{j0}, \cdots, a_{jN})^{\mathrm{T}}$ and $a_{j0} \neq 0$, $j = 1, 2, \cdots, 2N+1$. Assume that the following conditions hold for every $f \in \mathcal{F}$:

(i) If $f(z) \in H_j$, then $\nabla f \in H_j, j = 1, 2, \cdots, 2N+1$;

(ii) If $f(z) \in \bigcup\limits_{j=1}^{2N+1} H_j$, then $\frac{|\langle f(z), H_0 \rangle|}{\|f\| \|H_0\|} \geqslant \delta$, where $0 < \delta < 1$ is a constant and $H_0 = \{w_0 = 0\}$,

Then $\mathcal{F}$ is normal on D.

Keywords Normal family, Holomorphic maps, Derived curves, Shared hyperplanes

2000 MR Subject Classification 32A19, 32H30, 30D45, 32H02

The English translation of this paper will be published in
Chinese Journal of Contemporary Mathematics, Vol. 42 No. 2, 2021
by ALLERTON PRESS, INC., USA