数 学 年 刊 A 辑
2021, 42(2):179–188
DOI: 10.16205/j.cnki.cama.2021.0015

有关殆素数的二元丢番图不等式

李三华[1] 吴高翔[1]

提要 P_r 表示最多 r 个素因子的正整数. 作者证明了, 对于任一足够大的实数 N 和 $1 < c < c_0$, 不等式 $|p^c + P_r^c - N| < N^{\frac{9}{10}(1-\frac{c_0}{c})}$ 对素数 p 和 P_r 是可解的. 特别地, 当 $1 < c < c_0 = 1.03074432\cdots$, 有 $r = 6$. 这个结果改进了翟文广和曹晓东的结果.

关键词 丢番图不等式, 指数和, 殆素数
MR (2000) 主题分类 11D75, 11J25
中图法分类 O156.4
文献标志码 A
文章编号 1000-8314(2021)02-0179-10

1 引 言

1952 年, Piatetski-Shapiro[1] 研究了下列 Waring-Goldbach 问题的类似: 设 $c > 1$ 不是整数, ε 为很小的正数. 若 k 是一个足够大的整数 (与 c 有关), 则不等式

$$|p_1^c + p_2^c + \cdots + p_k^c - N| < \varepsilon$$

对于充分大的实数 N 和素数 $p_1, p_2, \cdots, p_k$ 是有解的. 更为确切地说, 令 $H(c)$ 表示使得上述不等式有解的最小的 k, Piatetski-Shapiro[1] 证明了

$$\limsup_{c\to\infty} \frac{H(c)}{c\log c} \leqslant 4,$$

以及 $1 < c < \frac{3}{2}$, $H(c) \leqslant 5$.

Laporta[2] 研究了有关二元丢番图不等式的类似问题. 他证明了对于几乎所有的 $T \in (N, 2N]$, 下列不等式

$$|p_1^c + p_2^c - T| < \varepsilon$$

对于素数 p_1, p_2, $\varepsilon = T^{1-\frac{15}{14c}}\log^8 T$ 和 $1 < c < \frac{15}{14}$ 是有解的.

殆素数 P_r 表示最多有 r 素因子. 翟文广和曹晓东 [3] 证明了当 $1 < c < c' = 1.0089\cdots$, 丢番图不等式

$$|p^c + P_r^c - N| < \varepsilon \tag{1.1}$$

对于充分大的实数 N 和素数 p, 殆素数 P_r 是有解的, 其中 $\varepsilon = N^{1-\frac{c'}{c}}$ 且 $r = 10$.

本文中, 我们证明了以下结果.

定理 1.1 设 $1 < c < c_0$. 对于任一足够大的实数 N, 令 $\varepsilon = N^{\frac{9}{10}(1-\frac{c_0}{c})}$ 和 $T_r(N)$ 表示丢番图不等式 (1.1) 对素数 p 和殆素数 P_r 有解的个数, 则有

$$T_r(N) \gg \frac{\varepsilon N^{\frac{2}{c}-1}}{\log^2 N},$$

本文 2019 年 9 月 7 日收到, 2020 年 11 月 20 日收到修改稿.
[1]井冈山大学数理学院, 江西 吉安 343009. E-mail: lisanhua@sina.com; 13879609485@163.com

其中 $r=6$ 且 $1<c<c_0=1.03074432\cdots$.

本文我们假设 N 是足够大的实数, p 是素数, c 是满足 $1<c<c_0=1.03074432\cdots$ 的实数. $m\sim M$ 表示 $M<m\leqslant 2M$. $m\asymp M$ 表示存在两个正常数 c_1,c_2, 使得 $c_1M<m\leqslant c_2M$. 符号 O 和符号 $\ll$ 绝对或依赖于 c. $[t]$ 表示 t 的整数部分和 $\psi(t)=t-[t]-\frac{1}{2}$.

2 一些基本引理

引理 2.1 [4−5] 设 $\mathscr{A}$ 表示有限整数集, $\mathscr{P}$ 表示有限素数集, $\overline{\mathscr{P}}$ 表示不属于 $\mathscr{P}$ 的素数集且

$$\mathscr{A}_d=\{a\mid a\in\mathscr{A},\ a\equiv 0(\mathrm{mod} d)\},\quad \mathscr{P}(q)=\{p\mid p\in\mathscr{P},\ (p,q)=1\}.$$

对于 $z\geqslant 2$, 令

$$P(z)=\prod_{p<z,p\in\mathscr{P}}p,\quad S(\mathscr{A};\mathscr{P},z)=\sum_{a\in\mathscr{A},(a,P(z))=1}1.$$

如果

(A_1) $|\mathscr{A}_d|=\frac{\omega(d)}{d}\mathcal{X}+r_d,\quad \mu(d)\neq 0,\quad (d,\overline{\mathscr{P}})=1;$

(A_2) $\sum\limits_{z_1\leqslant p<z_2}\frac{\omega(p)}{p}=\log\frac{\log z_2}{\log z_1}+O\Big(\frac{1}{\log z_1}\Big),\quad z_2>z_1\geqslant 2,$

其中 $\omega(d)$ 是乘性函数, $0\leqslant\omega(p)<p$, $\mathcal{X}>1$ 与 d 无关, 则

$$S(\mathscr{A};\mathscr{P},z)\geqslant\mathcal{X}V(z)\Big(f(s)+O\Big(\frac{1}{\log^{\frac{1}{3}}D}\Big)\Big)-R_D,$$

$$S(\mathscr{A};\mathscr{P},z)\leqslant\mathcal{X}V(z)\Big(F(s)+O\Big(\frac{1}{\log^{\frac{1}{3}}D}\Big)\Big)+R_D,$$

其中

$$s=\frac{\log D}{\log z},\quad R_D=\sum_{d<D,d|P(z)}|r_d|,$$

$$V(z)=C(\omega)\frac{\mathrm{e}^{-\gamma}}{\log z}\Big(1+O\Big(\frac{1}{\log z}\Big)\Big),$$

$$C(\omega)=\prod_p\Big(1-\frac{\omega(p)}{p}\Big)\Big(1-\frac{1}{p}\Big)^{-1},$$

以及 $f(s)$ 和 $F(s)$ 满足如下的差分微分方程:

$$\begin{cases}F(s)=\dfrac{2}{s},\quad f(s)=0,\quad 0<s\leqslant 2,\\ (sF(s))'=f(s-1),\quad (sf(s))'=F(s-1),\quad s\geqslant 2.\end{cases}$$

而且, 我们有

$$F(s)=\frac{2}{s},\quad 1\leqslant s\leqslant 3;\quad f(s)=\frac{2}{s}\log(s-1),\quad 2\leqslant s\leqslant 4.$$

引理 2.2 [6−7] 令

$$x^{\varepsilon}<v\leqslant x,\quad Q(v)=\prod_{p<v}p,$$

则对于 $x<y\leqslant 2x$, 有

$$\sum_{\substack{x<n\leqslant y\\(n,Q(v))=1}}1=w\Big(\frac{\log x}{\log v}\Big)\frac{y-x}{\log v}+O\Big(\frac{x}{\log^2 x}\Big),$$

其中 $w(u)$ 满足下列差分微分方程:

$$\begin{cases}w(u)=\dfrac{1}{u}, & 1\leqslant u\leqslant 2,\\ (uw(u))'=w(u-1), & u\geqslant 2.\end{cases}$$

而且, 我们有

$$w(u)\leqslant\frac{1}{1.763},\quad u\geqslant 2.$$

引理 2.3 [8]　对于任一 $H>0$, 有

$$\psi(t)=\sum_{0<|h|\leqslant H}a(h)\mathrm{e}(ht)+O\Big(\sum_{|h|\leqslant H}b(h)\mathrm{e}(ht)\Big),$$

其中 $a(h)\ll|h|^{-1},\ b(h)\ll H^{-1}$.

3　定理证明: 开始阶段

令

$$\gamma=\frac{1}{c},\quad X=N^{\gamma},\quad \varepsilon=X^{\frac{9}{10}(c-c_0)},\quad \eta=\frac{1}{1000}(c_0-c),\quad Y=X^{2-c_0-\eta}.$$

定义

$$\begin{aligned}\mathscr{A}&=\{n\mid(N-p^c-\varepsilon)^{\gamma}<n\leqslant(N-p^c+\varepsilon)^{\gamma},\ X^{1-\eta}<p\leqslant 2X^{1-\eta}\},\\ \mathscr{P}&=\{p\mid p>2\}.\end{aligned}\tag{3.1}$$

设 $\mathscr{A}_d=\{n\in\mathscr{A}\mid n\equiv 0(\mathrm{mod}d)\}$, 则

$$\begin{aligned}|\mathscr{A}_d|&=\sum_{p\sim X^{1-\eta}}\Big(\Big[\frac{(N-p^c+\varepsilon)^{\gamma}}{d}\Big]-\Big[\frac{(N-p^c-\varepsilon)^{\gamma}}{d}\Big]\Big)\\ &=\frac{\omega(d)}{d}\mathcal{X}+r_d,\end{aligned}\tag{3.2}$$

其中 $\omega(d)\equiv 1$,

$$\begin{aligned}\mathcal{X}&=\sum_{p\sim X^{1-\eta}}((N-p^c+\varepsilon)^{\gamma}-(N-p^c-\varepsilon)^{\gamma})\\ &\asymp\varepsilon N^{\gamma-1}(\pi(2X^{1-\eta})-\pi(X^{1-\eta}))\\ &\asymp X^{2-c_0-\eta}\log^{-1}X=\frac{Y}{\log X},\end{aligned}\tag{3.3}$$

$$r_d=\sum_{p\sim X^{1-\eta}}\Big(\psi\Big(\frac{(N-p^c-\varepsilon)^{\gamma}}{d}\Big)-\psi\Big(\frac{(N-p^c+\varepsilon)^{\gamma}}{d}\Big)\Big).\tag{3.4}$$

现在我们估计 r_d. 令

$$S_i=\sum_{p\sim X^{1-\eta}}\psi\Big(\frac{(N-p^c+\mathrm{i}\varepsilon)^\gamma}{d}\Big),\quad i=+,-.$$

我们只要考虑 S_+.

取 $H=dX^{c_0-1+\eta}$, 则由引理 2.3, 我们得到

$$S_+\ll\frac{X^{2-c_0-2\eta}}{d}+\sum_{1\leqslant h\leqslant H}\frac{|S(h)|}{h},\tag{3.5}$$

其中

$$S(h)=\sum_{p\sim X^{1-\eta}}\mathrm{e}\Big(\frac{(N-p^c+\varepsilon)^\gamma}{d}h\Big).$$

取 $\ell=\big[3\frac{\gamma}{\eta}\big]$. 由泰勒公式, 我们得到 (注意 $\frac{p^c}{N}=O(N^{-\eta})$),

$$\begin{aligned}(N+\varepsilon-p^c)^\gamma&=(N+\varepsilon)^\gamma\Big(1-\frac{p^c}{N+\varepsilon}\Big)^\gamma\\&=(N+\varepsilon)^\gamma\Big(1-\frac{\gamma p^c}{N+\varepsilon}+\sum_{j=2}^{\ell}c_j(\gamma)\frac{p^{jc}}{(N+\varepsilon)^j}+O(N^{-\ell\eta-\eta})\Big)\\&=(N+\varepsilon)^\gamma-\gamma(N+\varepsilon)^{\gamma-1}p^c+\sum_{j=2}^{\ell}c_j(\gamma)(N+\varepsilon)^{\gamma-j}p^{jc}\\&\quad+O(N^{\gamma-\ell\eta-\eta}).\end{aligned}$$

因而我们得到

$$S(h)\ll|S_1(h)|+1,\tag{3.6}$$

其中

$$\begin{aligned}S_1(h)&=\sum_{p\sim X^{1-\eta}}\mathrm{e}\Big(up^c+\sum_{j=2}^{\ell}u_jp^{jc}\Big),\\u&=\frac{\gamma h(N+\varepsilon)^{\gamma-1}}{d},\quad u_j=-\frac{hc_j(\gamma)(N+\varepsilon)^{\gamma-j}}{d},\\\sum_{j=2}^{\ell}u_jp^{jc}&=O(up^cN^{-\eta}).\end{aligned}$$

令 $g(t)=\sum\limits_{j=2}^{\ell}u_jt^{jc}$, $f(t)=ut^c+g(t)$ 和 $F=\frac{hN^{\gamma-\eta}}{d}$, 我们得到 $f(p)\asymp F$. 接下来我们要证明如下命题.

命题 3.1 对于 $1<c<c_0$, 令 $\alpha=\frac{447-407c_0-1000\eta}{354(2-c_0-\eta)}$, 则有

$$S_i=\sum_{p\sim X^{1-\eta}}\psi\Big(\frac{(N-p^c+\mathrm{i}\varepsilon)^\gamma}{d}\Big)\ll\frac{YX^{-\eta}}{d},\quad i=+,-,$$

其中 $1\leqslant d\leqslant Y^\alpha$.

4　命题 3.1 的证明

引理 4.1 [3]　设 a_m 是复数序列且满足

$$\sum_{m\sim M_1}|a_m|^2\ll M_1\log^{2A}M_1,\quad A>0.$$

若 $M_1\ll\frac{X^{3-2c_0-3\eta}}{d^2}, M_1N_1\asymp X^{1-\eta}$, 则有

$$S_{\mathrm{I}}=\sum_{m\sim M_1}a_m\sum_{n\sim N_1}\mathrm{e}(u(mn)^c+g(mn))\ll\frac{YX^{-\eta}}{d}.$$

引理 4.2 [8]　设 a_m 和 b_n 是两个复数序列且满足

$$\sum_{m\sim M_1}|a_m|^2\ll M_1\log^{2A}M_1,\quad \sum_{n\sim N_1}|b_n|^4\ll N_1\log^{4B}N_1,\quad A>0,B>0.$$

若 $d^2X^{2c_0-2+3\eta}\ll N_1\ll\min\Big(FX^{2-2c_0-2\eta},\frac{X^{5-4c_0-5\eta}}{d^4},\frac{X^{\frac{411-318c_0-411\eta}{9}}}{F^{\frac{53}{9}}d^{\frac{318}{9}}}\Big), M_1N_1\asymp X^{1-\eta}$, 则有

$$S_{\mathrm{II}}=\sum_{m\sim M_1}a_m\sum_{n\sim N_1}b_n\mathrm{e}(u(mn)^c+g(mn))\ll\frac{YX^{-\eta}}{d}.$$

现在我们证明上述命题 3.1. 由 (3.5)–(3.6), 只要证明

$$S_1(h)=\sum_{p\sim X^{1-\eta}}\mathrm{e}\Big(up^c+\sum_{j=2}^{\ell}u_jp^{jc}\Big)\ll\frac{YX^{-\eta}}{d},$$

则有

$$S_1(h)=S_1^*(h)+O(X^{\frac{1-\eta}{2}}),$$

其中

$$S_1^*(h)=\sum_{t\sim X^{1-\eta}}\Lambda(t)\mathrm{e}\Big(ut^c+\sum_{j=2}^{\ell}u_jt^{jc}\Big).$$

令

$$T=\frac{X^{3-2c_0-3\eta}}{d^2},\quad U=d^2X^{2c_0-2+3\eta},$$

$$E=\min\Big(FX^{2-2c_0-2\eta},\frac{X^{5-4c_0-5\eta}}{d^4},\frac{X^{\frac{411-318c_0-411\eta}{9}}}{F^{\frac{53}{9}}d^{\frac{318}{9}}}\Big),$$

则在我们假设的条件下很容易验证

$$TE>X,\quad X/T>(2X)^{\frac{1}{13}},\quad U^2<E.$$

利用 Heath-Brown's 恒等式 $(k=13)$, 我们可以把 $S_1^*(h)$ 写成 $O(\log^{26}X)$ 个指数和的形式

$$S_1^{**}(h)=\sum_{\substack{X^{1-\eta}<n_1n_2\cdots n_{26}\leqslant 2X^{1-\eta}\\ L_j<n_j\leqslant 2L_j}}a_1(n_1)a_2(n_2)\cdots a_{26}(n_{26})$$

$$\times\,\mathrm{e}\Big(u(n_1n_2\cdots n_{26})^c+\sum_{j=2}^{\ell}u_j(n_1n_2\cdots n_{26})^{jc}\Big),$$

其中

$$a_j(n_j)=\begin{cases}\log n_1, & j=1,\\ 1, & 1<j\leqslant 13,\\ \mu(n_j), & 14\leqslant j\leqslant 26,\end{cases}$$

$$X^{1-\eta}\ll\prod_{j=1}^{26}L_j\ll X^{1-\eta},\quad L_j\geqslant 1,$$

$$L_j\ll(2X^{1-\eta})^{\frac{1}{13}},\quad 14\leqslant j\leqslant 26,$$

其中 $\mu(n)$ 表示 Möbius 函数.

只要证明

$$S_1^{**}(h)\ll\frac{YX^{-\eta}}{d}.\tag{4.1}$$

情形 1 若对于某个 j, 有 $L_j\gg X^{1-\eta}/T$, 则我们有 $1\leqslant j\leqslant 13$. 令 $m=\prod\limits_{i\neq j}n_i, n=n_j, M_1=\prod\limits_{i\neq j}L_i, N_1=L_j$, 则 $S_1^{**}(h)$ 构成了和 $S_{\rm I}$, 这样由引理 4.1 得到 (4.1).

情形 2 若对于某个 j, $U\ll L_j<X^{1-\eta}/T\ll E$. 令 $m=\prod\limits_{i\neq j}n_i, n=n_j$, 则 $S_1^{**}(h)$ 构成了和 $S_{\rm II}$, 这样由引理 4.2 得到 (4.1).

情形 3 若对于所有 $1\leqslant j\leqslant 26$, 有 $L_j\ll U$. 不是一般性, 我们可以假设 $L_1\leqslant L_2\leqslant\cdots\leqslant L_{26}$. 令 l 表示最小的整数, 使得

$$\prod_{j=1}^{l}L_j\gg U,$$

则有 $1<j<26$ 和

$$U\ll\prod_{j=1}^{l}L_j=L_l\prod_{j=1}^{l-1}L_j\ll U^2\ll E.$$

令 $n=n_1n_2\cdots n_l,\quad m=n_{l+1}\cdots n_{26}$. 因而 $S_1^{**}(h)$ 构成了和 $S_{\rm II}$, 这样由引理 4.2 得到 (4.1).

所以命题 3.1 可以从上面三种情况得到.

5 定理 1.1 的证明

在本段, 我们利用引理 2.1 中的筛法和命题 3.1 来证明定理 1.1. 令

$$D=Y^{\alpha},\quad z=D^{\frac{1}{2.64}},\quad P(z)=\prod_{2<p<z}p.$$

我们考虑如下式子:

$$\begin{aligned}&S(\mathscr{A};\mathscr{P},z)-\sum_{z\leqslant p_1\leqslant\cdots\leqslant p_r<\left(\frac{2X}{p_1\cdots p_{r-1}}\right)^{\frac12}}S(\mathscr{A}_{p_1\cdots p_r};\mathscr{P}(p_1\cdots p_{r-1}),p_r)\\ &=\Omega-\Omega^{(r)}.\end{aligned}$$

从上述式子我们知道 Ω 表示 $\mathscr{A}$ 中元素与 $P(z)$ 互素的个数, 易知 $\Omega^{(r)}$ 表示 $\mathscr{A}$ 中的元素与 $P(z)$ 互素且最多有 $r+1$ 素因子的个数, 因此 $\Omega-\Omega^{(r)}$ 表示 $\mathscr{A}$ 中的元素与 $P(z)$ 互素且最多有 r 个素因子的个数, 所以

$$\begin{aligned}T_r(N) &\geqslant S(\mathscr{A};\mathscr{P},z)-\sum_{z\leqslant p_1\leqslant\cdots\leqslant p_r<\left(\frac{2X}{p_1\cdots p_{r-1}}\right)^{\frac{1}{2}}} S(\mathscr{A}_{p_1\cdots p_r};\mathscr{P}(p_1\cdots p_{r-1}),p_r)\\ &=\Omega-\Omega^{(r)}.\end{aligned}\tag{5.1}$$

(i) 估计 Ω 的下界.

我们有

$$C(\omega)=\prod_p\Big(1-\frac{\omega(p)}{p}\Big)\Big(1-\frac{1}{p}\Big)^{-1}=2,\tag{5.2}$$

$$\begin{aligned}V(z)&=C(\omega)\frac{\mathrm{e}^{-\gamma}}{\log z}\Big(1+O\Big(\frac{1}{\log z}\Big)\Big)\\&=\frac{2\mathrm{e}^{-\gamma}}{\log z}\Big(1+O\Big(\frac{1}{\log z}\Big)\Big),\end{aligned}\tag{5.3}$$

$$R_D=\sum_{d<D,d|P(z)}|r_d|=o\Big(\frac{Y}{\log D}\Big),\tag{5.4}$$

其中 (5.4) 可由命题 3.1 得到. 又由引理 2.1, (3.1)–(3.4) 和 (5.2)–(5.4), 得到

$$\begin{aligned}\Omega&\geqslant\mathcal{X}V(z)\Big(f\Big(\frac{\log D}{\log z}\Big)+O\Big(\frac{1}{\log^{\frac{1}{3}}D}\Big)\Big)-R_D\\&=\Big(\log 1.64+O\Big(\frac{1}{\log^{\frac{1}{3}}D}\Big)\Big)\frac{4Y}{\log D\log X}.\end{aligned}\tag{5.5}$$

(ii) 估计 $\Omega^{(r)}$ 的上界.

我们有

$$\Omega^{(r)}=\sum_{z\leqslant p_1\leqslant\cdots\leqslant p_r<\left(\frac{2X}{p_1\cdots p_{r-1}}\right)^{\frac{1}{2}}}\ \sum_{\substack{X^{1-\eta}<p\leqslant 2X^{1-\eta}\\ N-(p_1\cdots p_r n)^c-\varepsilon)^\gamma<p\leqslant(N-(p_1\cdots p_r n)^c+\varepsilon)^\gamma\\ p_0|n\Rightarrow p_0>p_r}}1.$$

令

$$\mathscr{M}^{(r)}=\{m\mid m\in\mathscr{A},m=p_1\cdots p_r n,p\mid n\Rightarrow p\geqslant p_r,z\leqslant p_1\leqslant\cdots\leqslant p_r\},$$

$$\mathscr{B}^{(r)}=\{l\mid(N-m^c-\varepsilon)^\gamma<l\leqslant(N-m^c+\varepsilon)^\gamma,m\in\mathscr{M}^{(6)}\},$$

则有

$$\Omega^{(r)}=S(\mathscr{B}^{(r)};\mathscr{P},(2X^{1-\eta})^{\frac{1}{2}})\leqslant S(\mathscr{B}^{(r)};\mathscr{P},D^{\frac{1}{2}}).\tag{5.6}$$

令

$$\mathcal{X}^{(r)}\asymp\sum_{m\in\mathscr{M}^{(r)}}((N-m^c+\varepsilon)^\gamma-(N-m^c-\varepsilon)^\gamma),$$

$$r_d^{(r)}=\sum_{m\in\mathscr{M}^{(r)}}\Big(\psi\Big(\frac{(N-m^c-\varepsilon)^\gamma}{d}\Big)-\psi\Big(\frac{(N-m^c+\varepsilon)^\gamma}{d}\Big)\Big).$$

由命题 3.1 得到

$$R_D^{(r)}=\sum_{d<D,d|P(z)}|r_d^{(6)}|=o\Big(\frac{Y}{\log D}\Big). \tag{5.7}$$

由引理 2.2, 素数定理和部分和求和, 我们得到

$$\begin{aligned}\mathcal{X}^{(r)}&\asymp\sum_{\substack{X^{1-\eta}<p_1\cdots p_rn\leqslant 2X^{1-\eta}\\ z\leqslant p_1\leqslant\cdots\leqslant p_r\\ p|n\Rightarrow p\geqslant p_r}}((N-(p_1\cdots p_rn)^c+\varepsilon)^\gamma\\ &\quad-(N-(p_1\cdots p_rn)^c-\varepsilon)^\gamma)\\ &\asymp\varepsilon N^{\gamma-1}X^{-c\eta}\sum_{z\leqslant p_1\leqslant\cdots\leqslant p_r<\left(\frac{2X}{p_1\cdots p_{r-1}}\right)^{\frac12}}\Big(\frac{p_1p_2\cdots p_r}{X}\Big)^c\\ &\quad\times\sum_{\substack{\frac{X}{p_1p_2\cdots p_r}<n\leqslant\frac{2X}{p_1p_2\cdots p_r}\\ p|n\Rightarrow p\geqslant p_r}}n^c\\ &=\varepsilon N^{\gamma-1}X^{-c\eta}\sum_{z\leqslant p_1\leqslant\cdots\leqslant p_r<\left(\frac{2X}{p_1\cdots p_{r-1}}\right)^{\frac12}}\Big(\frac{p_1p_2\cdots p_r}{X}\Big)^c\\ &\quad\times\Big(\int_{\frac{X}{p_1p_2\cdots p_r}}^{\frac{2X}{p_1p_2\cdots p_r}}u^cw\Big(\frac{\log\frac{X}{p_1p_2\cdots p_r}}{\log p_r}\Big)\frac{\mathrm{d}u}{\log p_r}\\ &\quad+O\Big(\frac{X^{c+1}}{(p_1p_2\cdots p_r)^{c+1}\log^2\frac{X}{p_1p_2\cdots p_r}}\Big)\Big)\\ &\asymp\Big(1+O\Big(\frac{1}{\log X}\Big)\Big)\varepsilon N^{\gamma-1}X^{1-c\eta}\\ &\quad\times\sum_{z\leqslant p_1\leqslant\cdots\leqslant p_r<\left(\frac{2X}{p_1\cdots p_{r-1}}\right)^{\frac12}}\frac{1}{p_1p_2\cdots p_r\log p_r}w\Big(\frac{\log\frac{X}{p_1p_2\cdots p_r}}{\log p_r}\Big)\\ &=\Big(1+O\Big(\frac{1}{\log X}\Big)\Big)\frac{c_rY}{\log X},\end{aligned} \tag{5.8}$$

其中

$$c_r=\int\limits_{\frac{\log z}{\log X}\leqslant t_1\leqslant\cdots\leqslant t_r<\frac{1-t_1-\cdots-t_{r-1}}{2}}\frac{\mathrm{d}t_1}{t_1}\int\frac{\mathrm{d}t_2}{t_2}\cdots\int\frac{\mathrm{d}t_{r-1}}{t_{r-1}}\int w\Big(\frac{1-t_1-\cdots-t_r}{t_r}\Big)\frac{\mathrm{d}t_r}{t_r^2}.$$

由引理 2.1, (5.2)–(5.3) 和 (5.7)–(5.8), 得到

$$\begin{aligned}S(\mathscr{B}^{(r)};\mathscr{P},D^{\frac12})&\leqslant\mathcal{X}^{(r)}V(D^{\frac12})\Big(F(2)+O\Big(\frac{1}{\log^{\frac13}D}\Big)\Big)+R_D^{(r)}\\ &=\Big(1+O\Big(\frac{1}{\log^{\frac13}D}\Big)\Big)\frac{4c_rY}{\log D\log X}.\end{aligned} \tag{5.9}$$

(iii) 定理 1.1 的证明.

由 (5.1), (5.5)–(5.6) 和 (5.9), 有

$$
\begin{aligned}
T_r(N) &\geqslant \Big(\log 1.64 - c_r + O\Big(\frac{1}{\log^{\frac{1}{3}} D}\Big)\Big)\frac{4Y}{\log D \log X} \\
&\gg \frac{\varepsilon N^{\frac{2}{c}-1}}{\log^2 N}. \qquad (5.10)
\end{aligned}
$$

由式子 (5.10), 定理得证.

特别地, 对于 $1 < c < 1.03074432\cdots$, 根据引理 2.2 中的 $w(u)$ 的性质和积分运算, 我们得到 (记 $T_j = t_1 + \cdots + t_j$)

$$
\begin{aligned}
c_6 \leqslant& \int_{\frac{1}{34}}^{\frac{1}{7}} \frac{\mathrm{d}t_1}{t_1} \int_{t_1}^{\frac{1-t_1}{6}} \frac{\mathrm{d}t_2}{t_2} \int_{t_2}^{\frac{1-T_2}{5}} \frac{\mathrm{d}t_3}{t_3} \int_{t_3}^{\frac{1-T_3}{4}} \frac{\mathrm{d}t_4}{t_4} \int_{t_4}^{\frac{1-T_4}{3}} \frac{\mathrm{d}t_5}{t_5} \int_{t_5}^{\frac{1-T_5}{2}} w\Big(\frac{1-T_6}{t_6}\Big)\frac{\mathrm{d}t_6}{t_6^2} \\
\leqslant& \frac{1}{1.763}\int_{\frac{1}{34}}^{\frac{1}{8}} \frac{\mathrm{d}t_1}{t_1} \int_{t_1}^{\frac{1-t_1}{7}} \frac{\mathrm{d}t_2}{t_2} \int_{t_2}^{\frac{1-T_2}{6}} \frac{\mathrm{d}t_3}{t_3} \int_{t_3}^{\frac{1-T_3}{5}} \frac{\mathrm{d}t_4}{t_4} \int_{t_4}^{\frac{1-T_4}{4}} \frac{\mathrm{d}t_5}{t_5} \int_{t_5}^{\frac{1-T_5}{3}} \frac{\mathrm{d}t_6}{t_6^2} \\
&+ \int_{\frac{1}{34}}^{\frac{1}{8}} \frac{\mathrm{d}t_1}{t_1} \int_{t_1}^{\frac{1-t_1}{7}} \frac{\mathrm{d}t_2}{t_2} \int_{t_2}^{\frac{1-T_2}{6}} \frac{\mathrm{d}t_3}{t_3} \int_{t_3}^{\frac{1-T_3}{5}} \frac{\mathrm{d}t_4}{t_4} \int_{t_4}^{\frac{1-T_4}{4}} \frac{\mathrm{d}t_5}{t_5} \int_{\frac{1-T_5}{3}}^{\frac{1-T_5}{2}} \frac{\mathrm{d}t_6}{t_6(1-T_6)} \\
&+ \int_{\frac{1}{34}}^{\frac{1}{8}} \frac{\mathrm{d}t_1}{t_1} \int_{t_1}^{\frac{1-t_1}{7}} \frac{\mathrm{d}t_2}{t_2} \int_{t_2}^{\frac{1-T_2}{6}} \frac{\mathrm{d}t_3}{t_3} \int_{t_3}^{\frac{1-T_3}{5}} \frac{\mathrm{d}t_4}{t_4} \int_{\frac{1-T_4}{4}}^{\frac{1-T_4}{3}} \frac{\mathrm{d}t_5}{t_5} \int_{t_5}^{\frac{1-T_5}{2}} \frac{\mathrm{d}t_6}{t_6(1-T_6)} \\
&+ \int_{\frac{1}{34}}^{\frac{1}{8}} \frac{\mathrm{d}t_1}{t_1} \int_{t_1}^{\frac{1-t_1}{7}} \frac{\mathrm{d}t_2}{t_2} \int_{t_2}^{\frac{1-T_2}{6}} \frac{\mathrm{d}t_3}{t_3} \int_{\frac{1-T_3}{5}}^{\frac{1-T_3}{4}} \frac{\mathrm{d}t_4}{t_4} \int_{t_4}^{\frac{1-T_4}{3}} \frac{\mathrm{d}t_5}{t_5} \int_{t_5}^{\frac{1-T_5}{2}} \frac{\mathrm{d}t_6}{t_6(1-T_6)} \\
&+ \int_{\frac{1}{34}}^{\frac{1}{8}} \frac{\mathrm{d}t_1}{t_1} \int_{t_1}^{\frac{1-t_1}{7}} \frac{\mathrm{d}t_2}{t_2} \int_{\frac{1-T_2}{6}}^{\frac{1-T_2}{5}} \frac{\mathrm{d}t_3}{t_3} \int_{t_3}^{\frac{1-T_3}{4}} \frac{\mathrm{d}t_4}{t_4} \int_{t_4}^{\frac{1-T_4}{3}} \frac{\mathrm{d}t_5}{t_5} \int_{t_5}^{\frac{1-T_5}{2}} \frac{\mathrm{d}t_6}{t_6(1-T_6)} \\
&+ \int_{\frac{1}{34}}^{\frac{1}{8}} \frac{\mathrm{d}t_1}{t_1} \int_{\frac{1-t_1}{7}}^{\frac{1-t_1}{6}} \frac{\mathrm{d}t_2}{t_2} \int_{t_2}^{\frac{1-T_2}{5}} \frac{\mathrm{d}t_3}{t_3} \int_{t_3}^{\frac{1-T_3}{4}} \frac{\mathrm{d}t_4}{t_4} \int_{t_4}^{\frac{1-T_4}{3}} \frac{\mathrm{d}t_5}{t_5} \int_{t_5}^{\frac{1-T_5}{2}} \frac{\mathrm{d}t_6}{t_6(1-T_6)} \\
&+ \int_{\frac{1}{8}}^{\frac{1}{7}} \frac{\mathrm{d}t_1}{t_1} \int_{t_1}^{\frac{1-t_1}{6}} \frac{\mathrm{d}t_2}{t_2} \int_{t_2}^{\frac{1-T_2}{5}} \frac{\mathrm{d}t_3}{t_3} \int_{t_3}^{\frac{1-T_3}{4}} \frac{\mathrm{d}t_4}{t_4} \int_{t_4}^{\frac{1-T_4}{3}} \frac{\mathrm{d}t_5}{t_5} \int_{t_5}^{\frac{1-T_5}{2}} \frac{\mathrm{d}t_6}{t_6(1-T_6)} \\
\leqslant& 0.246962 + 0.165603 + 0.067772 + 0.012540 + 0.001158 + 0.000052 + 0.000001 \\
<& 0.494089. \qquad (5.11)
\end{aligned}
$$

由 (5.11), 有

$$
\begin{aligned}
T_6(N) &\geqslant \Big(\log 1.64 - c_6 + O\Big(\frac{1}{\log^{\frac{1}{3}} D}\Big)\Big)\frac{4Y}{\log D \log X} \\
&> \frac{4Y}{10^3 \log D \log X} \gg \frac{\varepsilon N^{\frac{2}{c}-1}}{\log^2 N}.
\end{aligned}
$$

致谢 作者对审稿人提出的宝贵的建议深表谢意.

参　考　文　献

[1] Piatetski-Shapiro I I. On a variant of the Waring-Goldbach problem [J]. *Mat Sbornik*, 1952, 30:105–120 (in Russian).

[2] Laporta M B S. On a binary diophantine inequality involving prime numbers [J]. *Acta Math Hungar*, 1999, 83(3):179–187.

[3] 翟文广, 曹晓东. 一个二元丢番图不等式 [J]. 数学进展, 2003, 32(6):706–721.

[4] Halberstam H, Richert H E. Sieve methods [M]. London: Academic Press, 1974.

[5] Iwaniec H. Rosser's sieve, Recent progress in analytic number theory II [M]. London: Academic Press, 1981:203–230.

[6] Jia C H. Almost all short intervals containing prime numbers [J]. *Acta Arith*, 1996, 76:21–84.

[7] Kumchev A. A diopantine inequality involving prime powers [J]. *Acta Arith*, 1999, 89:311–330.

[8] Graham S W, Kolesnik G. Van der corput's method of exponential sums [M]. Cambridge: Cambridge Univ Press, 1991.

A Binary Diophantine Inequality Involving Almost Primes

LI Sanhua[1] WU Gaoxiang[1]

[1]College of Mathematics and Physics, Jinggangshan University, Ji'an 343009, Jiangxi, China. E-mail: 1isanhua@sina.com; 13879609485@163.com

Abstract Let P_r denote an almost-prime with at most r prime factors, counted according to multiplicity. In this paper it is proved that for any sufficiently large real number N and $1 < c < c_0$, the inequality $|p^c + P_r^c - N| < N^{\frac{9}{10}(1-\frac{c_0}{c})}$ is solvable in a prime p and an almost-prime P_r. In particular for $1 < c < c_0 = 1.03074432\cdots$, the authors have $r = 6$. This result constitutes an improvement upon that of W. G. Zhai and X. D. Cao.

Keywords Diophantine inequality, Exponential sum, Almost prime

2020 MR Subject Classification 11D75, 11J25

The English translation of this paper will be published in
Chinese Journal of Contemporary Mathematics, Vol. 42 No. 2, 2021
by ALLERTON PRESS, INC., USA