数 学 年 刊 A 辑
2021, 42(2):189–200
DOI: 10.16205/j.cnki.cama.2021.0016

# 关于具有阻尼项的扩散方程*

詹华税[1] 袁洪君[2]

**提要** 文章研究了具有阻尼项的扩散方程

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\operatorname{div}(\rho^{\alpha}|\nabla u|^{p-2}\nabla u)-a(x)|\nabla u|^{q},$$

讨论了该方程的初边值问题解的存在性, 其中 $\alpha>0$, $q<p$, $\rho(x)=\operatorname{dist}(x,\partial\Omega)$ 是空间变量到边界 $\partial\Omega$ 的距离函数, $a(x)$ 是已知非负有界函数. 作者利用抛物正则化的方法, 证明了方程弱解的存在性. 通过对检验函数的适当选取, 可以在没有边界值条件下证明弱解的唯一性.

**关键词** 弱解, 阻尼项, 初边值问题, 唯一性
**MR (2000) 主题分类** 35K65, 35K55
**中图法分类** O175.26
**文献标志码** A
**文章编号** 1000-8314(2021)02-0189-12

## 1 引 言

本文研究边界退化的具有阻尼项的扩散方程

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\operatorname{div}(\rho^{\alpha}|\nabla u|^{p-2}\nabla u)-a(x)|\nabla u|^{q},\quad (x,t)\in Q_T=\Omega\times(0,T),\tag{1.1}$$

其中 $\Omega$ 是 $\mathbb{R}^N$ 中的有界区域, 边界 $\partial\Omega$ 充分光滑, $\rho(x)=\operatorname{dist}(x,\partial\Omega)$ 是空间变量到边界的距离函数, $a(x)$ 是已知非负有界函数, $p>1$, $p>q>0$. 当 $\alpha=0$ 时, 方程 (1.1) 就变为带阻尼项的发展的 $p$-Laplace 方程

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u)-a(x)|\nabla u|^{q},\quad (x,t)\in Q_T,\tag{1.2}$$

尹景学和王春朋[1]研究了

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\operatorname{div}(\rho^{\alpha}|\nabla u|^{p-2}\nabla u),\quad (x,t)\in Q_T,\tag{1.3}$$

讨论了不需要给任何的边界条件解的存在唯一性. 我们在文 [2] 中将文 [1] 的结果推广到了具有对流项的类似方程, 同时文 [3–4] 等还将文 [1] 的结果推广到了具有变指数的类似的方程. 不同于一般的发展的 $p$-Laplace 方程, 方程 (1.2) 的最大特点是解的唯一性一般不成立. 可参见文 [5–7]. 这当然是由于方程 (1.2) 中阻尼项的影响.

本文 2018 年 9 月 25 日收到, 2019 年 3 月 11 日收到修改稿.
[1]厦门理工学院应用数学学院, 福建 厦门 361024. E-mail: 2012111007@xmut.edu.cn
[2]吉林大学数学学院, 长春 130012. E-mail: hjy@jlu.edu.cn
*本文受到福建省自然科学基金 (No. 2019J01858) 的资助.

与方程 (1.2) 不同, 方程 (1.1) 具有边界退化的性质, 根据我们的研究结果[8], 我们发现这种边界退化性有可能代替一般的边界值条件. 因此, 我们猜测方程 (1.1) 与方程 (1.2) 有着本质的不同. 在本文中, 我们将讨论方程 (1.1) 具有如下初值条件:

$$u(x,0)=u_0(x), \quad x\in\Omega, \tag{1.4}$$

但没有一般的边界条件

$$u(x,t)=0, \quad (x,t)\in\partial\Omega\times(0,T) \tag{1.5}$$

解的存在性和唯一性.

**定义 1.1** 函数 $u(x,t)$ 称为方程 (1.1) 具有初值条件 (1.4) 的弱解, 如果

$$u\in C(0,T;L^2(\Omega))\bigcap L^\infty(Q_T), \quad u_t\in L^2(Q_T), \quad \rho^\alpha|\nabla u|^p\in L^1(Q_T), \tag{1.6}$$

且对任意函数 $\varphi\in C_0^1(Q_T)$, 以下积分等式成立:

$$\iint_{Q_T}[u_t\varphi(x)+\rho^\alpha|\nabla u|^{p-2}\nabla u\cdot\nabla\varphi+a(x)|\nabla u|^q\varphi(x)]\mathrm{d}x\mathrm{d}t=0. \tag{1.7}$$

初值条件是在

$$\lim_{t\to0}\int_\Omega|u(x,t)-u_0(x)|\mathrm{d}x=0 \tag{1.8}$$

的意义下成立.

本文的主要结果如下.

**定理 1.1** 设 $p>2$, $2q<p$, $a(x)$ 是非负 $C^1$ 连续函数, 且 $a(x)\leqslant c\rho^{\frac{\alpha q}{p}}$,

$$u_0(x)\in L^\infty(\Omega), \quad \rho|\nabla u_0|^p\in L^1(\Omega), \tag{1.9}$$

则方程 (1.1) 具有初值条件 (1.4) 问题存在一解.

**定理 1.2** 设 $p>2$, $q<p$, 初值条件满足 (1.9), 则方程 (1.1) 具有初值 (1.4) 问题的解是唯一的.

需要指出的是, 本文讨论的问题之所以回避普通的边界条件 (1.5), 是因为其弱解在边界上没有足够的正则性. 我们可以回顾一下文献中相关的结论. 文 [1] 已经指出方程 (1.3) 当 $\alpha<p-1$ 时, 有

$$\iint_{Q_T}|\nabla u|\mathrm{d}x\mathrm{d}t<\infty, \tag{1.10}$$

因此, 在此时方程 (1.3) 可以赋予边界条件 (1.5) 在迹的意义下成立, 同时证明了在边界条件下的解的唯一性. 当 $\alpha\geqslant p-1$ 时, 文 [1] 还指出了解的唯一性无需边界条件 (1.5) 也成立. 文 [3] 则讨论了当方程 (1.3) 的常指数 $p$ 由变指数 $p(x)$ 所代替时, 具有类似的结果. 文 [4] 进一步指出了即使当 $\alpha<p-1$ 时, 边界条件 (1.5) 也不是唯一性的必要条件. 文 [8–9]

则讨论了带有对流项的方程

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\operatorname{div}(\rho^{\alpha}|\nabla u|^{p-2}\nabla u)+\sum_{i=1}^{N}\frac{\partial b_i(u)}{\partial x_i},\quad (x,t)\in Q_T \tag{1.11}$$

的相关结论.

当然, 由于方程 (1.1), (1.3) 和 (1.11) 的二阶导数项与方程 (1.3) 一样, 所以当 $\alpha<p-1$ 时, 不等式 (1.10) 依然成立, 依然可以赋予边界条件 (1.5) 在迹的意义下成立. 问题是, 因为扩散系数 $\rho^{\alpha}$ 在边界 $\partial\Omega$ 上退化, 所以当我们考虑唯一性时, 边界条件可能并不需要, 或者仅仅需要部分边界条件 [10].

与文 [1, 3–4, 8–10] 不同的是, 本文所讨论的方程 (1.1) 里面含有阻尼项, 首先, 文 [4, 8–10] 等的解的定义不适合于本文. 其次, 在应用抛物正则化方法证明解的存在性时必须要论证阻尼项具有局部强收敛性, 同时也使得我们增加了扩散项弱收敛

$$\rho_{\varepsilon}^{\alpha}|\nabla u_{\varepsilon}|^{p-2}\nabla u_{\varepsilon}\to\rho^{\alpha}|\nabla u|^{p-2}\nabla u$$

的困难. 至于证明唯一性, 由于没有边界条件, 直接证明唯一性不太可能, 则要立足于去证明解的局部稳定性, 这个思想在文 [9] 中已经有体现. 与文 [9] 的对流项不同, 在证明弱解的局部稳定性时, 本文要处理的是阻尼项, 所以技巧上有一些本质的不同. 另外, 文 [11–12] 讨论了没有扩散系数 $\rho^{\alpha}$ 的相关的方程, 里面涉及到梯度项的强收敛问题, 但本文论证阻尼项的强收敛证明方法与文 [11–12] 也略有不同.

## 2　解的存在性

先考虑正则化问题:

$$u_{\varepsilon t}-\operatorname{div}(\rho_{\varepsilon}^{\alpha}|\nabla u_{\varepsilon}|^{p-2}\nabla u_{\varepsilon})+a(x)|\nabla u_{\varepsilon}|^{q}=0,\quad (x,t)\in Q_T, \tag{2.1}$$

$$u_{\varepsilon}(x,t)=0,\quad (x,t)\in\partial\Omega\times(0,T), \tag{2.2}$$

$$u_{\varepsilon}(x,0)=u_{\varepsilon,0}(x),\quad x\in\Omega, \tag{2.3}$$

其中 $\rho_{\varepsilon}^{\alpha}=\rho^{\alpha}+\varepsilon$. 根据散度型经典抛物方程理论, 类似于一般的发展的 $p$-Laplace 方程的讨论, 对任意满足 $u_{\varepsilon,0}(x)\in L^{\infty}(\Omega)$, $\rho_{\varepsilon}^{\alpha}|\nabla u_{\varepsilon,0}(x)|^{p}\in L^{1}(\Omega)$, 则上述问题存在唯一弱解

$$u_{\varepsilon}\in C(0,T;L^{2}(\Omega))\bigcap L^{p}(0,T;W_0^{1,p}(\Omega)),$$

且

$$u_{\varepsilon t}\in L^{2}(Q_T).$$

于是, 对任意 $\varphi\in C_0^1(Q_T)$, $u_{\varepsilon}$ 满足下面的积分等式:

$$\iint_{Q_T}[u_{\varepsilon t}\varphi+\rho_{\varepsilon}^{\alpha}|\nabla u_{\varepsilon}|^{p-2}\nabla u_{\varepsilon}\nabla\varphi+a(x)|\nabla u_{\varepsilon}|^{q}\varphi]\mathrm{d}x\mathrm{d}t=0. \tag{2.4}$$

**引理 2.1** 假设 $2q < p$, $a(x) \leqslant c\rho^{\frac{\alpha q}{p}}$, $u_0(x) \in L^\infty(\Omega)$, $\rho^\alpha|\nabla u_0(x)|^p \in L^1(\Omega)$, 且 $\|u_{\varepsilon,0}\|_{L^\infty(\Omega)}$ 及 $\rho_\varepsilon^\alpha|\nabla u_{\varepsilon,0}(x)|^p \in L^1(\Omega)$ 一致有界, $u_{\varepsilon,0}$ 在 $W^{1,p}_{\rm loc}(\Omega)$ 中收敛于 $u_0$, 则初边值问题 (2.1)–(2.3) 的弱解 $u_\varepsilon$ 在 $L^2_{\rm loc}(Q_T)$ 中收敛且极限函数 $u$ 是方程 (1.1) 满足初值条件 (1.4) 的弱解.

**证** 由极大值原理, 存在只与 $\|u_0\|_{L^\infty(\Omega)}$, $\rho^\alpha|\nabla u_0(x)|^p \in L^1(\Omega)$ 有关、与 $\varepsilon$ 无关的常数 $c$, 使

$$\|u_\varepsilon\|_{L^\infty(\Omega)} \leqslant c. \tag{2.5}$$

以 $u_\varepsilon$ 乘 (2.1) 两边, 则有

$$\frac{1}{2}\int_\Omega u_\varepsilon^2 \mathrm{d}x + \iint_{Q_T} u_\varepsilon a(x)|\nabla u_\varepsilon|^q \mathrm{d}x\mathrm{d}t + \iint_{Q_T} \rho_\varepsilon^\alpha |\nabla u_\varepsilon|^p \mathrm{d}x\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{2}\int_\Omega u_{\varepsilon,0}^2 \mathrm{d}x.$$

由 $a(x) \leqslant c\rho^{\frac{\alpha q}{p}}$, 利用 Young 不等式, 可知

$$\iint_{Q_T} \rho^\alpha |\nabla u_\varepsilon|^p \mathrm{d}x\mathrm{d}t < \iint_{Q_T} \rho_\varepsilon^\alpha |\nabla u_\varepsilon|^p \mathrm{d}x\mathrm{d}t \leqslant c. \tag{2.6}$$

由于 $\rho(x)$ 是连续函数且只在边界为 0, 当然有

$$\begin{aligned}
\int_0^T \int_\Omega \rho_\varepsilon^\alpha |\nabla u_\varepsilon|^p \mathrm{d}x\mathrm{d}t &= \int_0^T \int_\Omega (\rho+\varepsilon)^\alpha |\nabla u_\varepsilon|^p \mathrm{d}x\mathrm{d}t \\
&\geqslant \int_0^T \int_\Omega \rho^\alpha |\nabla u_\varepsilon|^p \mathrm{d}x\mathrm{d}t \\
&= \int_0^T \int_{\Omega_\lambda} \rho^\alpha |\nabla u_\varepsilon|^p \mathrm{d}x\mathrm{d}t + \int_0^T \int_{\Omega\setminus\Omega_\lambda} \rho^\alpha |\nabla u_\varepsilon|^p \mathrm{d}x\mathrm{d}t \\
&\geqslant \lambda^\alpha \int_0^T \int_{\Omega_\lambda} |\nabla u_\varepsilon|^p \mathrm{d}x\mathrm{d}t,
\end{aligned}$$

即有

$$\int_0^T \int_{\Omega_\lambda} |\nabla u_\varepsilon|^p \mathrm{d}x\mathrm{d}t \leqslant \lambda^{-\alpha} \int_0^T \int_\Omega \rho_\varepsilon^\alpha |\nabla u_\varepsilon|^p \mathrm{d}x\mathrm{d}t \leqslant c(\lambda, T),$$

其中 $\Omega_\lambda = \{x \in \Omega : \rho(x) > \lambda\}$. 又因为 $0 \leqslant a(x)$ 是有界函数, $a(x) \leqslant c$. 由 $2q < p$, 若对于任意的紧子集 $\Omega_1 \subset \Omega$, 对于任意的 $[s,t] \subset (0,T)$, 记 $d_1 = \mathrm{dist}(\Omega_1, \partial\Omega)$, 则由 (2.6) 式知,

$$\begin{aligned}
\int_s^t \int_{\Omega_1} a(x)|\nabla u_\varepsilon|^q \mathrm{d}x\mathrm{d}t &\leqslant \int_0^T \int_{\Omega_1} a(x)|\nabla u_\varepsilon|^q \mathrm{d}x\mathrm{d}t \\
&\leqslant c d_1^{\frac{-\alpha q}{p}} \int_0^T \int_{\Omega_1} \rho^{\frac{\alpha q}{p}} |\nabla u_\varepsilon|^q \mathrm{d}x\mathrm{d}t \\
&\leqslant c d_1^{\frac{-\alpha q}{p}} \int_0^T \int_\Omega \rho^{\frac{\alpha q}{p}} |\nabla u_\varepsilon|^q \mathrm{d}x\mathrm{d}t \\
&\leqslant c(\Omega_1).
\end{aligned} \tag{2.7}$$

以 $u_{\varepsilon t}$ 乘 (2.1) 两边, 并在 $Q_T$ 上积分, 则有

$$\iint_{Q_T} |u_{\varepsilon t}|^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}t = \iint_{Q_T} \mathrm{div}(\rho_\varepsilon^\alpha |\nabla u_\varepsilon|^{p-2}\nabla u_\varepsilon) u_{\varepsilon t} \mathrm{d}x\mathrm{d}t + \iint_{Q_T} u_{\varepsilon t} a(x)|\nabla u_\varepsilon|^q \mathrm{d}x\mathrm{d}t.$$

注意到

$$
\begin{aligned}
&\iint_{Q_T} \operatorname{div}(\rho_\varepsilon^\alpha |\nabla u_\varepsilon|^{p-2}\nabla u_\varepsilon) u_{\varepsilon t}\mathrm{d}x\mathrm{d}t\\
=&-\iint_{Q_T} \rho_\varepsilon^\alpha |\nabla u_\varepsilon|^{p-2}\nabla u_\varepsilon\cdot\nabla u_{\varepsilon t}\mathrm{d}x\mathrm{d}t\\
=&-\frac{1}{2}\iint_{Q_T}\rho_\varepsilon^\alpha \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_0^{|\nabla u(x,t)|^2} s^{\frac{p-2}{2}}\mathrm{d}s\mathrm{d}x\mathrm{d}t.
\end{aligned}\tag{2.8}
$$

由 Hölder 不等式, $2q<p$, 及假设 $a(x)\leqslant c\rho^{\frac{\alpha q}{p}}$,

$$
\begin{aligned}
&\iint_{Q_T} u_{\varepsilon t} a(x)|\nabla u_\varepsilon|^q\mathrm{d}x\mathrm{d}t\\
\leqslant&\frac{1}{2}\iint_{Q_T}|u_{\varepsilon t}|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t+\frac{1}{2}\iint_{Q_T} a(x)^2|\nabla u_\varepsilon|^{2q}\mathrm{d}x\mathrm{d}t\\
\leqslant&\frac{1}{2}\iint_{Q_T}|u_{\varepsilon t}|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t+\frac{c}{2}\Big(\iint_{Q_T} a(x)|\nabla u_\varepsilon|^{p}\mathrm{d}x\mathrm{d}t\Big)^{\frac{2q}{p}}.
\end{aligned}\tag{2.9}
$$

由 (2.8)–(2.9), 有

$$
\iint_{Q_T}|u_{\varepsilon t}|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t+\iint_{Q_T}\rho_\varepsilon^\alpha\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_0^{|\nabla u(x,t)|^2} s^{\frac{p-2}{2}}\mathrm{d}s\mathrm{d}x\mathrm{d}t\leqslant c.
$$

由上式得到

$$
\iint_{Q_T}|u_{\varepsilon t}|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t\leqslant c+c\int_\Omega \rho_\varepsilon^\alpha|\nabla u_{\varepsilon,0}|^p\mathrm{d}x\leqslant c.\tag{2.10}
$$

因此存在函数 $u$ 和 $n$ 维向量函数 $\overrightarrow{\zeta}=(\zeta_1,\zeta_2,\cdots,\zeta_n)$, 满足

$$
\begin{aligned}
&u\in C(0,T;L^2(\Omega))\bigcap L^\infty(Q_T),\quad u_t\in L^2(Q_T),\quad |\overrightarrow{\zeta}|\in L^{\frac{p}{p-1}}(Q_T),\\
&\nabla u_\varepsilon\rightharpoonup\nabla u \text{ 在 } L^p_{\mathrm{loc}}(Q_T)\text{中},\\
&u_{\varepsilon t}\rightharpoonup u_t \text{ 在 } L^2(Q_T)\text{中},\\
&\rho_\varepsilon^\alpha|\nabla u_\varepsilon|^{p-2}\nabla u_\varepsilon\rightharpoonup\overrightarrow{\zeta} \text{ 在 } L^{\frac{p}{p-1}}(Q_T)\text{中}.
\end{aligned}
$$

并且因为 $p>2$, $\int_0^T\int_{\Omega_\lambda}|\nabla u_\varepsilon|^p\mathrm{d}x\mathrm{d}t\leqslant c(\lambda,T)$, 利用 (2.10) 和嵌入定理知

$$
u_\varepsilon\to u \text{ 在 } L^2_{\mathrm{loc}}(Q_T)\text{中}.
$$

又由 (2.7) 知, $a(x)|\nabla u_\varepsilon|^q$ 是局部 $L^1$ 的且其界与 $\varepsilon$ 无关, 于是有

$$
a(x)|\nabla u_\varepsilon|^q\rightharpoonup\nu \text{ 在 } \mathfrak{M}(Q_T)\text{中},
$$

其中 $\mathfrak{M}(Q_T)$ 代表在 Radon 测度意义.

为证 $u$ 满足方程 (1.1), 我们注意到对任意函数 $\varphi\in C_0^\infty(Q_T)$ 成立积分等式:

$$
\iint_{Q_T}[u_{\varepsilon t}\varphi+\rho_\varepsilon^\alpha|\nabla u_\varepsilon|^{p-2}\nabla u_\varepsilon\nabla\varphi+a(x)|\nabla u_\varepsilon|^q\varphi]\mathrm{d}x\mathrm{d}t=0.\tag{2.11}
$$

令 $\varepsilon\to 0$,

$$
\iint_{Q_T}(u_t\varphi+\overrightarrow{\zeta}\cdot\nabla\varphi+\nu\varphi)\mathrm{d}x\mathrm{d}t=0.\tag{2.12}
$$

我们要证明对任意函数 $\varphi\in C_0^\infty(Q_T)$,

$$\iint_{Q_T}\rho^\alpha|\nabla u|^{p-2}\nabla u\cdot\nabla u\varphi\mathrm{d}x\mathrm{d}t=\iint_{Q_T}\overrightarrow{\zeta}\nabla\varphi\mathrm{d}x\mathrm{d}t,\tag{2.13}$$

$$\iint_{Q_T}a(x)|\nabla u|^q\varphi\mathrm{d}x\mathrm{d}t=\iint_{Q_T}\nu\varphi\mathrm{d}x\mathrm{d}t.\tag{2.14}$$

令 $0\leqslant\psi\in C_0^\infty(Q_T)$, 使得在 $\varphi$ 的支集 $\mathrm{supp}\varphi$ 上, $\psi=1$. 令

$$v\in L^\infty(Q_T),\quad \rho^\alpha|\nabla v|^p\in L^1(Q_T),$$

则

$$\iint_{Q_T}\psi\rho_\varepsilon^\alpha(|\nabla u_\varepsilon|^{p-2}\nabla u_\varepsilon-|\nabla v|^{p-2}\nabla v)(\nabla u_\varepsilon-\nabla v)\mathrm{d}x\mathrm{d}t\geqslant0.\tag{2.15}$$

在 (2.11) 中选取 $\varphi=\psi u_\varepsilon$, 则有

$$\iint_{Q_T}\Big[-\frac12u_\varepsilon^2\psi_t+u_\varepsilon\rho_\varepsilon^\alpha|\nabla u_\varepsilon|^{p-2}\nabla\psi+\rho_\varepsilon^\alpha|\nabla u_\varepsilon|^p\psi+a(x)|\nabla u_\varepsilon|^q\psi u_\varepsilon\Big]\mathrm{d}x\mathrm{d}t=0.\tag{2.16}$$

结合以上两式,

$$\begin{aligned}&\iint_{Q_T}\Big(\frac12u_\varepsilon^2\psi_t-u_\varepsilon\rho_\varepsilon^\alpha|\nabla u_\varepsilon|^{p-2}u_\varepsilon\nabla\psi\Big)\mathrm{d}x\mathrm{d}t\\&-\iint_{Q_T}[\psi\rho_\varepsilon^\alpha|\nabla u_\varepsilon|^{p-2}\nabla u_\varepsilon\nabla v+a(x)|\nabla u_\varepsilon|^q\psi u_\varepsilon]\mathrm{d}x\mathrm{d}t\\&+\iint_{Q_T}\psi(\rho_\varepsilon^\alpha-\rho^\alpha)|\nabla v|^{p-2}\nabla v(\nabla u_\varepsilon-\nabla v)\mathrm{d}x\mathrm{d}t\\&-\iint_{Q_T}\psi\rho^\alpha|\nabla v|^{p-2}\nabla v(\nabla u_\varepsilon-\nabla v)\mathrm{d}x\mathrm{d}t\\=&\iint_{Q_T}\psi\rho_\varepsilon^\alpha(|\nabla u_\varepsilon|^{p-2}\nabla u_\varepsilon-|\nabla v|^{p-2}\nabla v)(\nabla u_\varepsilon-\nabla v)\mathrm{d}x\mathrm{d}t\\\geqslant&\,0.\end{aligned}$$

注意到

$$\begin{aligned}&\Big|\iint_{Q_T}\psi(\rho_\varepsilon^\alpha-\rho^\alpha)|\nabla v|^{p-2}\nabla v(\nabla u_\varepsilon-\nabla v)\mathrm{d}x\mathrm{d}t\Big|\\\leqslant&\sup_{(x,t)\in Q_T}\frac{\psi(\rho_\varepsilon^\alpha-\rho^\alpha)}{\rho^\alpha}\iint_{Q_T}\rho^\alpha|\nabla v|^{p-1}|\nabla u_\varepsilon-\nabla v|\mathrm{d}x\mathrm{d}t\\\leqslant&\sup_{(x,t)\in Q_T}\frac{\psi(\rho_\varepsilon^\alpha-\rho^\alpha)}{\rho^\alpha}\Big(\iint_{Q_T}\rho^\alpha|\nabla v|^p\mathrm{d}x\mathrm{d}t+\iint_{Q_T}\rho^\alpha|\nabla v|^{p-1}|\nabla u_\varepsilon|\mathrm{d}x\mathrm{d}t\Big)\\\leqslant&\sup_{(x,t)\in Q_T}\frac{\psi(\rho_\varepsilon^\alpha-\rho^\alpha)}{\rho^\alpha}\cdot\Big[\iint_{Q_T}\rho^\alpha|\nabla v|^p\mathrm{d}x\mathrm{d}t\\&+c\Big(\iint_{Q_T}\rho^\alpha|\nabla v|^p\mathrm{d}x\mathrm{d}t\Big)^{\frac{p-1}{p}}\Big(\iint_{Q_T}\rho^\alpha|\nabla u_\varepsilon|^p\mathrm{d}x\mathrm{d}t\Big)^{\frac1p}\Big]\end{aligned}$$

在 $\varepsilon\to0$ 时趋于 0. 于是有

$$\iint_{Q_T}\Big(\frac12u^2\psi_t-u\overrightarrow{\zeta}\nabla\psi\Big)\mathrm{d}x\mathrm{d}t-\iint_{Q_T}(\psi\overrightarrow{\zeta}\nabla v+v\psi u)\mathrm{d}x\mathrm{d}t$$

$$
\begin{aligned}
&-\iint_{Q_T}\psi\rho^{\alpha}|\nabla v|^{p-2}\nabla v(\nabla u-\nabla v)\mathrm{d}x\mathrm{d}t\\
\geqslant{}&0. \qquad (2.17)
\end{aligned}
$$

通过一个极限过程, 可以在 (2.12) 中令 $\varphi=\psi u$, 于是有

$$
\begin{aligned}
&\iint_{Q_T}(u_t\psi u+\overrightarrow{\zeta}\nabla(\psi u)+\nu\psi u)\mathrm{d}x\mathrm{d}t\\
={}&\iint_{Q_T}\Big(-\frac{1}{2}u^2\psi_t+\overrightarrow{\zeta}(u\nabla\psi+\psi\nabla u)+\nu\psi u\Big)\mathrm{d}x\mathrm{d}t\\
={}&0. \qquad (2.18)
\end{aligned}
$$

由 (2.17)–(2.18) 得

$$
\iint_{Q_T}\psi(\overrightarrow{\zeta}-\rho^{\alpha}|\nabla v|^{p-2}\nabla v)(\nabla u-\nabla v)\mathrm{d}x\mathrm{d}t\geqslant 0. \qquad (2.19)
$$

令 $v=u-\lambda\phi$, $\lambda>0$, $\varphi\in C_0^{\infty}(Q_T)$, 则

$$
\iint_{Q_T}\psi[\overrightarrow{\zeta}-\rho^{\alpha}|\nabla(u-\lambda\varphi)|^{p-2}\nabla(u-\lambda\varphi)]\nabla\varphi\mathrm{d}x\mathrm{d}t\geqslant 0.
$$

令 $\lambda\to 0$, 得到

$$
\iint_{Q_T}\psi(\overrightarrow{\zeta}-\rho^{\alpha}|\nabla u|^{p-2}\nabla u)\nabla\varphi\mathrm{d}x\mathrm{d}t\geqslant 0.
$$

如果 $\lambda<0$, 类似地, 可以得到

$$
\iint_{Q_T}\psi(\overrightarrow{\zeta}-\rho^{\alpha}|\nabla u|^{p-2}\nabla u)\nabla\varphi\mathrm{d}x\mathrm{d}t\leqslant 0.
$$

所以

$$
\iint_{Q_T}\psi(\overrightarrow{\zeta}-\rho^{\alpha}|\nabla u|^{p-2}\nabla u)\nabla\varphi\mathrm{d}x\mathrm{d}t=0.
$$

故 (2.13) 得证, 并且

$$
\overrightarrow{\zeta}=\rho^{\alpha}|\nabla u|^{p-2}\nabla u. \qquad (2.20)
$$

以上的方法其实就是采用普通的发展的 $p$-Laplace 方程解的存在性证明一样的方法. 就普通的发展的 $p$-Laplace 方程而言, 其粘性解 $u_\varepsilon$ 还有如下的性质: $u_\varepsilon\to u$ 在 $W^{1,p}(\Omega)$ 中强收敛.

下面我们对本方程做类似的讨论. 因为 $p>2$, 熟知有常数 $c$, 使得

$$
|\nabla u_\varepsilon-\nabla u|^p\leqslant c(|\nabla u_\varepsilon|^{p-2}\nabla u_\varepsilon-|\nabla u|^{p-2}\nabla u)(\nabla u_\varepsilon-\nabla u),
$$

所以, 对于任意的紧子集 $\Omega_1\subset\Omega$, $d_1=\mathrm{dist}(\Omega_1,\partial\Omega)$,

$$
\begin{aligned}
&\int_0^T\int_{\Omega_1}|\nabla u_\varepsilon-\nabla u|^p\mathrm{d}x\mathrm{d}t\\
\leqslant{}&c\int_0^T\int_{\Omega_1}(|\nabla u_\varepsilon|^{p-2}\nabla u_\varepsilon-|\nabla u|^{p-2}\nabla u)(\nabla u_\varepsilon-\nabla u)\mathrm{d}x\mathrm{d}t
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}&= cd_1^{-\alpha}\int_0^T\int_{\Omega_1} d_1^{\alpha}(|\nabla u_\varepsilon|^{p-2}\nabla u_\varepsilon - |\nabla u|^{p-2}\nabla u)(\nabla u_\varepsilon - \nabla u)\mathrm{d}x\mathrm{d}t\\
&\leqslant d_1^{-\alpha}\int_0^T\int_{\Omega_1}\rho^{\alpha}(|\nabla u_\varepsilon|^{p-2}\nabla u_\varepsilon - |\nabla u|^{p-2}\nabla u)(\nabla u_\varepsilon - \nabla u)\mathrm{d}x\mathrm{d}t\\
&\leqslant d_1^{-\alpha}\int_0^T\int_{\Omega}\rho^{\alpha}(|\nabla u_\varepsilon|^{p-2}\nabla u_\varepsilon - |\nabla u|^{p-2}\nabla u)(\nabla u_\varepsilon - \nabla u)\mathrm{d}x\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

由于前面已经证明 $\rho^{\alpha}|\nabla u_\varepsilon|^{p-2}\nabla u_\varepsilon \to \rho^{\alpha}|\nabla u|^{p-2}\nabla u$ 于 $L^1(0,T;L^{\frac{p}{p-1}}(\Omega))$ 上弱收敛, 所以由上式知道

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_s^t\int_{\Omega_1}|\nabla u_\varepsilon - \nabla u|^p\mathrm{d}x\mathrm{d}t = 0.$$

由 $\Omega_1\subset\Omega$ 的任意性, $u_\varepsilon\to u$ 在 $L^1(0,T;W^{1,p}_{\mathrm{loc}}(\Omega))$ 中强收敛. 于是 $\nabla u_\varepsilon\to\nabla u$, a.e. $Q_T$. 又因为 $2q<p$, 显然 $\nabla u_\varepsilon,\nabla u\in L^q_{\mathrm{loc}}(\Omega)$, 于是对于任何的 $\varphi\in C_0^{\infty}(Q_T)$,

$$\begin{aligned}&\Big|\iint_{Q_T}[a(x)|\nabla u|^q-\nu]\varphi\mathrm{d}x\mathrm{d}t\Big|\\
&=\lim_{\varepsilon\to 0}|[a(x)|\nabla u|^q - a(x)|\nabla u_\varepsilon|^q]\varphi\mathrm{d}x\mathrm{d}t|\\
&=0.\end{aligned}\tag{2.21}$$

于是 (2.14) 也得证.

故 $u$ 满足 (1.7). 同时类似于一般发展的 $p$-Laplace 方程的讨论 [13−14], 初值条件 (1.8) 也成立. 故 $u$ 是方程 (1.1) 满足初值条件 (1.4) 的弱解.

## 3 唯一性的证明

我们证明唯一性. 设 $u$ 和 $v$ 是方程 (1.1) 具不同初值条件 $u_0(x),v_0(x)$ 的两个弱解, 从弱解的定义知, $\rho^{\alpha}|\nabla u|^p\in L^1(Q_T)$, $\rho^{\alpha}|\nabla v|^p\in L^1(Q_T)$, 并有

$$\begin{aligned}&\iint_{Q_T}\varphi\frac{\partial(u-v)}{\partial t}\mathrm{d}x\mathrm{d}t\\
&=-\iint_{Q_T}\rho^{\alpha}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u-|\nabla v|^{p-2}\nabla v)\cdot\nabla\varphi\mathrm{d}x\mathrm{d}t\\
&\quad-\iint_{Q_T}a(x)(|\nabla u|^q-|\nabla v|^q)\varphi\mathrm{d}x\mathrm{d}t\end{aligned}\tag{3.1}$$

对任何 $\varphi$ 成立. 对于充分小的 $\lambda>0$, 令

$$\xi_\lambda = [\mathrm{dist}(x,\Omega\setminus\Omega_\lambda)]^{\beta},\tag{3.2}$$

其中

$$\Omega_\lambda=\{x\in\Omega:\rho(x)>\lambda\},\quad \beta\geqslant\max\Big\{\frac{p-\alpha}{p-1},\alpha\Big(\frac{p}{q}\Big)^2\Big\}.$$

显然, 当 $\lambda\to 0$ 时, $\xi_\lambda\to[\mathrm{dist}(x,\partial\Omega)]^{\beta}=\rho^{\beta}$.

通过一个极限过程, 可以选取 $\chi_{[\tau,s]}\xi_\lambda(u_\varepsilon - v_\varepsilon)$ 作为检验函数, 其中 $\chi_{[\tau,s]}$ 是 $[\tau,s] \subset (0,T)$ 的特征函数, $u_\varepsilon, v_\varepsilon$ 分别是 $u, v$ 的磨光逼近函数. 显然

$$u_\varepsilon \in L^\infty(Q_T)\, v_\varepsilon \in L^\infty(Q_T), \quad u_\varepsilon \to u, \quad v_\varepsilon \to v, \quad \text{a.e. 在 } Q_T \text{中},$$

$$\|\nabla u_\varepsilon\|_{L^p(\Omega_\lambda)} \leqslant c(\lambda)\|\nabla u\|_{L^p(\Omega_\lambda)}, \quad \|\nabla v_\varepsilon\|_{L^p(\Omega_\lambda)} \leqslant c(\lambda)\|\nabla v\|_{L^p(\Omega_\lambda)},$$

$u_\varepsilon \rightharpoonup u$, $v_\varepsilon \rightharpoonup v$ 在 $W^{1,p}(\Omega_\lambda)$ 中弱收敛.

对 $[\tau,s] \subset (0,T)$, 记 $Q_{\tau s} = \Omega \times [\tau,s]$, 则

$$\begin{aligned}
&\iint_{Q_{\tau s}} \xi_\lambda(u_\varepsilon - v_\varepsilon)(u-v)_t \mathrm{d}x\mathrm{d}t \\
=& -\iint_{Q_{\tau s}} \rho^\alpha(|\nabla u|^{p-2}\nabla u - |\nabla v|^{p-2}\nabla v)\cdot\nabla(u_\varepsilon - v_\varepsilon)\xi_\lambda \mathrm{d}x\mathrm{d}t \\
&-\iint_{Q_{\tau s}} \rho^\alpha(u_\varepsilon - v_\varepsilon)(|\nabla u|^{p-2}\nabla u - |\nabla v|^{p-2}\nabla v)\cdot\nabla\xi_\lambda \mathrm{d}x\mathrm{d}t \\
&-\iint_{Q_{\tau s}} a(x)(|\nabla u|^q - |\nabla v|^q)\xi_\lambda(u_\varepsilon - v_\varepsilon)\mathrm{d}x\mathrm{d}t.
\end{aligned}\tag{3.3}$$

显然, 在 $\Omega_\lambda$ 内, 由弱收敛定义,

$$\begin{aligned}
&\lim_{\varepsilon\to 0}\iint_{Q_{\tau s}} \rho^\alpha(|\nabla u|^{p-2}\nabla u - |\nabla v|^{p-2}\nabla v)\cdot\nabla(u_\varepsilon - v_\varepsilon)\xi_\lambda \mathrm{d}x\mathrm{d}t \\
=&\iint_{Q_{\tau s}} \rho^\alpha(|\nabla u|^{p-2}\nabla u - |\nabla v|^{p-2}\nabla v)\cdot\nabla(u-v)\xi_\lambda \mathrm{d}x\mathrm{d}t \\
\geqslant& 0.
\end{aligned}\tag{3.4}$$

又由控制收敛定理, 有

$$\begin{aligned}
&\iint_{Q_{\tau s}} \rho^\alpha(u_\varepsilon - v_\varepsilon)(|\nabla u|^{p-2}\nabla u - |\nabla v|^{p-2}\nabla v)\cdot\nabla\xi_\lambda \mathrm{d}x\mathrm{d}t \\
=&\iint_{Q_{\tau s}} \rho^\alpha(u-v)(|\nabla u|^{p-2}\nabla u - |\nabla v|^{p-2}\nabla v)\cdot\nabla\xi_\lambda \mathrm{d}x\mathrm{d}t.
\end{aligned}\tag{3.5}$$

再令 $\lambda \to 0$, 有

$$\begin{aligned}
&\lim_{\lambda\to 0}\Big|\iint_{Q_{\tau s}} \rho^\alpha(u-v)(|\nabla u|^{p-2}\nabla u - |\nabla v|^{p-2}\nabla v)\cdot\nabla\xi_\lambda \mathrm{d}x\mathrm{d}t\Big| \\
\leqslant&\iint_{Q_{\tau s}} \rho^\alpha|u-v||\,|\nabla u|^{p-2}\nabla u - |\nabla v|^{p-2}\nabla v||\nabla\xi_\lambda|\mathrm{d}x\mathrm{d}t \\
=&\,\beta\iint_{Q_{\tau s}} \rho^{\alpha+\beta-1}|u-v||\,|\nabla u|^{p-2}\nabla u - |\nabla v|^{p-2}\nabla v||\nabla\rho|\mathrm{d}x\mathrm{d}t \\
\leqslant&\Big(\iint_{Q_{\tau s}} \rho^\alpha(|\nabla u|^p + |\nabla v|^p)\mathrm{d}x\mathrm{d}t\Big)^{\frac{p-1}{p}}\Big(\iint_{Q_{\tau s}} \rho^{\alpha+p(\beta-1)}|u-v|^p\mathrm{d}x\mathrm{d}t\Big)^{\frac{1}{p}}.
\end{aligned}\tag{3.6}$$

这里我们用到了 $|\nabla\rho| = 1$ 几乎处处成立. 由于假定了 $\beta \geqslant \frac{p-\alpha}{p-1}$, 利用 $|u-v|$ 的有界性和 Hölder 不等式, 通过对 $1<p<2$ 和 $p \geqslant 2$ 的分别讨论, 易知存在 $l>1$, 使得

$$\Big(\iint_{Q_{\tau s}} \rho^{\alpha+p(\beta-1)}|u-v|^p\mathrm{d}x\mathrm{d}t\Big)^{\frac{1}{p}} \leqslant \Big(\iint_{Q_{\tau s}} \rho^\beta|u-v|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t\Big)^{\frac{1}{l}}.\tag{3.7}$$

同时,

$$\begin{aligned}
&\lim_{\lambda\to 0}\lim_{\varepsilon\to 0}\iint_{Q_{\tau s}} a(x)(|\nabla u|^q-|\nabla v|^q)(u_\varepsilon-v_\varepsilon)\xi_\lambda \mathrm{d}x\mathrm{d}t\\
=&\lim_{\lambda\to 0}\iint_{Q_{\tau s}} a(x)(|\nabla u|^q-|\nabla v|^q)(u-v)\xi_\lambda \mathrm{d}x\mathrm{d}t\\
=&\iint_{Q_{\tau s}} a(x)(|\nabla u|^q-|\nabla v|^q)(u-v)\rho_\beta \mathrm{d}x\mathrm{d}t\\
\leqslant&\Big(\iint_{Q_{\tau s}}\rho^\alpha(|\nabla u|^p+|\nabla v|^p)\mathrm{d}x\mathrm{d}t\Big)^{\frac{q}{p}}\Big(\iint_{Q_{\tau s}}(\rho^{\beta-\frac{\alpha p}{q}}a(x)|u-v|)^{\frac{p}{p-q}}\mathrm{d}x\mathrm{d}t\Big)^{\frac{p-q}{p}}\\
\leqslant& c\Big(\iint_{Q_{\tau s}}\rho^{\frac{p-q}{pq}(q\beta-p\alpha)}[a(x)|u-v|]^{\frac{p}{p-q}}\mathrm{d}x\mathrm{d}t\Big)^{\frac{p-q}{p}}.
\end{aligned}\tag{3.8}$$

由于假定了 $\beta\geqslant\alpha\big(\frac{p}{q}\big)^2$, 可知

$$\Big(\beta-\frac{\alpha p}{q}\Big)\frac{p}{p-q}\geqslant\beta.$$

利用 $a(x)$ 和 $|u-v|$ 的有界性、Hölder 不等式, 通过对 $1<p<2$ 和 $p\geqslant 2$ 的分别讨论易知, 存在 $l>1$, 使得

$$\begin{aligned}
&\Big(\iint_{Q_{\tau s}}\rho^{\frac{p-q}{pq}(q\beta-p\alpha)}[a(x)|u-v|]^{\frac{p}{p-q}}\mathrm{d}x\mathrm{d}t\Big)^{\frac{p-q}{p}}\\
\leqslant& c\Big(\iint_{Q_{\tau s}}\rho^{\frac{p-q}{pq}(q\beta-p\alpha)}|u-v|^{\frac{p}{p-q}}\mathrm{d}x\mathrm{d}t\Big)^{\frac{p-q}{p}}\\
\leqslant& c\Big(\iint_{Q_{\tau s}}\rho^{\beta}|u-v|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t\Big)^{\frac{1}{l}}.
\end{aligned}\tag{3.9}$$

最后, 由于 $u_t\in L^2(Q_T), v_t\in L^2(Q_T)$, 利用 Lebesgue 控制收敛定理,

$$\begin{aligned}
&\lim_{\lambda\to 0}\lim_{\varepsilon\to 0}\iint_{Q_{\tau s}}(u_\varepsilon-v_\varepsilon)\xi_\lambda(u_t-v_t)\mathrm{d}x\mathrm{d}t\\
=&\iint_{Q_{\tau s}}\rho^\beta(u-v)(u_t-v_t)\mathrm{d}x\mathrm{d}t\\
=&\frac12\int_\tau^s\frac{\partial}{\partial t}\int_\Omega\rho^\beta|u-v|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t\\
=&\frac12\int_\Omega\rho^\beta|u(x,s)-v(x,s)|^2\mathrm{d}x-\frac12\int_\Omega\rho^\beta|u(x,\tau)-v(x,\tau)|^2\mathrm{d}x.
\end{aligned}\tag{3.10}$$

于是有

$$\begin{aligned}
&\frac12\int_\Omega\rho^\beta|u(x,s)-v(x,s)|^2\mathrm{d}x-\frac12\int_\Omega\rho^\beta|u(x,\tau)-v(x,\tau)|^2\mathrm{d}x\\
\leqslant& c\Big(\iint_{Q_{\tau s}}\rho^\beta|u-v|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t\Big)^{\frac1k},
\end{aligned}\tag{3.11}$$

其中 $k<1$. 由此易知

$$\int_\Omega\rho^\beta|u(x,s)-v(x,s)|^2\mathrm{d}x\leqslant c\int_\Omega\rho^\beta|u(x,\tau)-v(x,\tau)|^2\mathrm{d}x.\tag{3.12}$$

令 $\tau \to 0$, 则有

$$\begin{aligned}\int_\Omega \rho^\beta |u(x,s)-v(x,s)|^2 \mathrm{d}x &\leqslant c\int_\Omega \rho^\beta |u(x,0)-v(x,0)|^2 \mathrm{d}x\\ &\leqslant c\int_\Omega |u_0(x)-v_0(x)|^2 \mathrm{d}x.\end{aligned} \tag{3.13}$$

由此可知解的唯一性成立.

**致谢** 感谢所有帮助过我们、关心我们的人.

## 参 考 文 献

[1] Yin J X, Wang C P. Properties of the boundary flux of a singular diffusion process [J]. *Chin Annl Math Ser B*, 2004, 25(2):175–182.

[2] 詹华税, 袁洪君, 边界退化的对流扩散方程 [J]. 吉林大学学报, 2015: 53(3):353–358.

[3] Zhan H S, Wen J. Evolutionary $p(x)$-Laplacian qeuation free from the limitation of the boundary value [J]. *Electronic J Differential Equations*, 2016, 143:1–13.

[4] Zhan H S, Wen J. Well-posedness of weak solutions to electrorheological fluid equations with degeneracy on the boundary [J]. *Electron J Differential Equations*, 2017, 13:1–15.

[5] Bertsch M, Dal Passo R, Ughi M. Discontinuous viscosity solutions of a degenerate parabolic equation [J]. *Trans Amer Math Soc*, 1990, 320:779–798.

[6] Zhou W, Cai S. The continuity of the viscosity of the Cauchy problem of a degenerate parabolic equation not in divergence form [J]. *J Jilin University* (*Natural Sci*), 2004, 42:341–345.

[7] Zhang Q, Shi P. Global solutions and self-similar solutions of semilinear parabolic equations with nonlinear gradient terms [J]. *Nonlinear Anal TMA*, 2010, 72:2744–2752.

[8] Zhan H S. On a parabolic equation related to the $p$-Laplacian [J]. *Boundary Value Problems*, 2016, 78, DOI:10.1186/s13661-016-0587-6.

[9] Zhan H S. On the evolutionary $p$-Laplacian equation with a partial boundary value condition [J]. *J Inequalities and Applications*, 2018, 227, https://doi.org/10.1186/s13660-018-1820-x.

[10] Yin J X, Wang C P. Evolutionary weighted $p$-Laplacian with boundary degeneracy [J]. *J Differential Equations*, 2007, 237:421–445.

[11] Li Z, Yan B, Gao W. Existence of solutions to a parabolic $p(x)$-laplace equation with convection term via-estimates [J]. *Electron J Differential Equations*, 2015, 46:1–21.

[12] Chen M Y, Zhao J N. On the Cauchy problem of evolution $p$-Laplacian equation with nonlinear gradient term [J]. *Chin Annl Math Ser B*, 2009, 30(1):1–16.

[13] Wu Z, Zhao J, Yin J, et al. Nonlinear diffusion equations [M]. Singapore: Word Scientific Publishing Company, 2001.

[14] 詹华税. 对流扩散方程的解 [J]. 数学年刊 A 辑, 2013, 34(2):235–256.

# On a Diffusion Equation with a Damping Term

ZHAN Huashui[1] YUAN Hongjun[2]

[1]School of Applied Mathematics, Xiamen University of Technology, Xiamen 361024, Fujian, China. E-mail: 2012111007@xmut.edu.cn

[2]College of Mathematics, Jilin University, Changchun 130012, China. E-mail: hjy@jlu.edu.cn

**Abstract** The authors study diffusion equation with a damping term

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \mathrm{div}(\rho^{\alpha}|\nabla u|^{p-2}\nabla u) - a(x)|\nabla u|^{q},$$

where $\alpha > 0$, $q < p$, $\rho(x) = \mathrm{dist}(x, \partial\Omega)$ is the distance function from the boundary $\partial\Omega$, $a(x)$ is a nonnegative bounded function. By the parabolic regularized method, the existence of the weak solution is obtained. By choosing a suitable test function, the uniqueness of the weak solution is proved without any boundary value condition.

**Keywords** Week solution, Damping term, Initial-boundary value problem, Uniqueness

**2000 MR Subject Classification** 35K65, 35K55