数 学 年 刊 A 辑
2021, 42(2):201–228
DOI: 10.16205/j.cnki.cama.2021.0017

tt^* 几何的等单值 τ 函数*

唐鑫星[1]

提要 在本文中, 作者定义了 Landau-Ginzburg B-模型中的 tt^* 几何结构对应的等单值 τ 函数. 基于 Getzler, Dubrovin-Zhang 在亏格 1 的 Gromov-Witten 理论的部分工作, 作者将所定义的 τ 函数和物理上给出的亏格 1 的 Landau-Ginzburg B-模型的生成函数联系起来.

关键词 等单值 τ 函数, 等单值形变, tt^* 几何
MR (2000) 主题分类 34M35, 34M56
中图法分类 O175.29
文献标志码 A
文章编号 1000-8314(2021)02-0201-28

1 引 言

对于一个耦合重力的 2 维拓扑场论 (比如, Gromov-Witten 理论), 除了初始态 $\phi_{1,0}=1,\phi_{2,0},\cdots,\phi_{n,0}$ 之外, 还有无穷多个重力派生态 $\phi_{1,p},\cdots,\phi_{n,p},p=1,2,\cdots$. 记 $T^{\alpha,p}$ 为相应于 $\phi_{\alpha,p}$ 的耦合常数, 则总体的自由能可表示为关联子的生成函数:

$$\mathcal{F}=\sum_{g=0}^{\infty}\mathcal{F}_g=\sum_{g=0}^{\infty}\langle \mathrm{e}^{\sum T^{\alpha,p}\phi_{\alpha,p}}\rangle_g,$$

其中 $\langle\cdots\rangle_g:=\int_{\Sigma_g}\cdots\mathrm{e}^{-S[\psi]}[\mathrm{d}\psi]$.

众所周知, $\mathcal{F}_0$ 给出 Dubrovin-Zhang 的主梯队的解. 初始自由能 $F(t)$ 定义为:

$$F(t)=\mathcal{F}_0|_{T^{\alpha,0}=t^\alpha,T^{\alpha,p>0}=0},$$

它满足 WDVV 方程, 并且给出了小相空间的 Frobenius 流形结构.

在文 [1] 中, Dubrovin-Zhang 利用亏格 1 的总能量 $\mathcal{F}_1(T)$ 的公式, 研究了主梯队的亏格 1 量子修正. $\mathcal{F}_1(T)$ 的公式如下:

$$\mathcal{F}_1(T)=\Big[\frac{1}{24}\log\det M_{\alpha\beta}(t,\partial_X t)+G(t)\Big]_{t^\alpha=\frac{\partial^2\mathcal{F}_0}{\partial T^{1,0}\partial T^{\alpha,0}},\ \alpha=1,\cdots,n},$$

其中

$$M_{\alpha\beta}(t,\partial_X t)=C_{\alpha\beta\gamma}\partial_X t^\gamma,\quad C_{\alpha\beta\gamma}=\partial_\alpha\partial_\beta\partial_\gamma F(t),$$

第一项 $\log\det M_{\alpha\beta}(t,\partial_X t)$ 限制在小相空间 $\{T^{\alpha,p>0}=0\}$ 上为 0, 第二项 $G(t)$ 描述了相应的 Gromov-Witten 理论的亏格 1 不变量[2], Dubrovin-Zhang 称其为 Frobenius 流形的 G

本文 2018 年 9 月 7 日收到, 2020 年 11 月 11 日收到修改稿.
[1]北京大学北京国际数学研究中心, 北京 100871. E-mail: xxtang@pku.edu.cn

函数. 当 Frobenius 流形结构半单时, Dubrovin-Zhang 给出了 $G(t)$ 的计算公式:

$$G(t)=\log\frac{\tau_I}{J^{\frac{1}{24}}},$$

其中 J 是典范坐标和光滑坐标变换的 Jacobi 行列式, τ_I 是半单 Frobenius 流形结构相应的等单值形变给出的 τ 函数.

因为 tt^* 几何结构刻画了 B-模型的亏格 0 的信息, 也有一个等单值形变的解释[3−4], 所以我们也可以研究相应的 τ 函数, 并猜测其与 B-模型的亏格 1 的信息相关. 在物理文献中, Cecotti-Vafa[5] 研究了 Dirac 方程的 τ 函数 (定义为耦合某个联络的 Dirac 算子的行列式), 其描述了缩放极限下的 2 维 Ising 模型. Cecotti-Vafa 通过 tt^* 方程将大规模 Ising 模型和 2 维 $N=2$ 大规模超对称量子场论联系起来. 最后他们将修改后的 τ 函数解释为一类超对称指标, 并和亏格 1 的量子纠正联系起来. $\log\tau$ 也可以解释为环形的 tt^* 度量的 Kähler 势函数.

在本文中, 我们以数学的方式, 重新定义 tt^* 几何结构给出的 τ 函数. 给定一个非退化的拟齐次多项式 $f_0:\mathbb{C}^n\to\mathbb{C}$, 在 Landau-Ginzburg 模型中 f_0 称为超位势函数. 因为 Landau-Ginzburg B-模型研究 f_0 的形变. 我们首先考虑 f_0 的 relevant 形变和 marginal 形变 (具体定义参见 [2]), 则我们能得到形变空间上的 Hodge 丛的 tt^* 几何结构. 当 f 是 f_0 的普适形变时, Hertling[6] 利用代数的方法证明了 tt^* 几何结构可以延拓到普适形变空间上. 在普适形变空间对应的 Hodge 丛的典范基下, 我们可以写出相应的 tt^* 平坦联络的联络矩阵 (见第五节):

$$-g\partial_i g^{-1}\mathrm{d}u^i+\beta C_i\mathrm{d}u^i+(-Q+\beta\mathcal{U})\mathrm{d}\beta+\overline{\beta C_{\bar{i}}}\mathrm{d}\overline{u}^{\bar{i}}+\overline{\beta\mathcal{U}}\mathrm{d}\beta.$$

进一步, 我们可以定义一个 1-形式如下:

$$\Upsilon=\frac{1}{4}\operatorname{tr}(Qg\partial g^{-1})-\frac{1}{4}\sum_i Q_{ii}(g\partial g^{-1})_{ii}+\frac{1}{2}|\beta|^2\operatorname{tr}(\overline{\mathcal{U}}C).$$

我们有如下主要定理.

定理 1.1 f_0 是 $\mathbb{C}^n$ 上的一个非退化的拟齐次多项式, f 是它的普适形变, 则相应的 $\Upsilon+\overline{\Upsilon}$ 是一个形变空间上的闭的 1-形式. 因此我们可以如下定义等单值变换 τ 函数:

$$\mathrm{d}\log\tau=\frac{1}{4}\operatorname{tr}(Qg\partial g^{-1})-\frac{1}{4}\sum_i Q_{ii}(g\partial g^{-1})_{ii}+\frac{1}{2}|\beta|^2\operatorname{tr}(\overline{\mathcal{U}}C)+c.c.$$

进一步, τ 函数满足如下二阶微分方程:

$$\partial_i\overline{\partial}_{\bar{j}}\log\tau=\frac{1}{2}|\beta|^2\operatorname{tr}C_i\overline{C}_{\bar{j}}.\tag{1.1}$$

等式 (1.1) 的右边 $\operatorname{tr}C_i\overline{C}_{\bar{j}}$ 在文 [5] 中被称为环形 tt^* 度量. 由此可知, 我们定义的等单值变换 τ 函数和 LG B-模型的亏格 1 的信息相关. 在文 [7] 中, 通过研究文 [8] 中提出奇

点相关的二阶扭转型不变量 $T^2(f)$, 证明了 $T^2(f)$ 也满足上述 $\partial\overline{\partial}$ 方程 (1.1). 我们在文末的注 5.2 给出更多的讨论.

这篇文章的结构如下: 在第二节, 我们回忆如何从 Riemann-Hilbert 问题和 Birkhoff 问题的可积形变的解定义等单值变换的 τ 函数. 在第三节, 我们介绍半单的 Frobenius 流形对应的等单值变换 τ 函数, 以及 Dubrovin-Zhang 给出的其和 Getzler G 函数的公式. 在第四节, 我们介绍从 LG B-模型出发在奇点形变空间的 Hodge 丛上得到的 tt^* 几何结构. 为了具体研究该几何结构, 我们会引入全纯基和典范基. 进一步, 我们构造 tt^* 几何给出的等单值 τ 函数, 证明它满足上述的二阶微分方程, 该方程与复共轭极化下的亏格 1 的生成函数的全纯反常方程相似.

2　等单值形变

在这节中, 我们复习文 [9] 中关于等单值形变的一些基本结果以及普适形变下等单值变换 τ 函数的定义.

2.1　Riemann-Hilbert 问题的等单值形变下的解

给定复平面 $\mathbb{C}$ 上的一个有限点集 $\{u_1,\cdots,u_\mu\}$, 固定一个基点 $u^o\in\mathbb{C}\backslash\{u_1,\cdots,u_\mu\}$, 则给定基本群 $\pi_1(\mathbb{C}\backslash\{u_1,\cdots,u_\mu\},u^o)$ 的一个表示

$$\rho:\pi_1(\mathbb{C}\backslash\{u_1,\cdots,u_\mu\},u^o)\longrightarrow GL_\mu(\mathbb{C}),$$

等价于给定 μ 个可逆矩阵 $T_1,\cdots,T_\mu\in GL_\mu(\mathbb{C})$.

另一方面, 考虑如下的微分方程组:

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{y}}{\mathrm{d}s}=A(s)\mathbf{y},\tag{2.1}$$

其中 $A(s)$ 是规模为 $\mu\times\mu$ 的矩阵函数, 且每个矩阵元在 $\mathbb{C}\backslash\{u_1,\cdots,u_\mu\}$ 上全纯, $\mathbf{y}$ 是 $\mathbb{C}\backslash\{u_1,\cdots,u_\mu\}$ 上的一个全纯向量函数 $(y_1,\cdots,y_\mu)^{\mathrm{T}}$. 最简单的例子由 Fuchsian 系统给出, 即矩阵函数 $A(s)$ 只有一阶极点且形如

$$A(s)=-\sum_{i=1}^{\mu}\frac{A_i}{s-u_i},\quad A_i\in M_\mu(\mathbb{C}).$$

设 $Y(s)$ 是常微分方程组 (2.1) 的基本解矩阵. 在 $\mathbb{C}\backslash\{u_1,\cdots,u_n\}$ 中任选一条以 u^o 为基点的环路 γ, 我们考虑 $Y(s)$ 沿着 γ 的解析延拓. 因为微分方程的系数是单值的, 所以 $Y(s)$ 绕 γ 一圈的结果仍然是原方程组的基本解, 但是二者差一个线性变换

$$Y(s)\longrightarrow Y(s)T_\gamma,$$

其中 T_γ 仅依赖于 γ 在 $\pi_1(\mathbb{C}\backslash\{u_1,\cdots,u_\mu\},u^o)$ 中的同伦类.

定义 2.1 所有这样的常值矩阵 $\{T_\gamma\}$ 构成一个群, 称为是方程组 (2.1) 的单值群. 相应的同伦群表示

$$\begin{aligned}\pi_1(\mathbb{C}\backslash\{u_1,\cdots,u_\mu\},u^o) &\longrightarrow GL_\mu(\mathbb{C}),\\ [\gamma] &\longmapsto T_\gamma,\end{aligned}$$

称为单值表示.

著名的 Riemann-Hilbert 问题则是上述过程的一个反问题: 给定 μ 个可逆矩阵 $T_1,\cdots,T_\mu \in GL_d(\mathbb{C})$, 问是否存在矩阵 $A_1,\cdots,A_\mu \in M_d(\mathbb{C})$, 使得由矩阵 $T_1,\cdots,T_\mu$ 给出的基本群的表示同构于如下方程组给出的表示:

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{y}}{\mathrm{d}s}=\Big[-\sum_{i=1}^{\mu}\frac{A_i}{s-u_i}\Big]\mathbf{y}?$$

在加适当的条件下 (比如矩阵 T_i 都是二阶的, 或者 T_i 互相交换, 等等 (见 [10]), Riemann-Hilbert 问题是可解的.

现在我们把 A_i 视为 $\{u_i\}$ 和 $\{T_i\}$ 的函数, 那么随着 $u_1,\cdots,u_\mu$ 的变动, 是否能保证单值群不变?

这个问题的答案由 Schlesinger 方程组给出. 取基点为无穷远点 ∞, 则基本解 Y 满足以下微分方程组:

$$\frac{\partial}{\partial s}Y=-\sum_{i=1}^{\mu}\frac{A_i}{s-u_i}Y,$$
$$\frac{\partial}{\partial u_i}Y=\frac{A_i}{s-u_i}Y,$$

则兼容性条件 $\frac{\partial}{\partial u_i}\frac{\partial}{\partial s}Y=\frac{\partial}{\partial s}\frac{\partial}{\partial u_i}Y$ 给出了 Schlesinger 方程组

$$\frac{\partial A_i}{\partial u_j}=\begin{cases}-\dfrac{[A_i,A_j]}{u_i-u_j}, & i\neq j,\\ \displaystyle\sum_{k\neq j}\frac{[A_k,A_j]}{u_k-u_j}, & i=j,\end{cases}\tag{2.2}$$

也称为是保持单值群不变的形变方程.

在文 [11] 中, Schlesinger 变换被描述为离散的等单值形变, 且对于等单值形变, 有一个相应的 τ 函数. 在 Schlesinger 形变情形下, 其定义方式如下:

设 A_i 是方程组 (2.2) 的解, 则我们可以定义一个 1-形式 ω,

$$\omega=\frac{1}{2}\sum_{i<j}\operatorname{tr}A_iA_j\ \mathrm{d}\log(u_i-u_j).$$

命题 2.1 $\mathrm{d}\omega=0$.

由 ω 的闭性, 局部上我们可引入一个函数 τ_I(在相差积分常数的意义下).

定义 2.2　函数 τ_I 由如下等式给出

$$\mathrm{d}\log\tau_I=\omega, \tag{2.3}$$

这样的函数 τ_I 被称为一个等单值 τ 函数.

2.2 Birkhoff 问题的可积性形变下的解

在适当的条件下, Birkhoff 问题的解和 Riemann-Hilbert 的解在 Fourier 变换下相对应. 我们给出简单的回顾, 具体参见文 [9].

假设 $(\widehat{\mathbb{E}}^o,\widehat{\nabla}^o)$ 是 $\mathbb{P}^1$ 上的一个秩为 μ 的平坦的亚纯向量丛, 在基 ε^o 下, 联络矩阵 $\widehat{\Omega}^o$ 为:

$$\widehat{\Omega}^o=\Big(\frac{B_0^o}{z}+B_\infty\Big)\frac{\mathrm{d}z}{z},$$

其中 $B_0^o,B_\infty\in M_\mu(\mathbb{C})$, 特别地, $B_0^o=\mathrm{diag}(u^{o1},\cdots,u^{o\mu})$.

假设 M 是一个 n 维连通复流形. $(\widehat{\mathbb{E}},\widehat{\nabla})$ 是 $\mathbb{P}^1\times M$ 上的一个亚纯向量丛, 带有一个亚纯联络, 沿着 $\{0\}\times M$ 为一阶极点, 沿着 $\{\infty\}\times M$ 为对数极点.

定理 2.1　(见 [9, 第六章定理 2.1]) 假设条件如上, 存在 M 上的一个不包含 u^o 的超曲面 Θ 和 $\Gamma(\mathbb{P}^1\times(M\backslash\Theta))$ 上的唯一一组基 ε, 满足 $\varepsilon(u^o)=\varepsilon^o$, 使得 $\widehat{\nabla}$ 在这组基下的联络矩阵为:

$$\widehat{\Omega}=\frac{C_i(u)\mathrm{d}u^i}{z}+\Big(\frac{B_0(u)}{z}+B_\infty\Big)\frac{\mathrm{d}z}{z},$$

满足 $B_0(u^o)=B_0^o$, 其中 $u^1,\cdots,u^n$ 是 M 上的局部坐标, $B_0(u),C_i(u)$ 是 $M\backslash\Theta$ 上的全纯矩阵函数且在 Θ 上亚纯.

特别地, 我们知道存在普适形变 $(\widehat{\mathbb{E}},\widehat{\nabla})$, 其中 $\dim M=\mu$. 由文 [9, 定理 III 2.15], 存在形式依赖于 z 的基变换, 将 $\{\varepsilon\}$ 下的联络矩阵 $\widehat{\nabla}$ 转换为 $\widetilde{\Omega}'$,

$$\widetilde{\Omega}'=-\mathrm{d}\Big(\frac{\Delta_0(u)}{z}\Big)+\Delta_\infty\frac{\mathrm{d}z}{z},$$

其中 $\Delta_0(u)=\mathrm{diag}(u^1,\cdots,u^\mu)$, Δ_∞ 是 B_∞ 的对角部分.

令 $\widehat{P}(u,z)=\sum\limits_{k=0}^{\infty}P_k(u)z^k$ 为基变换对应的矩阵, 即

$$\widehat{\Omega}=\widehat{P}\widetilde{\Omega}'\widehat{P}^{-1}-\mathrm{d}\widehat{P}\widehat{P}^{-1}.$$

比较 z^{-2},z^{-1},z^0 的系数, 得到

$$\begin{aligned}&P_0\Delta_0=B_0P_0,\quad P_1\Delta_0-B_0P_1=B_\infty P_0-P_0\Delta_\infty,\\&C_iP_0=-P_0D_i,\quad \frac{\partial P_0}{\partial u^i}=-C_iP_1-P_1D_i,\end{aligned}$$

其中 $D_i=\partial_{u^i}\Delta_0$.

考虑基变换矩阵的 0 阶部分, 即 P_0. 事实上, P_0 是平坦基和典范基之间的基变换. 考虑 $\widehat{\nabla}$ 在 $e=\varepsilon P_0$ 下的联络矩阵

$$\widehat{\Omega}'=P_0^{-1}\widehat{\Omega}P_0+P_0^{-1}\mathrm{d}P_0.$$

方便起见, 令 $T(u)=-P_0(u)^{-1}P_1(u)$, 得到

$$\widehat{\Omega}'=-\mathrm{d}\Big(\frac{\Delta_0}{z}\Big)+(\Delta_\infty+[\Delta_0,T])\frac{\mathrm{d}z}{z}+[T,\mathrm{d}\Delta_0].$$

命题 2.2 $\widehat{\nabla}$ 是平坦的当且仅当矩阵函数 T 满足如下方程:

$$\begin{aligned}&\frac{\partial T_{ij}}{\partial u^k}=-T_{ik}T_{kj},\quad i,j,k\text{ 互不相同},\\&\sum_{k=1}^{\mu}\frac{\partial T_{ij}}{\partial u^k}=0.\end{aligned}\tag{2.4}$$

令 $M(u)=[\Delta_0,T]$, 则 $M_{ij}=(u^i-u^j)T_{ij}$. 当 $u^i\neq u^j$ 时, T 和 M 相互决定.

现在我们用 Fourier 变换联系 Birkhoff 问题的解和 Riemann-Hilbert 的解, 并用 Birkhoff 的普适形变的解表示 τ 函数 (2.3).

给定 $\big(\widehat{\mathbb{E}}^o,\widehat{\nabla}^o,\varepsilon^o,\big(\frac{B_0^o}{z}+B_\infty\big)\frac{\mathrm{d}z}{z}\big)$ 如上. 将 s 在 $\widehat{\mathbb{E}}^o$ 上的作用定义为 $z^2\nabla^o_{\partial_z}$, 则 $\widehat{\mathbb{E}}^o$ 变成一个 $\mathbb{C}[s]$-模, 记为 $\mathbb{E}^o$. 易知它是一个秩为 μ 的自由 $\mathbb{C}[s]$- 模, 且 z^{-1} 的作用定义了其上一个亚纯联络 ∇^o, 所有的奇点 (包括 $s=\infty$) 都是正则的. 我们可写出 ∇^o 在 ε^o 下的联络矩阵

$$(B_\infty-\mathrm{Id})(s\mathrm{Id}-B_0^o)^{-1}\mathrm{d}s=\sum_{i=1}^{\mu}\frac{(B_\infty-\mathrm{Id})D_i}{s-u^{oi}}\mathrm{d}s.$$

令 $A_i^o=(B_\infty-\mathrm{Id})D_i$, 注意到这是一个秩为 1 的矩阵.

令 $(\widehat{\mathbb{E}},\widehat{\nabla})$ 为 $(\widehat{\mathbb{E}}^o,\widehat{\nabla}^o)$ 的被 M_μ 参数化的普适形变, 则 $\widehat{\mathbb{E}}$ 是一个秩为 μ 的 $\mathcal{O}_{M_\mu}[z]$-模, 在 ε 下的联络矩阵为:

$$\Big(\frac{B_0(u)}{z}+B_\infty\Big)\frac{\mathrm{d}z}{z}+\frac{C_i(u)\mathrm{d}u^i}{z}.$$

同上, 记 s 的作用为 $z^2\nabla_{\partial_z}$, ∂_s 的作用为 z^{-1}, u^i 和 ∂_{u^i} 的作用不变, 则 $\widehat{\mathbb{E}}$ 变成了一个自由的 $\mathcal{O}_{M_\mu}[s]$-模, ε 给出它的一组基. 我们重新将其记为 $\mathbb{E}$, 配上联络 ∇.

如果我们将 ε 写成一列, 则 ∇ 相应的联络矩阵 Ω 可写作

$$\begin{aligned}\Omega&=(B_\infty-\mathrm{Id})(s\mathrm{Id}-B_0(u))^{-1}\Big(\mathrm{d}s+\sum_i C_i(u)\mathrm{d}u^i\Big)\\&=\sum_{i=1}^{\mu}P_0((\Delta_\infty-\mathrm{Id})+[\Delta_0,T])D_iP_0^{-1}\frac{\mathrm{d}(s-u^i)}{s-u^i},\quad e=P_0^{\mathrm{T}}\varepsilon.\end{aligned}$$

以这种对应方式, 对于固定的 B_∞, 定理 2.1 中满足初值条件 $B_0^o=\mathrm{diag}(u^{o1},\cdots,u^{o\mu})$ 的解 $(B_0(u),C(u))$ 可给出 Schlesinger 方程 (2.2) 满足初值条件 $A_i^o=(B_\infty-\mathrm{Id})D_i$ 的解

$$A_i(u)=P_0((\Delta_\infty-\mathrm{Id})+[\Delta_0,T])D_iP_0^{-1},\quad i=1,\cdots,\mu.$$

由等单值 τ 函数的定义, 我们得到

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\log\tau_I=\omega&=\frac{1}{2}\sum_{i<j}\mathrm{tr}A_i(u)A_j(u)\mathrm{d}\log(u^i-u^j)\\&=\frac{1}{2}\sum_{i<j}\mathrm{tr}\{((\Delta_\infty-\mathrm{Id})+[\Delta_0,T])D_i((\Delta_\infty-\mathrm{Id})+[\Delta_0,T])D_j\}\mathrm{d}\log(u^i-u^j)\\&=\frac{1}{2}\sum_{i<j}\frac{M_{ij}M_{ji}}{u^i-u^j}\mathrm{d}(u^i-u^j)\\&=\frac{1}{2}\sum_{i\neq j}\frac{M_{ij}M_{ji}}{u^i-u^j}\mathrm{d}u^i.\end{aligned}\tag{2.5}$$

注 2.1 $\sum\limits_{i\neq j}\frac{M_{ij}M_{ji}}{u^i-u^j}\mathrm{d}u^i$ 的闭性也可由方程 (2.4) 验证.

3 Frobenius 流形的 G 函数

在这节中, 我们讨论半单的 Frobenius 流形. 其中在第一小节, 我们回忆 Frobenius 流形的一些基本定义; 在第二小节, 我们在典范基下写出 Frobenius 流形的联络矩阵, 并且按上一节的方式构造等单值变换的 τ 函数; 在第三小节, 我们回忆 Dubrovin-Zhang 关于 G 函数的公式.

3.1 Frobenius 流形

定义 3.1 (Frobenius 流形)　一个 Frobenius 流形 $(M,\circ,e,E,\eta)$ 包含如下几何量: 一个 n 维的复流形 M, 全纯切向量场层 $\mathcal{T}_M$ 上的一个乘积结构 $\circ$, 一个单位向量场 e, 一个 Euler 向量场 E 和 $\mathcal{T}_M$ 上一个非退化的对称的 $\mathcal{O}_M$ 双线性配对 η, 进一步满足如下兼容性条件:

(1) $\eta(X\circ Y,Z)=\eta(X,Y\circ Z)$, 其中 $X,Y,Z\in\mathcal{T}_M$;

(2) 度量 η 的 Levi-Civita 联络 ∇^η 是平坦的;

(3) 定义 Higgs 场 $C:\mathcal{T}_M\to\Omega_M^1\times\mathcal{T}_M$ 为 $C_XY=-X\circ Y$, 它满足可积性条件 $\nabla^\eta(C)=0$;

(4) e 是平坦的单位向量场, 即 $\nabla^\eta e=0$, $e\circ=\mathrm{Id}$;

(5) Euler 向量场 E 满足:

$$\mathrm{Lie}_E(\circ)=\circ,\quad \mathrm{Lie}_E(\eta)=(2-d)\eta,$$

其中 $d\in\mathbb{C}$ 为某个常数.

由 Frobenius 流形的定义, 如下的扩充的 $H=TM\times T\mathbb{C}^*$ 上的联络 ∇(Dubrovin 联络) 是平坦的:

$$\nabla=\nabla^\eta+\frac{1}{z}C+\Big(\frac{E\circ}{z}+V\Big)\frac{\mathrm{d}z}{z},\tag{3.1}$$

其中 $V=-\nabla^\eta E+\frac{1}{2}(2-d)\,\mathrm{Id}=-\nabla^\eta_E+\mathrm{Lie}_E+\frac{2-d}{2}\,\mathrm{Id}$.

考虑在 $x\in M$ 处的全纯切空间 T_xM, 四元组 $(T_xM,\eta(x),\circ_x,e(x))$ 构成一个 Frobnenius 代数结构.

定义 3.2 一个 Frobenius 流形 M 称为是半单的, 如果对一般的 $x\in M$, T_xM 是半单的.

在半单的条件下, 可以在 Frobenius 流形上引入另一种典范坐标. 假设 $x\in M$ 是一个半单点, 则在 x 的邻域里存在坐标 $(u^1,\cdots,u^n)$, 使得

$$\frac{\partial}{\partial u^i}\circ\frac{\partial}{\partial u^j}=\delta_{ij}\frac{\partial}{\partial u^i},\quad i,j=1,\cdots,n,$$

度量 η 在基 $\{\frac{\partial}{\partial u^i}\}$ 下为对角形式 $\eta=\sum\limits_{i=1}^n\eta_{ii}\mathrm{d}u^{i2}$, 并且 Euler 向量场在这组基下表示为 $E(u)=\sum\limits_{i=1}^n u^i\partial_i$.

3.2 Frobenius 流形结构对应的等单值变换 τ 函数

在这一节, 我们使用典则坐标 u^i, 首先写出 ∇ 在 $\{\partial/\partial u^i\}$ 下的联络矩阵.

首先, 注意到 η 在典则基 $\{\frac{\partial}{\partial u^i}\}$ 下可写作对角矩阵的形式, 我们可计算 Christoffel 符号 Γ_{ij}^k 如下:

$$\begin{aligned}&\Gamma_{ij}^k=0,\quad i,j,k\ \text{互不相同},\\&\Gamma_{ii}^j=-\frac{1}{2}\frac{\partial_j\eta_{ii}}{\eta_{jj}},\quad \Gamma_{ij}^i=\frac{1}{2}\frac{\partial_j\eta_{ii}}{\eta_{ii}},\quad \Gamma_{ij}^j=\Gamma_{ji}^j=\frac{1}{2}\frac{\partial_i\eta_{jj}}{\eta_{jj}}=\frac{\partial_i\sqrt{\eta_{jj}}}{\sqrt{\eta_{jj}}},\quad i\neq j,\\&\Gamma_{ii}^i=\frac{1}{2}\frac{\partial_i\eta_{ii}}{\eta_{ii}}=\frac{\partial_i\sqrt{\eta_{ii}}}{\sqrt{\eta_{ii}}}.\end{aligned}$$

因此 ∇^η 在典则基 $\{\frac{\partial}{\partial u^i}\}$ 下的联络矩阵形式的 ij 元为:

$$\begin{aligned}&\frac{\partial_i\sqrt{\eta_{jj}}}{\sqrt{\eta_{jj}}}(\mathrm{d}u^j-\mathrm{d}u^i),\quad i\neq j;\\&\sum_k\frac{\partial_i\sqrt{\eta_{kk}}}{\sqrt{\eta_{kk}}}\mathrm{d}u^k,\quad i=j.\end{aligned}$$

为简单起见, 我们将矩阵 1 形式 Γ 的对角部分记为 Γ_D.

其次, Euler 向量场 E 为 $E=\sum\limits_i u^i\partial_i$, 则算子 $E\circ$ 在典则基 $\{\frac{\partial}{\partial u^i}\}$ 下的矩阵表示为 $\mathrm{diag}(u^1,\cdots,u^\mu)$, 这和上一节中的矩阵 Δ_0 一样.

接下来, 计算 $V=-\nabla^\eta E+\frac{1}{2}(2-d)$ 在典则基下的矩阵, 得到

$$\begin{aligned}&\frac{\partial_i\sqrt{\eta_{jj}}}{\sqrt{\eta_{jj}}}(u^i-u^j),\quad i\neq j;\\&-\sum_k u^k\frac{\partial_i\sqrt{\eta_{kk}}}{\sqrt{\eta_{kk}}}-d,\quad i=j.\end{aligned}$$

同理, 记对角部分为 V_D.

令 $\widetilde{T}_{ij}=\frac{\partial_i\sqrt{\eta_{jj}}}{\sqrt{\eta_{jj}}}$, $i\neq j$, 则 ∇ 在 $\{\frac{\partial}{\partial u^i}\}$ 下的联络矩阵为:

$$-\mathrm{d}\Big(\frac{\Delta_0}{z}\Big)+(V_D+[\Delta_0,\widetilde{T}])\frac{\mathrm{d}z}{z}+([\widetilde{T},\mathrm{d}\Delta_0]+\Gamma_D).$$

命题 3.1 矩阵 $\widetilde{T}$ 的方程满足:

$$\begin{aligned}\frac{\partial\widetilde{T}_{ij}}{\partial u^k}&=-\widetilde{T}_{ik}\widetilde{T}_{kj}-\widetilde{T}_{ik}\widetilde{T}_{ij}+\widetilde{T}_{ij}\widetilde{T}_{jk},\quad i,j,k\text{互不相同},\\\sum_{k=1}^{\mu}\frac{\partial\widetilde{T}_{ij}}{\partial u^k}&=-\widetilde{T}_{ii}\widetilde{T}_{ij}-\widetilde{T}_{ij}\widetilde{T}_{ij}+\widetilde{T}_{ij}\widetilde{T}_{ji}+\widetilde{T}_{ij}\widetilde{T}_{jj}.\end{aligned}\tag{3.2}$$

证 由 $\nabla^2=0$ 直接计算可得, 类似命题 2.2.

类似地, 令 $M_{ij}=[\Delta_0,\widetilde{T}]$. 由之前的讨论, 我们考虑 1- 形式

$$\omega=\frac{1}{2}\sum_{j\neq i}\frac{M_{ij}M_{ji}}{u^i-u^j}\mathrm{d}u^i.$$

由方程 (3.2) 计算可得如下命题.

命题 3.2 $\mathrm{d}\omega=0$.

接下来我们说明, 以上构造的 ω 和之前定义的等单值 τ 函数中的 1-形式是一致的. 为此我们引入 Dubrovin-Zhang[1,12] 所考虑的旋转矩阵 γ_{ij}, 定义如下:

$$\gamma_{ij}(u):=\frac{\partial_j\sqrt{\eta_{ii}(u)}}{\sqrt{\eta_{jj}(u)}},\quad i\neq j.$$

在文 [1] 中, 他们的典则坐标使用的是下指标, 并用度量 η 升降指标. 易知矩阵元 γ_{ij} 是对称的且

$$\begin{aligned}\frac{\partial\gamma_{ij}}{\partial u_k}&=\gamma_{ik}\gamma_{kj},\quad i,j,k\text{互不相同},\\\sum_{k=1}^{\mu}\frac{\partial\gamma_{ij}}{\partial u_k}&=0.\end{aligned}$$

和方程 (2.4) 相比可知, 旋转矩阵 γ 和矩阵 $-T$ 角色一致. 令 $V_{ij}=(u_i-u_j)\gamma_{ij}$, 则 V_{ij} 是反对称的, 且相应的 τ 函数[2] 定义为:

$$\mathrm{d}\log\tau_I=\frac{1}{2}\sum_{j\neq i}\frac{V_{ij}^2}{u_i-u_j}\mathrm{d}u_i. \tag{3.3}$$

由 M_{ij} 的定义, 我们有

$$\frac{M_{ij}M_{ji}}{u_i-u_j}=\frac{\partial_i\sqrt{\eta_{jj}}\partial_j\sqrt{\eta_{ii}}}{\sqrt{\eta_{ii}}\sqrt{\eta_{jj}}}(u_j-u_i)=-\frac{V_{ij}^2}{u_i-u_j}.$$

由此也可看出 $\mathrm{d}\omega=0$.

3.3 G 函数公式

在文 [2] 中, Getzler 研究了光滑的射影簇的亏格 1 的 Gromov-Witten 不变量. 在平坦坐标下, 他导出其亏格 1 的 Gromov-Witten 不变量的生成函数 G 满足一系列二阶微分方程. Dubrovin-Zhang[1] 将这些方程用典范坐标写下, 并证明了如下结论.

定理 3.1 (见 [1, 定理 3]) 对任意一个半单的 Frobenius 流形, Getzler 方程组的解可由如下式子给出:

$$G=\log\frac{\tau_I}{J^{\frac{1}{24}}},$$

其中 τ_I 是等单值 τ 函数, $J=\det\left(\frac{\partial t^\alpha}{\partial u_i}\right)$ 是典则坐标到平坦坐标的变换的雅可比行列式.

4 Landau-Ginzburg B-模型和 tt^* 几何

Gromov-Witten 理论是非线性西格玛 A-模型的一部分, 而镜像对称联系了 A-模型和 B-模型. 非线性西格玛 B-模型有两个重要组成部分: Calabi-Yau B-模型和 Landau-Ginzburg B-模型. CY B-模型和复流形的复结构形变相关; LG B-模型和奇点的形变理论相关. 在两个模型的 (扩充/普适) 形变空间上都可构造出 Frobenius 流形结构 (见 [13–14]). 但是, 从 B-模型的研究角度, tt^* 几何结构包含反全纯的信息, 更加自然和全面.

在这节中, 我们主要研究 LG B-模型, 给出形变空间的 Hodge 丛上的 tt^* 几何结构, 并且研究其在全纯基下的表现形式.

4.1 Hodge 分解

在下文中, 考虑一个对 $(X=\mathbb{C}^n,f_0)$, 其中 $f_0:\mathbb{C}^n\to\mathbb{C}$ 是一个拟齐次多项式, 即: 存在 $q_1,\cdots,q_n\in\mathbb{Q}^+$, 使得对 $\forall\lambda\in\mathbb{C}^*$, 有

[2] Dubrovin-Zhang 定义的 τ 函数和我们的定义差一个符号, 但这不影响结果的表达.

$$f_0(\lambda^{q_1}z_1,\cdots,\lambda^{q_n}z_n)=\lambda f_0(z_1,\cdots,z_n),$$

其中 q_i 称为 z_i 的权.

同时, 为方便起见, 我们假设 f_0 是非退化的, 即要求:

(1) f_0 不包含形如 $z_iz_j(i\neq j)$ 的单项式;

(2) f_0 只以 0 为孤立奇点.

f_0 称为 LG 模型的超位势函数. 在 1 维 LG 模型的 Schrödinger 表示下, Hilbert 空间由 $L^2\mathcal{A}(X)$(X 上的平方可积的形式空间) 给出, 电荷算符 $Q_+,Q_-,Q_+^\dagger,Q_-^\dagger$ 被表示为:

$$\begin{aligned}&Q_+=\overline{\partial}_{f_0}=\overline{\partial}+\mathrm{d}f_0\wedge,\quad Q_-=\partial_{f_0}=\partial+\mathrm{d}\overline{f_0}\wedge,\\&Q_+^\dagger=\overline{\partial}_{f_0}^\dagger=-*\partial_{-f_0}*,\quad Q_-^\dagger=\partial_{f_0}^\dagger=-*\overline{\partial}_{-f_0}*,\end{aligned}$$

其中我们固定了 X 上的一个 Hermitian 度量 h, $*$ 是相对于 h 的 Hodge 星算子, 则我们有超对称代数结构:

$$\begin{aligned}&\partial_{f_0}^2=\partial_{f_0}^{\dagger 2}=\overline{\partial}_{f_0}^2=\overline{\partial}_{f_0}^{\dagger 2}=0,\\&\{\partial_{f_0},\partial_{f_0}^\dagger\}=\Delta_{f_0},\quad\{\overline{\partial}_{f_0},\overline{\partial}_{f_0}^\dagger\}=\Delta_{f_0},\\&\{\overline{\partial}_{f_0},\partial_{f_0}\}=\{\overline{\partial}_{f_0}^\dagger,\partial_{f_0}^\dagger\}=\{\partial_{f_0},\overline{\partial}_{f_0}^\dagger\}=\{\overline{\partial}_{f_0},\partial_{f_0}^\dagger\}=0.\end{aligned}$$

受 Cecotti-Vafa[15]的启发, Klimek-Lesniewski[16], Fan[17] 利用 L^2 分析研究了 $(L^2\mathcal{A}^*(X),\overline{\partial}_{f_0})$ 的 L^2 上同调 $H^*_{(2),\overline{\partial}_{f_0}}(X)$ 以及调和形式 $\mathcal{H}_0^*:=\ker\Delta_{f_0}$. 接下来, 我们简单回忆他们的结果.

容易验证 $\mathrm{d}f_0$ 满足文 [16] 中给出的椭圆条件[3]:

(1) $|\mathrm{d}f_0(z)|^2:=\sum\limits_{\nu=1}^n|\partial_{z_\nu}f_0(z)|^2\to\infty$, 当 $|z|\to\infty$ 时;

(2) 对任意的 $\varepsilon>0$, 存在常数 C, 使得

$$|\partial_{z_{\nu_1}}\partial_{z_{\nu_2}}f_0(z)|\leqslant\varepsilon|\mathrm{d}f_0(z)|^2+C,\quad \text{对所有的}z\in\mathbb{C}^n,\ \text{且}\nu_1,\nu_2=1,\cdots,n.$$

定理 4.1　(见 [16–17, Hodge 定理])　$f_0\in\mathbb{C}[z_1,\cdots,z_n]$ 是一个非退化的拟齐次多项式, 则

(1) $\dim\mathcal{H}_0^*\leqslant\infty$;

(2) (Hodge 分解) 存在正交分解

$$L^2\mathcal{A}^*(X)=\mathcal{H}_0^*\oplus\mathrm{im}(\overline{\partial}_{f_0})\oplus\mathrm{im}(\overline{\partial}_{f_0}^\dagger).$$

更准确地说, $L^2\mathcal{A}^*(X)$ 上存在一个自伴的紧算子 G_{f_0}, 使得

$$L^2\mathcal{A}^k(X)=\mathcal{H}_0^k\oplus\overline{\partial}_{f_0}(\overline{\partial}_{f_0}^\dagger G_{f_0}L^2\mathcal{A}^k(X))\oplus\overline{\partial}_{f_0}^\dagger(\overline{\partial}_{f_0}G_{f_0}L^2\mathcal{A}^k(X)).$$

[3]此处的 $\mathrm{d}f_0$ 在 [16] 中写作 $f=\sum\limits_{j=1}^n f_j(z)\mathrm{d}z_j$.

(3) (见 [16, 消失性定理])

$$\mathcal{H}_0^k \cong H^k_{(2),\overline{\partial}_{f_0}}(X) \cong \begin{cases} 0, & 若\ k \neq n, \\ \Omega^n(X)/\mathrm{d}f_0 \wedge \Omega^{n-1}(X) \cong \mathrm{Jac}(f_0), & 若\ k = n. \end{cases}$$

在下一小节中, 我们考虑 f_0 的一些形变, 得到一族超对称代数, 并对其进行研究.

4.2 tt^* 几何

取 $\mathrm{Jac}(f_0) = \mathbb{C}[z_1, z_2, \cdots, z_n]/\langle \frac{\partial f_0}{\partial z_1}, \cdots, \frac{\partial f_0}{\partial z_n} \rangle$ 的一组单项式基 $\phi_1, \phi_2, \cdots, \phi_\mu$, 令

$$f(z;t) = f_0(z) + \sum_{i=1}^{s} t^i \phi_i(z)$$

为 f_0 的 relevant 形变或者 marginal 形变, 即 $\phi_i(z)$ 的权都小于等于 1. 记 M 为形变参数 $(t^1, \cdots, t^s)$ 的空间, 是 $\mathbb{C}^s$ 中包含原点的一个小邻域. 再引入一个参数因子 $\beta \in \mathbb{C}^*$, 我们得到一族被 $M \times \mathbb{C}^*$ 参数化的超对称代数算子 $\overline{\partial}_{\beta f}, \partial_{\beta f}, \overline{\partial}^\dagger_{\beta f}, \partial^\dagger_{\beta f}, \Delta_{\beta f}$. 注意到 $\dim_{\mathbb{C}} \mathrm{Jac}(f) = \dim_{\mathbb{C}} \mathrm{Jac}(f_0)$, 且当 $|t|$ 充分小时, 上一节中关于 Δ_{f_0} 的结论同样适用于 $\Delta_{\beta f}$.

现在我们考虑 M 上的 Hodge 丛上的 tt^* 几何结构.

首先我们有一个无穷维的平凡丛 $\Lambda^*_{\mathbb{C}^* \times M} := L^2\Lambda^*(X) \times \mathbb{C}^* \times M \to \mathbb{C}^* \times M$, 称其为 Hilbert 丛. 简记 $L^2\mathcal{A}$ 为向量丛的 $\Lambda^*_{\mathbb{C}}$ 的截面空间. 其上有两个自然的配对度量.

$$g : L^2\mathcal{A} \times L^2\mathcal{A} \longrightarrow C^\infty(\mathbb{C}^* \times M), \quad g(\alpha, \gamma) = \int_X \alpha \wedge *\overline{\gamma},$$
$$\eta : L^2\mathcal{A} \times L^2\mathcal{A} \longrightarrow C^\infty(\mathbb{C}^* \times M), \quad \eta(\alpha, \gamma) = \int_X \alpha \wedge *\gamma.$$

注意到 Hilbert 丛 $\Lambda^*_{\mathbb{C}^* \times M}$ 上有一个典范的实结构, 由复共轭给出, 我们将其记为 τ_R, 则 $g(\alpha, \gamma) = \eta(\alpha, \tau_R \gamma)$.

记 $H^n \subset \Lambda^*_{\mathbb{C}^* \times M}$ 为 $\mathbb{C}^* \times M$ 上的 Hodge 丛, 它在点 $(\beta, u) \in \mathbb{C}^* \times M$ 处的纤维为 $\Delta_{\beta f(u)}$ 的调和形式 (n- 形式) 构成的空间. 我们将截面空间记为 $\mathcal{H}^n$.

由定理 4.1 可知, 算子 $\Delta_{\beta f}$ 在子空间 $\mathrm{im}(\overline{\partial}_{\beta f}) \oplus \mathrm{im}(\overline{\partial}^\dagger_{\beta f})$ 上可逆, 记其逆算子为 G, 注意到 G 和算子 $\overline{\partial}_{\beta f}, \partial_{\beta f}, \overline{\partial}^\dagger_{\beta f}, \partial^\dagger_{\beta f}, \Delta_{\beta f}$ 可交换. 令 $\Pi : L^2\mathcal{A} \to \mathcal{H}^n$ 为调和投影, 则我们可以将 Hodge 分解写作算子形式:

$$\mathrm{Id} = \Pi + G\Delta_{\beta f} = \Pi + \Delta_{\beta f} G.$$

现在我们可以在 Hodge 丛上定义一些重要算子.

(1) 联络 D, $\overline{D}$.

首先我们可以将 Hodge 丛自然地嵌入到平凡的 Hilbert 丛上, 因此我们可以自然地定

义 D, $\overline{D}$:

$$D_i = \Pi \circ \partial_i, \quad \overline{D}_{\overline{i}} = \Pi \circ \overline{\partial}_{\overline{i}}, \quad i = 1, \cdots, s.$$
$$D_\beta = \Pi \circ \partial_\beta, \quad \overline{D}_{\overline{\beta}} = \Pi \circ \overline{\partial}_{\overline{\beta}}.$$

或者我们等价地写为分量形式:

$$(D_i)_{a\overline{b}} = g(\partial_i \alpha_a, \alpha_b), \quad (D_{\overline{i}})_{a\overline{b}} = g(\overline{\partial}_{\overline{i}} \alpha_a, \alpha_b),$$
$$(D_\beta)_{a\overline{b}} = g(\partial_\beta \alpha_a, \alpha_b), \quad (D_{\overline{\beta}})_{a\overline{b}} = g(\overline{\partial}_{\overline{\beta}} \alpha_a, \alpha_b).$$

利用 Hodge 分解和如下的交换关系:

$$[\partial_i, \overline{\partial}_{\beta f}] = \partial(\partial_i \beta f)\wedge, \quad [\partial_i, \overline{\partial}^\dagger_{\beta f}] = 0,$$

对于任意的 $\alpha \in \mathcal{H}^n$, 我们得到

$$\begin{aligned}
D_i\alpha = \Pi\partial_i\alpha &= \partial_i\alpha - G\Delta_{\beta f}\partial_i\alpha \\
&= \partial_i\alpha - G[\Delta_{\beta f}, \partial_i]\alpha \quad (\Delta_{\beta f}\alpha = 0) \\
&= \partial_i\alpha + G\overline{\partial}^\dagger_{\beta f}(\partial(\partial_i\beta f)\wedge)\alpha \qquad (\overline{\partial}_{\beta f}\alpha = \overline{\partial}^\dagger_{\beta f}\alpha = 0) \\
&= \partial_i\alpha + G\overline{\partial}^\dagger_{\beta f}\partial_{\beta f}[(\partial_i\beta f)\alpha] \qquad (\partial_{\beta f}\alpha = 0) \\
&= \partial_i\alpha - \beta\partial_{\beta f}\overline{\partial}^\dagger_{\beta f}G(\partial_i f)\alpha.
\end{aligned}$$

类似地,

$$\begin{aligned}
\overline{D}_{\overline{i}}\alpha &= \partial_{\overline{i}}\alpha_- \overline{\beta\partial}_{\beta f}\partial^\dagger_{\beta f}G(\overline{\partial_i f})\alpha, \\
D_\beta\alpha &= \partial_\beta\alpha - \partial_{\beta f}\overline{\partial}^\dagger_{\beta f}Gf\alpha, \\
\overline{D}_{\overline{\beta}}\alpha &= \overline{\partial}_{\overline{\beta}}\alpha - \overline{\partial}_{\beta f}\partial^\dagger_{\beta f}G\overline{f}\alpha.
\end{aligned}$$

(2) 算子 $C_i, \overline{C}_{\overline{i}}$.

定义 $C_i = \Pi \circ \partial_i f$, $\overline{C}_{\overline{i}} = \Pi \circ \overline{\partial_i f}$, 或者我们等价地定义分量的形式为:

$$C_i\alpha_a = (\partial_i f\alpha_a) - \overline{\partial}_{\beta f}\overline{\partial}^\dagger_{\beta f}G(\partial_i f)\alpha_a, \quad \overline{C}_{\overline{i}}\alpha_a = (\overline{\partial_i f}\alpha_a) - \partial_{\beta f}\partial^\dagger_{\beta f}G(\overline{\partial_i f})\alpha_a.$$

类似地, 对任意的 $\alpha \in \mathcal{H}^n$,

$$C_{ia\overline{b}} = g(\partial_i f\alpha_a, \alpha_b), \quad \overline{C}_{\overline{i}a\overline{b}} = g(\overline{\partial_i f}\alpha_a, \alpha_b).$$

(3) 算子 $\mathcal{U}, \overline{\mathcal{U}}$.

定义 $\mathcal{U} = \Pi \circ f$, $\overline{\mathcal{U}} = \Pi \circ \overline{f}$, 即

$$\mathcal{U}\alpha = f\alpha - \overline{\partial}_{\beta f}\overline{\partial}^\dagger_{\beta f}Gf\alpha, \quad \overline{\mathcal{U}}\alpha = \overline{f}\alpha - \partial_{\beta f}\partial^\dagger_{\beta f}G\overline{f}\alpha.$$

或者等价地我们定义其分量的形式为:

$$\mathcal{U}_{a\overline{b}} = g(f\alpha_a, \alpha_b), \quad \overline{\mathcal{U}}_{a\overline{b}} = g(\overline{f}\alpha_a, \alpha_b).$$

命题 4.1 算子 $D_i, D_{\bar{i}}, C_i, \overline{C}_{\bar{i}}, \mathcal{U}, \overline{\mathcal{U}}, D_\beta, D_{\overline{\beta}}$ 满足如下关系:

(1) $[C_i, C_j] = 0, \quad [\overline{C}_{\bar{i}}, \overline{C}_{\bar{j}}] = 0, \quad [D_i, \overline{C}_{\bar{j}}] = [\overline{D}_{\bar{i}}, C_j] = 0;$

(2) $[D_i, C_j] = [D_j, C_i], \quad [\overline{D}_{\bar{i}}, \overline{C}_{\bar{j}}] = [\overline{D}_{\bar{j}}, \overline{C}_{\bar{i}}];$

(3) $[D_i, D_j] = 0, \quad [\overline{D}_{\bar{i}}, \overline{D}_{\bar{j}}] = 0, \quad [D_i, \overline{D}_{\bar{j}}] = -|\beta|^2 [C_i, \overline{C}_{\bar{j}}];$

(4) $[\mathcal{U}, C_i] = 0, \quad [\overline{\mathcal{U}}, \overline{C}_{\bar{i}}] = 0;$

(5) $[D_i, \overline{\mathcal{U}}] = 0, \quad [\overline{D}_{\bar{i}}, \mathcal{U}] = 0;$

(6) $[D_i, D_\beta] = 0, \quad [\overline{D}_{\bar{i}}, \overline{D}_{\overline{\beta}}] = 0;$

(7) $[C_i, \overline{D}_{\overline{\beta}}] = 0, \quad [\overline{C}_{\bar{i}}, D_\beta] = 0, \quad [D_\beta, \overline{\mathcal{U}}] = 0, \quad [\overline{D}_{\overline{\beta}}, \mathcal{U}] = 0;$

(8) $[D_\beta, D_\beta] = 0, \quad [\overline{D}_{\overline{\beta}}, \overline{D}_{\overline{\beta}}] = 0, \quad [D_\beta + \mathcal{U}, \overline{D}_{\overline{\beta}} + \overline{\mathcal{U}}] = 0;$

(9) $[\beta C_i, D_\beta] + [D_i, \mathcal{U}] = 0, \quad [\overline{\beta C}_{\bar{i}}, \overline{D}_{\overline{\beta}}] + [\overline{D}_{\bar{i}}, \overline{\mathcal{U}}] = 0;$

(10) $[D_i, \overline{D}_{\overline{\beta}}] + [\beta C_i, \overline{\mathcal{U}}] = 0, \quad [\overline{D}_{\bar{i}}, D_\beta] + [\overline{\beta C}_{\bar{i}}, \mathcal{U}] = 0.$

这些方程成立等价于如下定义的联络 ∇ 是平坦的:

$$\nabla = D_i \mathrm{d}t^i + \overline{D}_{\bar{i}} \mathrm{d}\overline{t^i} + \beta C_i \mathrm{d}t^i + \overline{\beta} C_{\bar{i}} \mathrm{d}\overline{t^i} + D_\beta \mathrm{d}\beta + \overline{D}_{\overline{\beta}} \mathrm{d}\overline{\beta} + \mathcal{U} \mathrm{d}\beta + \overline{\mathcal{U}} \mathrm{d}\overline{\beta}.$$

证 因为我们的算子都投影到调和部分, 为书写简单, 我们用 $\overline{\partial}_{\beta f}\gamma$(相应地, $\partial_{\beta f}\gamma$) 统一表示 $\mathrm{im}(\overline{\partial}_{\beta f})$(相应地, $\mathrm{im}(\partial_{\beta f})$) 中的元素. 对任意的 $\alpha \in \mathcal{H}^n$:

首先证明 (1) 中 $[C_i, C_j] = 0$.

$$\partial_i f \partial_j f \alpha = \partial_i f (C_j \alpha + \overline{\partial}_{\beta f} \gamma) = C_i C_j \alpha + \overline{\partial}_{\beta f} \gamma,$$

其中我们用到关系式 $[\partial_i f, \overline{\partial}_{\beta f}] = 0$. 类似地,

$$\partial_j f \partial_i f \alpha = C_j C_i \alpha + \overline{\partial}_{\beta f} \gamma.$$

因此 $C_i C_j \alpha = C_j C_i \alpha$. 类似地, $[\overline{C}_{\bar{i}}, \overline{C}_{\bar{j}}] = 0$.

下证 $[\overline{D}_{\bar{i}}, C_j] = 0$.

$$\begin{aligned}
\overline{\partial}_{\bar{i}} C_j \alpha &= \overline{\partial}_{\bar{i}} (\partial_j f \alpha + \overline{\partial}_{\beta f} \gamma) \\
&= \partial_j f \overline{\partial}_{\bar{i}} \alpha + \overline{\partial}_{\beta f} \gamma = \partial_j f (\overline{D}_{\bar{i}} \alpha + \overline{\partial}_{\beta f} \gamma) + \overline{\partial}_{\beta f} \gamma \quad ([\overline{\partial}_{\bar{i}}, \overline{\partial}_{\beta f}] = 0) \\
&= \partial_j D_{\bar{i}} \alpha + \overline{\partial}_{\beta f} \gamma = C_j \overline{D}_{\bar{i}} \alpha + \overline{\partial}_{\beta f} \gamma. \quad ([\partial_j f, \overline{\partial}_{\beta f}] = 0)
\end{aligned}$$

因此 $[\overline{D}_{\bar{i}}, C_j] = 0$. 类似地, $[D_i, \overline{C}_{\bar{j}}] = 0$.

证明 (2) 中 $[D_i, C_j] = [D_j, C_i]$.

$$\begin{aligned}
\partial_i C_j \alpha &= \partial_i (\partial_j f \alpha - \overline{\partial}_{\beta f} \overline{\partial}^\dagger_{\beta f} G(\partial_j f) \alpha) \\
&= (\partial_i \partial_j f) \alpha + \partial_j f \partial_i \alpha + \overline{\partial}_{\beta f} \gamma - \beta \partial_i (\partial f \wedge) \overline{\partial}^\dagger_{\beta f} G(\partial_j f) \alpha \\
&= (\partial_i \partial_j f) \alpha + \partial_j f (D_i \alpha + \beta \partial_{\beta f} \overline{\partial}^\dagger_{\beta f} G(\partial_i f) \alpha) + \overline{\partial}_{\beta f} \gamma - \beta \partial_i (\partial f \wedge) \overline{\partial}^\dagger_{\beta f} G(\partial_j f) \alpha
\end{aligned}$$

$$= (\partial_i\partial_j f)\alpha + \partial_j f D_i\alpha - \beta\partial_j(\partial f\wedge)\overline{\partial}_{\beta f}^{\dagger}G(\partial_i f)\alpha + \partial_{\beta f}\gamma + \overline{\partial}_{\beta f}\gamma$$
$$- \beta\partial_i(\partial f\wedge)\overline{\partial}_{\beta f}^{\dagger}G(\partial_j f)\alpha.$$

因此,

$$D_iC_j\alpha = C_jD_i\alpha + \Pi((\partial_i\partial_j f)\alpha - \beta\partial_j(\partial f\wedge)\overline{\partial}_{\beta f}^{\dagger}G(\partial_i f)\alpha - \beta\partial_i(\partial f\wedge)\overline{\partial}_{\beta f}^{\dagger}G(\partial_j f)\alpha).$$

等式右边关于指标 i,j 对称. 因此 $[D_i, C_j]\alpha = [D_j, C_i]\alpha$. 类似地, $[\overline{D}_{\overline{i}}, \overline{C}_{\overline{j}}] = [\overline{D}_{\overline{j}}, \overline{C}_{\overline{i}}]$.

证明 (3) 中 $[D_i, D_j] = 0$.

$$\partial_iD_j\alpha = \partial_i(\partial_j\alpha - \beta\partial_{\beta f}\overline{\partial}_{\beta f}^{\dagger}G(\partial_j f)\alpha)$$
$$= \partial_i\partial_j\alpha - \partial_{\beta f}\gamma. \quad ([\partial_i, \partial_{\beta f}] = 0)$$

因此 $[D_i, D_j] = 0$. 类似地, $[\overline{D}_{\overline{i}}, \overline{D}_{\overline{j}}] = 0$.

下面证明 $[D_i, \overline{D}_{\overline{j}}] = -|\beta|^2[C_i, \overline{C}_{\overline{j}}]$.

$$\partial_i\overline{D}_{\overline{j}}\alpha = \partial_i(\overline{\partial}_{\overline{j}}\alpha - \overline{\beta}\overline{\partial}_{\beta f}\partial_{\beta f}^{\dagger}G\overline{\partial_j f}\alpha)$$
$$= \partial_i\overline{\partial}_{\overline{j}}\alpha - \overline{\beta}\partial_i\overline{\partial}_{\beta f}\partial_{\beta f}^{\dagger}G\overline{\partial_j f}\alpha$$
$$= \partial_i\overline{\partial}_{\overline{j}}\alpha - \overline{\partial}_{\beta f}\gamma - |\beta|^2(\partial_i(\partial f\wedge))\partial_f^{\dagger}G\overline{\partial_j f}\alpha. \quad ([\partial_i, \overline{\partial}_{\beta f}] = \beta\partial_i(\partial f\wedge))$$

我们得到

$$D_i\overline{D}_{\overline{j}}\alpha = \Pi(\partial_i\overline{\partial}_{\overline{j}}\alpha - |\beta|^2(\partial_i(\partial f\wedge))\partial_{\beta f}^{\dagger}G\overline{\partial_j f}\alpha).$$

类似地,

$$\overline{D}_{\overline{j}}D_i\alpha = \Pi(\overline{\partial}_{\overline{j}}\partial_i\alpha - |\beta|^2(\overline{\partial}_{\overline{j}}(\overline{\partial f}\wedge))\overline{\partial}_{\beta f}^{\dagger}G(\partial_i f)\alpha).$$

另一方面,

$$\partial_i f\overline{C}_{\overline{j}}\alpha = \partial_i f(\overline{\partial_j f}\alpha - \partial_{\beta f}\partial_{\beta f}^{\dagger}G\overline{\partial_j f}\alpha)$$
$$= \partial_i f\overline{\partial_j f}\alpha - \partial_{\beta f}\gamma + (\partial_i(\partial f\wedge))\partial_{\beta f}^{\dagger}G\overline{\partial_j f}\alpha. \quad ([\partial_i f, \partial_{\beta f}] = -\partial_i(\partial f\wedge))$$

我们得到

$$C_i\overline{C}_{\overline{j}}\alpha = \Pi(\partial_i f\overline{\partial_j f}\alpha + (\partial_i(\partial f\wedge))\partial_{\beta f}^{\dagger}G\overline{\partial_j f}\alpha).$$

类似地,

$$\overline{C}_{\overline{j}}C_i\alpha = \Pi(\overline{\partial_j f}\partial_i\alpha + (\overline{\partial}_{\overline{j}}(\overline{\partial f})\wedge)\overline{\partial}_{\beta f}^{\dagger}G(\partial_i f)\alpha).$$

因此, $[D_i, \overline{D}_{\overline{j}}]\alpha = -|\beta|^2[C_i, \overline{C}_{\overline{j}}]\alpha$.

等式 (4)–(10) 的证明和 (1)–(3) 类似. 为了后面的使用, 我们仅给出 (9)–(10) 的证明.

证明 (9) 中 $[\beta C_i, D_\beta] + [D_i, \mathcal{U}] = 0$.

$$\beta\partial_i fD_\beta\alpha = \beta\partial_i f(\partial_\beta\alpha - \partial_{\beta f}\overline{\partial}_{\beta f}^{\dagger}Gf\alpha)$$

$$= \beta\partial_i f\partial_\beta\alpha - \partial_{\beta f}\gamma - \beta\partial_i(\partial f\wedge)\overline{\partial}_{\beta f}^{\dagger}Gf\alpha,$$

$$\partial_\beta(\beta C_i\alpha) = \partial_\beta(\beta\partial_i f\alpha - \beta\overline{\partial}_{\beta f}\overline{\partial}_{\beta f}^{\dagger}G(\partial_i f)\alpha)$$

$$= (\partial_i f)\alpha + \beta\partial_i f\partial_\beta\alpha - \overline{\partial}_{\beta f}\gamma - \beta\partial f\wedge\overline{\partial}_{\beta f}^{\dagger}G(\partial_i f)\alpha.$$

因此 $[\beta C_i, D_\beta]\alpha = -C_i\alpha - \Pi(\beta\partial f\wedge\overline{\partial}_{\beta f}^{\dagger}G(\partial_i f)\alpha - \beta\partial_i(\partial f\wedge)\overline{\partial}_{\beta f}^{\dagger}Gf\alpha)$.

$$\partial_i\mathcal{U}\alpha = \partial_i(f\alpha - \overline{\partial}_{\beta f}\overline{\partial}_{\beta f}^{\dagger}Gf\alpha)$$

$$= (\partial_i f)\alpha + f\partial_i\alpha - \beta\partial_i(\partial f\wedge)\overline{\partial}_{\beta f}^{\dagger}Gf\alpha - \overline{\partial}_{\beta f}\gamma,$$

$$fD_i\alpha = f\partial_i\alpha - \beta\partial_{\beta f}\overline{\partial}_{\beta f}^{\dagger}G(\partial_i f)\alpha$$

$$= f\partial_i\alpha + \beta\partial f\wedge\overline{\partial}_{\beta f}^{\dagger}G(\partial_i f)\alpha - \partial_{\beta f}\gamma.$$

因此 $[D_i,\mathcal{U}]\alpha = C_i\alpha - \Pi(\beta\partial_i(\partial f\wedge)\overline{\partial}_{\beta f}^{\dagger}Gf\alpha - \beta\partial f\wedge\overline{\partial}_{\beta f}^{\dagger}G(\partial_i f)\alpha)$. 因此, 对任意的 $\alpha\in\mathcal{H}^n$,

$$[\beta C_i, D_\beta]\alpha + [D_i,\mathcal{U}]\alpha = 0.$$

证明 (10) 中 $[D_i,\overline{D_{\overline{\beta}}}] + [\beta C_i,\overline{\mathcal{U}}] = 0$.

$$\partial_i\overline{D_{\overline{\beta}}}\alpha = \partial_i(\partial_{\overline{\beta}}\alpha - \overline{\partial}_{\beta f}\partial_{\beta f}^{\dagger}G\overline{f}\alpha)$$

$$= \partial_i\partial_{\overline{\beta}}\alpha - \overline{\partial}_{\beta f}\gamma - \beta\partial_i(\partial f\wedge)\partial_{\beta f}^{\dagger}G\overline{f}\alpha,$$

$$\partial_{\overline{\beta}}(D_i\alpha) = \partial_{\overline{\beta}}(\partial_i\alpha - \beta\partial_{\beta f}\overline{\partial}_{\beta f}^{\dagger}G(\partial_i f)\alpha)$$

$$= \partial_{\overline{\beta}}\partial_i\alpha - \partial_{\beta f}\gamma - \beta(\partial f\wedge)\overline{\partial}_{\beta f}^{\dagger}G(\partial_i f)\alpha.$$

因此 $[D_i,\overline{D_{\overline{\beta}}}]\alpha = \Pi(\beta(\partial f\wedge)\overline{\partial}_{\beta f}^{\dagger}G(\partial_i f)\alpha - \beta\partial_i(\partial f\wedge)\partial_{\beta f}^{\dagger}G\overline{f}\alpha)$.

$$\beta\partial_i f\overline{\mathcal{U}}\alpha = \beta\partial_i f(\overline{f}\alpha - \partial_{\beta f}\partial_{\beta f}^{\dagger}G\overline{f}\alpha)$$

$$= \beta(\partial_i f)\overline{f}\alpha - \partial_{\beta f}\gamma + \beta\partial_i(\partial f\wedge)\partial_{\beta f}^{\dagger}G\overline{f}\alpha,$$

$$\overline{f}\beta C_i\alpha = \beta\overline{f}((\partial_i f)\alpha - \overline{\partial}_{\beta f}\overline{\partial}_{\beta f}^{\dagger}G(\partial_i f)\alpha)$$

$$= \beta\overline{f}(\partial_i f)\alpha - \overline{\partial}_{\beta f}\gamma + \beta(\partial f\wedge)\overline{\partial}_{\beta f}^{\dagger}G(\partial_i f)\alpha.$$

因此 $[\beta C_i,\overline{\mathcal{U}}]\alpha = \Pi(\beta\partial_i(\partial f\wedge)\partial_{\beta f}^{\dagger}G\overline{f}\alpha - \beta(\partial f\wedge)\overline{\partial}_{\beta f}^{\dagger}G(\partial_i f)\alpha)$. 因此, 对任意的 $\alpha\in\mathcal{H}^n$,

$$[D_i,\overline{D_{\overline{\beta}}}]\alpha + [\beta C_i,\overline{\mathcal{U}}]\alpha = 0.$$

4.3 全纯基

现在我们取 $C^\infty(M)\otimes\big(\Omega^n(X)/\mathrm{d}f\wedge\Omega^{n-1}(X)\big)$ 的一组全纯依赖 $t\in M$ 的基 $\{A_a(t)\}_{a=1}^{\mu}$, 由此我们将构造 $\mathcal{H}^n$ 的一组基. 为了利用 Hodge 定理进行投影, 我们先利用文 [18] 的方法证明

$$H^n_{\overline{\partial}_{\beta f}}(X) \cong H^n_{c,\overline{\partial}_{\beta f}}(X),$$

其中左边表示光滑复形的上同调群, 右边 $H^n_{c,\overline{\partial}_{\beta f}}(X)$ 表示带紧支撑集的光滑复形的上同调群.

定义算子:

$$V_{\beta f}=\sum_{\nu=1}^{n}\frac{\overline{\partial_\nu\beta f}}{|\beta\nabla f|^2}(\mathrm{d}z_\nu)^\dagger=\frac{(\partial\beta f)^\dagger}{|\beta\nabla f|^2}:\quad \mathcal{A}^{*,*}(X\backslash\mathrm{Crit}(f))\to\mathcal{A}^{*-1,*}(X\backslash\mathrm{Crit}(f)).$$

引理 4.1　$V_{\beta f}$ 和 $\overline{\partial}$, $\partial\beta f\wedge$ 满足如下交换关系式:

$$\begin{aligned}&[\partial\beta f\wedge,V_{\beta f}]=1,\\&[\overline{\partial},[\overline{\partial},V_{\beta f}]]=[\beta\partial f\wedge,\quad[\overline{\partial},V_{\beta f}]]=[V_{\beta f},[\overline{\partial},V_{\beta f}]]=0.\end{aligned}$$

证　直接计算可得:

$$\begin{aligned}[\partial\beta f\wedge,V_{\beta f}]&=\frac{1}{|\beta\nabla f|^2}[\beta\partial_\nu f\mathrm{d}z^\nu,\overline{\partial_\nu\beta f}h^{\overline{\nu}\mu}\iota_{\partial_{z^\mu}}]\\&=\frac{1}{|\nabla f|^2}(\partial_\mu f h^{\overline{\nu}\mu}\overline{\partial_\nu f})=1.\end{aligned}$$

接下来, 取在原点的小邻域紧支的截断函数 ρ, 我们定义映射

$$T_\rho:\mathcal{A}^*(X)\to\mathcal{A}^*_c(X),\quad R_\rho:\mathcal{A}^*(X)\to\mathcal{A}^*(X)$$

如下:

$$T_\rho(A)=\rho\alpha+(\overline{\partial}\rho)V_{\beta f}\frac{1}{1+[\partial,V_{\beta f}]}(A),\quad R_\rho(A)=(1-\rho)V_{\beta f}\frac{1}{1+[\partial,V_{\beta f}]}(A).$$

引理 4.2　作为 $\mathcal{A}(X)$ 上的算子, $[\overline{\partial}_{\beta f},R_\rho]=1-T_\rho$. 进一步, 嵌入映射 $(\mathcal{A}_c(X),\overline{\partial}_{\beta f})\hookrightarrow(\mathcal{A}(X),\overline{\partial}_{\beta f})$ 是一个拟同构.

证　直接计算可得:

$$\begin{aligned}[\partial\beta f\wedge,R_\rho]&=[\overline{\partial}_{\beta f},1-\rho]V_{\beta f}\frac{1}{1+[\partial,V_{\beta f}]}+(1-\rho)[\overline{\partial}_{\beta f},V_{\beta f}]\frac{1}{1+[\partial,V_{\beta f}]}\\&=-(\overline{\partial}\rho)V_{\beta f}\frac{1}{1+[\partial,V_{\beta f}]}+(1-\rho)\\&=1-T_\rho.\end{aligned}$$

现在 $T_\rho(A_a)$ 是 L^2- 可积的, 则可利用 Hodge 分解, 定义 α_a 为其调和投影, 即

$$\alpha_a=\Pi(T_\rho(A_a))=(\mathrm{Id}-G\Delta_{\beta f})T_\rho(A_a)=A_a-\overline{\partial}_{\beta f}R_\rho(A_a)-\overline{\partial}_{\beta f}G\overline{\partial}^\dagger_{\beta f}T_\rho(A_a).$$

为了简单起见, 写作 $\alpha_a=A_a+\overline{\partial}_{\beta f}\gamma_a$.

命题 4.2　$\overline{D_{\overline{i}}}\alpha_a=0$, $D_i\alpha_a=-(g\partial_i g^{-1})^b_a\alpha_b$, $\overline{D_{\overline{\beta}}}\alpha_a=0$, $D_\beta\alpha_a=-(g\partial_\beta g^{-1})^b_a\alpha_b$. 即 $D+\overline{D}$ 是 tt^* 度量 g 的联络.

证 利用 $[\overline{\partial}_{\bar{i}}, \overline{\partial}_{\beta f}] = 0$, 得到

$$\overline{\partial}_{\bar{i}}\alpha_a = \overline{\partial}_{\bar{i}}A_a + \overline{\partial}_{\bar{i}}\overline{\partial}_{\beta f}\gamma_a \in \mathrm{im}(\overline{\partial}_{\beta f}).$$

因此 $\overline{D}_{\bar{i}}\alpha_a = 0$. 由

$$\partial_i g(\alpha_a, \alpha_b) = g(D_i\alpha_a, \alpha_b) + g(\alpha_a, \overline{D}_{\bar{i}}\alpha_b),$$

得到 $D_i\alpha_a = -(g\partial_i g^{-1})_a^b\alpha_b$. 剩下的等式证明方法类似.

因此, 我们称 $\{\alpha_a\}_{a=1}^{\mu}$ 为全纯基. 接下来我们给出全纯基的若干性质.

首先, 命题 4.2 的一个直接推论如下.

推论 4.1 tt^* 方程 $[D_i, \overline{D}_{\bar{j}}] = -|\beta|^2[C_i, \overline{C}_{\bar{j}}]$ 在全纯基下可写作

$$\overline{\partial}_{\bar{j}}(g\partial_i g^{-1}) = -|\beta|^2[C_i, g\overline{C_j}^{\mathrm{T}}g^{-1}].$$

证 由 $D_i, \overline{D}_{\bar{j}}$ 在 $\{\alpha_a\}$ 基下的表示,

$$[D_i, \overline{D}_{\bar{j}}] = \overline{\partial}_{t^{\bar{j}}}(g\partial_{t^i}g^{-1}).$$

另一方面,

$$\begin{aligned}\overline{C}_{\bar{i}a\bar{b}} &= g(\overline{\partial_i f}\alpha_a, \alpha_b) = \overline{g(\alpha_b, \overline{\partial_i f\alpha_a})}\\ &= \overline{g(\partial_i f\alpha_b, \alpha_a)} = \overline{C_{ib\overline{a}}}.\end{aligned}$$

因此, $(\overline{C}_{\bar{i}})_a^c = C_{\bar{i}a\bar{b}}g^{\bar{b}c} = \overline{C_{ib\overline{a}}}g^{\bar{b}c} = \overline{C_{ib}^d g_{d\overline{a}}}g^{\bar{b}c} = g_{a\overline{d}}\overline{C_{ib}^d}^T g^{\bar{b}c}$.

命题 4.3 在全纯基 $\{\alpha_a\}$ 下, tt^* 度量 $g(\alpha_a, \alpha_b)$ 对 β 的依赖关系是通过 $|\beta|$ 实现的, 即只依赖 $\beta \in \mathbb{C}$ 的模长, 不依赖于辐角.

证 我们只需证明改变 β 的辐角时, 即 $\beta \to \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\beta$, tt^* 度量 g 保持不变. 设 $\{\alpha_a\}$ 为上面构造的全纯基, $\Delta_{\beta f}\alpha_a = 0$. 因为 α_a 是 n-形式, 我们可以分解如下:

$$\alpha_a = \alpha_a^{n,0} + \alpha_a^{n-1,1} + \cdots + \alpha_a^{0,n}.$$

定义 $\{\widetilde{\alpha_a}\}$ 为

$$\widetilde{\alpha_a} = \alpha_a^{n,0} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}\alpha_a^{n-1,1} + \cdots + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\theta}\alpha_a^{0,n},$$

易验证 $\{\widetilde{\alpha_a}\}$ 满足方程 $\Delta_{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\beta f}(\widetilde{\alpha_a}) = 0$. 从而它们构成相应的 Hodge 丛上的一组基. 注意到 $\alpha_a^{n,0}$ 并没改变, 事实上我们有如下交换图表:

$$\begin{tikzcd} & \{A_a\} \in \Omega_M^n(X)/\mathrm{d}f \wedge \Omega_M^{n-1}(X) \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ \{\alpha_a\} \in \mathcal{H}_{\beta f} \arrow[rr] & & \{\widetilde{\alpha_a}\} \in \mathcal{H}_{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\beta f}\end{tikzcd}$$

因此我们可以在基 $\widetilde{\alpha_a}$ 下计算 tt^* 度量 g:

$$\begin{aligned} g(\widetilde{\alpha_a},\widetilde{\alpha_b}) &= \int_X \widetilde{\alpha_a}\wedge *\overline{\widetilde{\alpha_b}} = \int_X \sum_{p+q=n}(\widetilde{\alpha_a}^{p,q}\wedge *\overline{\widetilde{\alpha_b}^{p,q}}) \\ &= \int_X \sum_{p+q=n}(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}q\theta}\alpha_a^{p,q}\wedge *\overline{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}q\theta}\alpha_b^{p,q}}) = \int_X\sum_{p+q=n}\alpha_a^{p,q}\wedge *\overline{\alpha_b^{p,q}} \\ &= \int_X \alpha_a\wedge *\overline{\alpha_b} = g(\alpha_a,\alpha_b). \end{aligned}$$

在上述的构造下, 配对 η 限制在 $\mathcal{H}^n$ 下和 $\Omega_M^n(X)/\mathrm{d}f\wedge\Omega_M^{n-1}(X)$ 上的留数配对相关, 留数配对的定义如下:

$$\begin{aligned} &\mathrm{Res}:\ \Omega_M^n(X)/\mathrm{d}f\wedge\Omega_M^{n-1}(X)\times\Omega_M^n(X)/\mathrm{d}f\wedge\Omega_M^{n-1}(X)\longrightarrow C^\infty(M), \\ &\mathrm{Res}(A_a,A_b) = \sum_{x\in\mathrm{Crit}(f)}\mathrm{Res}_x\frac{\widetilde{A}_a\widetilde{A}_b\ \mathrm{d}z^1\wedge\mathrm{d}z^2\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}z^n}{(\partial_{z_1}f)\cdots(\partial_{z_n}f)}, \end{aligned}$$

其中 $A=\widetilde{A}\mathrm{d}z^1\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}z^n\in\Omega_M^n(X)$.

命题 4.4 [19]　由以上构造, 存在仅依赖维数 n 的常数 C_n, 使得

$$\eta(\alpha_a,\alpha_b)=C_n\beta^{-n}\,\mathrm{Res}(A_a,A_b).$$

注 4.1　事实上, 如果我们仅考虑 $H_{(c),\overline{\partial}_{\beta f}}$ 或 $H_{(2),\overline{\partial}_{\beta f}}$ 上的上同调元, 则我们会得到高阶留数配对 [14]. 此处, 我们仅得到其首项 (留数配对) 是因为我们选取的基是文 [18] 中所谓的好基. 更重要的是, 文 [18] 中证明了每一个好基的选取都对应着一个本原形式.

4.4　$C^\infty(\mathbb{C}^*\times M)\otimes(\Omega^n/\mathrm{d}f\wedge\Omega^{n-1})$ 上的 tt^* 几何结构

在全纯基下, 算子 C_i 和 $\mathrm{Jac}(f)$ 上的乘积关系相关:

一方面, 由定义, $\partial_i f\alpha_a = C_{ia}^b\alpha_b+\overline{\partial}_{\beta f}\gamma$; 另一方面,

$$\begin{aligned} \partial_i f\alpha_a &= \partial_i f(A_a+\overline{\partial}_{\beta f}\gamma_a) \\ &= \partial_i fA_a+\overline{\partial}_{\beta f}\partial_i f\gamma_a \\ &\overset{(a)}{=} (\widetilde{C}_{ia}^bA_b+\mathrm{d}f\wedge\delta_a)+\overline{\partial}_{\beta f}\gamma_a \\ &\overset{(b)}{=} \widetilde{C}_{ia}^b\Big(\alpha_b-\overline{\partial}_{\beta f}\gamma_b+\overline{\partial}_{\beta f}\frac{\delta_a}{\beta}\Big)+\overline{\partial}_{\beta f}\gamma_a \\ &= \widetilde{C}_{ia}^b\alpha_b+\overline{\partial}_{\beta f}\widetilde{\gamma}, \end{aligned}$$

其中等式 (a), 在 $\Omega^n(X)/\mathrm{d}f\wedge\Omega^{n-1}(X)$ 中, 存在 $\delta_a\in\Omega^{n-1}(X)$ 和 $\widetilde{C}_{ia}^b\in\mathcal{O}_M$, 使得 $\partial_i fA_a=\widetilde{C}_{ia}^bA_b+\mathrm{d}f\wedge\delta_a$. 在等式 (b) 处, $\mathrm{d}f\wedge\delta_a=\overline{\partial}_{\beta f}\frac{\delta_a}{\beta}$. 由 Hodge 分解, 我们得到 $C_{ia}^b=\widetilde{C}_{ia}^b$. 注意到 $C_{iab}=\mathrm{Res}(\partial_i fA_a,A_b)$, 因此算子 C 对应 $\mathrm{Jac}(f)$ 中的乘法结构.

类似地, 算子 $\mathcal{U}$ 和 $\mathrm{Jac}(f)$ 中的算子乘以 f 相关. 我们也可以利用 tt^* 度量在 $C^\infty(C^*\times M)\otimes\big(\Omega^n/\mathrm{d}f\wedge\Omega^{n-1}\big)$ 上定义实现其他算子. 特别地, $C^\infty(C^*\times M)\otimes\big(\Omega^n/\mathrm{d}f\wedge\Omega^{n-1}\big)$ 继承了调和空间中的实结构, 即存在对合变换

$$\widetilde{\tau}_R: C^\infty(C^*\times M)\otimes(\Omega^n/\mathrm{d}f\wedge\Omega^{n-1})\ \longrightarrow\ C^\infty(C^*\times M)\otimes(\Omega^n/\mathrm{d}f\wedge\Omega^{n-1}),$$

使得 $g(\alpha_a,\alpha_b)=C_n\beta^{-n}\,\mathrm{Res}(A_a,\widetilde{\tau}_R A_b)$.

综上, 我们可以在 $C^\infty(C^*\times M)\otimes\big(\Omega^n/\mathrm{d}f\wedge\Omega^{n-1}\big)$ 上实现 tt^* 几何结构

$$(\mathrm{Res},\widetilde{\tau}_R,D,\overline{D},C,\overline{C},\mathcal{U},\overline{\mathcal{U}}),$$

其中 $\overline{C}:=\widetilde{\tau}_R\circ C\circ\widetilde{\tau}_R$, $\overline{\mathcal{U}}:=\widetilde{\tau}_R\circ\mathcal{U}\circ\widetilde{\tau}_R$. 由以上的讨论, 其和 $\mathcal{H}^n$ 上的 tt^* 几何结构是一致的.

例 4.1 (见 [15, A_2 奇点的 tt^* 方程]) 令 $f=\frac{1}{3}x^3-tx$, 则有

(1) $\mathrm{Jac}(f)=\mathrm{Span}_{\mathbb{C}}\{1,x\}$;

(2) 在上述基下, 算子 C_t 的矩阵形式为 $C_t=\begin{pmatrix}0&1\\ t&0\end{pmatrix}$;

(3) $\mathrm{Res}(1,1)=\mathrm{Res}(x,x)=0,\ \mathrm{Res}(1,x)=\mathrm{Res}(x,1)=1.$

记 $g(1,1)=g$, 则 $g(x,x)=g^{-1}$, 且其 tt^* 方程[4]为

$$\overline{\partial}_t\partial_t\ln g=-|\beta|^2(|t|^2g^2-g^{-2}).$$

记 $\lambda=|t|^2$, 则

$$\partial_\lambda(\lambda\partial_\lambda\ln g)=-|\beta|^2(g^2-\lambda g^{-2}).$$

进一步, 记 $z=\beta[f(\sqrt{t})-f(-\sqrt{t})]=\frac{4}{3}\lambda^{\frac{3}{4}}\beta$, 将 g 写作 $g=\sqrt[4]{\lambda}G(z)^{-1}$, 则方程变为

$$G_{zz}=\frac{G_z^2}{G}-\frac{G_z}{z}+G^3-\frac{1}{G}.$$

最后, 记 $u(z)=2\ln G(z)$, 我们得到 sinh-Gordon 方程

$$u_{zz}+\frac{1}{z}u_z=4\sinh u.$$

5 典范基和等单值 τ 函数

5.1 普适形变和典范基

为了将第二节和第三节的结果应用到我们的情形, 我们需要考虑 f_0 的普适形变,

$$f=f_0+\sum_{i=1}^{\mu}t^i\phi_i.$$

[4]在这个例子中, 由实结构的对合性质, tt^* 度量呈现为上述形式.

虽然对于 tt^* 几何结构的 L^2 分析的实现只适用于 relevant 和 marginal 形变[5], 我们可以用代数的办法研究其普适形变 (见 [6]). 因此, 我们可以在典范基和典范坐标下考虑问题. 基于如下事实, Jacobi 环 Jac(f) 中的典范基由所谓的点基给出: 两个函数 $f_1(x), f_2(x)$ 表示 Jac(f) 中的同一元素当且仅当

$$f_1(X_k) = f_2(X_k), \quad \text{对任意的} X_k,$$

其中 $X_k,\ k = 1, \cdots, \mu$ 为 f 的临界点. 因此, 我们可以用临界值表示相应的等价类.

用 φ_k 表示这样的类满足 $\varphi_k(X_k) = 1$, $\varphi_k(X_l) = 0$, $l \neq k$. 进一步, 我们得到 $\mathcal{H}^n$ 的一组全纯基 $\{\omega_k\}$(或者 $C^\infty(C^* \times M) \otimes (\Omega^n/\mathrm{d}f \wedge \Omega^{n-1})$ 的一组全纯基 $\{\widetilde{\omega}_k\}$). 相应的坐标记为 u^i, 即

$$u^1\varphi_1 + \cdots + u^\mu\varphi^\mu = f = f_0 + t^1\phi_1 + \cdots + t^\mu\phi_\mu.$$

事实上, u^i 即是 f 的临界值.

现在, 我们考虑命题 4.1 中的联络 ∇ 在 $\{\omega_k\}$(或者 $\{\widetilde{\omega}_k\}$) 下的联络矩阵.

在如下的讨论中, 我们使用坐标 u^i, $D_i := \Pi \circ \frac{\partial}{\partial u^i}$, $\overline{D}_{\bar{i}} := \Pi \circ \frac{\partial}{\partial \overline{u}^i}$, $C_i := \Pi \circ \varphi_i$, $\overline{C}_{\bar{i}} := \Pi \circ \overline{\varphi_i}$, $i = 1, \cdots, \mu$.

首先, 有

$$\begin{aligned} &\overline{D}_{\bar{i}}\omega_k = 0, \quad D_i\omega_j = -(g(u)\partial_i g(u)^{-1})_j^k\omega_k, \\ &\overline{D}_{\overline{\beta}}\omega_k = 0, \quad D_\beta\omega_j = -(g(u)\partial_\beta g(u)^{-1})_j^k\omega_k. \end{aligned}$$

接着我们考虑算子 $C_i, \overline{C}_{\bar{i}}$ 在 $\{\omega_k\}$ 下的矩阵表示. 由留数配对的定义和命题 4.4, $\eta(\omega_i, \omega_j) = C_n\beta^{-n}\mathrm{Res}(\varphi_i, \varphi_j) = \delta_{ij}\eta_i(u)$, 即配对 η 在基 $\{\omega_i\}$ 下呈对角形式, 则 $\eta^{ij} = \delta_{ij}\eta_i^{-1}$,

$$\begin{aligned} &C_{ij}^k = \eta(\varphi_i\omega_j, \omega_l)\eta^{lk} = \delta_{ij}\delta_j^k, \\ &\overline{C}_{\bar{i}j}^k = g(\overline{\varphi_i}\omega_j, \omega_l)g^{\bar{l}k} = g_{j\bar{l}}\ \overline{C_{im}^l}^{\mathrm{T}} g^{\overline{m}k} = g_{j\bar{i}}\ g^{\bar{i}k}. \end{aligned}$$

类似地, 我们有

$$\begin{aligned} &\mathcal{U}_i^j = \eta(f\varphi_i, \varphi_l)\eta^{lj} = \eta\Big(\sum_k u^k\varphi_k\omega_i, \omega_l\Big)\eta^{lj} = u^i\delta_i^j, \\ &\overline{\mathcal{U}}_i^j = g(\overline{f}\omega_i, \omega_k)g^{\overline{k}j} = g_{i\bar{l}}\ \overline{\mathcal{U}_k^l}^{\mathrm{T}} g^{\overline{k}j} = \sum_k \overline{u}_k\ g_{i\overline{k}}\ g^{\overline{k}j}. \end{aligned}$$

令 $Q = \beta g\partial_\beta g^{-1},\ z = -\beta^{-1},\ \overline{z} = -\overline{\beta}^{-1}$, 则我们得到 ∇ 在 $\{\omega_k\}$ 下的联络矩阵为

$$-g\partial_i g^{-1}\mathrm{d}u^i - \frac{C_i\mathrm{d}u^i}{z} + \Big(\frac{\mathcal{U}}{z} + Q\Big)\frac{\mathrm{d}z}{z} - \frac{\overline{C}_{\bar{i}}\mathrm{d}\overline{u}^i}{\overline{z}} + \frac{\overline{\mathcal{U}}}{\overline{z}}\frac{\mathrm{d}\overline{z}}{\overline{z}}.$$

[5]注意到, 如果 f_0 是 ADE 型或者简单的椭圆奇点, 则它的普适形变可仅由 relevant 或 marginal 形变给出.

注 5.1 Hertling[6] 引入了 trTERP(w) 结构并且证明了 tt^* 几何结构 (文 [6] 中称为 CV 结构) 和 trTERP(w) 结构一一对应. 他将 tt^* 几何结构中的算子组合为 $\mathbb{P}^1\times M$ 上的向量丛的一个亚纯联络

$$\nabla = D+\frac{1}{z}C+z\overline{C}+\Big(\frac{1}{z}\mathcal{U}-Q+\frac{w}{2}\,\mathrm{Id}-z\overline{\mathcal{U}}\Big)\frac{\mathrm{d}z}{z},\quad (|\beta|=1)$$

则 $z=0,\infty$ 都是非正则奇点. 此处, 为了利用第二, 第三两节中的结论, 我们不采用这种形式.

5.2 tt^* 几何的等单值 τ 函数

现在回到我们的联络矩阵形式 (§ 5.1), 注意它的 (1,0) 部分, 即

$$-g\partial_i g^{-1}\mathrm{d}u^i-\frac{C_i\mathrm{d}u^i}{z}+\Big(\frac{\mathcal{U}}{z}+Q\Big)\frac{\mathrm{d}z}{z}. \tag{5.1}$$

由命题 4.1 (9), 我们得到 $[\,\mathcal{U},g\partial_i g^{-1}]=[C_i,Q]$, 即

$$(g\partial g^{-1})_{kl}=Q_{kl}\frac{\mathrm{d}(u^k-u^l)}{u^k-u^l}.$$

考虑对角为 0 的矩阵 Z, 当 $i\neq j$ 时, 矩阵元 $Z_{ij}=\frac{Q_{ij}}{u^i-u^j}$, 则

$$Q=[\mathcal{U},Z]+\mathrm{diag}Q,\quad -g\partial_i g^{-1}=[Z,\mathrm{d}\mathcal{U}]-\mathrm{diag}(g\partial g^{-1}).$$

因此我们可以将 (1,0)-形式 (5.1) 写作

$$-\mathrm{d}\Big(\frac{\mathcal{U}}{z}\Big)+([\mathcal{U},Z]+\mathrm{diag}Q)\frac{\mathrm{d}z}{z}+([Z,\mathrm{d}\mathcal{U}]-\mathrm{diag}(g\partial g^{-1})),$$

因为 $\nabla^{(1,0)}$ 是平坦的, 我们可得到类似命题 3.1 的结论, 进而 (1,0)-形式

$$\Upsilon_1:=\frac{1}{2}\sum_{i\neq j}\frac{Q_{ij}Q_{ji}}{u^i-u^j}\mathrm{d}u^i \tag{5.2}$$

是 ∂- 闭的.

我们进一步整理 Υ_1 为

$$\begin{aligned}\Upsilon_1&=\frac{1}{2}\sum_{i\neq j}\frac{Q_{ij}Q_{ji}}{u^i-u^j}\mathrm{d}u^i\\&=\frac{1}{4}\sum_{i\neq j}\frac{Q_{ij}Q_{ji}}{u^i-u^j}(\mathrm{d}u^i-\mathrm{d}u^j)\\&=\frac{1}{4}\sum_{i\neq j}Q_{ji}(g\partial g^{-1})_{ij}\\&=\frac{1}{4}\,\mathrm{tr}(Qg\partial g^{-1})-\frac{1}{4}\sum_i Q_{ii}(g\partial g^{-1})_{ii}.\end{aligned}$$

我们希望 Υ_1 是一个 d- 闭的 1-形式, 从而局部可积, 然而 $\overline{\partial}\Upsilon_1\neq 0$.

引理 5.1 $\overline{\partial}\Upsilon_1=\ \frac{1}{2}|\beta|^2\,\mathrm{tr}([Q,C]\overline{C})$.

证　由命题 4.1 (9) 我们知道, $\overline{\partial}_{\overline{j}}Q = -|\beta|^2[\mathcal{U},\overline{C}_{\overline{j}}]$. 从而, $\overline{\partial}_{\overline{j}}Q_{ii} = 0$. 由 tt^* 方程, $\overline{\partial}_{\overline{j}}(g\partial g^{-1})_{ii} = 0$. 因此,

$$\begin{aligned}\overline{\partial}\Upsilon_1 &= \frac{1}{4}\operatorname{tr}[(\overline{\partial}Q)g\partial g^{-1}] + \frac{1}{4}\operatorname{tr}[Q\overline{\partial}(g\partial g^{-1})]\\ &= -\frac{1}{4}|\beta|^2\operatorname{tr}([\mathcal{U},\overline{C}]g\partial g^{-1}) + \frac{1}{4}|\beta|^2\operatorname{tr}(Q[C,\overline{C}])\\ &= \frac{1}{4}|\beta|^2\{\operatorname{tr}(\overline{C}[\mathcal{U},g\partial g^{-1}]) + \operatorname{tr}(Q[C,\overline{C}])\}\\ &= \frac{1}{4}|\beta|^2\{\operatorname{tr}(\overline{C}[C,Q]) + \operatorname{tr}(Q[C,\overline{C}])\}\\ &= \frac{1}{2}|\beta|^2\operatorname{tr}([Q,C]\overline{C}).\end{aligned}$$

注意到我们考虑的 tt^* 几何结构是全纯结构和反全纯结构的融合, 或者说是实结构 (tt^* 度量和实结构等价) 在做主导, 因此, 自然地, 我们应该去构造一个实的等单值 τ 函数, 为此我们进一步加入 (0,1)-形式 $\overline{\Upsilon_1}$, 则 $\overline{\partial\Upsilon_1} = 0$, 且有如下引理.

引理 5.2　$\mathrm{d}(\Upsilon_1 + \overline{\Upsilon_1}) = -\frac{1}{2}|\beta|^2(\partial\operatorname{tr}(\mathcal{U}\overline{C}) + \overline{\partial\operatorname{tr}(\mathcal{U}\overline{C})})$.

证　由命题 4.1(9) 我们知道,

$$C - [Q,C] = [D_u,\mathcal{U}],\quad 其中 D_u = \sum_i D_{u^i}\mathrm{d}u^i.$$

因此, 我们有

$$\begin{aligned}\mathrm{d}(\Upsilon_1 + \overline{\Upsilon_1}) &= \overline{\partial}\Upsilon_1 + \overline{\overline{\partial}\Upsilon_1}\\ &= \frac{1}{2}|\beta|^2(\operatorname{tr}(C\overline{C}) - \operatorname{tr}([D_u,\mathcal{U}]\overline{C}) + c.c.)\\ &= \frac{1}{2}|\beta|^2(\operatorname{tr}(C\overline{C}) - \partial\operatorname{tr}(\mathcal{U}\overline{C}) + c.c.).\end{aligned}$$

注意到

$$\begin{aligned}\overline{\operatorname{tr}(C\overline{C})} &= \overline{\operatorname{tr}(C_i\overline{C}_{\overline{j}})}\mathrm{d}\overline{u}^{\overline{i}}\wedge\mathrm{d}u^j\\ &= \overline{\operatorname{tr}(C_i g\overline{C_j^{\mathrm{T}}}g^{-1})}\mathrm{d}\overline{u}^{\overline{i}}\wedge\mathrm{d}u^j\\ &= \overline{\operatorname{tr}(g^{-1}C_i g\overline{C_j^{\mathrm{T}}})}\mathrm{d}\overline{u}^{\overline{i}}\wedge\mathrm{d}u^j\quad(\operatorname{tr}(g^{-1}Ag) = \operatorname{tr}(A))\\ &= \overline{\operatorname{tr}(\overline{C_j}g^{\mathrm{T}}C_i^{\mathrm{T}}g^{-\mathrm{T}})}\mathrm{d}\overline{u}^{\overline{i}}\wedge\mathrm{d}u^j\quad(\operatorname{tr}(A^{\mathrm{T}}) = \operatorname{tr}(A))\\ &= \operatorname{tr}(C_j\overline{g^{\mathrm{T}}C_i^{\mathrm{T}}g^{-\mathrm{T}}})\mathrm{d}\overline{u}^{\overline{i}}\wedge\mathrm{d}u^j\\ &= -\operatorname{tr}(C_j\overline{C}_{\overline{i}})\mathrm{d}u^j\wedge\mathrm{d}\overline{u}^{\overline{i}}\quad(g^{\mathrm{T}} = \overline{g})\\ &= -\operatorname{tr}(C\overline{C}).\end{aligned}$$

类似地, $\overline{\operatorname{tr}(\mathcal{U}\overline{C})}=\operatorname{tr}(\overline{\mathcal{U}}C)$, $\partial\operatorname{tr}(\overline{\mathcal{U}}C)=0$. 由引理 5.1–5.2, 我们修改 $(1,0)$- 形式 Υ 为

$$\Upsilon=\Upsilon_1+\frac{1}{2}|\beta|^2\operatorname{tr}(\overline{\mathcal{U}}C),$$

则 $\Upsilon+\overline{\Upsilon}$ 是一个 d- 闭的 1- 形式. 因此, 我们可以定义等单值变换 τ 函数 τ 为

$$\mathrm{d}\log\tau=\Upsilon+\overline{\Upsilon}=\frac{1}{4}\operatorname{tr}(Qg\partial g^{-1})-\frac{1}{4}\sum_i Q_{ii}(g\partial g^{-1})_{ii}+\frac{1}{2}|\beta|^2\operatorname{tr}(\overline{\mathcal{U}}C)+c.c.$$

综上所述, 我们有如下定理.

定理 5.1 令 f_0 是 $\mathbb{C}^n$ 上的一个非退化的拟齐次多项式, f 是 f_0 的普适形变, 则相应的 tt^* 几何结构给出的等单值 τ 函数满足如下二阶微分方程:

$$\partial_i\overline{\partial}_{\overline{j}}\log\tau=\frac{1}{2}|\beta|^2\operatorname{tr}C_i\overline{C}_{\overline{j}}.$$

证 由引理 5.1,

$$\partial_i\overline{\partial}_{\overline{j}}\log\tau=\frac{1}{2}|\beta|^2(-\operatorname{tr}C_i\overline{C}_{\overline{j}}+\partial_i\operatorname{tr}\mathcal{U}\overline{C}_{\overline{j}}+\overline{\partial}_{\overline{j}}\operatorname{tr}\overline{\mathcal{U}}C_i).$$

现在我们计算 $\partial_i\operatorname{tr}\mathcal{U}\overline{C}_{\overline{j}}+\overline{\partial}_{\overline{j}}\operatorname{tr}\overline{\mathcal{U}}C_i$. 由命题 4.1 (9),

$$\begin{aligned}
&\partial_i\operatorname{tr}\mathcal{U}\overline{C}_{\overline{j}}+\overline{\partial}_{\overline{j}}\operatorname{tr}\overline{\mathcal{U}}C_i\\
&=\operatorname{tr}([D_i,\mathcal{U}])\overline{C}_{\overline{j}}+\operatorname{tr}([\overline{D}_{\overline{j}},\overline{\mathcal{U}}]C_i)\\
&=\operatorname{tr}C_i\overline{C}_{\overline{j}}-\operatorname{tr}([Q,C_i]\overline{C}_{\overline{j}})-\operatorname{tr}([\overline{\beta C}_{\overline{j}},\overline{D}_{\overline{\beta}}]C_i)\\
&=\operatorname{tr}C_i\overline{C}_{\overline{j}}-\operatorname{tr}([Q,C_i]\overline{C}_{\overline{j}})+\operatorname{tr}\overline{C}_{\overline{j}}C_i+\operatorname{tr}\overline{\beta}\overline{\partial}_{\overline{\beta}}(g\overline{C_i^{\mathrm{T}}}g^{-1})C_i\\
&=2\operatorname{tr}C_i\overline{C}_{\overline{j}}-\operatorname{tr}([Q,C_i]\overline{C}_{\overline{j}})+\operatorname{tr}\overline{\beta}(\overline{\partial}_{\overline{\beta}}g)\overline{C_j^{\mathrm{T}}}g^{-1}C_i+\operatorname{tr}\overline{\beta}g\overline{C_j^{\mathrm{T}}}(\overline{\partial}_{\overline{\beta}}g^{-1})C_i\\
&=2\operatorname{tr}C_i\overline{C}_{\overline{j}}-\operatorname{tr}([Q,C_i]\overline{C}_{\overline{j}})+\operatorname{tr}\overline{\beta}(\overline{\partial}_{\overline{\beta}}g)g^{-1}\overline{C}_{\overline{j}}C_i+\operatorname{tr}\overline{\beta C}_{\overline{j}}g(\overline{\partial}_{\overline{\beta}}g^{-1})C_i\\
&=2\operatorname{tr}C_i\overline{C}_{\overline{j}}-\operatorname{tr}([Q,C_i]\overline{C}_{\overline{j}})-\operatorname{tr}(\overline{\beta}g\overline{\partial}_{\overline{\beta}}g^{-1})\overline{C}_{\overline{j}}C_i+\operatorname{tr}\overline{C}_{\overline{j}}(\overline{\beta}g\overline{\partial}_{\overline{\beta}}g^{-1})C_i\\
&\overset{(a)}{=}2\operatorname{tr}C_i\overline{C}_{\overline{j}}-\operatorname{tr}([Q,C_i]\overline{C}_{\overline{j}})-\operatorname{tr}([Q,\overline{C}_{\overline{j}}]C_i)\\
&=2\operatorname{tr}C_i\overline{C}_{\overline{j}},
\end{aligned}$$

其中, 在等号 (a) 处: 由命题 4.3 可知, Q 对 β 的依赖性通过 $|\beta|$ 实现, 故 $Q=\beta g\partial_\beta g^{-1}=\overline{\beta}g\overline{\partial}_{\overline{\beta}}g^{-1}$.

注 5.2 (1) Cecotti-Vafa[5] 研究了缩放极限下的 2 维的大规模 Ising 模型, 该模型由一个满足 Dirac 方程的自由的大规模 Majorana 场 $\Psi(z)$ 刻画, 其中的 τ 函数定义为耦合上一些联络的 Dirac 算子的行列式 (这些联络由插入的场给出). 通过把 Ising 模型的问题解释为一个上同调问题, Cecotti-Vafa 将 Ising 模型中的 τ 函数和超对称量子力学中的相关结构 (LG B-模型的 tt^* 几何) 联系在一起, 他们调整 τ 函数如下:

$$\log\widetilde{\tau}=\log\tau-\log\det(1+g),$$

得到[6]

$$\mathrm{d}\log\widetilde{\tau} = -\operatorname{tr}(\overline{\mathcal{U}}C) + \operatorname{tr}(\mathcal{U}^\dagger C) + \frac{1}{2}\operatorname{tr} Qg\partial g^{-1} + c.c.$$

进一步,

$$\partial_i\overline{\partial}_{\overline{j}}\log\widetilde{\tau} = -\operatorname{tr} C_i\overline{C}_{\overline{j}} + \operatorname{tr} C_i C_j^\dagger,$$

其中右边第二项蕴含着平移不变性.

(2) 同时, Cecotti-Vafa[5] 通过研究环面的 tt^* 几何, 指出 $\operatorname{tr} C_i\overline{C}_{\overline{j}}$ 为环面上的一个平坦 Kähler 度量[7]. 紧接着, 他们考虑了一个超对称指标

$$K = -4\int_{\mathcal{F}}\frac{\mathrm{d}^2\rho}{\rho_2}\operatorname{Tr}[(-1)^F F_L F_R q^{H_L}\overline{q}^{H_R}], \tag{5.3}$$

并且从物理上证明了, 在忽略一个抵消项的情形下,

$$\partial_i\overline{\partial}_{\overline{j}}K = |\beta|^2\operatorname{tr} C_i\overline{C}_{\overline{j}}.$$

特别地, 在中心荷为 3 的情形下, K 给出了亏格 1 的配分函数的表达式. 由此可知, 我们定义出的等单值 τ 函数确实包含了 LG B-模型亏格 1 的信息.

(3) 在文 [7] 中, 借用解析扭转量的研究方法, 通过分析 Δ_f 的热核, 我们构造了所谓的第 i 阶 zeta 函数

$$\zeta_f^i(s) = \frac{1}{2\Gamma(s)}\int_0^\infty t^{s-1}\operatorname{Tr}(-1)^N N^i(\mathrm{e}^{-t\Delta_f} - \Pi)\mathrm{d}t,$$

将其亚纯延拓至 $s\in\mathbb{C}$, 得到 $\zeta_f^{R,i}(s)$, 在 $s=0\in\mathbb{C}$ 处全纯, 则我们可定义关于奇点 f 的第 i 阶扭转不变量如下:

$$T^i(f) = -(\zeta_f^{R,i})'(0).$$

我们将 (5.3) 中的 K 实现为关于奇点 f 的第 2 阶扭转不变量. 最后我们证明了

$$\partial_i\overline{\partial}_{\overline{j}}T^2(f) = (-1)^n\operatorname{tr} C_i\overline{C}_{\overline{j}}.$$

(4) Coates-Iritani[20] 导出了一般情形的亏格 g 配分函数 (他们记作 $C^{(g)}$) 的反常方程. 他们从几何量子化和 Givental 量子化出发, 指出关联函数和相应的辛空间上的极化的选取有关, 不同的极化对应的关联函数的关系由 Feynman 规则给出. 特别地, 假设 P_1, P_2 对应两个不同的极化, 则

(i) 亏格 0 的三点函数的 Feynman 规则是平凡的:

$$\widehat{C}_{ijk}^{(0)} = C_{ijk}^{(0)}.$$

---

[6] 本文中的定义方式和 Cecotti-Vafa 文中的量稍有一些符号差异, 但不影响最终结果.

[7] 利用 tt^* 方程,

$$\partial_k\operatorname{tr} C_i\overline{C}_{\overline{j}} = \operatorname{tr}((D_kC_i)\overline{C}_{\overline{j}}) = \operatorname{tr}((D_iC_k)\overline{C}_{\overline{j}}) = \partial_i\operatorname{tr} C_k\overline{C}_{\overline{j}}.$$

(ii) 亏格 1 的一点函数的 Feynman 规则为:

$$\widehat{C}_i^{(1)} = C_i^{(1)} + (\omega_{P_1P_2})_i,$$

其中 $\omega_{P_1P_2}$ 是某个差分 1- 形式.

如果我们选择 P_1 是复共轭极化, P_2 给出 Frobenius 流形使得 $C^{(1)}$ 对应其 G 函数, 则我们得到全纯方程. 它们的结果为 (见 [20, 第 9 节定义 9.20 和方程 (9.10)])

$$\overline{\partial}_{\overline{j}}\partial_i\widehat{C}^{(1)} = -\frac{1}{2}\operatorname{tr} C_i\overline{C}_{\overline{j}}.$$

综上所述, 我们定义的等单值 τ 函数满足如上二阶微分方程, 由此可知, 该 τ 函数和 LG B-模型在复共轭极化下的亏格 1 的生成函数相关. 因此可以将我们的结果视为 Dubrovin-Zhang 关于亏格 1 GW 不变量的 G 函数公式在 LG B-模型的一个平行的结果.

致谢 首先感谢我的导师范辉军教授给我介绍量子奇点理论中的 tt^* 几何结构. 同时感谢中国科技大学杨迪老师告知我 Dubrovin-Zhang 的工作. 最后感谢匿名审稿人提出的诸多有意义的评审意见.

参 考 文 献

[1] Dubrovin B, Zhang Y. Bihamiltonian hierarchies in 2D topological field theory at one-loop approximation [J]. *Comm Math Phys*, 1998, 198(2):311–361.

[2] Getzler E. Intersection theory on $\overline{\mathcal{M}}_{1,4}$ and elliptic Gromov-Witten invariants [J]. *J Amer Math Soc*, 1997, 10(4):973–998.

[3] Cecotti S, Vafa C. On classification of $N = 2$ supersymmetric theories [J]. *Comm Math Phys*, 1993, 158:569–644.

[4] Dubrovin B. Geometry and integrability of topological-antitopological fusion [J]. *Comm Math Phys*, 1993, 152(3):539–564.

[5] Cecotti S, Vafa C. Ising model and $N = 2$ supersymmetric theories [J]. *Comm Math Phys*, 1993, 157(1):139–178.

[6] Hertling C. tt^* geometry, frobenius manifolds, their connections, and the construction for singularities (English Summarty) [J]. *J Reine Angew Math*, 2003, 555:77–161.

[7] Tang X. tt^* geometry, singularity torsion and anomaly formulas [J/OL]. arXiv:1710.03915v2.

[8] Fan H, Fang H. Torsion type invariants of singularities [J/OL]. arXiv:1603.06530.

[9] Sabbah C. Isomonodromic deformations and frobenius manifolds, an introduction [M]//Translated from the 2002 French edition, Universitext, London: Springer-Verlag, Les Ulis: EDP Sciences, 2007, 145–166.

[10] Bolibruch A. The Riemann-Hilbert problem [J]. *Russian Math Surveys*, 1990, 45(2):1–47.

[11] Babelon O, Bernard D, Talon M. Introduction to classical integrable systems [M]. Cambridge Monographs on Mathematical Physics, New York: Cambrige University Press, 2003.

[12] Dubrovin B. Geometry of 2D topological field theories [C]//Integrable Systems and Quantum Groups, Montecalini, Terme, 1993. Francaviglia M, Greco S (eds), Springer Lecture Notes in Math, Berlin: Springer 1996, 1620:120–348.

[13] Barannikov S, Kontsevich M. Frobenius manifolds and formality of Lie algebras of polyvector fields [J]. *Internat Math Res Notices*, 1998(4):201–215.

[14] Saito K, Takahashi A. From primitive forms to frobenius manifolds [C]//From Hodge theory to integrability and TQFT tt^*-geometry, 31–48. Ron Y. Donagi and Katrin Wendland (eds). Proc Sympos Pure Math, vol 78, Providence, RI: Amer Math Soc, 2008.

[15] Cecotti S, Vafa C. Topological-anti-topological fusion [J]. *Nucl Phys B*, 1991, 367(2):359–461.

[16] Klimek S, Lesniewski A. Local rings of singularities and $N = 2$ supersymmetric quantum mechanics [J]. *Comm Math Phys*, 1991, 136:327–344.

[17] Fan H. Schrödinger equations, deformation theory and tt^*-geometry [J/OL]. arXiv:1107.1290.

[18] Li C, Li S, Saito K. Primitive forms via polyvector fields [J/OL]. arXiv:1311.1659.

[19] 范辉军, 沈烨锋. 量子奇点理论理论中配对间的同构 [J]. 中国科学: 数学, 2016, 46(5):533–548.

[20] Coates T, Iritani H. A fock sheaf for givental quantization [J]. *Kyoto J Math,* 2018, 58(4):695–864.

Isomonodromic τ Function of tt^* Geometry

TANG Xinxing[1]

[1]Beijing International Center for Mathematical Research, Peking University, Beijing 100871, China. E-mail: xxtang@pku.edu.cn

Abstract In this paper, the author defines the isomonodromic tau function of tt^*geometry in the Landau-Ginzburg B model. Inspired by the Dubrovin-Zhang's work on the one-loop approximation, the author relates the τ function to the primary genus 1 generating function of Landau-Ginzburg B model.

Keywords Isomonodromic τ function, Isomonodromic deformation, tt^*geometry
2000 MR Subject Classification 34M35, 34M56

The English translation of this paper will be published in

Chinese Journal of Contemporary Mathematics, Vol. 42 No. 2, 2021

by ALLERTON PRESS, INC., USA