数 学 年 刊 A 辑
2021, 42(2):229–236
DOI: 10.16205/j.cnki.cama.2021.0018

与马猜想有关的一类不定方程*

罗家贵[1] 费双林[1] 李 垣[1]

提要 设 p 是奇素数, $b, t, r \in \mathrm{N}$. 1992 年, 马少麟猜想丢番图方程 $x^2 = 2^{2b+2}p^{2t} - 2^{b+2}p^{t+r} + 1$ 有唯一的正整数解 $(x, b, p, t, r) = (49, 3, 5, 1, 2)$, 并且证明了这个猜想蕴含 McFarland 关于乘子为 -1 的阿贝尔差集的猜想. 在 [Ma S L, MaFarland'conjecture on Abelian difference sets with multiplier-1 [J]. *Designs, Codes and Cryptography,* 1992, 1:321–332.] 中, 马少麟证明了: 若 $t \geqslant r$, 则丢番图方程 $x^2 = 2^{2b+2}p^{2t} - 2^{b+2}p^{t+r} + 1$ 没有正整数解. 本文证明了: 若 $a > 1$ 是奇数, $t \geqslant r$, 那么丢番图方程 $x^2 = 2^{2b+2}a^{2t} - 2^{b+2}a^{t+r} + 1$ 的正整数解由 $t = r = 1, x + a\sqrt{2^{b+2}(2^b - 1)} = (2^{b+1} - 1 + \sqrt{2^{b+2}(2^b - 1)})^n$ 给出, 其中 n 为奇数. 作者也证明了: 若 p 是奇素数, 则 $(x, b, p, t, r) = (7, 3, 5, 1, 2)$ 是丢番图方程 $x^4 = 2^{2b+2}p^{2t} - 2^{b+2}p^{t+r} + 1$ 的唯一正整数解.

关键词 McFarland's 猜想, 丢番图方程, 基本解
MR (2000) 主题分类 11D41, 11D61
中图法分类 O156.7
文献标志码 A
文章编号 1000-8314(2021)02-0229-08

1 引 言

本文假设 N 表示正整数集合. 设 G 是阶为 v 的有限群. G 的一个含有 k 个元素的子集 D 称为 G 的一个差集, 记为 $A(v, k, \lambda)$, 如果对 G 中任何一个非单位元 g, 方程 $d_1 d_2^{-1} = g$ 恰有 λ 组解 $(d_1, d_2) \in D \times D$. 如果 $1 < k < v - 1$, 那么差集 $A(v, k, \lambda)$ 称为非平凡的. 当 G 是阿贝尔群时, 一个与 v 互素的整数 t 称为 D 的一个乘子, 如果 $D^{(t)} = Dh$, 这里 $D^{(t)} = \{d^t \mid d \in D\}$, 而 $Dh = \{dh \mid d \in D\}$. 1990 年, McFarland[2] 提出如下结论.

McFarland 猜想 如果阿贝尔群的一个非平凡差集 $A(v, k, \lambda)$ 的乘子等于 -1, 则 $v = 4n$ 或 $v = 4000, n = 625$, 其中 $n = k - \lambda$.

1992 年, 马少麟[1]提出如下猜想.

猜想 1 设 p 是奇素数且 $b, t, r \in \mathrm{N}$, 则

(1) $Y = 2^{2b}p^{2t} - 2^{2b}p^{t+r} + 1$ 是一个平方数当且仅当 $t = r$, 即当且仅当 $Y = 1$.

(2) $Z = 2^{2b+2}p^{2t} - 2^{b+2}p^{t+r} + 1$ 是一个平方数当且仅当 $p = 5, b = 3, t = 1, r = 2$, 即当且仅当 $Z = 2401 = 7^4$.

本文 2018 年 8 月 13 日收到.

[1]西华师范大学数学与信息学院, 四川 南充 637009.
E-mail: Luojg62@aliyun.com; fslshuanglin@163.com; 531951739@qq.com

*本文受到国家自然科学基金 (No. 10571180) 和四川省教育厅重大培育项目 (No. 16ZA0173) 的资助.

在上述文章中, 马少麟证明了该猜想可以推出阿贝尔群中乘子为 -1 的差集的 McFarland 猜想为真. 曹珍富[3], 乐茂华和向青[4], 郭永东[5]分别独立地证明了猜想 1 成立. 曹珍富和 Grytczuk[6], 董晓蕾和曹珍富[7]对猜想 1 的更多的情况进行了考虑. 罗家贵, Togbe 和袁平之[8]更进一步研究并推广了猜想 1 的结论.

关于猜想 2, 马少麟 [1] 利用不等式的方法证明了如下定理.

定理 A 设 p 是奇素数, $b,t,r\in\mathrm{N}$, 如果 $t\geqslant r$, 则丢番图方程

$$x^2=2^{2b+2}p^{2t}-2^{b+2}p^{t+r}+1$$

没有正整数解.

本文, 我们仅用 Störmer 定理及其推广和 Pell 方程解的基本性质, 得到了如下定理.

定理 1.1 若 $a>1$ 为奇数, $b,t,r\in\mathrm{N}$ 且 $t\geqslant r$, 则丢番图方程

$$x^2=2^{2b+2}a^{2t}-2^{b+2}a^{t+r}+1 \tag{1.1}$$

的正整数解由 $t=r=1$,

$$x+a\sqrt{2^{b+2}(2^b-1)}=\left(2^{b+1}-1+\sqrt{2^{b+2}(2^b-1)}\right)^n$$

给出, 其中 $n\in\mathrm{N}$ 为奇数.

进一步, 我们有如下定理.

定理 1.2 若 p 为奇素数且 $b,t,r\in\mathrm{N}$, 则丢番图方程

$$x^4=2^{2b+2}p^{2t}-2^{b+2}p^{t+r}+1 \tag{1.2}$$

有唯一的正整数解 $(x,b,p,t,r)=(7,3,5,1,2)$.

2 引 理

本节, 我们介绍后面证明中需要用到的一些引理.

引理 2.1 (Störmer 定理[9]) 设正整数 D 不是一个平方数, (x_1,y_1) 是 Pell 方程

$$x^2-Dy^2=\pm1 \tag{2.1}$$

的一组正整数解. 若 y_1 的每个素因子整除 D, 则 $x_1+y_1\sqrt{D}$ 是方程 (2.1) 的基本解.

引理 2.2 [10] 设正整数 D 不是一个平方数. 定义

$$T_n+U_n\sqrt{D}=(T_1+U_1\sqrt{D})^n,$$

其中 $T_1+U_1\sqrt{D}$ 是 Pell 方程

$$x^2-Dy^2=1 \tag{2.2}$$

的基本解, 则 $U_1\mid U_n$, 当且仅当 n 为奇数时, $T_1\mid T_n$.

引理 2.3 [10] 设正整数 D 不是一个平方数, (x_1, y_1) 是 Pell 方程

$$x^2 - Dy^2 = 1 \tag{2.3}$$

的基本解. 设 (x, y) 是方程 (2.3) 的一个正整数解. 若 y 的每个素因子整除 y_1, 则 $x+y\sqrt{D} = x_1 + y_1\sqrt{D}$.

引理 2.4 [11−12] 设 ε_1 和 ε_2 分别是方程 $x^2 - kly^2 = 1$ 和 $kx^2 - ly^2 = 1$ 的最小解, 则 $\varepsilon_1 = \varepsilon_2^2$.

引理 2.5 [13] 设正整数 D 不是一个平方数且是奇数, (x, y) 是方程 (2.3) 的一组正整数解, $y = 2^n y', n \in \mathrm{N}$. 若 y' 的每个素因子整除 D, 则 $x + y\sqrt{D} = \varepsilon$ 或 ε^2 或 ε^3, 其中 $x_1 + y_1\sqrt{D} = \varepsilon$ 是方程 (2.3) 的基本解.

引理 2.6 [14] 设 n 和 D 是给定的正整数, $n \geqslant 3$ 且 D 不是平方数. 如果 $2 \mid D$, 则

$$x^2 - Dy^{2n} = 1 \tag{2.4}$$

至多只有一组正整数解 (x, y).

引理 2.7 [15] 设正整数 D 不是一个平方数. 定义

$$T_n + U_n\sqrt{D} = (T_1 + U_1\sqrt{D})^n,$$

其中 $T_1 + U_1\sqrt{D}$ 是 Pell 方程 (2.3) 的基本解, 则

$$x^2 - Dy^4 = 1 \tag{2.5}$$

至多有两组正整数解 (X, Y). 如果 (X_1, Y_1) 和 (X_2, Y_2) 是方程 (2.5) 的两组正整数解且 $Y_1 < Y_2$, 则除 $D = 1785$ 或者 $D = 16 \cdot 1785$ 时, $Y_1^2 = U_1, Y_2^2 = U_4$ 外, 我们有 $Y_1^2 = U_1, Y_2^2 = U_2$.

3 定理的证明

定理 1.1 的证明 我们分两种情形证明.

情形 1 $t = r$.

由 (1.1) 得 (x, a^t) 是丢番图方程

$$X^2 - 2^{b+2}(2^b - 1)Y^2 = 1 \tag{3.1}$$

的正整数解. 若 $t = 2$, 因为 $(2^{b+1} - 1, 1)$ 是丢番图方程 (3.1) 的基本解, 由引理 2.7, 得

$$x + a^2\sqrt{2^{b+2}(2^b - 1)} = \left(2^{b+1} - 1 + \sqrt{2^{b+2}(2^b - 1)}\right)^2.$$

故 $a^2 = 2(2^{b+1} - 1)$, 与 $2 \nmid a$ 矛盾.

若 $t \geqslant 3$, 则 (x, a^t) 和 $(2^{b+1} - 1, 1)$ 均是 Pell 方程 $X^2 - 2^{b+2}(2^b - 1)Y^{2t} = 1$ 的解, 与引理 2.6 的结论矛盾.

若 $t=r=1$, 则有

$$x+a\sqrt{2^{b+2}(2^b-1)}=\left(2^{b+1}-1+\sqrt{2^{b+2}(2^b-1)}\right)^n,$$

其中 $n\in\mathbb{N}$. 若 $2\mid n$, 则由引理 2.2 得 $2(2^{b+1}-1)\mid a$, 也与 a 是奇数矛盾.

情形 2 $t>r$.

首先考虑: b 为偶数且 $t\equiv r\pmod 2$. 由方程 (1.1) 可知 $(x,2^{\frac{b+2}{2}}a^{\frac{t+r}{2}})$ 是丢番图方程

$$X^2-(2^ba^{t-r}-1)Y^2=1 \tag{3.2}$$

的正整数解. 因为 $(2^{\frac{b}{2}}a^{\frac{t-r}{2}},1)$ 是丢番图方程 $X^2-(2^ba^{t-r}-1)Y^2=1$ 的基本解, 所以

$$x+2^{\frac{b+2}{2}}a^{\frac{t+r}{2}}\sqrt{2^ba^{t-r}-1}=(2^{\frac{b}{2}}a^{\frac{t-r}{2}}+\sqrt{2^ba^{t-r}-1})^n,$$

其中 $n\in\mathbb{N}$.

如果 $2\nmid n$, 则由引理 2.2 可得 $2^{\frac{b}{2}}a^{\frac{t-r}{2}}\mid x$, 这是不可能的. 若 $2\mid n$, 令 $n=2m$, 则

$$x+2^{\frac{b+2}{2}}a^{\frac{t+r}{2}}\sqrt{2^ba^{t-r}-1}=(2^{\frac{b}{2}}a^{\frac{t-r}{2}}+\sqrt{2^ba^{t-r}-1})^{2m}=(x_m+y_m\sqrt{2^ba^{t-r}-1})^2.$$

从而有

$$2^{\frac{b+2}{2}}a^{\frac{t+r}{2}}=2x_my_m. \tag{3.3}$$

若 $2\mid m$, 由引理 2.2 我们有 $2^{\frac{b+2}{2}}a^{\frac{t-r}{2}}\mid y_m$. 因此有 $2^{\frac{b+4}{2}}\mid 2^{\frac{b+2}{2}}$, 这是不可能的. 若 $2\nmid m$, 则由引理 2.2, 我们有 $2^{\frac{b}{2}}a^{\frac{t-r}{2}}\mid x_m$. 因此可得 $y_m=1$, 故 $m=1$. 从而有 $2^{\frac{b+2}{2}}a^{\frac{t+r}{2}}=2^{\frac{b+2}{2}}a^{\frac{t-r}{2}}$, 这是不可能的.

其次考虑: b 为偶数且 $t\not\equiv r\pmod 2$. 由方程 (1.1) 可得, $(x,2^{\frac{b+2}{2}}a^{\frac{t+r-1}{2}})$ 是丢番图方程

$$X^2-a(2^ba^{t-r}-1)Y^2=1 \tag{3.4}$$

的正整数解. 因为 $(2^{\frac{b}{2}}a^{\frac{t-r-1}{2}},1)$ 是丢番图方程 $aX^2-(2^ba^{t-r}-1)Y^2=1$ 的最小解, 所以由引理 2.6 和引理 2.7, 可得

$$x+2^{\frac{b+2}{2}}a^{\frac{t+r-1}{2}}\sqrt{2^ba^{t-r}-1}=(2^{\frac{b}{2}}a^{\frac{t-r-1}{2}}\sqrt{a}+\sqrt{2^ba^{t-r}-1})^2, \tag{3.5}$$

或

$$x+2^{\frac{b+2}{2}}a^{\frac{t+r-1}{2}}\sqrt{2^ba^{t-r}-1}=(2^{\frac{b}{2}}a^{\frac{t-r-1}{2}}\sqrt{a}+\sqrt{2^ba^{t-r}-1})^4, \tag{3.6}$$

或

$$x+2^{\frac{b+2}{2}}a^{\frac{t+r-1}{2}}\sqrt{2^ba^{t-r}-1}=(2^{\frac{b}{2}}a^{\frac{t-r-1}{2}}\sqrt{a}+\sqrt{2^ba^{t-r}-1})^6. \tag{3.7}$$

由 (3.5) 得 $2^{\frac{b+2}{2}}a^{\frac{t+r-1}{2}}=2^{\frac{b+2}{2}}a^{\frac{t-r-1}{2}}$, 这是不可能的.

由 (3.6) 得 $2^{\frac{b+2}{2}}a^{\frac{t+r-1}{2}}=2^{\frac{b+4}{2}}a^{\frac{t-r-1}{2}}(2^{b+1}a^{t-r}-1)$, 这是不可能的.

由 (3.7) 得 $2^{\frac{b+2}{2}}a^{\frac{t+r-1}{2}}=2^{\frac{b+2}{2}}a^{\frac{t-r-1}{2}}(2^{b+4}a^{t-r}(2^ba^{t-r}-1)+3)$, 这是不可能的.

第三考虑: b 为奇数且 $t\equiv r \pmod 2$. 由方程 (1.1) 可得 $(x,2^{\frac{b+1}{2}}a^{\frac{t+r}{2}})$ 是丢番图方程

$$X^2-2(2^ba^{t-r}-1)Y^2=1 \tag{3.8}$$

的正整数解. 因为 $(2^{\frac{b-1}{2}}a^{\frac{t-r}{2}},1)$ 是丢番图方程 $2X^2-(2^ba^{t-r}-1)Y^2=1$ 的正整数解, 所以由引理 2.4, 我们有

$$(2^{\frac{b-1}{2}}a^{\frac{t-r}{2}}\sqrt{2}+\sqrt{2^ba^{t-r}-1})^2=2^{b+1}a^{t-r}-1+2^{\frac{b+1}{2}}a^{\frac{t-r}{2}}\sqrt{2(2^ba^{t-r}-1)}$$

是 (3.8) 的基本解. 于是根据引理 2.3, 可得

$$2^{\frac{b+1}{2}}a^{\frac{t+r}{2}}=2^{\frac{b+1}{2}}a^{\frac{t-r}{2}},$$

与 $r>0$ 矛盾.

最后考虑; b 是奇数且 $t\not\equiv r \pmod 2$. 由引理 2.1 和方程 (1.1) 可得, $(x,2^{\frac{b+1}{2}}a^{\frac{t+r-1}{2}})$ 是丢番图方程

$$X^2-2a(2^ba^{t-r}-1)Y^2=1 \tag{3.9}$$

的基本解. 因为 $(2^{\frac{b-1}{2}}a^{\frac{t-r-1}{2}},1)$ 是丢番图方程 $2aX^2-(2^ba^{t-r}-1)Y^2=1$ 的最小解, 所以由引理 2.1 和引理 2.5, 可得

$$2^{\frac{b+1}{2}}a^{\frac{t+r-1}{2}}=2^{\frac{b+1}{2}}a^{\frac{t-r-1}{2}},$$

这是不可能的.

定理 1.2 的证明 根据定理 1.1 可知, 我们只需考虑 $t\leqslant r$. 由方程 (1.2) 得

$$\frac{x^2+1}{2}\frac{x^2-1}{2}=2^bp^{2t}(2^b-p^{r-t}).$$

因此

$$\frac{x^2+1}{2}=p^{2t}D_1,\quad \frac{x^2-1}{2}=2^bD_2,\quad D_1D_2=2^b-p^{r-t}.$$

如果 $D_1>1$, 则 $D_1\geqslant 3$ 且

$$\frac{x+1}{2}\frac{x-1}{2}=2^{b-1}D_2. \tag{3.10}$$

因为 $2^{b-1}-D_2=2^{b-1}-\frac{2^b-p^{r-t}}{D_1}\geqslant 2^{b-1}-\frac{2^b-p^{r-t}}{3}=\frac{2^{b-1}+p^{r-t}}{2}\geqslant 1$, 所以 (3.10) 导致 $b=2,r=t,D_1=3,D_2=1,x=3$. 从而由 $\frac{x^2+1}{2}=p^{2t}D_1$ 得 $3\mid 1$, 矛盾. 故 $D_1=1$ 且

$$\frac{x^2+1}{2}=p^{2t},\quad \frac{x+1}{2}=2^{b-1},\quad \frac{x-1}{2}=2^b-p^{r-t}, \tag{3.11}$$

或

$$\frac{x^2+1}{2}=p^{2t},\quad \frac{x+1}{2}=2^b-p^{r-t},\quad \frac{x-1}{2}=2^{b-1}. \tag{3.12}$$

由 (3.11) 可得

$$2^{b-2}(2^{b-1}-1)=\frac{p^t+1}{2}\frac{p^t-1}{2}.$$

因此 $\frac{p^t+1}{2}=2^{b-1}-1, \frac{p^t-1}{2}=2^{b-2}$, 故 $2^{b-1}-2^{b-2}=2$. 计算可得

$$b=3, \quad p=5, \quad t=1, \quad x=7, \quad r=2.$$

由 (3.12) 可得

$$2^{b-2}(2^{b-1}+1)=\frac{p^t+1}{2}\frac{p^t-1}{2}.$$

因此 $\frac{p^t+1}{2}=2^{b-1}+1, \frac{p^t-1}{2}=2^{b-2}$, 从而有 $2^{b-1}=2^{b-2}$, 这是不可能的.

4 应 用

本小节, 我们给出定理 1.1 的一些应用举例.

例 1 $b=1$.

$$\begin{aligned}&(2^{b+1}-1+\sqrt{2^{b+2}(2^b-1)})^3\\=&(3+\sqrt{8})^3=99+35\sqrt{8},\\&(2^{b+1}-1+\sqrt{2^{b+2}(2^b-1)})^9\\=&(99+35\sqrt{8})^3=3880899+1372105\sqrt{8},\end{aligned}$$

因此 $(x,a)=(99,5\cdot7)$ 和 $(x,a)=(3880899,5\cdot7\cdot197\cdot199)$ 是丢番图方程 $x^2=2^4a^2-2^3a^2+1$ 的正整数解.

例 2 $b=2$.

$$\begin{aligned}&(2^{b+1}-1+\sqrt{2^{b+2}(2^b-1)})^3\\=&(7+\sqrt{48})^3=1351+195\sqrt{48},\\&(2^{b+1}-1+\sqrt{2^{b+2}(2^b-1)})^5\\=&262087+37829\sqrt{48},\end{aligned}$$

因此 $(x,a)=(1351,3\cdot5\cdot13)$ 和 $(x,a)=(262087,\cdot11\cdot19\cdot181)$ 是丢番图方程 $x^2=2^6a^2-2^4a^2+1$ 的正整数解.

例 3 $b=3$.

$$\begin{aligned}&(2^{b+1}-1+\sqrt{2^{b+2}(2^b-1)})^3\\=&(15+\sqrt{224})^3=13455+899\sqrt{224},\end{aligned}$$

因此 $(x,a)=(13455,29\cdot31)$ 是丢番图方程 $x^2=2^8a^2-2^5a^2+1$ 的正整数解.

例 4 $b=4$.

$$\begin{aligned}&(2^{b+1}-1+\sqrt{2^{b+2}(2^b-1)})^3\\=&(31+\sqrt{960})^3=119071+3843\sqrt{960},\end{aligned}$$

因此 $(x,a)=(119071,3^2\cdot7\cdot61)$ 是丢番图方程 $x^2=2^{10}a^2-2^6a^2+1$ 的正整数解.

例 5 $b=5$.

$$(2^{b+1}-1+\sqrt{2^{b+2}(2^b-1)})^3$$

$= (63+\sqrt{3968})^3 = 999999 + 15875\sqrt{3968},$

因此 $(x,a) = (999999, 5^3\cdot 127)$ 是丢番图方程 $x^2 = 2^{12}a^2 - 2^7a^2 + 1$ 的正整数解.

例 6 $b = 6$.

$(2^{b+1} - 1 + \sqrt{2^{b+2}(2^b-1)})^3$

$= (127+\sqrt{16128})^3 = 8193151 + 64515\sqrt{16128},$

因此 $(x,a) = (8193151, 3\cdot 5\cdot 11\cdot 17\cdot 23)$ 是丢番图方程 $x^2 = 2^{14}a^2 - 2^8a^2 + 1$ 的正整数解.

致谢 衷心感谢审稿人的意见.

参　考　文　献

[1] Ma S L, MaFarland'conjecture on Abelian difference sets with multiplier-1 [J]. *Designs, Codes and Cryptography,* 1992, 1:321–332.

[2] Jungnickel D. Difference sets, JH. Dinitz, DR. Stinson, Contemporary design theory [M]//New York: Wiley, 1992:241–324.

[3] 曹珍富. 有限单群上的一类丢番图方程 [J]. 东北数学, 2000, 16(4):391–397.

[4] Le M H, Xiang Q. A result on Ma'conjecture [J]. *J Combinatorial Theory, Ser A,* 1996, 73:181–184.

[5] Guo Y D. On the exponential Diophaantine equation $x^2 = 2^{2a}k^{2m} - 2^{2a}k^{m+n} + 1$ [J]. *Discuss Math Algebra Stokastic Methods,* 1996, 16(1):57–60.

[6] Cao Z F, Grytczuk A. Some classes of Diophantine equations connected with McFarland'conjecture [J]. *Discuss Math-General Algebra and Applications,* 2000, 20(2):49–62.

[7] 董晓蕾, 曹珍富. 差集上的一类丢番图方程的推广 [J]. 黑龙江大学学报, 2002, 19(2):1–4.

[8] Luo J G, Togbe A, Yuan P Z. On some equations related to Ma's conjecture [J]. *Integers,* 2011, A27.

[9] Dickson L E. History of the theory of numbers [M]. Washington: Carnegie Inst, 1920.

[10] 罗家贵. 关于丢番图方程 $\frac{ax^m\pm1}{ax\pm1} = y^n$ 和 $\frac{ax^m\pm1}{ax\pm1} = y^n + 1$ [J]. 数学年刊 A 辑, 2004, 25(6):805–808.

[11] 袁平之, 罗家贵. 关于一类高次丢番图方程的解 [J]. 数学研究与评论, 2001, 21(1):99–102.

[12] Luo J G, Yuan P Z. On the solutions of a system of two Diophantine equations [J]. *Science China Mathematics*, 2014, 57(7):1401–1418.

[13] Luo J G, Yuan P Z. On the Diophantine equation $\frac{ax^{n+2l}+c}{abt^2x^n+c} = by^2$ [J]. *Acta Math Hungar,* 2011, 133(4):342–358.

[14] Yuan P Z, Luo J G. Three triangular numbers containned in geometric progression, *Functiones et Approximatio*, 2010, 42(1):59–65.

[15] Togbe A, Woutier P M, Walsh P G. Solving a fimily of Thue equations with an application to the equation $x^2 - Dy^4 = 1$ [J]. *Acta Arith*, 2005, 120(4), 39–58.

On Some Equations Related to Ma's Conjecture

LUO Jiagui[1] FEI Shuanglin[1] LI Yuan[1]

[1]School of Mathematics and Information, China West Normal University, Nanchong 637009, Sichuan, China.
E-mail: Luojg62@aliyun.com; fslshuanglin@163.com; 531951739@qq.com

Abstract Let p be an odd prime and $b, t, r \in \mathrm{N}$. In 1992, Ma conjectured that $(x, b, p, t, r) = (49, 3, 5, 1, 2)$ is the only positive integer solution of equation $x^2 = 2^{2b+2}p^{2t} - 2^{b+2}p^{t+r} + 1$. And Ma proved that the conjecture implies McFarland's conjecture on Abelian difference sets with multiplier-1. In [Ma S L, MaFarland'conjecture on Abelian difference sets with multiplier-1 [J]. *Designs, Codes and Cryptography,* 1992, 1:321–332.], Ma proved that equation $x^2 = 2^{2b+2}p^{2t} - 2^{b+2}p^{t+r} + 1$ had no positive integer solution if $t \geqslant r$. In the present paper, the authors prove that the positive integer solutions of Diophantine equation $x^2 = 2^{2b+2}a^{2t} - 2^{b+2}a^{t+r} + 1$ with a is an odd > 1 and $t \geqslant r$ are given by $t = r = 1$ and $x + a\sqrt{2^{b+2}(2^b-1)} = (2^{b+1} - 1 + \sqrt{2^{b+2}(2^b-1)})^n$ for some odd positive integer n. They also prove that the only positive integer solution of Diophantine equation $x^4 = 2^{2b+2}p^{2t} - 2^{b+2}p^{t+r} + 1$ with p is an odd prime and $x, b, t, r \in \mathrm{N}$ is given by $(x, b, p, t, r) = (7, 3, 5, 1, 2)$.

Keywords McFarland'conjecture, Diophantine equations, Fundamental solution

2000 MR Subject Classification 11D41, 11D61