数 学 年 刊 A 辑
2021, 42(4):401–418
DOI: 10.16205/j.cnki.cama.2021.0031

二重 Laplace-Stieltjes 变换的增长性*

毕家烨[1] 霍颖莹[2]

提要 本文引入了一种新的广义级来研究由二重 Laplace-Stieltjes 变换所定义的全纯函数的增长性, 并建立了一些最大模与最大项之间的有趣的关系, 推广了 Laplace-Stieltjes 变换的某些结果.

关键词 Laplace-Stieltjes 变换, 广义级, 全纯函数
MR (2000) 主题分类 22E46, 22E47
中图法分类 O175.29
文献标志码 A
文章编号 1000-8314(2021)04-0401-18

1 引 言

函数 φ 的 Laplace-Stieltjes 变换 (简称为 L-S 变换) 的定义如下:

$$f(z)=\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-zt}\mathrm{d}\varphi(t):=\lim_{R\to\infty}\int_0^{R}\mathrm{e}^{-zt}\mathrm{d}\varphi(t),$$

其中 φ 在每个闭区间 $[0,R]$ $(R>0)$ 上都是有界变差函数且设等号右边在某个 $z=z_0$ 处收敛. L-S 变换是 Laplace 变换的推广, 后者解决物理问题的效用可能仅次于 Fourier 变换. L-S 变换也是 Dirichlet 级数的推广, 后者在数论中很有用. 此外, L-S 变换在概率论中同样是一个有力的工具. 在 1963 年, 余家荣[1]首先研究了 L-S 变换的增长性和由 L-S 变化表示的整函数的 Borel 奇异方向. 大量有关 L-S 变换的结果可在文 [2] 中找到, 我们可在文 [3–4] 中看到关于 L-S 变换增长性的最新结果. 在 1941 年, Bernstein[5]研究了二重 L-S 变换

$$F(s):=\lim_{X\to\infty}\int_{[0,X]}\mathrm{e}^{-s\cdot y}\mathrm{d}g(y) \tag{1.1}$$

的收敛区域, 其中 $X:=(X_1,X_2)\in\mathbb{R}^2$, $[0,X]:=[0,X_1]\times[0,X_2]$, $X\to\infty$ 意思是 $X_1,X_2\to\infty$, $y:=(y_1,y_2)\in\mathbb{R}^2$, $s=\sigma+\mathrm{i}t:=(\sigma_1,\sigma_2)+\mathrm{i}(t_1,t_2)(\sigma_1,\sigma_2,t_1,t_2\in\mathbb{R})$, $s\cdot y$ 是 s 和 y 的通

本文 2020 年 2 月 14 日收到, 2021 年 5 月 7 日收到修改稿.
[1]广东工业大学数学与统计学院, 广州 510520. E-mail: jiayeBi@outlook.com
[2]通信作者. 广东工业大学数学与统计学院, 广州 510520. E-mail: huoyingy@gdut.edu.cn
*本文受到国家自然科学基金 (No. 11501127), 广东省自然科学基金 (No. 2018A030313954) 和广东省普通高校重点领域专项 (新一代信息技术)(No. 2020ZDZX3019) 的资助.

常内积, g 在每个有界区间 $[0, X]$ 上都是 Vitali 有界变差函数 (见 [5, pp. 462–463] 或 [6, pp. 175–176]).

二重 L-S 变换是有用的工具, 例如在研究指数布朗运动 (在这种情况下, $g(y)$ 由指数布朗运动的分布函数确定 (见 [7]). 在 Bernstein 的影响深远的工作后, 在 1962 年, 余家荣先生[8]首先建立了二重 L-S 变换的 Valion-Knopp-Bohr 公式, 我们现在展示一些之后会用到的结果.

定义 A 积分

$$S(X; s_1, s_2) := \int_{[0,X]} \mathrm{e}^{-s_1y_1-s_2y_2}\mathrm{d}g(y_1, y_2)$$

称为 L-S 变换 (1.1) 的部分.

若部分 $S(X; s_1, s_2)$ 在 $\mathrm{Re}(s_1) = \sigma_1$ 和 $\mathrm{Re}(s_1) = \sigma_1$ 时关于 $\mathrm{Im}(s_1)$ 和 $\mathrm{Im}(s_2)$ 一致有界, 且 $\lim\limits_{X\to\infty} S(X; s_1, s_2)$ 关于 $\mathrm{Im}(s_1)$ 和 $\mathrm{Im}(s_2)$ 一致收敛, 则我们称 L-S 变换 (1.1) 对 σ_1, σ_2 一致有界收敛.

若 (1.1) 对 $\mathrm{Re}(s_1) > \sigma_0'$, $\mathrm{Re}(s_2) > \sigma_0''$ 一致有界收敛, 但不对 $\mathrm{Re}(s_1) < \sigma_0'$, $\mathrm{Re}(s_2) < \sigma_0''$ 一致有界收敛, 则我们称 (σ_0', σ_0'') 为相关一致有界收敛横坐标.

此外, 若 $\sigma_1(r), \sigma_2(r), r, \theta, c$ 满足以下条件:

$$\begin{cases}\sigma_1(r) = r\cos\theta + c,\\ \sigma_2(r) = r\sin\theta,\end{cases}$$

则

$$r_u := \inf\{r : S(X; \sigma_1(r) + t_1, \sigma_2(r) + t_2) \text{ 一致有界}\},$$

且它可以用以下的属于余家荣先生的公式 [8, 定理2, pp. 3–5] 来估计.

定理 A (二重 L-S 变换的 Valion-Knopp-Bohr 公式) 若 $\{\lambda_m\} = \{\lambda_{m_1,m_2}\} := \{(\lambda_1^{(m_1)}, \lambda_2^{(m_2)})\} \subset \mathbb{R}^2$ 是满足以下条件的序列:

$$0 = \lambda_j^{(1)} < \lambda_j^{(2)} < \cdots < \lambda_j^{(k)} \uparrow \infty, \quad j = 1, 2, \tag{1.2}$$

$$\limsup_{m_1\to\infty}(\lambda_1^{(m_1+1)} - \lambda_1^{(m_1)}) + \limsup_{m_2\to\infty}(\lambda_2^{(m_2+1)} - \lambda_2^{(m_2)}) < \infty,$$

则

$$\limsup_{\|m\|\to\infty}\frac{\log A_m^*-\lambda_1^{(m_1)}c}{\lambda_1^{(m_1)}\cos\theta+\lambda_2^{(m_2)}\sin\theta}\leqslant r_u\leqslant\limsup_{\|m\|\to\infty}\frac{\log A_m^*-\lambda_1^{(m_1)}c}{\lambda_1^{(m_1)}\cos\theta+\lambda_2^{(m_2)}\sin\theta}+\frac{D_1}{\cos\theta}+\frac{D_2}{\sin\theta},$$

其中

$$m:=(m_1,m_2),\quad \|(x_1,x_2)\|:=|x_1|+|x_2|,\quad (x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2,$$

$$A_m^*:=\sup\Big\{\Big|\int_{[\lambda_m,X]}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t\cdot y}\mathrm{d}g(y)\Big|:\ X\in(\lambda_m,\lambda_{m+1}],t\in\mathbb{R}^2\Big\},$$

$$(\lambda_m,\lambda_{m+1}]:=(\lambda_1^{(m_1)},\lambda_1^{(m_1+1)}]\times(\lambda_2^{(m_2)},\lambda_2^{(m_2+1)}],$$

$$D_1:=\limsup_{m_1\to\infty}\frac{\log m_1}{\lambda_1^{(m_1)}},\quad D_2:=\limsup_{m_2\to\infty}\frac{\log m_2}{\lambda_2^{(m_2)}}.$$

二重 Dirichlet 级数甚至是多重 Dirichlet 级数都有大量的结果, 有些结果属于梁美丽等[9−10]和崔永琴等[11]. 研究二重 L-S 变换并推广 L-S 变换和 Dirichlet 级数的结果是自然的事. 不幸的是, 在余家荣先生的工作之后, 鲜有关于二重 L-S 变换增长性的结果, 因为它涉及二维复空间和二重 Riemann-Stieltjes 积分以至于比 L-S 变换复杂.

在本文中, 我们将首先给出 L-S 变换的已有结果, 接着引入一个新的广义级的概念并研究相关一致收敛横坐标不是 $(-\infty,-\infty)$ 或 (∞,∞) 的二重 L-S 变换所表示的全纯函数的增长性. 我们可以认为 $(0,0)$ 是其中一个相关一致收敛横坐标, 否则作一个平移就足够了. 为了叙述我们的结果, 我们首先介绍一些记号和定义.

令序列 $\{\lambda_m\}:=\{(\lambda_1^{(m_1)},\lambda_2^{(m_2)})\}\subset\mathbb{R}^2$ 满足条件 (1.2) 及以下条件:

$$\sup_{m\in\mathbb{Z}_+^2}\|\lambda_{m+1}-\lambda_m\|<\infty,\tag{1.3}$$

$$\limsup_{\|m\|\to\infty}\frac{\|m\|}{\|\lambda_m\|}<\infty.\tag{1.4}$$

在本文中, 我们总是认为

$$\limsup_{\|m\|\to\infty}\frac{\log A_m^*}{\|\lambda_m\|}=0.\tag{1.5}$$

注 1.1 我们将看到由 (1.1) 定义的函数 $s\mapsto F(s)$ 是在 $\{(s_1,s_2)\in\mathbb{C}^2:\mathrm{Re}(s_1)>0,\mathrm{Re}(s_2)>0\}$ 内的全纯函数.

事实上, 利用定理 A 的记号, 容易验证条件 (1.3) 等价于

$$\limsup_{m_1\to\infty}(\lambda_1^{(m_1+1)}-\lambda_1^{(m_1)})+\limsup_{m_2\to\infty}(\lambda_2^{(m_2+1)}-\lambda_2^{(m_2)})<\infty,$$

且条件 (1.4) 蕴含 $D_1+D_2=0$.

令 $c=0$ 且 $\theta=\frac{\pi}{4}$. 有

$$\sqrt{2}\limsup_{\|m\|\to\infty}\frac{\log A_m^*}{\|\lambda_m\|}\leqslant r_u\leqslant\sqrt{2}\limsup_{\|m\|\to\infty}\frac{\log A_m^*}{\|\lambda_m\|}+\sqrt{2}(D_1+D_2),$$

则条件 (1.5) 等价于 $r_u=0$, 而它也等价于其中一个相关一致有界收敛横坐标是 $(0,0)$. 因此我们可以说 $s\mapsto F(s)$ 是一个在 $\{(s_1,s_2)\in\mathbb{C}^2:\mathrm{Re}(s_1)>0,\mathrm{Re}(s_2)>0\}$ 内的全纯函数. 其证明在文 [12, p. 322] 中给出.

此外, 在这种情况下, 对任意的 $\sigma=(\sigma_1,\sigma_2)\in\mathbb{R}_+^2$, 当 $\|m\|$ 足够大时, 有

$$\frac{\log A_m^*}{\|\lambda_m\|}<\frac{1}{2}\min\{\sigma_1,\sigma_2\}\Rightarrow A_{mn}^*<\mathrm{e}^{\|\lambda_{m,n}\|\cdot\frac{1}{2}\min\{\sigma_1,\sigma_2\}}.$$

因此, 当 $\|m\|\to\infty$ 时, 有

$$A_m^*\mathrm{e}^{-\lambda_m\cdot\sigma}\leqslant\mathrm{e}^{\lambda_1^{(m_1)}(\frac{1}{2}\min\{\sigma_1,\sigma_2\}-\sigma_1)+\lambda_2^{(m_2)}(\frac{1}{2}\min\{\sigma_1,\sigma_2\}-\sigma_2)}\to 0,$$

所以我们可以定义最大模 $M_u(\sigma,F)$ 和最大项 $\mu(\sigma,F)$ 如下.

定义 1.1 对 $\sigma\in\mathbb{R}_+^2$,

$$\begin{aligned}M_u(\sigma,F)&:=\sup\Big\{\Big|\int_{[0,X]}\mathrm{e}^{-(\sigma+\mathrm{i}t)\cdot y}\mathrm{d}g(y)\Big|:\ X\in\mathbb{R}_+^2,t\in\mathbb{R}^2\Big\},\\ \mu(\sigma,F)&:=\max_{m\in\mathbb{Z}_+^2}\{A_m^*\mathrm{e}^{-\lambda_m\cdot\sigma}\}.\end{aligned}$$

注 1.2 若 $\sigma'=(\sigma_1',\sigma_2'),\sigma=(\sigma_1,\sigma_2)$ 满足 $\sigma_1'\leqslant\sigma_1$ 且 $\sigma_2'\leqslant\sigma_2$, 则 $\mu(\sigma',F)\geqslant\mu(\sigma,F)$.

事实上, 若 $A_m^*\mathrm{e}^{-\lambda_m\cdot\sigma}$ 在某个 $M=(M_1,M_2)\in\mathbb{Z}_+^2$ 处取得最大值, 则

$$\mu(\sigma,F)=A_M^*\mathrm{e}^{-\lambda_M\cdot\sigma}=A_M^*\mathrm{e}^{-\lambda_{M_1}\sigma_1-\lambda_{M_2}\sigma_2}\leqslant A_M^*\mathrm{e}^{-\lambda_{M_1}\sigma_1'-\lambda_{M_2}\sigma_2'}\leqslant\mu(\sigma',F).$$

我们现在来回顾一些关于 L-S 变换的结果. L-S 变换的相应记号在形式上与二维情况的一致.

在 1981 年, 李至琳[13]研究了 L-S 变换的增长性并得到以下结果.

定理 B 若 L-S 变换的一致收敛横坐标为 0, 则 L-S 变换的级的定义为:

$$\rho:=\limsup_{\sigma\to+0}\frac{\log^+(\log M_u(\sigma,F))}{\log^+(\sigma^{-1})},$$

且满足

$$\frac{\rho}{1+\rho}=\limsup_{n\to\infty}\frac{\log^{+}\log A_n^{*}}{\log\lambda_n},$$

其中

$$\log^{+}x=\begin{cases}\log x, & x>1,\\ 0, & x\leqslant 1.\end{cases}$$

在 2016 年, 孔荫莹和霍颖莹[14]通过广义级和广义型研究了 L-S 变换的增长性并建立了以下定理.

定理 C 若 L-S 变换的一致收敛横坐标为 0, 且 $\alpha:\mathbb{R}\to\mathbb{R}_{+}$ 满足:

(i) 存在某个 a, 使得 α 在 $[a,\infty]$ 上严格单调增;

(ii) 对某个 $p\in\mathbb{Z}_{+}$, 当 $x\to\infty$ 时 $\alpha(x)\sim\log^{+[p]}x$, 其中

$$\log^{+[n+1]}x=\log^{+}\log^{+[n]}x,\quad n\in\mathbb{Z}_{+},$$

则

$$\limsup_{\sigma\to+0}\frac{\alpha(\log M_u(\sigma,F))}{\alpha(\sigma^{-1})}+1=\limsup_{n\to\infty}\frac{\alpha(\lambda_n)}{\alpha\big(\frac{\lambda_n}{\log^{+}A_n^{*}}\big)},\quad p=1,$$

$$\limsup_{\sigma\to+0}\frac{\alpha(\log M_u(\sigma,F))}{\alpha(\sigma^{-1})}=\limsup_{n\to\infty}\frac{\alpha(\lambda_n)}{\alpha\big(\frac{\lambda_n}{\log^{+}A_n^{*}}\big)},\quad p=2,3,\cdots.$$

在 2018 年, 徐洪焱和王华[4]引入了另一种广义级并证明了以下定理.

定理 D 若 L-S 变换的一致收敛横坐标为 0, $\limsup\limits_{\sigma\to+0}\log\frac{M_u(\sigma,F)}{\log(\sigma^{-1})}=\infty$, 且 $\mathcal{A}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}_{+}$, $\mathcal{B}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}_{+}$ 满足以下条件:

(i) 存在某个 a, 使得 $\mathcal{A},\mathcal{B}$ 在 $[a,\infty]$ 上严格单调增;

(ii) 当 $x\to\infty$ 时, $\mathcal{A}(x)\to\infty$, $\mathcal{B}(x)\to\infty$;

(iii) 对所有 $c>0$, 当 $x\to\infty$ 时, $\mathcal{A}(cx)\sim\mathcal{A}(x)$, $\mathcal{B}(cx)\sim\mathcal{B}(x)$;

(iv) 对所有 $c>0$, 当 $x\to\infty$ 时, $\mathcal{B}^{-1}(c\mathcal{A}(x))=o(x)$, $\mathcal{A}(x/[\mathcal{B}^{-1}(c\mathcal{A}(x))])\sim\mathcal{A}(x)$,

则

$$\limsup_{\sigma\to+0}\frac{\mathcal{A}(\log M_u(\sigma,F))}{\mathcal{B}(\sigma^{-1})}=\limsup_{n\to\infty}\frac{\mathcal{A}(\lambda_n)}{\mathcal{B}\big(\frac{\lambda_n}{\log^{+}A_n^{*}}\big)}.$$

下面, 我们将介绍一种新的广义级.

定义 1.2 称 $\alpha \in \Lambda$, 如果函数 $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 满足以下两个条件:

(i) 对某个 $a \in \mathbb{R}$, $\alpha(x) = \alpha(a)$ 在 $(-\infty, a]$ 上, $\alpha(x)$ 连续且在 $[a, \infty)$ 上严格单调增, 以及 $\alpha(x) \to \infty$ 当 $x \to \infty$ 时;

(ii) 存在函数 $\delta \in C((0,\infty),(0,\infty))$, 使得 $\delta(t) = \limsup\limits_{x\to\infty} \frac{\alpha(tx)}{\alpha(x)}$, 其中 $C((0,\infty),(0,\infty))$ 是从 $(0,\infty)$ 映射到 $(0,\infty)$ 的连续函数所成的空间.

特别地, 若 $\alpha \in \Lambda$ 且 $\delta(t) \equiv 1$, 则称 $\alpha \in \Lambda_1$.

和上面的记号一致, 记

$$\alpha^{-1}(y) := \begin{cases} a, & y < \alpha(a), \\ (\alpha|_{[a,\infty)})^{-1}(y), & y \geqslant \alpha(a). \end{cases}$$

显然 α^{-1} 是不减的且当 $y \to \infty$ 时趋于 ∞.

注 1.3 若 $\alpha \in \Lambda$, 则 $\alpha^{-1} \circ \alpha(x) \geqslant x$ 且 $\alpha \circ \alpha^{-1}(x) \geqslant x$, 当 x 足够大时等号成立. 事实上, 假设 $a \in \mathbb{R}$ 如定义 1.2 所给出, 则有

$$\alpha^{-1} \circ \alpha(x) = \begin{cases} a, & x \leqslant a, \\ x, & x > a, \end{cases} \qquad \alpha \circ \alpha^{-1}(x) = \begin{cases} \alpha(a), & x \leqslant \alpha(a), \\ x, & x > \alpha(a). \end{cases}$$

注 1.4 若 $\beta \in \Lambda_1$, 易见对所有 $t \in (0,\infty)$,

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\beta(tx)}{\beta(x)} = 1.$$

事实上,

$$\liminf_{x\to\infty} \frac{\beta(tx)}{\beta(x)} = \Big[\limsup_{x\to\infty} \frac{\beta(t^{-1}\cdot tx)}{\beta(tx)}\Big]^{-1} = 1.$$

定义 1.3 假设 α, β 满足以下条件:

$$\alpha \in \Lambda, \quad \beta \in \Lambda_1 \quad 且 \quad \lim_{x\to\infty} \frac{\alpha(x)}{\beta(\mathrm{e}^x)} = 0, \tag{1.6}$$

则由 (1.1) 定义的全纯函数 $s \mapsto F(s)$ 的广义级为

$$\rho_{\alpha\beta}(F) := \limsup_{\sigma\to+0} \frac{\alpha(\log M_u(\sigma, F))}{\beta(\|\sigma^{-1}\|)},$$

其中

$$\sigma \to +0 \text{ 的意思是 } \sigma_1, \sigma_2 \to +0,$$

$$\sigma^{-1} = (\sigma_1^{-1}, \sigma_2^{-1}).$$

特别地, 若 $\alpha(x)=\beta(x)=\log^+ x$, 则 $\rho_{\alpha\beta}(F)$ 就是级.

2 主要结果

定理 2.1　假设 L-S 变换 (1.1) 满足条件 (1.5), 则其广义级

$$\rho_{\alpha\beta}(F)=\limsup_{\|m\|\to\infty}\frac{\alpha(\log^+ A_m^*)}{\beta\left(\frac{\|\lambda_m\|}{\log^+ A_m^*}\right)}.$$

在这样的约定下成立: $\log 0=-\infty,\ 0^{-1}=\infty,\ \infty^{-1}=0,\ \alpha(-\infty)=\lim\limits_{x\to-\infty}\alpha(x),$ $\beta(\infty)=\infty$.

注 2.1　容易验证定理 2.1 的条件更弱, 即 α 和 β 的限制比定理 B, 定理 C 和定理 D 相应的函数更弱. 事实上, 我们可在推论 2.2 中看到定理 B 和定理 C 中相应的函数满足条件 (1.6); 至于定理 D, 条件 (iv) 蕴含对任意 $\varepsilon>0$, $\mathcal{B}^{-1}(\varepsilon^{-1}\mathcal{A}(x))=o(x)\leqslant \mathrm{e}^x$ 当 $x\to\infty$, 即 $\mathcal{A}(x)/\mathcal{B}(\mathrm{e}^x)\leqslant\varepsilon$ 当 $x\to\infty$, 结合条件 (iii) 我们看到 $\mathcal{A},\mathcal{B}$ 满足条件 (1.6). 此外, 我们给出一个例子来说明定理 2.1 的条件确实更弱:

$$\alpha(x)=\begin{cases}\sqrt{x}, & x\geqslant 1,\\ 1, & x<1,\end{cases}\qquad \beta(x)=\log^+ x.$$

推论 2.1　假设 L-S 变换 (1.1) 满足条件 (1.5), 则对任意 $\alpha\in\Lambda_1$, 满足

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\alpha(x)}{\alpha(\mathrm{e}^x)}=0,$$

有

$$\limsup_{\sigma\to+0}\frac{\alpha(\log M_u(\sigma,F))}{\alpha(\|\sigma^{-1}\|)}=\limsup_{\|m\|\to\infty}\frac{\alpha(\log^+ A_m^*)}{\alpha\left(\frac{\|\lambda_m\|}{\log^+ A_m^*}\right)}.$$

在这样的约定下成立: $\log 0=-\infty,\ 0^{-1}=\infty,\ \infty^{-1}=0,\ \alpha(-\infty)=\lim\limits_{x\to-\infty}\alpha(x),$ $\alpha(\infty)=\infty$.

推论 2.2　假设 L-S 变换 (1.1) 满足条件 (1.5), 则对 $p\geqslant q\geqslant 1$, 有

$$\limsup_{\sigma\to+0}\frac{\log^{+[p]}(\log M_u(\sigma,F))}{\log^{+[q]}(\|\sigma^{-1}\|)}=\limsup_{\|m\|\to\infty}\frac{\log^{+[p]}(\log^+ A_m^*)}{\log^{+[q]}\left(\frac{\|\lambda_m\|}{\log^+ A_m^*}\right)},$$

特别地, 对于 $p=q=1$ 的情况, 得到了由 (1.1) 定义的全纯函数 $s\mapsto F(s)$ 的级.

在这样的约定下成立: $\log 0=-\infty$, $0^{-1}=\infty$, $\infty^{-1}=0$.

3 预备引理

引理 3.1 (二重 Riemann-Stieltjes 积分的变量替换公式) 若 $f\in C([a_1,b_1]\times[a_2,b_2])$, $G(x_1,x_2)$ 是 $h(x_1,x_2)$ 关于 $g(x_1,x_2)$ 的积分, 其中 g 是 $[a_1,b_1]\times[a_2,b_2]$ 上的 Vitali 有界变差函数, 则

$$\int_{[a_1,b_1]\times[a_2,b_2]} f(x_1,x_2)\mathrm{d}G(x_1,x_2)=\int_{[a_1,b_1]\times[a_2,b_2]} f(x_1,x_2)h(x_1,x_2)\mathrm{d}g(x_1,x_2).$$

这个公式属于 Young (见 [15, (5), p. 34]).

引理 3.2 (二重 Riemann-Stieltjes 积分的分部积分公式) 若 f 在 $[a_1,b_1]\times[a_2,b_2]$ 上绝对连续, g 是 $[a_1,b_1]\times[a_2,b_2]$ 上的 Vitali 有界变差函数, 满足 $g(a_1,x_2)=0$ 对所有 $x_2\in[a_2,b_2]$ 成立且 $g(x_1,a_2)=0$ 对所有 $x_1\in[a_1,b_1]$ 成立, 则

$$\begin{aligned}&\int_{[a_1,b_1]\times[a_2,b_2]} f(x_1,x_2)\mathrm{d}g(x_1,x_2)\\ =&\int_{a_1}^{b_1}\int_{a_2}^{b_2} g(x_1,x_2)\frac{\partial^2 f(x_1,x_2)}{\partial x_1\partial x_2}\mathrm{d}x_2\mathrm{d}x_1\\ &+f(b_1,b_2)g(b_1,b_2)-\int_{a_1}^{b_1} g(x_1,b_2)\frac{\partial f(x_1,b_2)}{\partial x_1}\mathrm{d}x_1-\int_{a_2}^{b_2} g(b_1,x_2)\frac{\partial f(b_1,x_2)}{\partial x_2}\mathrm{d}x_2.\end{aligned}$$

这个公式属于 Young (见 [5, p. 465]).

引理 3.3 在条件 (1.2)–(1.5) 下, 当 $\sigma\in\mathbb{R}_+^2$ 足够接近 $(0,0)$ 时, 存在 $C>0$, 使得

$$\mu(\sigma,F)\leqslant CM_u(\sigma,F).$$

证 对 $X\in(\lambda_m,\lambda_{m+1}]$, 令

$$I_m(X):=\int_{[\lambda_m,X]}\mathrm{e}^{-(\sigma+\mathrm{i}t)\cdot y}\mathrm{d}g(y).$$

根据引理 3.1, 我们有

$$\int_{[\lambda_m,X]}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t\cdot y}\mathrm{d}g(y)=\int_{[\lambda_m,X]}\mathrm{e}^{\sigma\cdot y}\mathrm{e}^{-(\sigma+\mathrm{i}t)\cdot y}\mathrm{d}g(y)=\int_{[\lambda_m,X]}\mathrm{e}^{\sigma\cdot y}\mathrm{d}I_m(y).\tag{3.1}$$

根据引理 3.2,

$$\begin{aligned}\int_{[\lambda_m,X]}\mathrm{e}^{\sigma\cdot y}\mathrm{d}I_m(y)=&\,\mathrm{e}^{\sigma\cdot X}I_m(X)+\sigma_1\sigma_2\int_{\lambda_1^{(m_1)}}^{X_1}\int_{\lambda_2^{(m_2)}}^{X_2}\mathrm{e}^{\sigma_1y_1+\sigma_2y_2}I_m(y_1,y_2)\mathrm{d}y_2\mathrm{d}y_1\\ &-\sigma_1\int_{\lambda_1^{(m_1)}}^{X_1}\mathrm{e}^{\sigma_1y_1+\sigma_2X_2}I_m(y_1,X_2)\mathrm{d}y_1\end{aligned}$$

$$-\sigma_2\int_{\lambda_2^{(m_2)}}^{X_2}\mathrm{e}^{\sigma_1X_1+\sigma_2y_2}I_m(X_1,y_2)\mathrm{d}y_2. \tag{3.2}$$

注意到

$$\begin{aligned}|I_m(z)|&=\Big|\int_{[0,z]}\mathrm{e}^{-(\sigma+\mathrm{i}t)\cdot y}\mathrm{d}g(y)+\int_{[0,\lambda_m]}\mathrm{e}^{-(\sigma+\mathrm{i}t)\cdot y}\mathrm{d}g(y)\\&\quad-\int_{[0,z_1]\times[0,\lambda_2^{(m_2)}]}\mathrm{e}^{-(\sigma+\mathrm{i}t)\cdot y}\mathrm{d}g(y)-\int_{[0,\lambda_1^{(m_1)}]\times[0,z_2]}\mathrm{e}^{-(\sigma+\mathrm{i}t)\cdot y}\mathrm{d}g(y)\Big|\\&\leqslant 4M_u(\sigma,F).\end{aligned} \tag{3.3}$$

根据 (3.1)–(3.3), 得到

$$\begin{aligned}&\Big|\int_{[\lambda_m,X]}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t\cdot y}\mathrm{d}g(y)\Big|\leqslant 4M_u(\sigma,F)\Big(\mathrm{e}^{\sigma\cdot X}+\sigma_1\sigma_2\int_{\lambda_1^{(m_1)}}^{X_1}\int_{\lambda_2^{(m_2)}}^{X_2}\mathrm{e}^{\sigma_1y_1+\sigma_2y_2}\mathrm{d}y_2\mathrm{d}y_1\\&\quad+\sigma_1\int_{\lambda_1^{(m_1)}}^{X_1}\mathrm{e}^{\sigma_1y_1+\sigma_2X_2}\mathrm{d}y_1+\sigma_2\int_{\lambda_2^{(m_2)}}^{X_2}\mathrm{e}^{\sigma_1X_1+\sigma_2y_2}\mathrm{d}y_2\Big)\\&=4M_u(\sigma,F)[\mathrm{e}^{\sigma_1X_1}\cdot\mathrm{e}^{\sigma_2X_2}+(\mathrm{e}^{\sigma_1X_1}-\mathrm{e}^{\sigma_1\lambda_1^{(m_1)}})\cdot(\mathrm{e}^{\sigma_2X_2}-\mathrm{e}^{\sigma_2\lambda_2^{(m_2)}})\\&\quad+(\mathrm{e}^{\sigma_1X_1}-\mathrm{e}^{\sigma_1\lambda_1^{(m_1)}})\cdot\mathrm{e}^{\sigma_2X_2}+\mathrm{e}^{\sigma_1X_1}\cdot(\mathrm{e}^{\sigma_2X_2}-\mathrm{e}^{\sigma_2\lambda_2^{(m_2)}})].\end{aligned} \tag{3.4}$$

注意到

$$\mathrm{e}^{\sigma_jX_j}-\mathrm{e}^{\sigma_j\lambda_j^{(m_j)}}<\mathrm{e}^{\sigma_jX_j}\leqslant\mathrm{e}^{\sigma_j\lambda_j^{(m_j+1)}}\leqslant\mathrm{e}^{\sigma_j\lambda_j^{(m_j)}}\cdot\mathrm{e}^{\|\sigma\|(\lambda_j^{(m_j+1)}-\lambda_j^{(m_j)})},\quad j=1,2.$$

根据 (1.3) 可知, 存在 $K>0$, 使得对所有 $m,n\in\mathbb{Z}_+$,

$$\lambda_1^{(m+1)}-\lambda_1^{(m)}+\lambda_2^{(n+1)}-\lambda_2^{(n)}\leqslant K.$$

因此根据 (3.4), 当 $\sigma\in\mathbb{R}_+^2$ 足够接近 $(0,0)$ 时, 有

$$\begin{aligned}\Big|\int_{[\lambda_m,X]}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t\cdot y}\mathrm{d}g(y)\Big|&\leqslant 16M_u(\sigma,F)\mathrm{e}^{\lambda_m\cdot\sigma}\cdot\mathrm{e}^{K\|\sigma\|}\\&\leqslant 17M_u(\sigma,F)\mathrm{e}^{\lambda_m\cdot\sigma}.\end{aligned}$$

由此可得

$$A_m^*\leqslant 17M_u(\sigma,F)\mathrm{e}^{\lambda_m\cdot\sigma},$$

即

$$A_m^*\mathrm{e}^{-\lambda_m\cdot\sigma}\leqslant 17M_u(\sigma,F).$$

因此

$$\mu(\sigma,F)\leqslant 17M_u(\sigma,F).$$

引理 3.4 在 (1.2)–(1.5) 下, 对任意 $\varepsilon>0$, 存在 $C_\varepsilon>0$, 使得当 $\sigma\in\mathbb{R}_+^2$ 足够接近 $(0,0)$ 时,

$$M_u(\sigma,F)\leqslant C_\varepsilon\mu\Big(\frac{\sigma}{1+\varepsilon},F\Big)\|\sigma^{-1}\|^2.$$

证 取定 $t\in\mathbb{R}$, 对 $y\in(\lambda_k,\lambda_{k+1}]$, 令

$$h_k(y)=h_k(y_1,y_2):=\int_{[\lambda_k,y]}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t\cdot x}\mathrm{d}g(x).$$

假设 $z\in(\lambda_k,\lambda_{k+1}]$, 则根据引理 3.2 和引理 3.1, 对所有 $\sigma\in\mathbb{R}_+^2$, 有

$$\begin{aligned}\int_{[\lambda_k,z]}\mathrm{e}^{-(\sigma+\mathrm{i}t)\cdot y}\mathrm{d}g(y)&=\int_{[\lambda_k,z]}\mathrm{e}^{-\sigma\cdot y}\mathrm{d}h_k(y)\\&=\mathrm{e}^{-\sigma\cdot z}h_k(z)+\sigma_1\sigma_2\int_{\lambda_1^{(k_1)}}^{z_1}\int_{\lambda_2^{(k_2)}}^{z_2}\mathrm{e}^{-\sigma_1y_1-\sigma_2y_2}h_k(y_1,y_2)\mathrm{d}y_2\mathrm{d}y_1\\&\quad+\sigma_1\int_{\lambda_1^{(k_1)}}^{z_1}\mathrm{e}^{-\sigma_1y_1-\sigma_2z_2}h_k(y_1,z_2)\mathrm{d}y_1+\sigma_2\int_{\lambda_2^{(k_2)}}^{z_2}\mathrm{e}^{-\sigma_1z_1-\sigma_2y_2}h_k(z_1,y_2)\mathrm{d}y_2.\end{aligned}$$

根据 A_k^* 的定义, 可得

$$|h_k(x)|\leqslant A_k^*.$$

类似引理 3.3 的证明, 得到

$$\Big|\int_{[\lambda_k,z]}\mathrm{e}^{-(\sigma+\mathrm{i}t)\cdot y}\mathrm{d}g(y)\Big|\leqslant 4A_k^*\mathrm{e}^{-\lambda_k\cdot\sigma}.$$

假设 $X\in(\lambda_m,\lambda_{m+1}]$, 则

$$\begin{aligned}&\Big|\int_{[0,X]}\mathrm{e}^{-(\sigma+\mathrm{i}t)\cdot y}\mathrm{d}g(y)\Big|\\&=\Big|\sum_{k_1=1}^{m_1-1}\sum_{k_2=1}^{m_2-1}\int_{[\lambda_{k_1,k_2},\lambda_{k_1+1,k_2+1}]}\mathrm{e}^{-(\sigma+\mathrm{i}t)\cdot y}\mathrm{d}g(y)+\int_{[\lambda_{m_1},X]}\mathrm{e}^{-(\sigma+\mathrm{i}t)\cdot y}\mathrm{d}g(y)\\&\quad+\sum_{k_1=1}^{m_1-1}\int_{[\lambda_{k_1}^{(1)},\lambda_{k_1+1}^{(1)}]\times[\lambda_{m_2}^{(2)},X_2]}\mathrm{e}^{-(\sigma+\mathrm{i}t)\cdot y}\mathrm{d}g(y)\\&\quad+\sum_{k_2=1}^{m_2-1}\int_{[\lambda_{m_1}^{(1)},X_1]\times[\lambda_{k_2}^{(2)},\lambda_{k_2+1}^{(2)}]}\mathrm{e}^{-(\sigma+\mathrm{i}t)\cdot y}\mathrm{d}g(y)\Big|\\&\leqslant\Big(\sum_{k_1=1}^{m_1-1}\sum_{k_2=1}^{m_2-1}+\sum_{k_1=1}^{m_1-1}+\sum_{k_2=1}^{m_2-1}+\sum_{k_1=m_1,k_2=m_2}\Big)4A_k^*\mathrm{e}^{-\lambda_k\cdot\sigma}\\&=4\sum_{k_1=1}^{m_1}\sum_{k_2=1}^{m_2}A_k^*\mathrm{e}^{-\lambda_k\cdot\sigma}.\end{aligned}$$

因此

$$M_u(\sigma,F)\leqslant 4\sum_{k_1=1}^{\infty}\sum_{k_2=1}^{\infty}A_k^*\mathrm{e}^{-\lambda_k\cdot\sigma}.$$

根据 (1.4), 存在 $N_\varepsilon\in\mathbb{Z}_+$ 和 $E>0$, 使得 $\|m\|>N_\varepsilon$ 蕴含

$$\frac{m_1+m_2}{\lambda_1^{m_1}+\lambda_2^{m_2}}=\frac{\|m\|}{\|\lambda_m\|}<E+\varepsilon.$$

当 $m_1>N_\varepsilon$ 时, 令 $m_2=1$, 有

$$\frac{m_1}{\lambda_1^{m_1}}<\frac{m_1+1}{\lambda_1^{m_1}+0}<E+\varepsilon.$$

同理, 当 $m_2>N_\varepsilon$ 时, 我们得到

$$\frac{m_2}{\lambda_2^{m_2}}<E+\varepsilon.$$

从而

$$\begin{aligned}
\sum_{k_1=1}^{\infty}\sum_{k_2=1}^{\infty}A_k^*\mathrm{e}^{-\lambda_k\cdot\sigma}&=\sum_{k_1=1}^{N_\varepsilon}\sum_{k_2=1}^{N_\varepsilon}A_k^*\mathrm{e}^{-\lambda_k\cdot\sigma}+\sum_{k_1=N_\varepsilon+1}^{\infty}\sum_{k_2=N_\varepsilon+1}^{\infty}A_k^*\mathrm{e}^{-\lambda_k\cdot\sigma}\\
&\quad+\sum_{k_1=1}^{N_\varepsilon}\sum_{k_2=N_\varepsilon+1}^{\infty}A_k^*\mathrm{e}^{-\lambda_k\cdot\sigma}+\sum_{k_1=N_\varepsilon+1}^{\infty}\sum_{k_2=1}^{N_\varepsilon}A_k^*\mathrm{e}^{-\lambda_k\cdot\sigma}\\
&\leqslant N_\varepsilon^2\mu(\sigma,F)+\sum_{k_1=N_\varepsilon+1}^{\infty}\sum_{k_2=N_\varepsilon+1}^{\infty}A_k^*\mathrm{e}^{-\lambda_k\cdot\frac{\sigma}{1+\varepsilon}}\mathrm{e}^{-\lambda_k\cdot\frac{\sigma\varepsilon}{1+\varepsilon}}\\
&\quad+\sum_{k_1=1}^{N_\varepsilon}\sum_{k_2=N_\varepsilon+1}^{\infty}A_k^*\mathrm{e}^{-\lambda_{k_1}\sigma_1-\frac{\lambda_{k_2}\sigma_2}{1+\varepsilon}}\mathrm{e}^{-\frac{\lambda_{k_2}\sigma_2\varepsilon}{1+\varepsilon}}\\
&\quad+\sum_{k_2=1}^{N_\varepsilon}\sum_{k_1=N_\varepsilon+1}^{\infty}A_k^*\mathrm{e}^{-\lambda_{k_2}\sigma_2-\frac{\lambda_{k_1}\sigma_1}{1+\varepsilon}}\mathrm{e}^{-\frac{\lambda_{k_1}\sigma_1\varepsilon}{1+\varepsilon}}\\
&\leqslant N_\varepsilon^2\mu(\sigma,F)+\sum_{k_1=N_\varepsilon+1}^{\infty}\sum_{k_2=N_\varepsilon+1}^{\infty}\mu\Big(\frac{\sigma}{1+\varepsilon},F\Big)\mathrm{e}^{-\lambda_k\cdot\frac{\sigma\varepsilon}{1+\varepsilon}}\\
&\quad+\sum_{k_1=1}^{N_\varepsilon}\sum_{k_2=N_\varepsilon+1}^{\infty}\mu\Big(\Big(\sigma_1,\frac{\sigma_2}{1+\varepsilon}\Big),F\Big)\mathrm{e}^{-\frac{\lambda_{k_2}\sigma_2\varepsilon}{1+\varepsilon}}\\
&\quad+\sum_{k_2=1}^{N_\varepsilon}\sum_{k_1=N_\varepsilon+1}^{\infty}\mu\Big(\Big(\frac{\sigma_1}{1+\varepsilon},\sigma_2\Big),F\Big)\mathrm{e}^{-\frac{\lambda_{k_1}\sigma_1\varepsilon}{1+\varepsilon}}.
\end{aligned}$$

根据注 1.2 得到

$$\mu(\sigma,F),\ \mu\Big(\Big(\sigma_1,\frac{\sigma_2}{1+\varepsilon}\Big),F\Big),\ \mu\Big(\Big(\frac{\sigma_1}{1+\varepsilon},\sigma_2\Big),F\Big)\leqslant\mu\Big(\frac{\sigma}{1+\varepsilon},F\Big).$$

因此

$$\sum_{k_1=1}^{\infty}\sum_{k_2=1}^{\infty}A_k^*\mathrm{e}^{-\lambda_k\cdot\sigma}\leqslant\mu\Big(\frac{\sigma}{1+\varepsilon},F\Big)\Big(N_\varepsilon^2+\sum_{k_1=N_\varepsilon+1}^{\infty}\sum_{k_2=N_\varepsilon+1}^{\infty}\mathrm{e}^{-\lambda_k\cdot\frac{\sigma\varepsilon}{1+\varepsilon}}$$
$$+\sum_{k_1=1}^{N_\varepsilon}\sum_{k_2=N_\varepsilon+1}^{\infty}\mathrm{e}^{-\frac{\lambda_{k_2}\sigma_2\varepsilon}{1+\varepsilon}}+\sum_{k_2=1}^{N_\varepsilon}\sum_{k_1=N_\varepsilon+1}^{\infty}\mathrm{e}^{-\frac{\lambda_{k_1}\sigma_1\varepsilon}{1+\varepsilon}}\Big)$$
$$\leqslant\mu\Big(\frac{\sigma}{1+\varepsilon},F\Big)\Big(N_\varepsilon^2+\sum_{k_1=N_\varepsilon+1}^{\infty}\sum_{k_2=N_\varepsilon+1}^{\infty}\mathrm{e}^{-\frac{\varepsilon\sigma_1k_1}{(1+\varepsilon)(E+\varepsilon)}-\frac{\varepsilon\sigma_2k_2}{(1+\varepsilon)(E+\varepsilon)}}$$
$$+\sum_{k_1=1}^{N_\varepsilon}\sum_{k_2=N_\varepsilon+1}^{\infty}\mathrm{e}^{-\frac{\varepsilon\sigma_2k_2}{(1+\varepsilon)(E+\varepsilon)}}+\sum_{k_2=1}^{N_\varepsilon}\sum_{k_1=N_\varepsilon+1}^{\infty}\mathrm{e}^{-\frac{\varepsilon\sigma_1k_1}{(1+\varepsilon)(E+\varepsilon)}}\Big)$$
$$\leqslant\mu\Big(\frac{\sigma}{1+\varepsilon},F\Big)[N_\varepsilon^2+(1-\mathrm{e}^{-\frac{\varepsilon\sigma_1}{(1+\varepsilon)(E+\varepsilon)}})^{-1}(1-\mathrm{e}^{-\frac{\varepsilon\sigma_2}{(1+\varepsilon)(E+\varepsilon)}})^{-1}$$
$$+N_\varepsilon(1-\mathrm{e}^{-\frac{\varepsilon\sigma_1}{(1+\varepsilon)(E+\varepsilon)}})^{-1}+N_\varepsilon(1-\mathrm{e}^{-\frac{\varepsilon\sigma_2}{(1+\varepsilon)(E+\varepsilon)}})^{-1}].$$

注意到, 当 $x\to\infty$ 时,

$$\mathrm{e}^x-1\sim x.$$

由此可得

$$(1-\mathrm{e}^{-\frac{\varepsilon\sigma_j}{(1+\varepsilon)(E+\varepsilon)}})^{-1}=(1+o(1))\frac{(1+\varepsilon)(E+\varepsilon)}{\varepsilon\sigma_j}\leqslant(1+o(1))\frac{(1+\varepsilon)(E+\varepsilon)}{\varepsilon}\|\sigma^{-1}\|,$$

在 $\sigma_j\to+0$ $(j=1,2)$ 的条件下成立.

因此, 当 $\sigma\in\mathbb{R}_+^2$ 足够接近 $(0,0)$ 时, 注意到 $\|\sigma^{-1}\|\leqslant\|\sigma^{-1}\|^2$, 存在 $C_\varepsilon>0$, 使得

$$M_u(\sigma,F)\leqslant4\sum_{k_1=1}^{\infty}\sum_{k_2=1}^{\infty}A_k^*\mathrm{e}^{-\lambda_k\cdot\sigma}\leqslant C_\varepsilon\mu\Big(\frac{\sigma}{1+\varepsilon},F\Big)\|\sigma^{-1}\|^2.$$

因此我们完成了证明.

引理 3.5 在条件 (1.2)–(1.6) 下, 有

$$\limsup_{\sigma\to+0}\frac{\alpha(\log M_u(\sigma,F))}{\beta(\|\sigma^{-1}\|)}=\limsup_{\sigma\to+0}\frac{\alpha(\log\mu(\sigma,F))}{\beta(\|\sigma^{-1}\|)}.$$

证 根据引理 3.4, 对任意 $\varepsilon>0$, 存在 $C_\varepsilon>0$, 使得当 $\sigma\in\mathbb{R}_+^2$ 足够接近 $(0,0)$ 时, 有

$$\log M_u(\sigma,F)\leqslant\log C_\varepsilon+2\log\|\sigma^{-1}\|+\log\mu\Big(\frac{\sigma}{1+\varepsilon},F\Big).$$

令 $E_\varepsilon=\big\{\sigma\in\mathbb{R}_+^2:\log C_\varepsilon+2\log\|\sigma^{-1}\|<\varepsilon\log\mu\big(\frac{\sigma}{1+\varepsilon},F\big)\big\}$.

若 $\sigma\in E_\varepsilon$, 则 $\log M_u(\sigma,F)<(1+\varepsilon)\log\mu\big(\frac{\sigma}{1+\varepsilon},F\big)$; 若 $\sigma\in E_\varepsilon^c$, 则 $\log M_u(\sigma,F)<3(1+\varepsilon^{-1})\log\|\sigma^{-1}\|$.

根据 $\alpha \in \Lambda$ 得, 存在 $C_1 > 0$, 使得 $\alpha(x) + C_1 \geqslant 0$ 对所有 $x \in \mathbb{R}$ 成立. 因此, 当 $\sigma \in \mathbb{R}_+^2$ 足够接近 $(0,0)$ 时, 有

$$\alpha(\log M_u(\sigma, F)) \leqslant \alpha(3(1+\varepsilon^{-1})\log\|\sigma^{-1}\|) + \alpha\Big((1+\varepsilon)\log\mu\Big(\frac{\sigma}{1+\varepsilon}, F\Big)\Big) + C_1.$$

根据 (1.6) 和注 1.4, 有

$$\begin{aligned}\limsup_{\sigma\to+0}\frac{\alpha(\log M_u(\sigma,F))}{\beta(\|\sigma^{-1}\|)} &\leqslant \limsup_{\sigma\to+0}\frac{\alpha(3(1+\varepsilon^{-1})\log\|\sigma^{-1}\|)}{\beta(\|\sigma^{-1}\|)} + \limsup_{\sigma\to+0}\frac{\alpha((1+\varepsilon)\log\mu\big(\frac{\sigma}{1+\varepsilon},F\big))}{\beta(\|\sigma^{-1}\|)}\\ &\leqslant \delta(1+\varepsilon)\limsup_{\sigma\to+0}\frac{\alpha(\log\mu(\frac{\sigma}{1+\varepsilon},F))}{\beta(\|\big(\frac{\sigma}{1+\varepsilon}\big)^{-1}\|)}\\ &= \delta(1+\varepsilon)\limsup_{\sigma\to+0}\frac{\alpha(\log\mu(\sigma,F))}{\beta(\|\sigma^{-1}\|)},\end{aligned}$$

其中 $\delta(t) = \limsup\limits_{x\to\infty}\frac{\alpha(tx)}{\alpha(x)}$.

令 $\varepsilon \to 0$, 得到

$$\limsup_{\sigma\to+0}\frac{\alpha(\log M_u(\sigma,F))}{\beta(\|\sigma^{-1}\|)} \leqslant \limsup_{\sigma\to+0}\frac{\alpha(\log\mu(\sigma,F))}{\beta(\|\sigma^{-1}\|)}.$$

反向的不等式根据引理 3.3 易证.

4　定理与推论的证明

4.1　定理 2.1 的证明

证　根据引理 3.5, 我们需要证明

$$\limsup_{\sigma\to+0}\frac{\alpha(\log\mu(\sigma,F))}{\beta(\|\sigma^{-1}\|)} = \limsup_{\|m\|\to\infty}\frac{\alpha(\log^+ A_m^*)}{\beta\big(\frac{\|\lambda_m\|}{\log^+ A_m^*}\big)}.$$

注意到 α 有下界, 再根据 (1.5), 有

$$\beta\Big(\frac{\|\lambda_m\|}{\log^+ A_m^*}\Big) \to \infty, \quad \|m\| \to \infty,$$

所以以上的上极限都不小于零.

首先证明

$$\limsup_{\sigma\to+0}\frac{\alpha(\log\mu(\sigma,F))}{\beta(\|\sigma^{-1}\|)} \geqslant \limsup_{\|m\|\to\infty}\frac{\alpha(\log^+ A_m^*)}{\beta\big(\frac{\|\lambda_m\|}{\log^+ A_m^*}\big)}.$$

不失一般性, 我们可以假设左边等于 $L_1\in\mathbb{R}_+$. 存在序列 $\{m_k\}\subset\mathbb{Z}_+^2$, 使得

$$\lim_{k\to\infty}\|m_k\|=\infty$$

和

$$\lim_{k\to\infty}\frac{\alpha(\log^+A^*_{m_k})}{\beta\big(\frac{\|\lambda_{m_k}\|}{\log^+A^*_{m_k}}\big)}=\limsup_{\|m\|\to\infty}\frac{\alpha(\log^+A^*_m)}{\beta\big(\frac{\|\lambda_m\|}{\log^+A^*_m}\big)}.$$

注意到 $E=\{k\in\mathbb{Z}_+:\log^+A^*_{m_k}=0\}$ 是有限集. 否则

$$\lim_{k\to\infty}\frac{\alpha(\log^+A^*_{m_k})}{\beta\big(\frac{\|\lambda_{m_k}\|}{\log^+A^*_{m_k}}\big)}=\lim_{E\ni k\to\infty}\frac{\alpha(\log^+A^*_{m_k})}{\beta\big(\frac{\|\lambda_{m_k}\|}{\log^+A^*_{m_k}}\big)}=0.$$

从而我们可以假设 $E=\emptyset$ 而不失一般性. 由此可得 $\log^+A^*_{m_k}=\log A^*_{m_k}$ 对所有 $k\in\mathbb{Z}_+$ 成立.

对任意 $c\in(0,4^{-1})$ 和任意的 $k\in\mathbb{Z}_+$, 存在 $\sigma_k=(\sigma_{k,1},\sigma_{k,2})\in\mathbb{R}_+^2$, 使得 $\sigma_{k,1}=\sigma_{k,2}$ 和 $\frac{\|\lambda_{m_k}\|}{\log A^*_{m_k}}=c\|\sigma_k^{-1}\|$. 根据条件 (1.5), 有

$$\lim_{k\to\infty}\|\sigma_k^{-1}\|=c^{-1}\lim_{k\to\infty}\frac{\|\lambda_{m_k}\|}{\log A^*_{m_k}}=\infty.$$

注意到

$$\|\sigma_k^{-1}\|=\sigma_{k,1}^{-1}+\sigma_{k,2}^{-1}=4\|\sigma_k\|^{-1}.$$

从而

$$\begin{aligned}\log\mu(\sigma_k,F)&=\log^+A^*_{m_k}-\sigma_k\cdot\lambda_{m_k}\\&\geqslant\log^+A^*_{m_k}-\|\sigma_k\|\|\lambda_{m_k}\|\\&=\log^+A^*_{m_k}-4\|\sigma_k^{-1}\|^{-1}\|\lambda_{m_k}\|\\&=(1-4c)\log^+A^*_{m_k}.\end{aligned}$$

由此可得

$$\begin{aligned}&\lim_{k\to\infty}\frac{\alpha(\log A^*_{m_k})}{\beta\big(\frac{\|\lambda_{m_k}\|}{\log A^*_{m_k}}\big)}\\&\leqslant\limsup_{k\to\infty}\frac{\alpha((1-4c)^{-1}\log\mu(\sigma_k,F))}{\beta(c\|\sigma_k^{-1}\|)}\\&\leqslant\limsup_{\sigma\to+0}\frac{\alpha((1-4c)^{-1}\log\mu(\sigma,F))}{\beta(c\|\sigma^{-1}\|)}\end{aligned}$$

$$\leqslant \limsup_{\sigma\to+0}\frac{\alpha((1-4c)^{-1}\log\mu(\sigma,F))}{\alpha(\log\mu(\sigma,F))}\limsup_{\sigma\to+0}\frac{\alpha(\log\mu(\sigma,F))}{\beta(\|\sigma^{-1}\|)}\limsup_{\sigma\to+0}\frac{\beta(\|\sigma^{-1}\|)}{\beta(c\|\sigma^{-1}\|)}$$
$$=\delta((1-4c)^{-1})\limsup_{\sigma\to+0}\frac{\alpha(\log\mu(\sigma,F))}{\beta(\|\sigma^{-1}\|)},$$

其中

$$\delta(t)=\limsup_{x\to\infty}\frac{\alpha(tx)}{\alpha(x)}.$$

令 $c\to 0$, 我们得到想要的结果.

现在证明

$$\limsup_{\sigma\to+0}\frac{\alpha(\log\mu(\sigma,F))}{\beta(\|\sigma^{-1}\|)}\leqslant\limsup_{\|m\|\to\infty}\frac{\alpha(\log^+ A_m^*)}{\beta\big(\frac{\|\lambda_m\|}{\log^+ A_m^*}\big)}.$$

不失一般性, 可假设右边等于 $L_2<\infty$.

根据注 1.2, 对任意 $\varepsilon>0$, 存在 $m_\varepsilon>0$, 使得 $\|m\|>m_\varepsilon$ 蕴含

$$\log^+ A_m^*<\alpha^{-1}\Big[(L_2+\varepsilon)\beta\Big(\frac{\|\lambda_m\|}{\log^+ A_m^*}\Big)\Big].\tag{4.1}$$

现在在 $\sigma=(\sigma_1,\sigma_2)\in\mathbb{R}_+^2$ 足够接近 0 的条件下估计 $\log\mu(\sigma,F)$. 在这种情况下,

$$\alpha^{-1}[(L_2+\varepsilon)\beta(\|\sigma^{-1}\|)]>\sum_{\|m\|\leqslant m_\varepsilon}\log^+ A_m^*,\tag{4.2}$$

则对 $\sigma_1,\sigma_2\in(0,\eta_\varepsilon)$,

(1) 若 $\frac{\|\lambda_m\|}{\log^+ A_m^*}\leqslant\|\sigma^{-1}\|$ 且 $\|m\|>m_\varepsilon$, 则根据 (4.1), 有

$$\log(A_m^*\mathrm{e}^{-\lambda_m\cdot\sigma})=\log A_m^*-\sigma\cdot\lambda_m\leqslant\log^+ A_m^*\leqslant\alpha^{-1}[(L_2+\varepsilon)\beta(\|\sigma^{-1}\|)].$$

(2) 若 $\|m\|\leqslant m_\varepsilon$, 则根据 (4.2), 有

$$\log(A_m^*\mathrm{e}^{-\lambda_m\cdot\sigma})\leqslant\log^+ A_m^*\leqslant\alpha^{-1}[(L_2+\varepsilon)\beta(\|\sigma^{-1}\|)].$$

(3) 若 $\frac{\|\lambda_m\|}{\log^+ A_m^*}>\|\sigma^{-1}\|$, 则

$$\sigma\cdot\lambda_m=\lambda_1^{(m_1)}\sigma_1+\lambda_2^{(m_2)}\sigma_2>\lambda_1^{(m_1)}\sigma_1\frac{\sigma_2}{\sigma_1+\sigma_2}+\lambda_2^{(m_2)}\sigma_2\frac{\sigma_1}{\sigma_1+\sigma_2}=\frac{\|\lambda_m\|}{\|\sigma^{-1}\|}>\log^+ A_m^*.$$

由此可得

$$\log(A_m^*\mathrm{e}^{-\lambda_m\cdot\sigma})=\log A_m^*-\sigma\cdot\lambda_m\leqslant 0.$$

结合 (1)–(3), 对所有 $m\in\mathbb{Z}_+^2$, 有

$$\log(A_m^*\mathrm{e}^{-\lambda_m\cdot\sigma})<\alpha^{-1}((L_2+\varepsilon)\beta(\|\sigma^{-1}\|)).$$

所以, 当 σ 足够接近 0 时, 有

$$\log \mu(\sigma, F) < \alpha^{-1}((L_2+\varepsilon)\beta(\|\sigma^{-1}\|)).$$

因此

$$\limsup_{\sigma\to+0} \frac{\alpha(\log\mu(\sigma,F))}{\beta(\|\sigma^{-1}\|)} \leqslant \limsup_{\sigma\to+0} \frac{\alpha\circ\alpha^{-1}((L_2+\varepsilon)\beta(\|\sigma^{-1}\|))}{\beta(\|\sigma^{-1}\|)} = L_2+\varepsilon.$$

令 $\varepsilon\to 0$, 我们完成了证明.

4.2 推论 2.2 的证明

证 由定理 2.1 和以下事实马上就可得到结论,

$$\begin{aligned}
\frac{\log^{+[n]} tx}{\log^{+[n]} x} &= \frac{\log^{+[n-1]}(\log^+ x + \log^+ t)}{\log^{+[n]} x} \leqslant \frac{\log^{+[n-1]}(2\log^+ x)}{\log^{+[n]} x} \\
&\leqslant \cdots \leqslant \frac{\log^+(2\log^{+[n-1]} x)}{\log^{+[n]} x} \to 1, \quad x\to\infty,\ t>0, \\
\frac{\log^{+[n]} tx}{\log^{+[n]} x} &= \Big[\frac{\log^{+[n]} t^{-1}\cdot tx}{\log^{+[n]} tx}\Big]^{-1} \\
&\geqslant \cdots \geqslant \Big[\frac{\log^+(2\log^{+[n-1]} tx)}{\log^{+[n]} tx}\Big]^{-1} \to 1, \quad x\to\infty,\ t>0, \\
\frac{\log^{+[p]} x}{\log^{+[q]}(\mathrm{e}^x)} &= \frac{\log^{+[p+1]}(\mathrm{e}^x)}{\log^{+[q]}(\mathrm{e}^x)} \to 0, \quad x\to\infty,\ p\geqslant q\geqslant 1.
\end{aligned}$$

参 考 文 献

[1] 余家荣. Laplace-Stieltjes 变换所定义的整函数之 Borel 线 [J]. 数学学报, 1963, 03:471–484.

[2] Kong Y Y, Hong Y. On the growth of Laplace-Stieltjes transforms and the singular direction of complex analysis [M]. Guangzhou: Jinan University Press, 2010.

[3] Xu H Y, Liu S Y. The approximation of Laplace-Stieltjes transforms with finite order [J]. *J Inequal Appl,* 2017, 1:164.

[4] Xu H Y, Wang H. The growth and approximation for an analytic function represented

by Laplace-Stieltjes transforms with generalized order converging in the half plane [J]. *J Inequal Appl,* 2018, 2018(1):1–16.

[5] Bernstein D L. The double Laplace integral [J]. *Duke Math J,* 1941, 8(3):460–496.

[6] Lee T Y. Henstock-Kurzweil integration on Euclidean spaces [M]. 1st ed, Singapore: World Scientific, 2011.

[7] Tolmatz L. On the distribution of the integral of the exponential Brownian motion [J/OL]. arXiv:0904.1870, 2009, http://arxiv.org/abs/0904.1870.

[8] 余家荣. 二重 Dirichlet 级数与二重 Laplace 变换的收敛性 [J]. 武汉大学学报 (自然科学版), 1962, 1(1):1–16.

[9] Liang M L, Gao Z S. On convergence and growth of multiple dirichlet series [J]. *Math Notes*, 2010, 88(5):732–740.

[10] Liang M L, Huo Y Y. On order and type of multiple Dirichlet series [J]. *Acta Math Sci Ser B* (*Engl Ed*), 2017, 37(1):131–138.

[11] Cui Y Q, Xu H Y, Li N. The growth on the maximum modulus of double Dirichlet series [J/OL]. *J Funct Spaces*, 2019, https://doi.org/10.1155/2019/9191346.

[12] Durañona y Vedia A, Trejo C A. Recintos de convergencia de las integrales dobles de Laplace-Stieltjes [J]. *Univ nac La Plata, Publ Ci fis mat,* 1937, 109:315–327 (in Spanish).

[13] 李至琳. Laplace-Stieltjes 变换所定义的函数在收敛半平面内的增长性 [J]. 武汉大学学报 (自然科学版), 1981(03):17–30.

[14] 孔荫莹, 霍颖莹. 右半平面解析的 Laplace-Stieltjes 变换的广义级与型 [J]. 数学学报, 2016, 59(01):91–98.

[15] Young W H. On multiple integration [J]. *Proc Roy Soc Ser A*, 1917, 93:28–41.

On the Growth of the Double Laplace-Stieltjes Transform

BI Jiaye[1] HUO Yingying[2]

[1]School of Mathematics and Statistics, Guangdong University of Technology, Guangzhou 510520, China. E-mail: JiayeBi@outlook.com

[2]Corresponding author. School of Mathematics and Statistics, Guangdong University of Technology, Guangzhou 510520, China. E-mail: huoyingy@gdut.edu.cn

Abstract This paper introduces a new concept of generalized order to investigate the growth of the holomorphic function defined by the double Laplace-Stieltjes transform, and establishes some attractive relations on the maximum modulus and the maximum term, which generalize some results of Laplace-Stieltjes transform.

Keywords Laplace-Stieltjes transform, Generalized order, Holomorphic function

2000 MR Subject Classification 22E46, 22E47

The English translation of this paper will be published in

Chinese Journal of Contemporary Mathematics, Vol. 42 No. 4, 2021

by ALLERTON PRESS, INC., USA