数 学 年 刊 A 辑
2021, 42(4):441–458
DOI: 10.16205/j.cnki.cama.2021.0034

Hopf 代数的二重 Ore 扩张

李启宁[1]

提要 本文的目的是定义 Hopf 二重 Ore 扩张，讨论这种扩张的基本性质并研究 Hopf 代数的分次与 Hopf 二重 Ore 扩张之间的关系．作者还研究了连通分次 Hopf 代数的结构及其 Hopf 二重 Ore 扩张的同调性质.

关键词 Hopf 二重 Ore 扩张，连通分次 Hopf 代数
MR (2000) 主题分类 16P90, 16S36, 16S38, 16T05, 16W50
中图法分类 O153.3
文献标志码 A
文章编号 1000-8314(2021)04-0441-18

1 引　言

2003 年， Panov 研究了 Hopf 代数的 Ore 扩张． 2008 年， Zhang 和 Zhang 介绍了一种扩张给定代数 A 的新构造，称为二重 Ore 扩张，这种构造类似于 Ore 扩张．据我所知，到目前为止还没有学者提出过关于 Hopf 二重 Ore 扩张的概念.

本文的目的是定义 Hopf 二重 Ore 扩张，讨论这种扩张的基本性质并研究 Hopf 代数的分次与 Hopf 二重 Ore 扩张之间的关系．我们还研究了连通分次 Hopf 代数的结构及其 Hopf 二重 Ore 扩张的同调性质.

本文约定： $\mathbf{k}$ 是特征为 0 的代数闭域， $\mathbf{k}^*$ 是它的乘法单位群，所有的代数结构与线性运算都在基域 $\mathbf{k}$ 上． H 是 $\mathbf{k}$ 上的 Hopf 代数， Δ 是 H 的余乘法， ε 是 H 的余单位， S 是 H 的对极．对于 $h\in H$, 通常忽略求和记号，将余运算简记为 $\Delta(h)=h_{(1)}\otimes h_{(2)}$.

本文的主要定理如下.

定理 1.1 设 H 是 Hopf 代数，且它是由 1 分次生成的连通分次代数，记 $\mathfrak{m}=\ker\varepsilon$, $\mathrm{gr}_{\mathcal{F}}H=\bigoplus\limits_{i=0}^{\infty}\mathfrak{m}^i/\mathfrak{m}^{i+1}$, 用

$$B_1:=\mathrm{gr}_{\mathcal{N}}H((\mathrm{gr}_{\mathcal{F}}H)_P[y_1,y_2;\sigma,\delta,\tau])$$

表示 $\mathrm{gr}_{\mathcal{F}}H$ 的右 Hopf 二重 Ore 扩张的自然分次.

设 $B=H_P[z_1,z_2;\sigma',\delta',\tau']$ 是 H 的右 Hopf 二重 Ore 扩张，记

$$B_2:=\mathrm{gr}_{\mathcal{F}}(\mathrm{gr}_{\mathcal{N}}B)=\bigoplus_{i=0}^{\infty}\mathfrak{m}^i_{\mathrm{gr}_{\mathcal{N}}B}/\mathfrak{m}^{i+1}_{\mathrm{gr}_{\mathcal{N}}B},$$

其中 $\mathfrak{m}_{\mathrm{gr}_{\mathcal{N}}B}=\ker\varepsilon_{\mathrm{gr}_{\mathcal{N}}B}$, 且 $\varepsilon_{\mathrm{gr}_{\mathcal{N}}B}:\mathrm{gr}_{\mathcal{N}}B\to\mathbf{k}$ 是 Hopf 代数 $\mathrm{gr}_{\mathcal{N}}B$ 的余单位.

本文 2019 年 7 月 16 日收到， 2021 年 3 月 1 日收到修改稿.
[1]浙江大学数学科学学院，杭州 310027. E-mail: castelu@qq.com

那么 $B_1 \cong B_2$ 作为连通分次 Hopf 代数当且仅当 y_1, y_2 是本原元.

定理 1.2 设 H 是 GK 维数为 d 的 Hopf 代数，且它是由 1 分次生成的连通分次代数，B_1, B_2 由定理 3.1 给出，y_1, y_2 是本原元，那么 B_1 可以表示成迭代 Hopf-Ore 扩张 $\mathbf{k}[z_1][z_2]\cdots[z_{d+2}]$, 即多项式 Hopf 代数 $\mathbf{k}[z_1, z_2, \cdots, z_{d+2}]$.

定理 1.3 设 H 是 Hopf 代数，且它是连通分次代数. 在 (3, 4, 5, 6, 7) 中进一步假设 H 由 1 分次生成，且 $\mathrm{GKdim}\, H = d < \infty$.

如果 $B = H_P[y_1, y_2; \sigma, \delta, \tau]$ 是 H 的右 Hopf 二重 Ore 扩张，y_1, y_2 是本原元，那么

(1) B 是整环;

(2) B 是素 (半素) 代数;

(3) B 是仿射代数且是 Noether 的;

(4) B 有有限 GK 维数，且 $\mathrm{GKdim}\, B = d + 2$;

(5) B 有有限 Krull 维数，且 $\mathrm{Kdim}\, H \leqslant \mathrm{Kdim}\, B \leqslant d + 2$;

(6) 若 B 是 H 的 Hopf 二重 Ore 扩张，那么 B 有有限整体维数，且 $\mathrm{gldim}\, H \leqslant \mathrm{gldim}\, B \leqslant d + 2$;

(7) 若 B 是连通分次代数，那么 B 是 Artin-Schelter 正则的，且 $\mathrm{gldim}\, B = \mathrm{gldim}(\mathrm{gr}_{\mathcal{F}}(\mathrm{gr}_{\mathcal{N}} B))$.

进一步地，若 B 是 Hopf 二重 Ore 扩张，那么 $\mathrm{gldim}\, B = \mathrm{gldim}\, H + 2$.

定理 1.4 设 H 是 GK 维数为 d 的连通分次代数，那么 H 是 Hopf 多重 Ore 扩张. 准确地说，存在 H 的正分次齐次元的有限序列 $z_1, \cdots, z_d$, 满足

$$H = \mathbf{k}[z_1, z_2, \cdots, z_d; \delta, P, T],$$

且

$$\Delta_H(z_r) \in 1 \otimes z_r + z_r \otimes 1 + \sum_{i,j>0, i+j=\deg(z_r)} (H^{\leqslant r-1})_i \otimes (H^{\leqslant r-1})_j, \quad r = 1, \cdots, d,$$

其中 $H^{\leqslant 0} = \mathbf{k}$, $H^{\leqslant i}$ 是由 $z_1, \cdots, z_i (i = 1, \cdots, d)$ 生成的 H 的子代数，$\delta_i (i = 2, \cdots, d)$ 是 $H^{\leqslant i-1}$ 的导子. 特别地，$H^{\leqslant 0}, H^{\leqslant 1}, \cdots, H^{\leqslant d}$ 都是 H 的分次 Hopf 子代数.

在第一节中，我们给出了 Hopf 二重 Ore 扩张的定义，并讨论了这种扩张的基本性质；在第二节中，我们研究了当 Hopf 代数 H 是由 1 分次生成的连通分次代数时，其分次与 Hopf 二重 Ore 扩张之间的关系；在第三节中，我们给出了 Hopf 二重 Ore 扩张可以表示为二次 Hopf-Ore 扩张的充要条件，讨论了连通分次 Hopf 代数的 Hopf 二重 Ore 扩张，加强了定理 3.1 和文 [1, 第 3 节] 中的结论，研究了连通分次 Hopf 代数 Hopf 二重 Ore 扩张的同调性质；在第四节中，我们研究了连通分次 Hopf 代数的结构，并给出了文 [2] 中主要定理的另一个版本.

2 Hopf 二重 Ore 扩张

本节我们给出 Hopf 二重 Ore 扩张的定义，并讨论这种扩张的基本性质.

定义 2.1 (见 [3, 定义 1.0]) 设 A 和 $R = A[x;\sigma,\delta]$ 都是 $\mathbf{k}$ 上的 Hopf 代数，称 R 是 Hopf-Ore 扩张如果 A 是 R 的 Hopf 子代数，且存在 $r_1, r_2 \in A$, 使得 $\Delta(x) = x\otimes r_1 + r_2 \otimes x$.

注 2.1 应注意定义 2.1 中的 r_1, r_2 必是群像元，满足 $\Delta r_i = r_i \otimes r_i (i = 1, 2)$. 对生成元作变量替换，可得 $\Delta(x) = x \otimes 1 + r \otimes x$, 其中 $r \in A$ 是群像元.

引理 2.1 (见 [1, 引理 1.1]) 如果 $R = A[x;\sigma,\delta]$ 是 Hopf-Ore 扩张, 那么 $\varepsilon(x) = 0, S(x) = -r^{-1}x$, 其中 $r^{-1} = S(r)$.

例 2.1 众所周知，最小的非交换、非余交换的 Hopf 代数是

$$H_4 = \mathbf{k}\langle 1, g, x, gx \mid g^2 = 1, x^2 = 0, xg = -gx\rangle.$$

H_4 的余结构是 $\Delta(g) = g \otimes g$, $\Delta(x) = x \otimes 1 + g \otimes x$, $\varepsilon(g) = 1$, $\varepsilon(x) = 0$, 对极满足 $S(g) = g = g^{-1}$, $S(x) = -gx$. 设 H 是 2 阶循环群代数 $\mathbf{k}G$ 的 Hopf-Ore 扩张，满足 $\sigma(g) = -g$, $\delta(g) = 0$ 且 $\Delta(x) = x \otimes 1 + g \otimes x$, 那么 H_4 是 H 模掉 Hopf 理想 $\langle x^2\rangle$ 所得的商 Hopf 代数.

现在我们来回顾 Zhang 和 Zhang 在文 [4] 中给出的二重 Ore 扩张的定义.

定义 2.2 设 A 是代数， B 包含 A 作为子代数. 称 B 是 A 的右二重 Ore 扩张，如果它满足以下条件:

(1) B 由 A 和另外两个变量 y_1 和 y_2 生成;

(2) $\{y_1, y_2\}$ 满足关系

$$y_2y_1 = p_{12}y_1y_2 + p_{11}y_1^2 + \tau_1y_1 + \tau_2y_2 + \tau_0,$$

其中 $p_{12}, p_{11} \in \mathbf{k}$, 且 $\tau_1, \tau_2, \tau_0 \in A$;

(3) 作为左 A 模， $B = \sum\limits_{i,j\geqslant 0} Ay_1^iy_2^j$, 且它是以 $\{y_1^iy_2^j \mid i \geqslant 0, j \geqslant 0\}$ 为基的自由左 A 模;

(4) $y_1A + y_2A + A \subseteq Ay_1 + Ay_2 + A$.

我们用 P 表示纯量集合 $\{p_{12}, p_{11}\}$, 用 τ 表示集合 $\{\tau_1, \tau_2, \tau_0\}$, 称 P 是参数集， τ 是尾集. 类似地，我们可以定义 A 的左二重 Ore 扩张 (见 [4]). 我们称 B 是 A 的二重 Ore 扩张，如果它同时是 A 的左二重 Ore 扩张和右二重 Ore 扩张，且这两种扩张的生成集 $\{y_1, y_2\}$ 相同.

注 2.2 (见 [1, 注 1.2]) 定义 2.2 中的条件 (4) 等价于存在两个映射

$$\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} \end{pmatrix} : A \to M_{2\times 2}(A), \quad \delta = \begin{pmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \end{pmatrix} : A \to M_{2\times 1}(A).$$

设 B 是 A 的右二重 Ore 扩张，我们通常记为 $B = A_P[y_1, y_2; \sigma, \delta, \tau]$, 其中 $P = \{p_{12}, p_{11}\} \subseteq \mathbf{k}$, $\tau = \{\tau_1, \tau_2, \tau_0\} \subseteq A$, σ 和 δ 由上文给出.

Hopf 二重 Ore 扩张的定义基于 Hopf-Ore 扩张和二重 Ore 扩张.

定义 2.3 设 A 和 $B = A_P[y_1, y_2; \sigma, \delta, \tau]$ 都是 $\mathbf{k}$ 上的 Hopf 代数， B 是 A 的右二重

Ore 扩张，称 B 是右 Hopf 二重 Ore 扩张，如果 A 是 B 的 Hopf 子代数，且存在群像元 $r_1, r_2 \in A$, 满足

$$\Delta(y_1) = y_1 \otimes 1 + r_1 \otimes y_1, \quad \Delta(y_2) = y_2 \otimes 1 + r_2 \otimes y_2.$$

我们还可以定义 A 的左 Hopf 二重 Ore 扩张，称 B 是 A 的 Hopf 二重 Ore 扩张，如果它同时是 A 的左 Hopf 二重 Ore 扩张和右 Hopf 二重 Ore 扩张，且这两种扩张的生成集 $\{y_1, y_2\}$ 相同.

例 2.2 当 $A = \mathbf{k}$ 时，我们便得到了右 Hopf 二重 Ore 扩张的一个平凡例子，即 $\mathbf{k}$ 上的右 Hopf 二重 Ore 扩张，记它为 B. 作为 $\mathbf{k}$ 线性空间，B 同构于 $\sum\limits_{i,j\geqslant 0} \mathbf{k} y_1^i y_2^j$. 进一步地，$B$ 同构于 Hopf 代数 $\mathbf{k}\langle y_1, y_2\rangle/(r)$, 其中 r 是关系

$$y_2 y_1 = p_{12} y_1 y_2 + p_{11} y_1^2 + \tau_1 y_1 + \tau_2 y_2 + \tau_0.$$

这里 $p_{12}, p_{11}, \tau_1, \tau_2, \tau_0 \in \mathbf{k}$, 且 $\Delta(y_i) = y_i \otimes 1 + 1 \otimes y_i (i = 1, 2)$.

现在我们给出 Hopf 二重 Ore 扩张的基本性质.

定理 2.1 设 $B = A_P[y_1, y_2; \sigma, \delta, \tau]$ 右 Hopf 二重 Ore 扩张，那么 $\tau_1, \tau_2 \in \mathbf{k}$, τ_0 是本原元. 进一步地，

(1) $\Delta(\tau_0) = \tau_0 \otimes 1 + r_2 r_1 \otimes \tau_0$;

(2) $p_{12} r_2 r_1 = p_{12} r_1 r_2, p_{11} r_2 r_1 = p_{11} r_1^2$;

(3) $\Delta(\sigma_{ij}(a)) = \sigma_{ij}(a_{(1)}) \otimes a_{(2)} = r_i a_{(1)} r_j^{-1} \otimes \sigma_{ij}(a_{(2)}),\ i, j = 1, 2$;

(4) $\Delta(\delta_i(a)) = \delta_i(a_{(1)}) \otimes a_{(2)} + r_i a_{(1)} \otimes \delta_i(a_{(2)}),\ i = 1, 2$.

证 假设余乘法 $\Delta|_A$ 可以延拓到 $B = A_P[y_1, y_2; \sigma, \delta, \tau]$, 那么代数同态 Δ 保持定义 2.2 中的 (2), 也就是说

$$\Delta(y_2)\Delta(y_1) = p_{12}\Delta(y_1)\Delta(y_2) + p_{11}\Delta(y_1^2) + \Delta(\tau_1)\Delta(y_1) + \Delta(\tau_2)\Delta(y_2) + \Delta(\tau_0).$$

我们有

$$\begin{aligned}
\Delta(y_2)\Delta(y_1) &= (y_2 \otimes 1 + r_2 \otimes y_2)(y_1 \otimes 1 + r_1 \otimes y_1) \\
&= y_2 y_1 \otimes 1 + y_2 r_1 \otimes y_1 + r_2 y_1 \otimes y_2 + r_2 r_1 \otimes y_2 y_1 \\
&= p_{12} y_1 y_2 \otimes 1 + p_{11} y_1^2 \otimes 1 + \tau_1 y_1 \otimes 1 + \tau_2 y_2 \otimes 1 + \tau_0 \otimes 1 \\
&\quad + \sigma_{21}(r_1) y_1 \otimes y_1 + \sigma_{22}(r_1) y_2 \otimes y_1 + \delta_2(r_1) \otimes y_1 + r_2 y_1 \otimes y_2 \\
&\quad + p_{12} r_2 r_1 \otimes y_1 y_2 + p_{11} r_2 r_1 \otimes y_1^2 + r_2 r_1 \otimes \tau_1 y_1 \\
&\quad + r_2 r_1 \otimes \tau_2 y_2 + r_2 r_1 \otimes \tau_0,
\end{aligned}$$

以及

$$\begin{aligned}
&p_{12}\Delta(y_1)\Delta(y_2) + p_{11}\Delta(y_1^2) + \Delta(\tau_1)\Delta(y_1) + \Delta(\tau_2)\Delta(y_2) + \Delta(\tau_0) \\
= \;& p_{12}(y_1 \otimes 1 + r_1 \otimes y_1)(y_2 \otimes 1 + r_2 \otimes y_2) \\
&+ p_{11}(y_1 \otimes 1 + r_1 \otimes y_1)(y_1 \otimes 1 + r_1 \otimes y_1) \\
&+ \Delta(\tau_1)(y_1 \otimes 1 + r_1 \otimes y_1) + \Delta(\tau_2)(y_2 \otimes 1 + r_2 \otimes y_2) + \Delta(\tau_0)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= p_{12}(y_1y_2\otimes 1+\sigma_{11}(r_2)y_1\otimes y_2+\sigma_{12}(r_2)y_2\otimes y_2+\delta_1(r_2)\otimes y_2\\
&\quad +r_1y_2\otimes y_1+r_1r_2\otimes y_1y_2)\\
&\quad +p_{11}(y_1^2\otimes 1+\sigma_{11}(r_1)y_1\otimes y_1+\sigma_{12}(r_1)y_2\otimes y_1+\delta_1(r_1)\otimes y_1\\
&\quad +r_1y_1\otimes y_1+r_1^2\otimes y_1^2)\\
&\quad +\Delta(\tau_1)(y_1\otimes 1+r_1\otimes y_1)+\Delta(\tau_2)(y_2\otimes 1+r_2\otimes y_2)+\Delta(\tau_0).
\end{aligned}
$$

显然，如果 Δ 保持定义 2.2 中的 (2), 以下条件必然成立：

$$
\begin{aligned}
&\Delta(\tau_1)=\tau_1\otimes 1,\quad \Delta(\tau_2)=\tau_2\otimes 1,\\
&\Delta(\tau_0)=\tau_0\otimes 1+r_2r_1\otimes\tau_0,\\
&p_{12}r_2r_1=p_{12}r_1r_2,\quad p_{11}r_2r_1=p_{11}r_1^2.
\end{aligned}
$$

利用余单位的主要性质我们发现， $\tau_i=\varepsilon(\tau_i)\in\mathbf{k}(i=1,2)$, 根据定义， τ_0 是本原元. 类似地，代数同态 Δ 保持注 2.2 中的关系，即存在 $a\in A$, 使得

$$
\begin{cases}
\Delta(y_1)\Delta(a)=\Delta(\sigma_{11}(a))\Delta(y_1)+\Delta(\sigma_{12}(a))\Delta(y_2)+\Delta(\delta_1(a)),\\
\Delta(y_2)\Delta(a)=\Delta(\sigma_{21}(a))\Delta(y_1)+\Delta(\sigma_{22}(a))\Delta(y_2)+\Delta(\delta_2(a)).
\end{cases}
$$

对于第一个等式，有

$$
\begin{aligned}
\Delta(y_1)\Delta(a)&=(y_1\otimes 1+r_1\otimes y_1)(a_{(1)}\otimes a_{(2)})\\
&=(\sigma_{11}(a_{(1)})y_1+\sigma_{12}(a_{(1)})y_2+\delta_1(a_{(1)}))\otimes a_{(2)}\\
&\quad +r_1a_{(1)}\otimes(\sigma_{11}(a_{(2)})y_1+\sigma_{12}(a_{(2)})y_2+\delta_1(a_{(2)}))\\
&=(\sigma_{11}(a_{(1)})\otimes a_{(2)})(y_1\otimes 1)+(\sigma_{12}(a_{(1)})\otimes a_{(2)})(y_2\otimes 1)\\
&\quad +(r_1a_{(1)}r_1^{-1}\otimes\sigma_{11}(a_{(2)}))(r_1\otimes y_1)\\
&\quad +(r_1a_{(1)}r_2^{-1}\otimes\sigma_{12}(a_{(2)}))(r_2\otimes y_2)\\
&\quad +\delta_1(a_{(1)})\otimes a_{(2)}+r_1a_{(1)}\otimes\delta_1(a_{(2)}),
\end{aligned}
$$

以及

$$
\begin{aligned}
&\Delta(\sigma_{11}(a))\Delta(y_1)+\Delta(\sigma_{12}(a))\Delta(y_2)+\Delta(\delta_1(a))\\
&=\Delta(\sigma_{11}(a))(y_1\otimes 1+r_1\otimes y_1)+\Delta(\sigma_{12}(a))(y_2\otimes 1+r_2\otimes y_2)+\Delta(\delta_1(a))\\
&=\Delta(\sigma_{11}(a))(y_1\otimes 1)+\Delta(\sigma_{12}(a))(y_2\otimes 1)+\Delta(\sigma_{11}(a))(r_1\otimes y_1)\\
&\quad +\Delta(\sigma_{12}(a))(r_2\otimes y_2)+\Delta(\delta_1(a)).
\end{aligned}
$$

对于第二个等式，有

$$
\begin{aligned}
\Delta(y_2)\Delta(a)&=(y_2\otimes 1+r_2\otimes y_2)(a_{(1)}\otimes a_{(2)})\\
&=(\sigma_{21}(a_{(1)})y_1+\sigma_{22}(a_{(1)})y_2+\delta_2(a_{(1)}))\otimes a_{(2)}\\
&\quad +r_2a_{(1)}\otimes(\sigma_{21}(a_{(2)})y_1+\sigma_{22}(a_{(2)})y_2+\delta_2(a_{(2)}))\\
&=(\sigma_{21}(a_{(1)})\otimes a_{(2)})(y_1\otimes 1)+(\sigma_{22}(a_{(1)})\otimes a_{(2)})(y_2\otimes 1)\\
&\quad +(r_2a_{(1)}r_1^{-1}\otimes\sigma_{21}(a_{(2)}))(r_1\otimes y_1)
\end{aligned}
$$

$$+ (r_2 a_{(1)} r_2^{-1} \otimes \sigma_{22}(a_{(2)}))(r_2 \otimes y_2)$$
$$+ \delta_2(a_{(1)}) \otimes a_{(2)} + r_2 a_{(1)} \otimes \delta_2(a_{(2)}),$$

以及

$$\begin{aligned}
&\Delta(\sigma_{21}(a))\Delta(y_1) + \Delta(\sigma_{22}(a))\Delta(y_2) + \Delta(\delta_2(a)) \\
=&\ \Delta(\sigma_{21}(a))(y_1 \otimes 1 + r_1 \otimes y_1) + \Delta(\sigma_{22}(a))(y_2 \otimes 1 + r_2 \otimes y_2) + \Delta(\delta_2(a)) \\
=&\ \Delta(\sigma_{21}(a))(y_1 \otimes 1) + \Delta(\sigma_{22}(a))(y_2 \otimes 1) + \Delta(\sigma_{21}(a))(r_1 \otimes y_1) \\
&+ \Delta(\sigma_{22}(a))(r_2 \otimes y_2) + \Delta(\delta_2(a)).
\end{aligned}$$

于是，比较自由模两边的系数，有

$$\Delta(\sigma_{ij}(a)) = \sigma_{ij}(a_{(1)}) \otimes a_{(2)} = r_i a_{(1)} r_j^{-1} \otimes \sigma_{ij}(a_{(2)}), \quad i, j = 1, 2,$$
$$\Delta(\delta_i(a)) = \delta_i(a_{(1)}) \otimes a_{(2)} + r_i a_{(1)} \otimes \delta_i(a_{(2)}), \quad i = 1, 2.$$

3 Hopf 代数的分次和 Hopf 二重 Ore 扩张

本节我们研究当 Hopf 代数 H 是由 1 分次生成的连通分次代数时，其分次与 Hopf 二重 Ore 扩张之间的关系.

定义 3.1 连通分次 $\mathbf{k}$ 代数 A 是指满足 $A = \mathbf{k} \bigoplus\limits_{i\geqslant 1} A_i$ 的 $\mathbb{N}$- 分次代数. 通常设 A 的分次是局部有限的，也就是说，对一切 i, 成立 $\dim_{\mathbf{k}} A_i < \infty$; 连通余代数 C 是指余代数 C 的余根 C_0 是 1 维的.

注 3.1 设 H 是 $\mathbf{k}$ 上有有限 GK 维数的 Hopf 代数，如果 H 作为代数是连通分次的，我们就简记它为 CGA; 如果 H 作为余代数是连通的，我们就简记它为 CCA.

注 3.2 我们常记分次极大理想 $\bigoplus\limits_{i\geqslant 1} A_i$ 为 $\mathfrak{m}$.

定义 3.2 正分次 Hopf 代数是指 Hopf 代数 B 同时是正分次 $\mathbf{k}$ 代数，且 $B = \bigoplus\limits_{i\geqslant 0} B_i$, 满足 Δ_B, ε_B 和 S_B 都是零次分次映射. 假设 $B \otimes B$ 在全分次意义下是正分次的，也就是说，对一切 $i \geqslant 0$, 成立 $(B \otimes B)_i = \sum\limits_{l+m=i} B_l \otimes B_m$.

定义 3.3 分次 Hopf 代数是 Hopf 代数 H 配备了分次 $H = \bigoplus\limits_{i\geqslant 0} H_i$, 满足 H 同时是分次代数和分次余代数，且对极保持给定的分次. 如果 H_0 是 1 维的，这样的分次 Hopf 代数称为是连通的.

命题 3.1 (见 [5, 引理 2.1]) 设 H 是 Hopf 代数.

(1) 设 I 是特征标 $\chi: H \to \mathbf{k}$ 的核，那么存在代数同态 $\sigma \in \mathrm{Aut}(H)$, 满足 $\sigma(I) = \ker \varepsilon$;

(2) 如果 H 作为代数是连通分次的，那么存在 H 的分次，使得 $H = \bigoplus\limits_{i=0}^{\infty} H_i$ 是连通分次的，且 $\ker \varepsilon = \bigoplus\limits_{i\geqslant 1} H_i$.

命题 3.2 (见 [6, 引理 3.2]) 设 K 是 Hopf 代数 H 的 Hopf 理想, $B=\bigoplus\limits_{i\geqslant 0}K^i/K^{i+1}$ 是对应的结合环 (K^0 表示 H). 令 $L=H\otimes K+K\otimes H$, 设 $C=\bigoplus\limits_{n\geqslant 0}L^n/L^{n+1}$ 是 $H\otimes H$ 对应的结合环.

(1) 存在分次代数同构 $\theta: B\otimes B\to C$, 满足

$$(a+K^{i+1})\otimes(b+K^{j+1})\mapsto(a\otimes b)+L^{i+j+1}$$

对一切 $a\in K^i$ 以及 $b\in K^j(i,j\geqslant 0)$ 成立.

(2) 代数 B 成为正分次 Hopf 代数，如果

(2.1) $\Delta_B=\theta^{-1}\overline{\Delta}$, 其中 $\overline{\Delta}: B\to C$ 是由 Δ 诱导的分次代数同态;

(2.2) $\varepsilon_B=\varepsilon_{B_0}\pi$, 其中 $\pi: B\to B_0$ 是典范投射;

(2.3) S_B 是由 S_H 诱导的 B 的分次代数反同态.

命题 3.3 (见 [6, 引理 3.3]) 设 H 是 Hopf 代数，记 $\mathfrak{m}=\ker\varepsilon$, $\mathrm{gr}_{\mathcal{F}}H$ 是分次代数 $\bigoplus\limits_{i=0}^{\infty}\mathfrak{m}^i/\mathfrak{m}^{i+1}$, 其中 $\mathcal{F}$ 是文 [5] 中给出的标准分次滤链.

(1) 应用命题 3.2 中的运算法则， $\mathrm{gr}_{\mathcal{F}}H$ 是正分次 Hopf 代数;

(2) 作为 $\mathbf{k}$ 代数， $\mathrm{gr}_{\mathcal{F}}H$ 是由 1 分次生成的连通分次代数;

(3) $\mathrm{gr}_{\mathcal{F}}H$ 作为余代数是连通的;

(4) $\mathrm{gr}_{\mathcal{F}}H$ 中所有 1 分次的齐次元都是本原元;

(5) $\mathrm{gr}_{\mathcal{F}}H$ 是余交换的.

在给出主要定理之前，我们先给出两个重要的基本引理和一个命题.

引理 3.1 设 H 是 Hopf 代数，且是由 1 分次生成的连通分次代数， $\mathfrak{m}=\ker\varepsilon$, 则 $\mathrm{gr}_{\mathcal{F}}H=\bigoplus\limits_{i=0}^{\infty}\mathfrak{m}^i/\mathfrak{m}^{i+1}\cong H$ 作为 Hopf 代数.

证 证明分三步进行. 第一步，我们证明 $\mathrm{gr}_{\mathcal{F}}H\cong H$ 作为 $\mathbf{k}$ 代数; 第二步，我们证明 $\mathrm{gr}_{\mathcal{F}}H\cong H$ 作为余代数; 第三步，我们说明同构保持对极.

第一步 代数同构.

由于 H 是由 1 分次生成的连通分次代数，于是 $H_m\cdot H_n=H_{m+n}$, 有 $\mathfrak{m}^i/\mathfrak{m}^{i+1}\cong H_i$, 故 $\bigoplus\limits_{i=0}^{\infty}\mathfrak{m}^i/\mathfrak{m}^{i+1}\cong\bigoplus\limits_{i=0}^{\infty}H_i$, 这表明 $\mathrm{gr}_{\mathcal{F}}H\cong H$ 作为 $\mathbf{k}$ 代数.

第二步 余代数同构.

根据第一步，存在代数同构映射 $f:\mathrm{gr}_{\mathcal{F}}H\to H$, 我们断言: $\Delta\circ f=(f\otimes f)\circ\Delta_{\mathrm{gr}_{\mathcal{F}}H}$, 且 $\varepsilon\circ f=\varepsilon_{\mathrm{gr}_{\mathcal{F}}H}$, 其中 $\Delta_{\mathrm{gr}_{\mathcal{F}}H}:\mathrm{gr}_{\mathcal{F}}H\to\mathrm{gr}_{\mathcal{F}}H\otimes\mathrm{gr}_{\mathcal{F}}H$, 且 $\varepsilon_{\mathrm{gr}_{\mathcal{F}}H}:\mathrm{gr}_{\mathcal{F}}H\to\mathbf{k}$.

令 $L=H\otimes\mathfrak{m}+\mathfrak{m}\otimes H$, 设 $C=\bigoplus\limits_{n\geqslant 0}L^n/L^{n+1}$. 由于 $\mathfrak{m}$ 是 Hopf 理想，根据命题 3.2, 有 $\Delta_{\mathrm{gr}_{\mathcal{F}}H}=\theta^{-1}\overline{\Delta}$, 其中 $\theta:\mathrm{gr}_{\mathcal{F}}H\otimes\mathrm{gr}_{\mathcal{F}}H\to C$ 是分次代数同构，且 $\overline{\Delta}:\mathrm{gr}_{\mathcal{F}}H\to C$ 是由 Δ 和 $\varepsilon_{\mathrm{gr}_{\mathcal{F}}H}=\varepsilon_{(\mathrm{gr}_{\mathcal{F}}H)_0}\pi$ 诱导的分次代数同态，其中 $\pi:\mathrm{gr}_{\mathcal{F}}H\to(\mathrm{gr}_{\mathcal{F}}H)_0$ 是典范投射.

一方面

$$\Delta\circ f\Big(\bigoplus_{i=0}^{\infty}\mathfrak{m}^i/\mathfrak{m}^{i+1}\Big)=\Delta(H).$$

另一方面

$$\begin{aligned}&(f\otimes f)\circ\Delta_{\mathrm{gr}_{\mathcal{F}}H}\Big(\bigoplus_{i=0}^{\infty}\mathfrak{m}^i/\mathfrak{m}^{i+1}\Big)\\ =&(f\otimes f)\circ\theta^{-1}\overline{\Delta}\Big(\bigoplus_{i=0}^{\infty}\mathfrak{m}^i/\mathfrak{m}^{i+1}\Big)\\ =&(f\otimes f)\Big(\bigoplus_{i=0}^{\infty}\mathfrak{m}^i/\mathfrak{m}^{i+1}\otimes\bigoplus_{i=0}^{\infty}\mathfrak{m}^i/\mathfrak{m}^{i+1}\Big)\\ =&H\otimes H.\end{aligned}$$

于是， $\Delta\circ f=(f\otimes f)\circ\Delta_{\mathrm{gr}_{\mathcal{F}}H}$. 类似地， $\varepsilon\circ f=\varepsilon_{\mathrm{gr}_{\mathcal{F}}H}$, 从而 $\mathrm{gr}_{\mathcal{F}}H\cong H$ 作为余代数.

第三步 保持对极.

根据命题 3.2, $S_{\mathrm{gr}_{\mathcal{F}}H}$ 是由 S 诱导的 $\mathrm{gr}_{\mathcal{F}}H$ 的分次代数反同态. 类似地， $S\circ f=f\circ S_{\mathrm{gr}_{\mathcal{F}}H}$. 于是，$f$ 保持对极.

综上所述， $\mathrm{gr}_{\mathcal{F}}H\cong H$ 作为 Hopf 代数.

引理 3.2 如果 $B=A_P[y_1,y_2;\sigma,\delta,\tau]$ 是右 Hopf 二重 Ore 扩张,那么 $\varepsilon(y_i)=0, S(y_i)=-r_i^{-1}y_i$, 其中 $r_i^{-1}=S(r_i)$ $(i=1,2)$.

证 本引理的证明和引理 2.1 的证明类似，我们忽略其过程.

命题 3.4 (见 [1, 命题 1.1]) 设 $B=A_{\{p_{12},0\}}[y_1,y_2;\sigma,\delta,\tau]$ 是二重 Ore 扩张，那么 B 有自然滤链 $\mathcal{N}$, 它可以通过令 $\deg A=0$ 以及 $\deg y_1=\deg y_2=1$ 得到，称 B 的这种分次是由自然滤链得到的，记为 $\deg_{\mathcal{N}}$. 作为结合分次代数，有 $\mathrm{gr}_{\mathcal{N}}B\cong A_P[\overline{y_1},\overline{y_2};\overline{\sigma},0,\{0,0,0\}]$.

注 3.3 为了避免可能引起的记号的混淆，在接下来的具体讨论中，我们将分别用 $\mathrm{gr}_{\mathcal{N}}H$ 或 $\mathrm{gr}_{\mathcal{F}}H$ 来代替 $\mathrm{gr}H$, 其中 $\mathcal{N}$ 是二重 Ore 扩张的自然滤链， $\mathcal{F}$ 是标准分次滤链.

现在，我们给出本文的第一个主要定理.

定理 3.1 设 H 是 Hopf 代数，且它是由 1 分次生成的连通分次代数，记 $\mathfrak{m}=\ker\varepsilon$, $\mathrm{gr}_{\mathcal{F}}H=\bigoplus\limits_{i=0}^{\infty}\mathfrak{m}^i/\mathfrak{m}^{i+1}$, 用

$$B_1:=\mathrm{gr}_{\mathcal{N}}H((\mathrm{gr}_{\mathcal{F}}H)_P[y_1,y_2;\sigma,\delta,\tau])$$

表示 $\mathrm{gr}_{\mathcal{F}}H$ 的右 Hopf 二重 Ore 扩张的自然分次.

设 $B=H_P[z_1,z_2;\sigma',\delta',\tau']$ 是 H 的右 Hopf 二重 Ore 扩张，记

$$B_2:=\mathrm{gr}_{\mathcal{F}}(\mathrm{gr}_{\mathcal{N}}B)=\bigoplus_{i=0}^{\infty}\mathfrak{m}^i_{\mathrm{gr}_{\mathcal{N}}B}/\mathfrak{m}^{i+1}_{\mathrm{gr}_{\mathcal{N}}B},$$

其中 $\mathfrak{m}_{\mathrm{gr}_{\mathcal{N}}B}=\ker\varepsilon_{\mathrm{gr}_{\mathcal{N}}B}$, 且 $\varepsilon_{\mathrm{gr}_{\mathcal{N}}B}:\mathrm{gr}_{\mathcal{N}}B\to\mathbf{k}$ 是 Hopf 代数 $\mathrm{gr}_{\mathcal{N}}B$ 的余单位.

那么 $B_1\cong B_2$ 作为连通分次 Hopf 代数当且仅当 y_1,y_2 是本原元.

证 证明分四步进行. 第一步，证明 $B_1\cong B_2$ 作为 $\mathbf{k}$ 代数；第二步，证明 $B_1\cong B_2$ 作为余代数；第三步，说明同构保持对极；第四步，说明 B_1,B_2 是连通的，且同构保持分次.

第一步　代数同构.

根据命题 3.3, 作为 $\mathbf{k}$ 代数， B_2 是由 1 分次生成的连通分次代数，这启示我们：作为 $\mathbf{k}$ 代数， B_1 也应该是由 1 分次生成的连通分次代数.

根据命题 3.4, 考虑自然滤链. 为了简化记号, 用 y_1, y_2, σ 代替 $\overline{y_1}, \overline{y_2}, \overline{\sigma}$, 可得分次 $\mathbf{k}$ 代数同构 $B_1 \cong (\mathrm{gr}_{\mathcal{F}}H)_P[y_1, y_2; \sigma, 0, \{0,0,0\}]$. 对于 $h \in H$, 规定 $\deg_{\mathcal{N}} h = \deg_{\mathcal{F}} y_1 = \deg_{\mathcal{F}} y_2 = 0$, 那么 B_1 是 $\mathbb{N}^2$- 分次的. 考虑全分次，作为 $\mathbf{k}$ 代数， B_1 是由 1 分次生成的连通分次代数，具体地

$$\begin{aligned} B_1 = \mathrm{gr}_{\mathcal{F}}H &\bigoplus (\mathrm{gr}_{\mathcal{F}}H)y_1 + (\mathrm{gr}_{\mathcal{F}}H)y_2 \\ &\bigoplus ((\mathrm{gr}_{\mathcal{F}}H)y_1^2 + (\mathrm{gr}_{\mathcal{F}}H)y_1y_2 + (\mathrm{gr}_{\mathcal{F}}H)y_2^2) \bigoplus \cdots . \end{aligned}$$

用 z_1, z_2, σ' 代替 $\overline{z_1}, \overline{z_2}, \overline{\sigma'}$, 可得分次 $\mathbf{k}$ 代数同构

$$B_2 \cong \mathrm{gr}_{\mathcal{F}}(H_P[z_1, z_2; \sigma', 0, \{0,0,0\}]) = \bigoplus_{i=0}^{\infty} \mathfrak{m}^i_{\mathrm{gr}_{\mathcal{N}}B} / \mathfrak{m}^{i+1}_{\mathrm{gr}_{\mathcal{N}}B}.$$

对于 $h \in H$, 规定 $\deg_{\mathcal{N}} h = \deg_{\mathcal{F}} z_1 = \deg_{\mathcal{F}} z_2 = 0$, 那么 B_2 是 $\mathbb{N}^2$- 分次的. 考虑全分次，作为 $\mathbf{k}$ 代数， B_2 是由 1 分次生成的连通分次代数.

根据引理 3.2 我们知道， $z_i \in \mathfrak{m}_B = \mathfrak{m}_{\mathrm{gr}_{\mathcal{N}}B} (i=1,2)$, 于是 $\mathfrak{m}_{\mathrm{gr}_{\mathcal{N}}B} = \mathfrak{m} + \sum\limits_{p+q>0} Hz_1^p z_2^q$. 由于 B_2 是分次的，有 $\sigma'_{ij}(\mathfrak{m}) \subseteq \mathfrak{m}, \delta'_i(\mathfrak{m}) = 0 (i,j=1,2)$, 那么 $Hz_i\mathfrak{m} \subseteq \mathfrak{m}z_1 + \mathfrak{m}z_2 + \mathfrak{m} (i = 1,2)$, 于是

$$\begin{aligned} B_2 &= \bigoplus_{i=0}^{\infty} \Big(\mathfrak{m} + \sum_{p+q>0} Hz_1^p z_2^q\Big)^i \Big/ \Big(\mathfrak{m} + \sum_{p+q>0} Hz_1^p z_2^q\Big)^{i+1} \\ &= \mathbf{k} \bigoplus (H_1 + \mathbf{k}z_1 + \mathbf{k}z_2) \\ &\quad \bigoplus (H_2 + H_1z_1 + H_1z_2 + \mathbf{k}z_1^2 + \mathbf{k}z_1z_2 + \mathbf{k}z_2^2) \bigoplus \cdots \\ &= H \bigoplus (Hz_1 + Hz_2) \bigoplus (Hz_1^2 + Hz_1z_2 + Hz_2^2) \bigoplus \cdots . \end{aligned}$$

由于 B_1, B_2 是以 $y_1^p y_2^q$ 和 $z_1^p z_2^q$ 为基的自由 H 模，故上式中的和都是直和.

由于 H 是由 1 分次生成的连通分次代数, 根据引理 3.1, 存在同构映射 g, 使得 $\mathrm{gr}_{\mathcal{F}}H \cong H$ 作为 Hopf 代数，从而 $B_1 \cong B_2$ 作为 $\mathbf{k}$ 代数.

第二步　余代数同构.

根据第一步，存在代数同构映射

$$\begin{aligned} f: \qquad\qquad & B_1 \to B_2, \\ \sum_{p,q \geqslant 0} (\mathrm{gr}_{\mathcal{F}}H) y_1^p y_2^q &\mapsto \sum_{p,q \geqslant 0} Hz_1^p z_2^q, \end{aligned}$$

其中 $f|_{\mathrm{gr}_{\mathcal{F}}H} = g$.

根据第一步和命题 3.2, Δ_1 和 Δ_2 都是由 Δ 诱导的，且

$$\Delta_1(y_i) = y_i \otimes 1 + r_{1i} \otimes y_i, \quad \Delta_2(z_i) = z_i \otimes 1 + r_{2i} \otimes z_i, \quad i = 1,2.$$

根据命题 3.3, z_i 是本原元，也就是说 $r_{2i} = 1$, 则

$$\Delta_2 \circ f(y_i) = \Delta_2(z_i) = z_i \otimes 1 + 1 \otimes z_i,$$

以及

$$(f\otimes f)\circ\Delta_1(y_i)=(f\otimes f)(y_i\otimes 1+r_{1i}\otimes y_i)=z_i\otimes 1+f(r_{1i})\otimes z_i.$$

于是 $\Delta_2\circ f=(f\otimes f)\circ\Delta_1$ 当且仅当 $f(r_{1i})=1$, 这表明 $r_{1i}=1$ 且 y_1,y_2 是本原元.

类似地， ε_1 和 ε_2 都是由 ε 诱导的，且 $\varepsilon_1(y_i)=0,\varepsilon_2(z_i)=0$, 我们有 $\varepsilon_2\circ f=\varepsilon_1$. 显然 f 既是单射又是满射，于是 $B_1\cong B_2$ 作为余代数.

第三步 保持对极.

类似地， S_1 和 S_2 都是由 S 诱导的，且 $S_1(y_i)=-S_1(r_{1i})y_i, S_2(z_i)=-z_i$, 显然 f 是代数同态，我们有

$$f(S_1(y_i))=f((-S_1(r_{1i}))y_i)=-S_1(r_{1i})z_i,\quad S_2(f(y_i))=-z_i=-S_2(r_{1i})z_i.$$

从而 $f\circ S_1=S_2\circ f$ 当且仅当 $S_1(r_{1i})=S_2(r_{1i})=1$, 这表明 $r_{1i}=1$ 且 y_1,y_2 是本原元.

于是 f 保持对极.

第四步 保持分次.

注意到 B_1,B_2 的零分次是 $\mathbf{k}$, 故它们是连通的. 根据命题 3.2, B_2 是分次 Hopf 代数. 显然 f 同时保持代数和余代数的分次.

综上所述， $B_1\cong B_2$ 作为连通分次 Hopf 代数当且仅当 y_1,y_2 是本原元.

例 3.1 设 $H=\mathbf{k}[x]$ 是多项式 Hopf 代数, 根据定理 3.1, $B_1=\mathbf{k}[x,y_1,y_2]\cong\mathbf{k}[x,z_1,z_2]=B_2$ 作为 Hopf 代数.

4 连通分次 Hopf 代数的 Hopf 二重 Ore 扩张

本节我们给出 Hopf 二重 Ore 扩张可以表示为二次 Hopf-Ore 扩张的充要条件，讨论连通分次 Hopf 代数的 Hopf 二重 Ore 扩张，加强定理 3.1 和文 [1, 第 3 节] 中的结论，研究连通分次 Hopf 代数 Hopf 二重 Ore 扩张的同调性质.

文 [7] 给出了二重 Ore 扩张 $B=A_P[y_1,y_2;\sigma,\delta,\tau]$ 可以表示为形如 $A[y_1;\sigma_1,d_1][y_2;\sigma_2,\delta_2]$ 或者 $A[y_2;\sigma_2,\delta_2][y_1;\sigma_1,\delta_1]$ 的二次 Ore 扩张的充要条件.

命题 4.1 (见 [7, 定理 2.2]) 设 A,B 是 $\mathbf{k}$ 代数且 B 是 A 的扩张. 若 $P=\{p_{12},p_{11}\}\subseteq\mathbf{k}$, $\tau=\{\tau_1,\tau_2,\tau_0\}\subseteq A$, σ 是 A 到 $M_{2\times 2}(A)$ 的代数同态， δ 是 A 到 $M_{2\times 1}(A)$ 的 σ- 导子.

(1) 以下条件是等价的：

(1.1) $B=A_P[y_1,y_2;\sigma,\delta,\tau]$ 是 A 的右二重 Ore 扩张, 它可表为形如 $A[y_1;\sigma_1,d_1][y_2;\sigma_2,d_2]$ 的二次 Ore 扩张;

(1.2) $B=A_P[y_1,y_2;\sigma,\delta,\tau]$ 是 A 的右二重 Ore 扩张且 $\sigma_{12}=0$;

(1.3) $B=A[y_1;\sigma_1,d_1][y_2;\sigma_2,d_2]$ 二次 Ore 扩张满足

$$\sigma_2(A)\subseteq A,\sigma_2(y_1)=p_{12}y_1+\tau_2,$$
$$d_2(A)\subseteq Ay_1+A,d_2(y_1)=p_{11}y_1^2+\tau_1y_1+\tau_0,$$

其中 $p_{ij}\in\mathbf{k},\tau_i\in A$.

映射 σ,δ,σ_i 和 $\delta_i(i=1,2)$ 是这样联系的：对一切 $a\in A$, 有

$$\sigma=\begin{pmatrix}\sigma_1 & 0\\ \sigma_{21} & \sigma_2|_A\end{pmatrix},\quad \delta(a)=\begin{pmatrix}d_1(a)\\ d_2(a)-\sigma_{21}(a)y_1\end{pmatrix}.$$

(2) 如果 (1) 中条件之一成立，那么 B 是 A 的二重 Ore 扩张当且仅当 $\sigma_1=\sigma_{11}$, $\sigma_2|_A=\sigma_{22}$ 是 A 的自同构，且 $p_{12}\neq 0$.

命题 4.2 (见 [7, 定理 2.4]) 设 $B=A_P[y_1,y_2;\sigma,\delta,\tau]$ 是 $\mathbf{k}$ 代数 A 的右二重 Ore 扩张，其中 $P=\{p_{12},p_{11}\}\subseteq\mathbf{k}$, $\tau=\{\tau_1,\tau_2,\tau_0\}\subseteq A$, $\sigma: A\to M_{2\times 2}(A)$ 是代数同态，$\delta: A\to M_{2\times 1}(A)$ 是 σ- 导子，那么 $B=A_P[y_1,y_2;\sigma,\delta,\tau]$ 可以表示为二次 Ore 扩张 $A[y_2;\sigma_2',d_2'][y_1;\sigma_1',d_1']$ 当且仅当 $\sigma_{21}=0, p_{12}\neq 0$ 且 $p_{11}=0$. 此时，B 是二重 Ore 扩张当且仅当 $\sigma_2'=\sigma_{22}$ 且 $\sigma_1'|_A=\sigma_{11}$ 是 A 的自同构.

把命题 4.1 和命题 4.2 中的 A,B 换成 Hopf 代数，容易得到 Hopf 二重 Ore 扩张可以表示为二次 Hopf-Ore 扩张的充要条件.

文 [2] 的作者给出了连通分次 Hopf 代数的结构.

命题 4.3 (见 [2, 定理 3.12]) 设 H 是 GK 维数为 d 的连通分次代数，那么 H 是迭代 Hopf-Ore 扩张．准确地说，存在 H 的正分次齐次元的有限序列 $z_1,\cdots,z_d$, 满足

$$H=\mathbf{k}[z_1][z_2;\delta_2]\cdots[z_d;\delta_d],$$

且

$$\Delta_H(z_r)\in 1\otimes z_r+z_r\otimes 1+\sum_{i,j>0,i+j=\deg(z_r)}(H^{\leqslant r-1})_i\otimes(H^{\leqslant r-1})_j,\quad r=1,\cdots,d,$$

其中 $H^{\leqslant 0}=\mathbf{k}$, $H^{\leqslant i}$ 是由 $z_1,\cdots,z_i(i=1,\cdots,d)$ 生成的 H 的子代数，$\delta_i(i=2,\cdots,d)$ 是 $H^{\leqslant i-1}$ 的导子．特别地，$H^{\leqslant 0},H^{\leqslant 1},\cdots,H^{\leqslant d}$ 都是 H 的分次 Hopf 子代数.

推论 4.1 设 H 是 GK 维数为 d 的连通分次 Hopf 代数，如果右 Hopf 二重 Ore 扩张 $B=H_P[y_1,y_2;\sigma,\delta,\tau]$ 也是连通分次 Hopf 代数，则 $\operatorname{GKdim}B=d+2$, 且此 Hopf 二重 Ore 扩张可以表示为二次 Hopf-Ore 扩张 $B=\mathbf{k}[z_1][z_2;\delta_2]\cdots[z_{d+2};\delta_{d+2}]$, 其中 $\tau_1=\tau_2=0$.

证 由于 H 是连通分次 Hopf 代数，故 H 是局部有限的，我们有 $\operatorname{GKdim}B=d+2$, 根据命题 4.3, B 可以表示为二次 Hopf-Ore 扩张 $B=\mathbf{k}[z_1][z_2;\delta_2]\cdots[z_{d+2};\delta_{d+2}]$.

考虑 Hopf 二重 Ore 扩张中的关系

$$y_2y_1=p_{12}y_1y_2+p_{11}y_1^2+\tau_1y_1+\tau_2y_2+\tau_0.$$

根据定理 2.1, $\tau_1,\tau_2\in\mathbf{k}$, 比较等式两边的次数，有 $\tau_1=\tau_2=0$.

现在我们可以加强定理 3.1 中的结论，它是本文的第二个主要定理.

定理 4.1 设 H 是 GK 维数为 d 的 Hopf 代数，且它是由 1 分次生成的连通分次代数，B_1, B_2 由定理 3.1 给出，y_1,y_2 是本原元，那么 B_1 可以表示成迭代 Hopf-Ore 扩张 $\mathbf{k}[z_1][z_2]\cdots[z_{d+2}]$, 即多项式 Hopf 代数 $\mathbf{k}[z_1,z_2,\cdots,z_{d+2}]$.

证 根据命题 3.3, $\mathrm{gr}_{\mathcal{F}}H$ 和 B_2 都是连通分次 Hopf 代数. 因 y_1, y_2 是本原元, 根据定理 3.1 和推论 4.1, B_1 可以表示为迭代 Hopf-Ore 扩张 $\mathbf{k}[z_1][z_2]\cdots[z_{d+2}]$, 这就是多项式 Hopf 代数 $\mathbf{k}[z_1, z_2, \cdots, z_{d+2}]$.

文 [5] 的作者研究了 $\mathbf{k}$ 上作为代数是连通分次的 Hopf 代数的同调性质.

命题 4.4 (见 [5, 定理 2.2]) 设 H 是 $\mathbf{k}$ 上的 Hopf 代数, 且作为代数是连通分次的. 在 (2,3,4,5) 中进一步假设 $\mathrm{GKdim}\, H = n < \infty$.

(1) H 是整环;

(2) H 是仿射代数, 它是 Noether 的、 Cohen-Macaulay 的、 Auslander 正则的和 Artin-Schelter 正则的, 满足 $\mathrm{gldim}\, H = n$;

(3) H 是 Calabi-Yau 的, 也就是说, H 的 Nakayama 自同构是恒等映射;

(4) $S^2 = \mathrm{id}_H$;

(5) H 的 Hochschild(上) 同调的 Poincare 对偶成立.

在给出本文的第三个主要定理之前, 我们再介绍一个命题.

命题 4.5 (见 [4, 定理 3.6]) 设 B 是连通分次代数, 它有一个滤链使得 $\mathrm{gr}B$ 是连通分次 Artin-Schelter 代数, 那么 B 是 Artin-Schelter 正则代数, 且 $\mathrm{gldim}\, B = \mathrm{gldim}(\mathrm{gr}B)$.

现在我们可以加强文 [1, 第 3 节] 中的结论, 并研究连通分次 Hopf 代数 Hopf 二重 Ore 扩张的同调性质.

定理 4.2 设 H 是 Hopf 代数, 且它是连通分次代数. 在 (3,4,5,6,7) 中进一步假设 H 由 1 分次生成, 且 $\mathrm{GKdim}\, H = d < \infty$.

如果 $B = H_P[y_1, y_2; \sigma, \delta, \tau]$ 是 H 的右 Hopf 二重 Ore 扩张, y_1, y_2 是本原元, 那么

(1) B 是整环;

(2) B 是素 (半素) 代数;

(3) B 是仿射代数且是 Noether 的;

(4) B 有有限 GK 维数, 且 $\mathrm{GKdim}\, B = d + 2$;

(5) B 有有限 Krull 维数, 且 $\mathrm{Kdim}\, H \leqslant \mathrm{Kdim}\, B \leqslant d + 2$;

(6) 若 B 是 H 的 Hopf 二重 Ore 扩张, 那么 B 有有限整体维数, 且 $\mathrm{gldim}\, H \leqslant \mathrm{gldim}\, B \leqslant d + 2$;

(7) 若 B 是连通分次代数, 那么 B 是 Artin-Schelter 正则的, 且 $\mathrm{gldim}\, B = \mathrm{gldim}(\mathrm{gr}_{\mathcal{F}}(\mathrm{gr}_{\mathcal{N}}B))$. 进一步地, 若 B 是 Hopf 二重 Ore 扩张, 那么 $\mathrm{gldim}\, B = \mathrm{gldim}\, H + 2$.

证 (1) 根据命题 3.3, $\mathrm{gr}_{\mathcal{F}}B = \bigoplus\limits_{i=0}^{\infty} \mathfrak{m}_B^i/\mathfrak{m}_B^{i+1}$ 是连通分次 Hopf 代数, 那么根据命题 4.4, $\mathrm{gr}_{\mathcal{F}}B$ 是整环, 从而 B 是整环.

(2) 根据 (1), B 是整环, 从而 B 是素 (半素) 代数.

(3) 和 (1) 的证明类似, $\mathrm{gr}_{\mathcal{F}}B$ 是仿射代数且是 Noether 的, 从而 B 也是仿射代数且是 Noether 的.

(4) 根据命题 4.4, H 是仿射的. 由于 y_1, y_2 是本原元, 根据定理 3.1 和定理 4.1, 我们有 $\mathrm{gr}_{\mathcal{F}}(\mathrm{gr}_{\mathcal{N}}B) \cong \mathbf{k}[z_1, z_2, \cdots, z_{d+2}]$ 作为 Hopf 代数, 于是 $\mathrm{GKdim}(\mathrm{gr}_{\mathcal{F}}(\mathrm{gr}_{\mathcal{N}}B)) = d+2$.

根据 (3), B 是仿射的, 故 $\mathrm{GKdim}(\mathrm{gr}_{\mathcal{F}}(\mathrm{gr}_{\mathcal{N}}B)) = \mathrm{GKdim}\, B$, 从而 $\mathrm{GKdim}\, B = d+2$.

(5) 和 (3) 的证明类似, 有 $\mathrm{gr}_{\mathcal{F}}(\mathrm{gr}_{\mathcal{N}}B) \cong \mathbf{k}[z_1, z_2, \cdots, z_{d+2}]$ 作为 Hopf 代数, 于是

$$\mathrm{Kdim}(\mathrm{gr}_{\mathcal{F}}(\mathrm{gr}_{\mathcal{N}}B)) = \mathrm{Kdim}\mathbf{k}[z_1, z_2, \cdots, z_{d+2}] = d+2.$$

和文 [1, 定理 3.3] 的证明几乎一样 (考虑 $\mathbb{N}^2$- 分次), 有

$$\mathrm{Kdim}\, H \leqslant \mathrm{Kdim}\, B \leqslant \mathrm{Kdim}(\mathrm{gr}_{\mathcal{F}}(\mathrm{gr}_{\mathcal{N}}B)) = d+2.$$

(6) 和 (3) 的证明类似, 有 $\mathrm{gr}_{\mathcal{F}}(\mathrm{gr}_{\mathcal{N}}B) \cong \mathbf{k}[z_1, z_2, \cdots, z_{d+2}]$ 作为 Hopf 代数, 于是

$$\mathrm{gldim}(\mathrm{gr}_{\mathcal{F}}(\mathrm{gr}_{\mathcal{N}}B)) = \mathrm{gldim}\, \mathbf{k}[z_1, z_2, \cdots, z_{d+2}] = d+2.$$

和文 [1, 定理 3.3] 的证明几乎一样 (考虑 $\mathbb{N}^2$- 分次), 有

$$\mathrm{gldim}\, H \leqslant \mathrm{gldim}\, B \leqslant \mathrm{gldim}(\mathrm{gr}_{\mathcal{F}}(\mathrm{gr}_{\mathcal{N}}B)) = d+2.$$

(7) 根据命题 3.3, $\mathrm{gr}_{\mathcal{F}}(\mathrm{gr}_{\mathcal{N}}B) = \bigoplus_{i=0}^{\infty} \mathfrak{m}^i_{\mathrm{gr}_{\mathcal{N}}B}/\mathfrak{m}^{i+1}_{\mathrm{gr}_{\mathcal{N}}B}$ 是连通分次 Hopf 代数, 于是根据命题 4.4, $\mathrm{gr}_{\mathcal{F}}(\mathrm{gr}_{\mathcal{N}}B)$ 是 Artin-Schelter 正则的. 由于 B 是连通分次代数, 故 B 是 Artin-Schelter 正则的, 根据命题 4.5, 有

$$\mathrm{gldim}\, B = \mathrm{gldim}(\mathrm{gr}_{\mathcal{F}}(\mathrm{gr}_{\mathcal{N}}B)).$$

进一步地, 如果 B 是 Hopf 二重 Ore 扩张, 那么

$$\mathrm{gldim}\, B = \mathrm{gldim}(\mathrm{gr}_{\mathcal{F}}(\mathrm{gr}_{\mathcal{N}}B)) = \mathrm{gldim}\, H + 2.$$

例 4.1　设 $H = \mathbf{k}$, 考虑平凡的 Hopf 二重 Ore 扩张 $B = \mathbf{k}[y_1, y_2]$. 应用定理 4.2, 我们知道, B 是整环、素 (半素) 代数、仿射代数、 Noether 代数、 Artin-Schelter 正则代数, 且 $\mathrm{GKdim}\, B = \mathrm{Kdim}\, B = \mathrm{gldim}\, B = 2$.

注 4.1　定理 4.2 加强了文 [1, 第 3 节] 中的结论.

现在我们关注余代数结构.

命题 4.6 (见 [5, 定理 4.1])　设 H 是 GK 维数为 $n < \infty$ 的连通 Hopf 代数, 那么作为余代数, H 是 Artin 的, 且它是整体维数为 n 的 Artin-Schelter 正则余代数.

注 4.2　文 [5] 中提到了一个开放性问题: 是否有 CGA $\Rightarrow$ CCA?

如果成立, 设 $\mathrm{GKdim}\, H = n < \infty$, 我们可以加强定理 4.2(7) 中的结论. 也就是说, 作为余代数, B 是 Artin 的, 且它是整体维数为 n 的 Artin-Schelter 正则余代数.

5　连通分次 Hopf 代数的结构

本节我们研究连通分次 Hopf 代数的结构, 并给出文 [2] 中主要定理的另一个版本. 在开始之前, 让我们回顾一下文 [8] 中关于多重 Ore 扩张的定义.

定义 5.1 设 A 是代数，B 包含 A 作为子代数. 称 B 是 A 的 n 重 Ore 扩张如果它满足以下条件：

(1) B 由 A 和另外 n 个变量 $y_1, y_2, \cdots, y_n$ 生成；

(2) 对任意 $1 \leqslant i < j \leqslant n$, $\{y_1, y_2, \cdots, y_n\}$ 满足关系：

$$y_j y_i = \sum_{1 \leqslant l \leqslant m \leqslant n} p_{ij}^{lm} y_l y_m + \sum_{i=1}^{n} t_{ij}^{l} y_l + t_0,$$

其中 $p_{ij}^{lm} \in \mathbf{k}$, 且 $t_{ij}^{l} \in A$;

(3) 作为左 A 模, $B = \sum\limits_{i_1, i_2, \cdots, i_n \geqslant 0} A y_1^{i_1} y_2^{i_2} \cdots y_n^{i_n}$, 且它是以 $\{y_1^{i_1} y_2^{i_2} \cdots y_n^{i_n} \mid i_1, i_2, \cdots, i_n \geqslant 0\}$ 为基的自由左 A 模;

(4) 存在 $\mathbf{k}$ 线性映射 $\sigma : A \to M_n(A)$ 和 $\mathbf{k}$ 线性映射 $\delta : A \to A^{\oplus n}$, 满足

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} a = \sigma(a) \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} + \delta(a),$$

其中 $M_n(A)$ 是元素取自 A 的 $n \times n$ 矩阵.

令

$$P = \{p_{ij}^{lm} \in \mathbf{k} \mid 1 \leqslant i < j \leqslant n, 1 \leqslant l \leqslant m \leqslant n\},$$
$$T = \{t_{ij}^{l} \in A \mid 1 \leqslant i < j \leqslant n, 1 \leqslant l \leqslant n\}.$$

我们通常记 A 的 n 重 Ore 扩张 B 为 $B = A[y_1, y_2, \cdots, y_n; \sigma, \delta, P, T]$.

当 $n \geqslant 2$ 时，n 重 Ore 扩张也称为多重 Ore 扩张.

现在我们给出 Hopf 多重 Ore 扩张的定义，它涵盖了 Hopf-Ore 扩张和 Hopf 二重 Ore 扩张的定义.

定义 5.2 设 A 和 $B = A[y_1, y_2, \cdots, y_n; \sigma, \delta, P, T]$ 都是 $\mathbf{k}$ 上的 Hopf 代数，B 是 A 的多重 Ore 扩张，称 B 是 Hopf 多重 Ore 扩张，如果 A 是 B 的 Hopf 子代数，且存在群像元 $r_i \in A$, 满足：

$$\Delta(y_i) = y_i \otimes 1 + r_i \otimes y_i, \quad i = 1, 2, \cdots, n.$$

引理 5.1 设 $B = \mathbf{k}_P[y_1, y_2; \sigma, \delta, \tau]$ 是 Hopf 二重 Ore 扩张，$C = \mathbf{k}[x_1][x_2; \sigma_2, \delta_2]$ 是二次 Hopf-Ore 扩张，那么 $B \cong C$ 作为 Hopf 代数，其中 $\sigma_2(x_1) = p_{12} x_1 + \tau_2$, $\delta_2(x_1) = p_{11} x_1^2 + \tau_1 x_1 + \tau_0$.

证 在文 [7, 命题 1.2] 中，作者已经证明了 $B \cong \mathbf{k}[x_1][x_2; \sigma_2, \delta_2]$ 作为代数. 设

$$\begin{aligned} \varphi : \ & B \to C, \\ & \sum_{p,q \geqslant 0} k_{pq} y_1^p y_2^q \mapsto \sum_{p,q \geqslant 0} k_{pq} x_1^p x_2^q \end{aligned}$$

是此同构映射，其中 $k_{pq} \in \mathbf{k}$, $\varphi|_{\mathbf{k}} = \mathrm{id}_{\mathbf{k}}$. 我们只要说明 φ 是余代数同构且保持分次即可.

这里我们只证明 $\Delta_C \circ \varphi = (\varphi \otimes \varphi) \circ \Delta_B$, 余下的证明和之前是类似的.

一方面

$$\Delta_C \circ \varphi(y_i) = \Delta_C(x_i) = x_i \otimes 1 + r_i \otimes x_i, \quad i = 1, 2.$$

另一方面

$$(\varphi \otimes \varphi) \circ \Delta_B(y_i) = (\varphi \otimes \varphi)(y_i \otimes 1 + r_i \otimes y_i) = x_i \otimes 1 + r_i \otimes x_i, \quad i = 1, 2.$$

于是 $\Delta_C \circ \varphi = (\varphi \otimes \varphi) \circ \Delta_B$.

推论 5.1　设 $B = \mathbf{k}[y_1, y_2, \cdots, y_n; \sigma, \delta, P, T]$ 是 Hopf 多重 Ore 扩张，且

$$C = \mathbf{k}[x_1][x_2; \sigma_2, \delta_2] \cdots [x_n; \sigma_n, \delta_n]$$

是迭代 Hopf-Ore 扩张，那么 $B \cong C$ 作为 Hopf 代数.

证　此证明可以直接由引理 5.1 得到.

引理 5.2　设 $C = \mathbf{k}[x_1][x_2; \sigma_2, \delta_2] \cdots [x_n; \sigma_n, \delta_n]$ 是迭代 Hopf-Ore 扩张，则对任意 Hopf 代数 A, 有

$$A \otimes C = A[y_1, y_2, \cdots, y_n; \sigma, \delta, P, T],$$

其中 $\sigma = \mathrm{diag}(\mathrm{id}_A, \mathrm{id}_A, \cdots, \mathrm{id}_A)$, $\delta = 0$.

证　我们只证明 $A \otimes C \cong A[y_1, y_2, \cdots, y_n; \sigma, \delta, P, T]$ 作为代数，余下的证明和引理 5.1 的过程类似，我们忽略其过程.

由于 A 是 $\mathbf{k}$ 代数，它是右 $\mathbf{k}$ 线性空间，根据引理 5.2,

$$C = \mathbf{k}[x_1][x_2; \sigma_2, \delta_2] \cong \mathbf{k}[y_1, y_2, \cdots, y_n; \sigma, \delta, P, T]$$

是左 $\mathbf{k}$ 线性空间.

构造映射

$$\begin{aligned} &\psi:\ A \otimes C \to A[y_1, y_2, \cdots, y_n; \sigma, \delta, P, T], \\ &a \otimes \sum_{p_i \geqslant 0} k_{p_1 p_2 \cdots p_n} y_1^{p_1} y_2^{p_2} \cdots y_n^{p_n} \mapsto \sum_{p_i \geqslant 0} a k_{p_1 p_2 \cdots p_n} y_1^{p_1} y_2^{p_2} \cdots y_n^{p_n}, \end{aligned}$$

其中 $k_{p_1 p_2 \cdots p_n} \in \mathbf{k}$. 注意到对一切 $a, b \in A$, 有

$$\begin{aligned} &\psi\Big(a \otimes \sum_{p_i \geqslant 0} k_{p_1 p_2 \cdots p_n} y_1^{p_1} y_2^{p_2} \cdots y_n^{p_n} \cdot b \otimes \sum_{p_i \geqslant 0} k_{p_1 p_2 \cdots p_n} y_1^{p_1} y_2^{p_2} \cdots y_n^{p_n}\Big) \\ = {}& \psi\Big(ab \otimes \sum_{p_i \geqslant 0} k_{p_1 p_2 \cdots p_n} y_1^{2p_1} y_2^{2p_2} \cdots y_n^{2p_n}\Big) = ab \sum_{p_i \geqslant 0} k_{p_1 p_2 \cdots p_n} y_1^{2p_1} y_2^{2p_2} \cdots y_n^{2p_n} \\ = {}& \psi\Big(a \otimes \sum_{p_i \geqslant 0} k_{p_1 p_2 \cdots p_n} y_1^{p_1} y_2^{p_2} \cdots y_n^{p_n}\Big) \psi\Big(b \otimes \sum_{p_i \geqslant 0} k_{p_1 p_2 \cdots p_n} y_1^{p_1} y_2^{p_2} \cdots y_n^{p_n}\Big). \end{aligned}$$

由于 $\{y_1^{p_1} y_2^{p_2} \cdots y_n^{p_n} \mid p_1, p_2, \cdots, p_n \geqslant 0\}$ 是基，于是 ψ 是代数同态. 对一切

$$\sum_{p_i \geqslant 0} a_{p_1 p_2 \cdots p_n} y_1^{p_1} y_2^{p_2} \cdots y_n^{p_n} \in A[y_1, y_2, \cdots, y_n; \sigma, \delta, P, T],$$

存在 $\sum\limits_{p_i\geqslant 0}(a_{p_1p_2\cdots p_n}\otimes y_1^{p_1}y_2^{p_2}\cdots y_n^{p_n})\in A\otimes C$, 使得

$$\psi\Big(\sum_{p_i\geqslant 0}(a_{p_1p_2\cdots p_n}\otimes y_1^{p_1}y_2^{p_2}\cdots y_n^{p_n})\Big)=\sum_{p_i\geqslant 0}a_{p_1p_2\cdots p_n}y_1^{p_1}y_2^{p_2}\cdots y_n^{p_n}.$$

故 ψ 是满射.

若 $\sum\limits_{p_i\geqslant 0}a_{p_1p_2\cdots p_n}y_1^{p_1}y_2^{p_2}\cdots y_n^{p_n}=0$, 那么 $a_{p_1p_2\cdots p_n}=0$, 于是

$$\sum_{p_i\geqslant 0}(a_{p_1p_2\cdots p_n}\otimes y_1^{p_1}y_2^{p_2}\cdots y_n^{p_n})=0.$$

这表明 $\ker\psi=0$, 故 ψ 是单射.

从而 $A\otimes C\cong A[y_1,y_2,\cdots,y_n;\sigma,\delta,P,T]$ 作为代数.

现在我们给出命题 4.3 的另一个版本，它是本文的第四个主要定理.

定理 5.1 设 H 是 GK 维数为 d 的连通分次代数，那么 H 是 Hopf 多重 Ore 扩张. 准确地说，存在 H 的正分次齐次元的有限序列 $z_1,\cdots,z_d$, 满足

$$H=\mathbf{k}[z_1,z_2,\cdots,z_d;\delta,P,T],$$

且

$$\Delta_H(z_r)\in 1\otimes z_r+z_r\otimes 1+\sum_{i,j>0,i+j=\deg(z_r)}(H^{\leqslant r-1})_i\otimes(H^{\leqslant r-1})_j,\quad r=1,\cdots,d,$$

其中 $H^{\leqslant 0}=\mathbf{k}$, $H^{\leqslant i}$ 是由 $z_1,\cdots,z_i(i=1,\cdots,d)$ 生成的 H 的子代数， $\delta_i(i=2,\cdots,d)$ 是 $H^{\leqslant i-1}$ 的导子. 特别地， $H^{\leqslant 0},H^{\leqslant 1},\cdots,H^{\leqslant d}$ 都是 H 的分次 Hopf 子代数.

证 此证明可以直接由命题 4.3 和推论 5.1 得到.

推论 5.2 设 H 是 GK 维数为 d 的连通分次 Hopf 代数. 若 $k<d$ 满足 $d=qk+r$, 且 $q,k,r\in\mathbb{N}$, 那么对任意 Hopf 代数 A, 存在 H 的正分次齐次元的有限序列 $z_1,\cdots,z_d$, 满足：

$$\begin{aligned}H=\mathbf{k}&\underbrace{[z_1,z_2,\cdots,z_k;\delta,P,T]\cdots[z_{qk-k+1},z_{qk-k+2},\cdots,z_{qk};\delta,P,T]}_{q}\\&\cdots\underbrace{[z_{qk+1},\delta_{qk+1}]\cdots[z_d,\delta_d]}_{r}.\end{aligned}$$

证 此证明可以直接由命题 4.3 和定理 5.1 得到.

推论 5.3 设 H 是 GK 维数为 d 的连通分次 Hopf 代数，则对任意 Hopf 代数 A, 有

$$A\otimes H=A[y_1,y_2,\cdots,y_d;\sigma,\delta,P,T],$$

其中 $\sigma=\mathrm{diag}(\mathrm{id}_A,\mathrm{id}_A,\cdots,\mathrm{id}_A)$, $\delta=0$.

证 此证明可以直接由定理 5.1 和引理 5.2 得到.

推论 5.4 设 H 是 GK 维数为 d 的连通分次 Hopf 代数. 若 $k<d$ 满足 $d=qk+r$, 且 $q,k,r\in\mathbb{N}$, 那么对任意 Hopf 代数 A, 存在 H 的正分次齐次元的有限序列 $z_1,\cdots,z_d$,

满足：

$$A \otimes H = A \underbrace{[z_1, z_2, \cdots, z_k; \delta, P, T] \cdots [z_{qk-k+1}, z_{qk-k+2}, \cdots, z_{qk}; \delta, P, T]}_{q}$$
$$\cdots \underbrace{[z_{qk+1}, \delta_{qk+1}] \cdots [z_d, \delta_d]}_{r}.$$

证 此证明可以直接由上述两个推论得到.

现在，我们从另一个角度看定理 5.1.

引理 5.3 设 $A = \mathbf{k}[z_1]$ 是多项式环， $\mathfrak{g} = \mathbf{k}z_2$ 是 1 维 Lie 代数， z_2 是 A 的导子，$U(\mathfrak{g})$ 是泛包络代数，那么冲积 $A\#U(\mathfrak{g}) = \mathbf{k}[z_1][z_2, \delta_2]$.

证 由于 $\Delta(z_2) = z_2 \otimes 1 + 1 \otimes z_2$, 我们有

$$(1\#z_2)(z_1\#1) = (z_2 \cdot z_1)\#1 + z_1\#z_2.$$

由于 z_2 是 A 的导子，记 $z_2 \cdot z_1 = \delta(z_1)$, 其中 $\delta : A \to A$ 是导子. 于是，显然存在从 $A\#U(\mathfrak{g})$ 到 $\mathbf{k}[z_1][z_2, \delta_2]$ 的同构映射.

定理 5.2 设 $B = \mathbf{k}[y_1, y_2, \cdots, y_n; \delta, P, T]$ 是 Hopf 多重 Ore 扩张，那么

$$B = \mathbf{k}[y_1]\#\underbrace{U(\mathfrak{g})\# \cdots \#U(\mathfrak{g})}_{n-1},$$

通常记为 $B = \mathbf{k}[y_1] \underset{n-1}{\#} U(\mathfrak{g})$.

证 此证明可以直接由推论 5.1 和引理 5.3 得到.

推论 5.5 设 H 是 GK 维数为 d 的连通分次 Hopf 代数，则存在 H 的正分次齐次元 z, 满足 $H = \mathbf{k}[z] \underset{d-1}{\#} U(\mathfrak{g})$.

证 此证明可以直接由定理 5.1 和定理 5.2 得到.

致谢 作者感谢吴志祥导师和卢涤明导师同其关于本课题展开讨论、提供参考文献、阅读稿件的早期版本以及提供有用的建议.

参 考 文 献

[1] Li Q N. A remark on double Ore extensions [J]. *Chinese Quarterly Journal of Mathematics*, 2019, 34(1):99–110.

[2] Zhou GS, Shen Y, Lu DM. The structure of connected (graded) Hopf algebras [J]. *Advances in Mathematics*, 2020, 372(7):107292.

[3] Panov A N. Ore extensions of Hopf algebras [J]. *Mathematical Notes*, 2003, 74(3):401–410.

[4] Zhang J J, Zhang J. Double Ore extensions [J]. *J Pure Appl Algebra*, 2008, 212(12):2668–2690.

[5] Brown K A, Gilmartin P, Zhang J J. Connected (graded) Hopf algebras [J]. *Transactions of the American Mathematical Society*, 2019, 372:3283–3317.

[6] Goodearl K R, Zhang J J. Noetherian Hopf algebra domains of Gelfand-Kirillov dimension two [J]. *J Algebra*, 2010, 324(11):3131–3168.

[7] Carvalho P A A B, Lopes S A, Matczuk J. Double Ore extensions versus iterated Ore extensions [J]. *Comm Algebra*, 2011, 39(8):2838–2848.

[8] Xu Y J, Huang HL, Wang D G. Realization of PBW-deformations of type $\mathbb{A}_n$ quantum groups via multiple Ore extensions [J]. *J Pure Appl Algebra*, 2019, 223(4):1531–1547.

Double Ore Extensions of Hopf Algebras

LI Qining[1]

[1]School of Mathematical Sciences, Zhejiang University, Hangzhou 310027, China. E-mail: castelu@qq.com

Abstract The aim of this article is to define Hopf double Ore extensions, discuss their basic properties and study the relationship between gradations and Hopf double Ore extensions of Hopf algebras. The author also studies the homological properties of Hopf double Ore extensions for connected graded Hopf algebras and the structure of connected graded Hopf algebras.

Keywords Hopf double Ore extension, Connected graded Hopf algebra

2000 MR Subject Classification 16P90, 16S36, 16S38, 16T05, 16W50

The English translation of this paper will be published in
Chinese Journal of Contemporary Mathematics, Vol. 42 No. 4, 2021
by ALLERTON PRESS, INC., USA