数 学 年 刊 A 辑
2022, 43(2):137–152
DOI: 10.16205/j.cnki.cama.2022.0010

四阶非线性 Schrödinger 方程在 $\widehat{L}^p$ 初值空间中解的整体存在性研究*

王　灯[1]　杨　晗[1]

提要　本文考虑当初值 $u_0 \in \widehat{L}^p$ 时, 四阶非线性 Schrödinger 方程的柯西问题的整体适定性. 在 $p \neq 2$ 的情形下, 关于该柯西问题的解的存在性结论较少. 受已有二阶 Schrödinger 方程启发, 借助一个关于 $\widehat{L}^p$ 初值的分解引理和 Strichartz 估计, 在 $p > 2$ 且非线性项指数满足一定条件下, 本文得到了该四阶非线性 Schrödinger 方程的柯西问题的解的整体存在性.

关键词　四阶 Schrödinger 方程, 整体解, $\widehat{L}^p$ 初值, Strichartz 估计

MR (2000) 主题分类　35A01, 35G25, 35Q55

中图法分类

文献标志码　A

文章编号　1000-8314(2022)02-0137-16

§1　引　言

本文考虑如下四阶非线性 Schrödinger 方程的柯西问题 (NL4S$^\alpha$):

$$\begin{cases} \mathrm{i}u_t + u_{xxxx} + |u|^{\alpha-1}u = 0, \quad t > 0,\, x \in \mathbb{R}, \\ u(x,0) = u_0(x), \end{cases}$$

其中 $\alpha > 1$. 该柯西问题来源于文 [1–2] 中被用来考虑四阶色散项在大量介质中强激光束的传输中的作用的非线性四阶 Schrödinger 方程的一般模型

$$\begin{cases} \mathrm{i}u_t + \Delta^2 u + \varepsilon\Delta u + \mu|u|^{\alpha-1}u = 0, \quad t > 0,\, x \in \mathbb{R}^n, \\ u(x,0) = u_0(x), \end{cases} \tag{1.1}$$

其中 $\varepsilon \in \{0, \pm1\}, \mu \in \{\pm1\}, \alpha > 1$.

在过去的几十年中, 四阶 Schrödinger 方程在各个领域也得到了广泛的应用, 在非线性光学、深水波动力学、等离子物理体、超导现象等方面都发挥了很重要的作用, 具体可参考文 [1–7]. 在对四阶 Schrödinger 方程的理论研究中, 文 [8] 对四阶 Schrödinger 方程的线性半群算子建立了关于时间变量 t 的衰减估计. 基于这些衰减估计, 此类四阶 Schrödinger 方程的柯西问题 (1.1) 在初值属于平方可积的 Sobolev 空间中得到了广泛研究, 可参考文 [9–16]. 其中文 [9–13] 研究了在能量临界情况下 $H^2(\mathbb{R}^n)$ 整体解的渐进行为. 文 [14] 则证明了柯西问题 (1.1) 在条件 $\frac{\alpha}{2} \geqslant \frac{4}{n}, s > s_0 := \frac{n}{2} - \frac{4}{\alpha}$ 下, 初值空间为 $H^s(\mathbb{R}^n)$ 的局部适定性的结论. 文 [15] 在条件 $\varepsilon = 0, n \geqslant 2, s_c = \frac{n}{2} - \frac{4}{\alpha}$ 和齐次 Sobolev 空间 $\dot{H}^{s_c}(\mathbb{R}^n)$ 中的小初值意义下证得了解的整体存在性和散射结论. 在质量临界的情形下, 文 [16] 讨论了四阶

本文 2021 年 4 月 19 日收到, 2022 年 1 月 10 日收到修改稿.

[1]西南交通大学数学学院, 成都 611756. E-mail: wangdeng@my.swjtu.edu.cn; hanyang95@263.net

Schrödinger 方程的 L^2 整体解的渐近行为. 另一方面, 文 [17] 中也得到了当 $\alpha=3$ 时解的爆破.

此外在 Besov 空间也有一些相应结论. 文 [18] 给出了在 $1\leqslant n\leqslant 4$ 的情况下, 该柯西问题是局部适定和整体适定的, 其解空间为 $C([-T,T];\dot{B}^{s_\alpha}_{2,q}(\mathbb{R}^n))$ 和 $C([-T,T];B^{s}_{2,q}(\mathbb{R}^n))$, 其中 $s_\alpha=\frac{n}{2}-\frac{4}{\alpha}, s>s_\alpha, 1\leqslant q\leqslant\infty$.

值得一提的是, 当初值 u_0 不属于某类平方可积空间时, 关于柯西问题 (1.1) 适定性的结论却比较少, 典型的非平方可积空间为 L^p 和 $\widehat{L}^p$ 空间 $(p\neq 2)$. 在经典的二阶 Schrödinger 方程的研究中, 这类问题得到了部分解决, 有了一些相应的结论. 在文 [19] 中, 作者研究了如下的柯西问题:

$$\begin{cases}\mathrm{i}u_t-u_{xx}\pm|u|^2u=0, \quad t>0,\, x\in\mathbb{R},\\ u(x,0)=u_0(x), \quad u_0(x)\in L^p(\mathbb{R}),\end{cases}\tag{1.2}$$

其中 $1<p<2$. 首先定义二阶 Schrödinger 方程线性半群算子 $U(t)=\mathrm{e}^{\mathrm{i}t\Delta}$, 则该问题的等价形式为

$$u(t)=U(t)u_0\pm\mathrm{i}\int_0^t U(t-\tau)(|u(\tau)|^2u(\tau))\mathrm{d}\tau.$$

其次通过一个线性变换 $v(x,t)=U(-t)u(x,t)$, 将该积分方程转化为另一个积分方程

$$v(t)=u_0\pm\mathrm{i}\int_0^t U(-t)[U(-\tau)\bar{v}(\tau)(U(\tau)v(\tau))^2]\mathrm{d}\tau.$$

利用文 [20] 中关于 $U(t),U(-t)$ 有分解公式

$$U(t)\varphi=M_tD_t\mathcal{F}M_t\varphi, \quad U(-t)\varphi=M_t^{-1}\mathcal{F}^{-1}D_t^{-1}M_t^{-1}\varphi,\tag{1.3}$$

其中 $\mathcal{F},\mathcal{F}^{-1}$ 表示傅里叶变换和其逆变换, 算子 M_t,D_t 的定义如下:

$$M_t:\omega\mapsto \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{|x|^2}{4t}}\omega, \quad D_t:\omega\mapsto(4\pi\mathrm{i}t)^{-\frac{n}{2}}\omega\Big(\frac{x}{4\pi\mathrm{i}t}\Big), \quad t\neq 0,$$

该文中证得了一个关键的三线性估计

$$\begin{aligned}&\|U(-\tau)[U(-\tau)v_1(\tau)U(\tau)v_2(\tau)U(\tau)v_3(\tau)]\|_{L^1(\mathbb{R})}\\ &\leqslant C\tau^{-1}\|v_1(\tau)\|_{L^1(\mathbb{R})}\|v_2(\tau)\|_{L^1(\mathbb{R})}\|v_3(\tau)\|_{L^1(\mathbb{R})}.\end{aligned}$$

最后依赖于此估计得到了柯西问题 (1.2) 在 $L^p(1<p<2)$ 下的局部适定性.

但对于初值属于某类非平方可积空间的四阶 Schrödinger 方程的柯西问题而言, 文 [19] 的方法就不再适用. 因为对于四阶 Schrödinger 方程的线性半群算子 $S(t)=\mathrm{e}^{\mathrm{i}t\Delta^2}$ 无法得到类似于 (1.3) 式的分解公式, 所以需要转变思路换另一种方法来研究. 文 [21–23] 则采用了另外一种完全不同的研究方法来研究此类二阶 Schrödinger 方程. 以文 [21] 为例, 考虑了如下的柯西问题:

$$\begin{cases}\mathrm{i}u_t+u_{xx}\pm|u|^{\alpha-1}u=0, \quad t>0,\, x\in\mathbb{R},\\ u(x,0)=u_0(x),\end{cases}\tag{1.4}$$

得到了在初值属于 $\widehat{L}^p$, 且 p 接近于 2 的条件下该柯西问题整体解的存在性, 其中 $\widehat{L}^p$ 空间的定义为:

$$\widehat{L}^p:=\{\varphi\,:\,\widehat{\varphi}\in L^{p'}\}, \quad \|\varphi\|_{\widehat{L}^p}=\|\widehat{\varphi}\|_{L^{p'}}.\tag{1.5}$$

事实上, 通过 Hausdorff-Young 不等式可知: 若 $p\geqslant 2$, 则 $\widehat{L}^p\subseteq L^p$; 若 $1\leqslant p\leqslant 2$, 则 $L^p\subseteq \widehat{L}^p$.

文 [21] 主要受文 [24] 中对初值的分解技巧的启发, 将初值 $u(0)\in\widehat{L}^p$ 分解成

$$u_0=\varphi_N+\psi_N,\quad \|\varphi_N\|_{L^2}\sim N^{\frac{1-\theta}{\theta}},\quad \|\psi_N\|_{\widehat{L}^{p_0}}\lesssim N^{-1},\quad N>1,\tag{1.6}$$

其中满足 $\frac{1}{p'}=\frac{1-\theta}{p_0'}+\frac{\theta}{2},0<\theta<1$. 由此分别证得初值分别为 φ_N 和 ψ_N 的两个柯西子问题的解的局部存在性. 最后再用文 [25] 中的方法找到使得柯西问题 (1.4) 整体解存在的 θ 的条件.

据此, 本文希望利用文 [21] 的研究方法来考虑柯西问题 (NL4S$^\alpha$) 在初值 $u_0\in\widehat{L}^p$ 下解的存在性问题. 在该问题局部解和整体解的证明过程中, 两类 Strichartz 估计起到了关键性的作用. 第一类是齐次方程的 Stichartz 估计:

$$\|S(t)f\|_{L^qL^r}\lesssim\|f\|_{\widehat{L}^p}\quad,\quad \frac{4}{q}+\frac{1}{r}=\frac{1}{p}.\tag{1.7}$$

该估计式可由文 [11, 26] 中基于 L^2 空间的齐次 Strichartz 估计推广而得. 另一类非齐次方程的 Strichartz 估计的形式如下:

$$\left\|\int_0^t S(t-\tau)F(\cdot,\tau)\mathrm{d}\tau\right\|_{L^q_{[0,T]}L^r_x}\lesssim\|F\|_{L^\gamma_{[0,T]}L^\rho_x},\tag{1.8}$$

当 $(q,r),(\gamma',\rho')$ 均为双调和容许对 (定义见 (1.11)) 时, 文 [11, 26] 已证得该式成立. 但在本文的证明过程中需要在更一般的条件下的非齐次 Strichartz 估计, 其相应的推广形式于本文引理 2.2 中给出.

下面将依次给出柯西问题 (NL4S$^\alpha$) 的局部解和整体解的存在性定理.

定理 1.1 假设初值 $u_0\in\widehat{L}^p$ 且满足

$$2<p<\alpha+1,$$

那么对 $\forall\ N>1$, 存在一个 $T=\delta_N=CN^{-\frac{1-\theta}{\theta}\cdot\frac{8(\alpha-1)}{(9-\alpha)}}$ 和满足 $p<p_0<\alpha+1$ 的 p_0, 其中 C 是一个常数, 使得柯西问题 (NL4S$^\alpha$) 存在一个局部解 u, 其解空间表达式为

$$u=v+w\in L_{I_T}^{\frac{8(\alpha+1)}{\alpha-1}}L^{\alpha+1}(\mathbb{R})+L^q_{I_T}L^{\alpha+1}(\mathbb{R}),$$

其中参数满足

$$\frac{4}{q}+\frac{1}{\alpha+1}=\frac{1}{p_0}.\tag{1.9}$$

更进一步, 对任意 $t\in[0,\delta_N]$, 下式成立

$$\|w(t)-S(t)w(0)\|_{L^2_x}\lesssim N^{-1+\frac{1-\theta}{\theta}\{-\frac{(\alpha-1)^2}{(9-\alpha)(\alpha+1)}+\frac{8(\alpha-1)}{(9-\alpha)q}\}}.\tag{1.10}$$

定理 1.2 假设 $u_0\in\widehat{L}^p(\mathbb{R})$ 且满足

$$2<p<\begin{cases}\alpha+1, & 1<\alpha\leqslant\dfrac{3+\sqrt{153}}{8},\\ \dfrac{7\alpha+9}{4\alpha}, & \dfrac{3+\sqrt{153}}{8}<\alpha<9,\end{cases}$$

则对满足 (1.9) 式的充分大的 q, 存在一个 p_0 满足 $p < p_0 < \alpha+1$, 使得该柯西问题 (NL4S$^\alpha$) 存在一个整体解 u, 且其解空间表达式为

$$u = v + w \in L^\infty(\mathbb{R}, L^2(\mathbb{R})) \cap L^{\frac{8(\alpha+1)}{\alpha-1}}(\mathbb{R}, L^{\alpha+1}(\mathbb{R})) + L^q(\mathbb{R}, L^{\alpha+1}(\mathbb{R})).$$

现给出本文所需要的一些记号及定义.

(1) 对任意实数 $a \in [1, \infty], a'$ 称作 a 的共轭, 满足

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{a'} = 1.$$

(2) 对任意 $T > 0$, 记 $I_T = [0, T]$.

(3) 令 $I \subseteq \mathbb{R}, q, r \in [1, \infty]$, 定义如下的混合范数

$$\|u\|_{L_I^q L_x^r} = \|u\|_{L^q(I, L^r)} := \Big(\int_I \Big(\int_{\mathbb{R}} |u(t,x)|^r \mathrm{d}x \Big)^{\frac{q}{r}} \mathrm{d}t \Big)^{\frac{1}{q}}.$$

特别地, 当 $I = \mathbb{R}$, 我们记 $L^q L^r = L_{\mathbb{R}}^q L^r$.

(4) 若 f 为定义在 $\mathbb{R}_x$ 上的空间变量函数, 记 $\widehat{f} = \mathcal{F} f$ 为其关于空间变量的傅里叶变换.

(5) 对柯西问题 (NL4S$^\alpha$) 中的非线性项, 定义一个复值三元函数

$$\widetilde{G}(v, w_1, w_2) = |v + w_1|^{\alpha-1}(v + w_1) - |v + w_2|^{\alpha-1}(v + w_2).$$

(6) 在空间维数为一维的情形下, 定义 (q, r) 为双调和容许对, 其要满足的条件为

$$2 \leqslant r \leqslant \infty, \quad \frac{4}{q} + \frac{1}{r} = \frac{1}{2}. \tag{1.11}$$

§2 预备知识

在本节中, 先给出平面内的一些特殊点和几何区域记号. 记平面上区域 R 如下:

$$R := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, 0 \leqslant x, y \leqslant 1\}.$$

再给出 R 中一些点的定义

$$O = (0,0), \quad B = \Big(\frac{1}{2}, 0\Big), \quad C = \Big(0, \frac{1}{8}\Big), \quad E = \Big(0, \frac{1}{4}\Big),$$
$$O' = (1,1), \quad B' = \Big(\frac{1}{2}, 1\Big), \quad C' = \Big(1, \frac{7}{8}\Big), \quad E' = \Big(1, \frac{3}{4}\Big),$$

同时定义三角形 $\widehat{T_1} := \triangle OBE$ 和三角形 $\widehat{T_2} := \triangle O'B'E'$, 其中除了包含 B 和 B' 其他边界点都不包含. 联立双调和容许对的定义可知

$$BC := \Big\{(x, y) \in R;\ \Big(\frac{1}{y}, \frac{1}{x}\Big)\text{是双调和容许对}\Big\},$$
$$B'C' := \Big\{(x, y) \in R;\ \Big(\frac{1}{y'}, \frac{1}{x'}\Big)\text{是双调和容许对}\Big\}.$$

接下来本文将给出齐次形式下的 Strichartz 估计并证明之.

引理 2.1 令 $p \geqslant 2$, $\big(\frac{1}{r}, \frac{1}{q}\big) \in \triangle OBC$ 且满足

$$\frac{4}{q} + \frac{1}{r} = \frac{1}{p},$$

则存在一个正常数 $C_1>0$, 使得对任意 $T>0$ 和 $f\in\widehat{L}^p$, 都有

$$\|S(t)f\|_{L^q_{I_T}L^r}\leqslant C_1\|f\|_{\widehat{L}^p}.$$

证　由 $\widehat{L}^p$ 范数的定义 (见 (1.5)) 可知, 此引理等价于证明不等式

$$\|S(t)\mathcal{F}^{-1}f\|_{L^q_{I_T}L^r}\leqslant C\|f\|_{L^{p'}},\tag{2.1}$$

对任意 $T>0$ 和 $f\in\widehat{L}^{p'},1\leqslant p'\leqslant 2$ 都成立.

由文 [11] 可得 (2.1) 式在 $p'=2$ 是显然成立的, 即

$$\|S(t)\mathcal{F}^{-1}f\|_{L^{q_1}_{I_T}L^{r_1}}\leqslant C\|f\|_{L^2},\tag{2.2}$$

其中 $\left(\frac{1}{r_1},\frac{1}{q_1}\right)\in BC$. 又因为 $S(t)\mathcal{F}^{-1}f=\mathcal{F}^{-1}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t|\xi|^4}f)$, 所以当 $f\in L^1$ 时,

$$\begin{aligned}\|S(t)\mathcal{F}^{-1}f\|_{L^\infty_{I_T}L^\infty}&=\|\mathcal{F}^{-1}\mathrm{e}^{\mathrm{i}t|\xi|^4}f\|_{L^\infty_{I_T}L^\infty}\\&=\sup_{t\in I_T}\sup_{x\in\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}}|\mathrm{e}^{\mathrm{i}x\xi}\mathrm{e}^{\mathrm{i}t|\xi|^4}f(\xi)|\mathrm{d}\xi\\&\leqslant\sup_{t\in I_T}\sup_{x\in\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}}|f(\xi)|\mathrm{d}\xi\\&\leqslant\|f\|_{L^1}.\end{aligned}\tag{2.3}$$

最后, 对 (2.2)–(2.3) 式进行插值便可得到 (2.1) 式.

另一方面, 对非齐次方程也有如下的 Strichartz 类估计.

引理 2.2 [27]　假设 $\left(\frac{1}{r},\frac{1}{q}\right)\in\widehat{T_1},\left(\frac{1}{\rho},\frac{1}{\gamma}\right)\in\widehat{T_2}$ 且满足

$$\frac{4}{\gamma}+\frac{1}{\rho}=4+\frac{4}{q}+\frac{1}{r},$$

则存在一个常数 $C_2>0$, 使得对任意 $T>0$ 和 $F\in L^\gamma_{I_T}L^\rho$, 都有

$$\Big\|\int_0^t S(t-\tau)F(\tau)\mathrm{d}\tau\Big\|_{L^q_{I_T}L^r}\leqslant C_2\|F\|_{L^\gamma_{I_T}L^\rho}.\tag{2.4}$$

基于上述两类 Strichartz 估计, 有如下两个推论.

推论 2.1　令 $q>\max\{\frac{4(\alpha+1)}{\alpha-1},\frac{4(\alpha^2-1)}{3\alpha+5}\}$, 则存在常数 $C_3>0$, 对任意 $v\in L_{I_T}^{\frac{8(\alpha+1)}{\alpha-1}}L^{\alpha+1}$, $w_1,w_2\in L^q_{I_T}L^{\alpha+1}$, 下式都成立:

$$\begin{aligned}&\Big\|\int_0^t S(t-\tau)\widetilde{G}(v,w_1,w_2)(\tau)\mathrm{d}\tau\Big\|_{L^q_{I_T}L^{\alpha+1}}\\&\leqslant C_3\big[T^{\frac{9-\alpha}{8}}\|v\|^{\alpha-1}_{L_{I_T}^{\frac{8(\alpha+1)}{\alpha-1}}L^{\alpha+1}}\|w_1-w_2\|_{L^q_{I_T}L^{\alpha+1}}\\&\quad+T^{1-\frac{\alpha-1}{4(\alpha+1)}-\frac{\alpha-1}{9}}\{\|w_1\|^{\alpha-1}_{L^q_{I_T}L^{\alpha+1}}+\|w_2\|^{\alpha-1}_{L^q_{I_T}L^{\alpha+1}}\}\|w_1-w_2\|_{L^q_{I_T}L^{\alpha+1}}\big].\end{aligned}\tag{2.5}$$

证　因为 $q>\frac{4(\alpha+1)}{\alpha-1}$, 由引理 2.2 可得

$$\Big\|\int_0^t S(t-\tau)\widetilde{G}(v,w_1,w_2)(\tau)\mathrm{d}\tau\Big\|_{L^q_{I_T}L^{\alpha+1}}\leqslant C_2\|\widetilde{G}(v,w_1,w_2)\|_{L^a_{I_T}L^{\frac{\alpha+1}{\alpha}}},$$

其中 $\frac{1}{a}=1+\frac{1}{q}-\frac{\alpha-1}{4(\alpha+1)}$. 对非线性项又有如下不等式:

$$|\widetilde{G}(v,w_1,w_2)|\lesssim(|v|^{\alpha-1}+|w_1|^{\alpha-1}+|w_2|^{\alpha-1})|w_1-w_2|,$$

因此

$$\begin{aligned}\|\widetilde{G}(v,w_1,w_2)\|_{L^a_{I_T}L^{\frac{\alpha+1}{\alpha}}}&\lesssim\||v|^{\alpha-1}|w_1-w_2|\|_{L^a_{I_T}L^{\frac{\alpha+1}{\alpha}}}+\||w_1|^{\alpha-1}|w_1-w_2|\|_{L^a_{I_T}L^{\frac{\alpha+1}{\alpha}}}\\&\quad+\||w_2|^{\alpha-1}|w_1-w_2|\|_{L^a_{I_T}L^{\frac{\alpha+1}{\alpha}}}\\&=\mathrm{I}_1+\mathrm{I}_2+\mathrm{I}_3.\end{aligned}$$

考虑 I_1, 通过 Hölder 不等式可知

$$\begin{aligned}\mathrm{I}_1&\leqslant\big\|\|v^{\alpha-1}\|_{L^{\frac{\alpha+1}{\alpha-1}}}\|w_1-w_2\|_{L^{\alpha+1}}\big\|_{L^a_{I_T}}\\&\leqslant\|1\|_{L^b_{I_T}}\|v^{\alpha-1}\|_{L^{\frac{8(\alpha+1)}{(\alpha-1)^2}}_{I_T}L^{\frac{\alpha+1}{\alpha-1}}}\|w_1-w_2\|_{L^q_{I_T}L^{\alpha+1}}\\&=T^{\frac{9-\alpha}{8}}\|v\|^{\alpha-1}_{L^{\frac{8(\alpha+1)}{\alpha-1}}_{I_T}L^{\alpha+1}}\|w_1-w_2\|_{L^q_{I_T}L^{\alpha+1}},\end{aligned}$$

其中 $\frac{1}{b}+\frac{(\alpha-1)^2}{8(\alpha+1)}+\frac{1}{q}=\frac{1}{a}\Rightarrow\frac{1}{b}=\frac{9-\alpha}{8}$. 同理, 由 $q>\frac{4(\alpha^2-1)}{3\alpha+5}$ 可得

$$\begin{aligned}\mathrm{I}_2&\leqslant T^{1-\frac{\alpha-1}{4(\alpha+1)}-\frac{\alpha-1}{q}}\|w_1\|^{\alpha-1}_{L^q_{I_T}L^{\alpha+1}}\|w_1-w_2\|_{L^q_{I_T}L^{\alpha+1}},\\\mathrm{I}_3&\leqslant T^{1-\frac{\alpha-1}{4(\alpha+1)}-\frac{\alpha-1}{q}}\|w_2\|^{\alpha-1}_{L^q_{I_T}L^{\alpha+1}}\|w_1-w_2\|_{L^q_{I_T}L^{\alpha+1}}.\end{aligned}$$

其次为了得到整体解还需要以下推论.

推论 2.2 令 $q>\frac{8\alpha(\alpha+1)}{7\alpha+9}$, 那么存在常数 $C_3>0$, 对任意 $T>0$ 和 $v\in L^{\frac{8(\alpha+1)}{\alpha-1}}_{I_T}L^{\alpha+1}$, $w\in L^q_{I_T}L^{\alpha+1}$ 都有下式成立:

$$\begin{aligned}&\Big\|\int_0^t S(t-\tau)\widetilde{G}(v,w,0)(\tau)\mathrm{d}\tau\Big\|_{L^\infty_{I_T}L^2}\\&\leqslant C_3\big[T^{\frac{9-\alpha}{8}+\frac{\alpha-1}{8(\alpha+1)}-\frac{1}{q}}\|v\|^{\alpha-1}_{L^{\frac{8(\alpha+1)}{\alpha-1}}_{I_T}L^{\alpha+1}}\|w\|_{L^q_{I_T}L^{\alpha+1}}\\&\quad+T^{\frac{7\alpha+9}{8(\alpha+1)}-\frac{\alpha}{q}}\|w\|_{L^q_{I_T}L^{\alpha+1}}\big].\end{aligned}\tag{2.6}$$

注 2.1 该推论的证明和推论 2.1 的证明类似, 都是基于引理 2.2 和 Hölder 不等式来完成, 这里就不再赘述.

接下来介绍一个关于在 L^2 初值意义下柯西问题 ($\mathrm{NL4S}^\alpha$) 的解对初值的依赖程度的结论.

引理 2.3 假设 $v:\mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{C}$, $v(0,x)=\varphi(x)\in L^2$ 是下面方程的解:

$$\mathrm{i}v_t+v_{xxxx}+|v|^{\alpha-1}v=0,$$

且 (q,r) 是一个双调和容许对, 满足

$$\frac{8\alpha}{\alpha-1}<q<\begin{cases}\infty & 1<\alpha\leqslant 2,\\ \dfrac{8\alpha}{\alpha-2}, & 2<\alpha<9,\end{cases}$$

则存在仅依赖于 α 的正常数 K_1, K_2, 使得

$$\|v\|_{L^q_{I_\delta}L^r}\leqslant K_1\|\varphi\|_{L^2} \tag{2.7}$$

对任意 $\delta\in[0,(K_2\|\varphi\|_{L^2})^{-\frac{8(\alpha-1)}{9-\alpha}}]$ 都成立.

为了证明该引理, 需要下面两个引理来进行佐证.

引理 2.4[27] 假设 (q_1,r_1), (q_2,r_2) 均为双调和容许对, 则存在正常数 $C_4>0$, 使得对任意 $T>0$, $F\in L^{q_2'}_{I_T}L^{r_2'}$, 都有

$$\Big\|\int_0^t S(t-\tau)F(\tau)\mathrm{d}\tau\Big\|_{L^{q_1}_{I_T}L^{r_1}}\leqslant C_4\|F\|_{L^{q_2'}_{I_T}L^{r_2'}}. \tag{2.8}$$

引理 2.5　令 (q,r) 是一个双调和容许对且满足

$$\frac{8\alpha}{\alpha-1}<q<\begin{cases}\infty, & 1<\alpha\leqslant 2,\\ \dfrac{8\alpha}{\alpha-2}, & 2<\alpha<9,\end{cases}$$

那么存在常数 $C_4>0$, 使得对任意 $T>0$, $u\in L^q_{I_T}L^r$, 都有

$$\Big\|\int_0^t S(t-\tau)(|u|^{\alpha-1}u)(\tau)\mathrm{d}\tau\Big\|_{L^q_{I_T}L^r}\leqslant C_4T^{\frac{9-\alpha}{8}}\|u\|^\alpha_{L^q_{I_T}L^r}. \tag{2.9}$$

证　首先由

$$\frac{8\alpha}{\alpha-1}<q<\begin{cases}\infty, & 1<\alpha\leqslant 2,\\ \dfrac{8\alpha}{\alpha-2}, & 2<\alpha<9\end{cases}$$

可知, $\big((\frac{r}{\alpha})',a'\big)$ 也是一个双调和容许对, 则由引理 2.4 可得

$$\Big\|\int_0^t S(t-\tau)(|u|^{\alpha-1}u)(\tau)\mathrm{d}\tau\Big\|_{L^q_{I_T}L^r}\leqslant C_4\|u^\alpha\|_{L^a_{I_T}L^{\frac{r}{\alpha}}},$$

其中 $\frac{4}{a'}+\frac{1}{(\frac{r}{\alpha})'}=\frac{1}{2}\ \Rightarrow\ \frac{1}{a}=\frac{9}{8}-\frac{\alpha}{4r}$. 再通过 Hölder 不等式可知

$$\|u^\alpha\|_{L^a_{I_T}L^{\frac{r}{\alpha}}}=\big\|\|u\|^\alpha_{L^r_x}\big\|_{L^a_{I_T}}\leqslant\|1\|_{L^b_{I_T}}\|u\|^\alpha_{L^q_{I_T}L^r}=T^{\frac{9-\alpha}{8}}\|u\|^\alpha_{L^q_{I_T}L^r},$$

其中 $\frac{1}{b}+\frac{\alpha}{q}=\frac{1}{a}\ \Rightarrow\ \frac{1}{b}=\frac{9-\alpha}{8}$.

接下来, 给出引理 2.3 的证明过程.

令 $\delta^*=(2^{-\frac{2}{\alpha-1}}C_4^{\frac{1}{\alpha-1}}C_5\|\varphi\|_{L^2})^{-\frac{8(\alpha-1)}{9-\alpha}}$, 和集合

$$I=\{\delta\in[0,\delta^*]:\ \|u\|_{L^q_{[0,\delta]}L^r}\leqslant C_5\|\varphi\|_{L^2}\},$$

其中 (q,r) 是双调和容许对, C_4 是引理 2.5 中的常数, C_5 是使得下式成立的常数

$$\|S(t)f\|_{L^q_{[0,\delta]}L^r}\leqslant\frac{C_5}{2}\|f\|_{L^2}. \tag{2.10}$$

显然 $0\in I$, 即集合 $I\neq\varnothing$. 因此仅需说明集合 I 既开又闭即可, 由 $\delta\ \mapsto\ \|u\|_{L^q_{[0,\delta]}L^r}$ 连续可知集合 I 是闭集. 即现仅需验证集合 I 是开集. 固定 $\delta\in I$ 满足 $\delta<\delta^*$, 取 $\varepsilon>0$ 满足 $\delta+\varepsilon\leqslant\delta^*$, 考虑原柯西问题的等价积分方程形式

$$v(t)=S(t)\varphi+\mathrm{i}\int_0^t S(t-\tau)(|v|^{\alpha-1}v)(\tau)\mathrm{d}\tau,$$

由引理 2.4 和 (2.10) 可得

$$\begin{aligned}\|v\|_{L^q_{[0,\delta+\varepsilon]}L^r}&\leqslant\|S(t)\varphi\|_{L^q_{[0,\delta+\varepsilon]}L^r}+\Big\|\int_0^t S(t-\tau)(|v|^{\alpha-1}v)(\tau)\mathrm{d}\tau\Big\|_{L^q_{[0,\delta+\varepsilon]}L^r}\\&\leqslant\frac{C_5}{2}\|\varphi\|_{L^2}+\Big\|\int_0^t S(t-\tau)(|v|^{\alpha-1}v)(\tau)\mathrm{d}\tau\Big\|_{L^q_{[0,\delta]}L^r}\\&\quad+\Big\|\int_0^t S(t-\tau)(|v|^{\alpha-1}v)(\tau)\mathrm{d}\tau\Big\|_{L^q_{[\delta,\delta+\varepsilon]}L^r}\\&\leqslant\frac{C_5}{2}\|\varphi\|_{L^2}+C_4\delta^{\frac{9-\alpha}{8}}\|v\|^{\alpha}_{L^q_{[0,\delta]}L^r}+C_4\varepsilon^{\frac{9-\alpha}{8}}\|v\|^{\alpha}_{L^q_{[\delta,\delta+\varepsilon]}L^r}.\end{aligned}$$

若 ε 充分小, 则有

$$C_4\varepsilon^{\frac{9-\alpha}{8}}\|v\|^{\alpha}_{L^q_{[\delta,\delta+\varepsilon]}L^r}\leqslant\frac{C_5}{4}\|\varphi\|_{L^2}.$$

又因为 $\delta\in I,\ \delta\leqslant\delta^*$, 故

$$\begin{aligned}\|v\|_{L^q_{[0,\delta+\varepsilon]}L^r}&\leqslant\frac{3}{4}C_5\|\varphi\|_{L^2}+C_4(\delta^*)^{\frac{9-\alpha}{8}}(C_5\|\varphi\|_{L^2})^{\alpha}\\&=\frac{3}{4}C_5\|\varphi\|_{L^2}+C_4(2^{-\frac{2}{\alpha-1}}C_5C_4^{\frac{1}{\alpha-1}}\|\varphi\|_{L^2})^{-\frac{8(\alpha-1)}{9-\alpha}\cdot\frac{9-\alpha}{8}}C_5\|\varphi\|^{\alpha}_{L^2}\\&=C_5\|\varphi\|_{L^2}.\end{aligned}$$

因此 $\delta+\varepsilon\in I\ \Rightarrow\ I$ 是开集 $\Rightarrow\ I=[0,\delta^*]$. 最后取 $K_1=C_5,\ K_2=2^{-\frac{2}{\alpha-1}}C_5C_4^{\frac{1}{\alpha-1}}$ 即可.

另外关于 $\widehat{L}^p$ 空间的分解性质, 有如下引理.

引理 2.6 [21] 令 $p>2,\ p<p_0<\alpha+1,\ \frac{1}{p'}=\frac{1-\theta}{p_0'}+\frac{\theta}{2},\ 0<\theta<1$, 则对 $\forall\ u_0\in\widehat{L}^p(\mathbb{R})\backslash L^2(\mathbb{R})$, 存在正常数 C_0 和函数列 $(\varphi_N)_{N>1}\subseteq L^2,\ (\psi_N)_{N>1}\subseteq\widehat{L}^{p_0}$, 使得对任意 $N>1$ 都有 $u_0=\varphi_N+\psi_N$ 和下式成立

$$C_0^{-1}N^{\frac{1-\theta}{\theta}}\leqslant\|\varphi_N\|_{L^2}\leqslant C_0N^{\frac{1-\theta}{\theta}},\quad\|\psi_N\|_{\widehat{L}^{p_0}}\leqslant C_0\frac{1}{N}.\tag{2.11}$$

§3 定理 1.1 的证明

在本节中, 将证明对 $\forall\ N>1$, 在区间 $[0,\delta_N]$ 上 (δ_N的定义见 (3.1) 式), 柯西问题 (NL4S$^\alpha$) 都存在一个局部解.

同引理 2.6 的假设条件, 令 $p>2,\ p<p_0<\alpha+1,\ \frac{1}{p'}=\frac{1-\theta}{p_0'}+\frac{\theta}{2},\ 0<\theta<1$, 定义 q 满足

$$\frac{4}{q}+\frac{1}{\alpha+1}=\frac{1}{p_0}.$$

另外, 介绍一些常数. 固定 $M>1$ 满足

$$M>\max\{K_2,\ 3^{\frac{1}{\alpha-1}}C_3^{\frac{1}{\alpha-1}}K_1,\ 2^{-1}\cdot 4^{\frac{\alpha}{\sigma_\alpha}}C_0^{\frac{\alpha-1}{\sigma_\alpha}-1}C_1^{\frac{\alpha-1}{\sigma_\alpha}}C_3^{\frac{1}{\sigma_\alpha}}\},$$

其中 C_0,C_1,C_3,K_1,K_2 分别是引理 2.6, 引理 2.1, 推论 2.1, 引理 2.3 中的常数, 再定义

$$\sigma_\alpha:=\frac{8(\alpha-1)}{9-\alpha}\Big(1-\frac{\alpha-1}{4(\alpha+1)}-\frac{\alpha-1}{q}\Big)>0,$$

及对任意 $N>1$, 定义

$$\delta_N:=(M(2C_0N^{\frac{1-\theta}{\theta}}))^{-\frac{8(\alpha-1)}{9-\alpha}}. \tag{3.1}$$

由 $u_0\in\widehat{L}^p$ 和引理 2.6 可知 $u_0=\varphi_0^N+\psi_0^N$, 且为了下一节整体解的证明中满足 (4.6) 式的成立条件, 不妨将不等式 (2.11) 弱化为

$$(2C_0)^{-1}N^{\frac{1-\theta}{\theta}}\leqslant C_0^{-1}N^{\frac{1-\theta}{\theta}}\leqslant\|\varphi_0^N\|_{L^2}\leqslant C_0N^{\frac{1-\theta}{\theta}}\leqslant(2C_0)N^{\frac{1-\theta}{\theta}}, \tag{3.2}$$

$$\|\psi_0^N\|_{\widehat{L}^{p_0}}\leqslant C_0\frac{1}{N} \tag{3.3}$$

对任意 $N>1$ 都成立. 因此柯西问题 (NL4S$^\alpha$) 的解 u 能表示成 $u=v+w$, 其中 v,w 分别为下面两个柯西子问题的解:

$$\begin{cases}\mathrm{i}v_t+v_{xxxx}+(|v|^{\alpha-1}v)=0, & t>0,\ x\in\mathbb{R},\\ v(x,0)=\varphi_0^N(x),\end{cases} \tag{3.4}$$

$$\begin{cases}\mathrm{i}w_t+w_{xxxx}+\widetilde{G}(v,w,0)=0, & t>0,\ x\in\mathbb{R},\\ w(x,0)=\psi_0^N(x).\end{cases} \tag{3.5}$$

对柯西子问题 (3.4) 的解的存在性研究, 由文 [28] 可知其解 v 是整体存在的, 且有守恒律

$$\|v(t,x)\|_{L^2_x}=\|\varphi_0^N\|_{L^2},\quad t\geqslant 0. \tag{3.6}$$

又因为 $M>K_2$, $\big(\frac{8(\alpha+1)}{\alpha-1},\alpha+1\big)$ 是双调和容许对并满足

$$\frac{8\alpha}{\alpha-1}<\frac{8(\alpha+1)}{\alpha-1}<\begin{cases}\infty, & 1<\alpha\leqslant 2,\\ \dfrac{8\alpha}{\alpha-2}, & 2<\alpha<9,\end{cases}$$

所以由引理 2.3 得

$$\|v\|_{L_{I_{\delta_N}}^{\frac{8(\alpha+1)}{\alpha-1}}L^{\alpha+1}}\leqslant K_1\|\varphi_0^N\|_{L^2}. \tag{3.7}$$

因此, 要证得柯西问题 (NL4S$^\alpha$) 的解 u 在区间 $[0,\delta_N]$ 上存在, 仅需要证明柯西子问题 (3.5) 的解 w 在区间 $[0,\delta_N]$ 上存在即可. 在后续的证明过程中将采用不动点定理来进行说明, 首先定义完备度量空间 $\mathcal{V}_N$ 和算子 Tw 如下:

$$\mathcal{V}_N:=\Big\{w\in L^q_{I_{\delta_N}}L^{\alpha+1}:\ \|w\|_{L^q_{I_{\delta_N}}L^{\alpha+1}}\leqslant\frac{3C_0C_1}{N}\Big\},$$

$$(Tw)(t):=S(t)\psi_0^N+\mathrm{i}\int_0^t S(t-\tau)\widetilde{G}(v,w,0)\mathrm{d}\tau,$$

其中 C_0,C_1 分别是引理 2.6 和引理 2.1 中的常数. 此时需要证明算子 $T:\ \mathcal{V}_N\ \to\ \mathcal{V}_N$ 是良定义且压缩的.

第一步先证明 $T:\ \mathcal{V}_N \ \to\ \mathcal{V}_N$ 是良定义. 对 $\forall\, w\in\mathcal{V}_N$, 因为

$$q>\max\Big\{\frac{4(\alpha+1)}{\alpha-1},\frac{4(\alpha^2-1)}{3\alpha+5}\Big\} \text{ 及 } \begin{cases}\dfrac{4}{q}+\dfrac{1}{\alpha+1}=\dfrac{1}{p_0},\\ 2<p<p_0<\alpha+1,\\ 2<\alpha<9,\end{cases}$$

所以由推论 2.1 有

$$\begin{aligned}\|Tw\|_{L^q_{I_{\delta_N}}L^{\alpha+1}}&\leqslant\|S(t)\psi_0^N\|_{L^q_{I_{\delta_N}}L^{\alpha+1}}+\Big\|\int_0^t S(t-\tau)\widetilde{G}(v,w,0)\mathrm{d}\tau\Big\|_{L^q_{I_{\delta_N}}L^{\alpha+1}}\\&\leqslant|S(t)\psi_0^N\|_{L^q_{I_{\delta_N}}L^{\alpha+1}}+C_3(\delta_N)^{\frac{9-\alpha}{8}}\|v\|^{\alpha-1}_{L^{\frac{8(\alpha+1)}{\alpha-1}}_{I_{\delta_N}}L^{\alpha+1}}\|w\|_{L^q_{I_{\delta_N}}L^{\alpha+1}}\\&\quad+C_3(\delta_N)^{1-\frac{\alpha-1}{4(\alpha+1)}-\frac{\alpha-1}{q}}\|w\|^{\alpha}_{L^q_{I_{\delta_N}}L^{\alpha+1}}\\&=\mathrm{I}_4+\mathrm{I}_5+\mathrm{I}_6.\end{aligned}$$

同样地, 由 $\big(\frac{1}{\alpha+1},\frac{1}{q}\big)\in\triangle OBC$ 和引理 2.1 可得

$$\mathrm{I}_4\leqslant C_1\|\psi_0^N\|_{\widehat{L}^{p_0}}\leqslant\frac{C_0C_1}{N}.$$

第二项 I_5 是有界的, 因为

$$\begin{aligned}\mathrm{I}_5&\leqslant C_3(M(2C_0N^{\frac{1-\theta}{\theta}}))^{-\frac{8(\alpha-1)}{9-\alpha}\cdot\frac{9-\alpha}{8}}\cdot(K_1\|\varphi_0^N\|_{L^2})^{\alpha-1}\cdot\frac{3C_0C_1}{N}\\&\leqslant C_3(M(2C_0N^{\frac{1-\theta}{\theta}}))^{-(\alpha-1)}\cdot(K_1(2C_0N^{\frac{1-\theta}{\theta}}))^{\alpha-1}\cdot\frac{3C_0C_1}{N}\\&=3C_3K_1^{\alpha-1}M^{-(\alpha-1)}\cdot\frac{3C_0C_1}{N}\\&\leqslant\frac{C_0C_1}{N},\end{aligned}$$

其中最后一个不等式的成立依赖于 M 的定义. 对第三项 I_6, 同样有

$$\begin{aligned}\mathrm{I}_6&\leqslant C_3(M(2C_0N^{\frac{1-\theta}{\theta}}))^{-\frac{8(\alpha-1)}{9-\alpha}\cdot(1-\frac{\alpha-1}{4(\alpha+1)}-\frac{\alpha-1}{Q})}\cdot\Big(\frac{3C_0C_1}{N}\Big)^{\alpha}\\&=C_3M^{-\sigma_\alpha}(2C_0)^{-\sigma_\alpha}\cdot3^\alpha C_0^{\alpha-1}C_1^{\alpha-1}\cdot\frac{C_0C_1}{N}\\&\leqslant\frac{C_0C_1}{N}.\end{aligned}$$

因此, 联立这三项可得

$$\|Tw\|_{L^q_{I_{\delta_N}}L^{\alpha+1}}\leqslant\frac{3C_0C_1}{N},$$

也即证得 $Tw\in\mathcal{V}_N$.

第二步则需证明 T 是一个压缩映射. 令 $w_1,\ w_2\in\mathcal{V}_N$, 通过推论 2.1 可知

$$\begin{aligned}\|Tw_1-Tw_2\|_{L^q_{I_{\delta_N}}L^{\alpha+1}}\leqslant C_3[&(\delta_N)^{\frac{9-\alpha}{8}}\|v\|^{\alpha-1}_{L^{\frac{8(\alpha+1)}{\alpha-1}}_{I_{\delta_N}}L^{\alpha+1}}\\&+(\delta_N)^{1-\frac{\alpha-1}{4(\alpha+1)}-\frac{\alpha-1}{q}}\|w_1\|^{\alpha-1}_{L^q_{I_{\delta_N}}L^{\alpha+1}}\end{aligned}$$

$$+(\delta_N)^{1-\frac{\alpha-1}{4(\alpha+1)}-\frac{\alpha-1}{q}}\|w_2\|^{\alpha-1}_{L^q_{I_{\delta_N}}L^{\alpha+1}}]\cdot\|w_1-w_2\|_{L^q_{I_{\delta_N}}L^{\alpha+1}}.$$

再由 $\mathrm{I}_5, \mathrm{I}_6$ 类似的估计可知

$$\begin{aligned}C_3(\delta_N)^{\frac{9-\alpha}{8}}\|v\|^{\alpha-1}_{L^{\frac{8(\alpha+1)}{\alpha-1}}_{I_{\delta_N}}L^{\alpha+1}}&\leqslant\frac{1}{3},\\
C_3(\delta_N)^{1-\frac{\alpha-1}{4(\alpha+1)}-\frac{\alpha-1}{q}}\|w_1\|^{\alpha-1}_{L^q_{I_{\delta_N}}L^{\alpha+1}}&\leqslant\frac{1}{4},\\
C_3(\delta_N)^{1-\frac{\alpha-1}{4(\alpha+1)}-\frac{\alpha-1}{q}}\|w_2\|^{\alpha-1}_{L^q_{I_{\delta_N}}L^{\alpha+1}}&\leqslant\frac{1}{4}.\end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}\|Tw_1-Tw_2\|_{L^q_{I_{\delta_N}}L^{\alpha+1}}&\leqslant\Big(\frac{1}{3}+2\cdot\frac{1}{4}\Big)\|w_1-w_2\|_{L^q_{I_{\delta_N}}L^{\alpha+1}}\\
&=\frac{5}{6}\|w_1-w_2\|_{L^q_{I_{\delta_N}}L^{\alpha+1}},\end{aligned}$$

即证得 T 压缩. 故原柯西问题 (NL4S$^\alpha$) 在区间 $[0,\delta_N]$ 上存在局部解. 另外对定理 1.1 的最后一个部分 (1.10) 式做一个单独说明. 由 $\frac{4}{q}+\frac{1}{\alpha+1}=\frac{1}{p_0}$, $p_0>p>2$ 和 $2<\alpha<9$ 易得 $\frac{4}{q}=\frac{1}{p_0}-\frac{1}{\alpha+1}<\frac{1}{2}-\frac{1}{\alpha+1}<\frac{7\alpha+9}{2\alpha(\alpha+1)}$, 则通过推论 2.2 可知

$$\begin{aligned}\|w(t)-S(t)w(0)\|_{L^2_x}&=\Big\|\int_0^t S(t-\tau)\widetilde{G}(v,w,0)\mathrm{d}\tau\Big\|_{L^2_x}\\
&\leqslant\Big\|\int_0^t S(t-\tau)\widetilde{G}(v,w,0)\mathrm{d}\tau\Big\|_{L^\infty_{I_{\delta_N}}L^2}\\
&\leqslant C_3\delta_N^{\frac{9-\alpha}{8}+\frac{\alpha-1}{8(\alpha+1)}-\frac{1}{q}}\|v\|^{\alpha-1}_{L^{\frac{8(\alpha+1)}{\alpha-1}}_{I_{\delta_N}}L^{\alpha+1}}\|w\|_{L^q_{I_{\delta_N}}L^{\alpha+1}}\\
&\quad+C_3\delta_N^{\frac{7\alpha+9}{8(\alpha+1)}-\frac{\alpha}{q}}\|w\|^{\alpha}_{L^q_{I_{\delta_N}}L^{\alpha+1}}\\
&\leqslant C_3\Big(M(2C_0)N\frac{1-\theta}{\theta}\Big)^{-\frac{8(\alpha-1)}{9-\alpha}\cdot\{\frac{9-\alpha}{8}+\frac{\alpha-1}{8(\alpha+1)}-\frac{1}{q}\}}K_1^{\alpha-1}\\
&\quad\cdot\Big((2C_0)N\frac{1-\theta}{\theta}\Big)^{\alpha-1}\cdot\frac{3C_0C_1}{N}\\
&\quad+C_3\Big(M(2C_0)N\frac{1-\theta}{\theta}\Big)^{-\frac{8(\alpha-1)}{9-\alpha}\cdot\{\frac{7\alpha+9}{8(\alpha+1)}-\frac{\alpha}{q}\}}\cdot\Big(\frac{3C_0C_1}{N}\Big)^{\alpha}\\
&\leqslant CN^{-1-\frac{1-\theta}{\theta}\cdot\frac{8(\alpha-1)}{9-\alpha}\{\frac{\alpha-1}{8(\alpha+1)}-\frac{1}{q}\}}+CN^{-1-\frac{1-\theta}{\theta}\cdot\frac{8(\alpha-1)}{9-\alpha}\{\frac{7\alpha+9}{8(\alpha+1)}-\frac{\alpha}{q}\}},\end{aligned}$$

其中在最后一个不等式中 C 是一个与 N 无关的常数. 又因为 $N>1,\alpha>2$, 所以 $N^{-\alpha}\leqslant N^{-1}$, 则通过一个简单的计算可知

$$\frac{7\alpha+9}{8(\alpha+1)}-\frac{\alpha}{q}>\frac{\alpha-1}{8(\alpha+1)}-\frac{1}{q},$$

即有

$$\begin{aligned}\|w(t)-S(t)w(0)\|_{L^2_x}&\leqslant CN^{-1-\frac{1-\theta}{\theta}\cdot\frac{8(\alpha-1)}{9-\alpha}\{\frac{\alpha-1}{8(\alpha+1)}-\frac{1}{q}\}}\\
&=CN^{-1+\frac{1-\theta}{\theta}\{-\frac{(\alpha-1)^2}{(9-\alpha)(\alpha+1)}+\frac{8(\alpha-1)}{(9-\alpha)q}\}}.\end{aligned}$$

§4 定理 1.2 的证明

在本节中, 定理 1.2 的证明过程也将分为以下两步.

第一步证明上一节中的局部解可以延拓至 T_N, T_N 的定义如下:

$$k^* := CN^{1+\frac{1-\theta}{\theta}\{\frac{6\alpha+10}{(9-\alpha)(\alpha+1)}-\frac{8(\alpha-1)}{(9-\alpha)q}\}},$$

$$T_N := [k^*]\delta_N,$$

其中 $C>0$ 是一个与 N 无关的常数, δ_N 和上节中的定义一样, 记号 $[a]$ 表示取 a 的整数部分.

由上一节的结论可知在区间 $[0,\delta_N]$ 上, 柯西问题解的表达式为

$$\begin{aligned} u(\delta_N,x) &= v(\delta_N,x)+w(\delta_N,x) \\ &= v(\delta_N,x)+S(\delta_N)\psi_0^N+\mathrm{i}\int_0^{\delta_N} S(\delta_N-\tau)\widetilde{G}(v,w,0)(\tau)\mathrm{d}\tau. \end{aligned}$$

若令

$$\varphi_1^N := v(\delta_N,x)+\mathrm{i}\int_0^{\delta_N} S(\delta_N-\tau)\widetilde{G}(v,w,0)(\tau)\mathrm{d}\tau, \tag{4.1}$$

$$\psi_1^N := S(\delta_N)\psi_0^N, \tag{4.2}$$

则 $u(\delta_N,x)=\varphi_1^N+\psi_1^N$, 也即给出了初值 $u(\delta_N,\cdot)$ 的一个分解式, 且满足

$$\|\psi_1^N\|_{\widehat{L}^{p_0}} = \|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\delta_N|\xi|^4}\widehat{\psi_0^N}\|_{L^{p_0'}} = \|\widehat{\psi_0^N}\|_{L^{p_0'}} \leqslant \frac{C_0}{N}. \tag{4.3}$$

因此, 若估计式

$$(2C_0)^{-1}N^{\frac{1-\theta}{\theta}} \leqslant \|\varphi_1^N\|_{L^2} \leqslant (2C_0)N^{\frac{1-\theta}{\theta}} \tag{4.4}$$

成立, 则重复上一节局部解的证明, 对下面的柯西问题

$$\begin{cases} \mathrm{i}u_t+u_{xxxx}+(|u|^{\alpha-1}u)=0, \quad t>\delta_N,\ x\in\mathbb{R}, \\ u(\delta_N,x)=\varphi_1^N+\psi_1^N, \end{cases}$$

同样能得到在区间 $[\delta_N,2\delta_N]$ 上的局部解. 以这种方式进行延拓, 解的存在区间的上界为 $k_0\delta_N$ 的充分条件为仅需满足

$$(2C_0)^{-1}N^{\frac{1-\theta}{\theta}} \leqslant \|\varphi_k^N\|_{L^2} \leqslant (2C_0)N^{\frac{1-\theta}{\theta}}, \quad \forall k\leqslant k_0, \tag{4.5}$$

其中 k, k_0 为整数且

$$\varphi_k^N(x) := v(k\delta_N,x)+\mathrm{i}\int_0^{k\delta_N} S(k\delta_N-\tau)\widetilde{G}(v,w,0)(\tau)\mathrm{d}\tau.$$

下面开始找出使得 (4.5) 式成立的最大 k_0 值. 由 (1.10) 式、(3.2) 式和 (3.6) 式可知

$$\begin{aligned} \|\varphi_k^N(x)\|_{L^2} &\leqslant \|v(k\delta_N,x)\|_{L^2}+\Big\|\int_0^{k\delta_N} S(k\delta_N-\tau)\widetilde{G}(v,w,0)(\tau)\mathrm{d}\tau\Big\|_{L^2} \\ &\leqslant C_0N^{\frac{1-\theta}{\theta}}+CkN^{-1+\frac{1-\theta}{\theta}\{-\frac{(\alpha-1)^2}{(9-\alpha)(\alpha+1)}+\frac{8(\alpha-1)}{(9-\alpha)q}\}}, \end{aligned}$$

$$\|\varphi_k^N(x)\|_{L^2} \geqslant \|v(k\delta_N,x)\|_{L^2}-\Big\|\int_0^{k\delta_N} S(k\delta_N-\tau)\widetilde{G}(v,w,0)(\tau)\mathrm{d}\tau\Big\|_{L^2}$$

$$\geqslant C_0^{-1}N^{\frac{1-\theta}{\theta}}-CkN^{-1+\frac{1-\theta}{\theta}\{-\frac{(\alpha-1)^2}{(9-\alpha)(\alpha+1)}+\frac{8(\alpha-1)}{(9-\alpha)q}\}}.$$

因此若下式成立:

$$\begin{cases}C_0N^{\frac{1-\theta}{\theta}}+CkN^{-1+\frac{1-\theta}{\theta}\{-\frac{(\alpha-1)^2}{(9-\alpha)(\alpha+1)}+\frac{8(\alpha-1)}{(9-\alpha)q}\}}\leqslant 2C_0N^{\frac{1-\theta}{\theta}},\\ C_0^{-1}N^{\frac{1-\theta}{\theta}}-CkN^{-1+\frac{1-\theta}{\theta}\{-\frac{(\alpha-1)^2}{(9-\alpha)(\alpha+1)}+\frac{8(\alpha-1)}{(9-\alpha)q}\}}\geqslant (2C_0)^{-1}N^{\frac{1-\theta}{\theta}},\end{cases}\tag{4.6}$$

即可得到 (4.5) 式. 解不等式组 (4.6) 得

$$k\leqslant CN^{1+\frac{1-\theta}{\theta}\{\frac{6\alpha+10}{(9-\alpha)(\alpha+1)}-\frac{8(\alpha-1)}{(9-\alpha)q}\}}=k^*,$$

因此最大的 k_0 为 $k_0=[k^*]$, 即局部解的最大存在区间的上界 $T_N=k_0\delta_N=[k^*]\delta_N$.

第二步证明在 q 取充分大, 且 p,α 满足定理 1.2 的假设条件时, 解 u 可以延拓至无穷, 即 $T_N=\infty$.

由 k^* 和 δ_N 的定义可知

$$\begin{aligned}T_N&=[k^*]\delta_N\geqslant(k^*-1)\delta_N\\&=k^*\delta_N-\delta_N\\&=CN^{1-\frac{1-\theta}{\theta}\{\frac{2(4\alpha^2-3\alpha-9)}{(9-\alpha)(\alpha+1)}+\frac{8(\alpha-1)}{(9-\alpha)q}\}}-CN^{-\frac{1-\theta}{\theta}\cdot\frac{8(\alpha-1)}{9-\alpha}}.\end{aligned}\tag{4.7}$$

因为 $\frac{1-\theta}{\theta}\cdot\frac{8(\alpha-1)}{9-\alpha}>0$, $N>1$, 所以 $N^{-\frac{1-\theta}{\theta}\cdot\frac{8(\alpha-1)}{9-\alpha}}<1$, 因此, 带回 (4.7) 式中可得

$$T_N\geqslant CN^{1-\frac{1-\theta}{\theta}\{\frac{2(4\alpha^2-3\alpha-9)}{(9-\alpha)(\alpha+1)}+\frac{8(\alpha-1)}{(9-\alpha)q}\}}-C.$$

由于 N 可取任意大, 即说明若 $1-\frac{1-\theta}{\theta}\{\frac{2(4\alpha^2-3\alpha-9)}{(9-\alpha)(\alpha+1)}+\frac{8(\alpha-1)}{(9-\alpha)q}\}$ 是严格正的, 则 T_N 也可以任意大. 又由于当 p_0 无限接近于 $\alpha+1$ 时, q 也趋于无穷大, 因此仅需满足

$$1-\frac{1-\theta}{\theta}\cdot\frac{2(4\alpha^2-3\alpha-9)}{(9-\alpha)(\alpha+1)}>0.\tag{4.8}$$

同时, 通过 $p_0=\alpha+1$ 和 $\frac{4}{q}+\frac{1}{\alpha+1}=\frac{1}{p_0}$ 可知 $\frac{1}{p'}=\frac{1-\theta}{(\alpha+1)'}+\frac{\theta}{2}$ 成立, 即

$$\frac{1}{\theta}=\frac{p(1-\alpha)}{2(p-\alpha-1)}.$$

简化 (4.8) 式可得

$$\frac{1}{\theta}\cdot 2(4\alpha^2-3\alpha-9)<(9-\alpha)(\alpha+1)+2(4\alpha^2-3\alpha-9).$$

由于方程 $4\alpha^2-3\alpha-9=0$ 有两个解 $\alpha=\frac{3\pm\sqrt{153}}{8}$, 故当 $1<\alpha\leqslant\frac{3+\sqrt{153}}{8}$, 有

$$\begin{aligned}&\frac{1}{\theta}>\frac{(9-\alpha)(\alpha+1)}{2(4\alpha^2-3\alpha-9)}+1=\frac{(7\alpha+9)(\alpha-1)}{2(4\alpha^2-3\alpha-9)}\\ \Leftrightarrow\quad&\frac{p(1-\alpha)}{2(p-\alpha-1)}>\frac{(7\alpha+9)(\alpha-1)}{2(4\alpha^2-3\alpha-9)}\\ \Leftrightarrow\quad&\frac{p}{\alpha+1-p}>\frac{7\alpha+9}{4\alpha^2-3\alpha-9}.\end{aligned}$$

该式显然成立, 因此在这种情况下, 有 $p<\alpha+1$.

当 $\frac{3+\sqrt{153}}{8}<\alpha<9$, 类似地可得

$$\frac{1}{\theta}<\frac{(7\alpha+9)(\alpha-1)}{2(4\alpha^2-3\alpha-9)}$$

$$
\begin{aligned}
\Leftrightarrow &\qquad \frac{p}{2(\alpha+1-p)} < \frac{7\alpha+9}{2(4\alpha^2-3\alpha-9)}\\
\Leftrightarrow &\qquad \frac{-(\alpha+1-p-\alpha-1)}{\alpha+1-p} < \frac{7\alpha+9}{4\alpha^2-3\alpha-9}\\
\Leftrightarrow &\qquad \frac{\alpha+1}{(\alpha+1-p)} > \frac{7\alpha+9}{(4\alpha^2-3\alpha-9)}+1 = \frac{4\alpha^2+4\alpha}{4\alpha^2-3\alpha-9}\\
\Leftrightarrow &\qquad 4\alpha^2-3\alpha-9 < 4\alpha(\alpha+1-p)\\
\Leftrightarrow &\qquad p < \frac{7\alpha+9}{4\alpha} < \alpha+1.
\end{aligned}
$$

综上, 本文得到了定理 1.2 中整体解存在的条件.

致谢 感谢审稿人和编辑提出的建议和意见.

参 考 文 献

[1] Karpmar V I. Stabilization of solution instabilities by higher-order dispersion: fourth-order nonlinear Schrödinger-type equations [J]. *Phys Rev E*, 1996, 53(2):1336–1339.

[2] Karpmar V I, Shagalov A G. Stability of solution decribed by nonlinear Schrödinger-type equations with higher-order dispersion [J]. *Phys D*, 2000, 144:194–210.

[3] Aceves A, De Angelis C, Turitsyn S. Multidimensional solitons in fiber arrays [J]. *Optim Lett*, 1995, 19:329–331.

[4] Dysthe K. Note on a modification to the nonlinear Schrödinger equation for application to deep water waves [J]. *Proc R Soc Lond Ser A*, 1979, 369:105–114.

[5] Hirota R. Direct methods in soliton theory [M]. Berlin: Springer-Verlag, 1980.

[6] Ivano B, Kosevich A. Stable three-dimensional small-amplitude soliton in magnetic materials [J]. *Sov J Low Temp Phys*, 1983, 9:439–442.

[7] Wen S, Fan D. Spatiotemporal instabilities in nonlinear Kerr media in the presence of arbitrary higher order dispersions [J]. *J Opt Soc Amer B*, 2002, 19:1653–1659.

[8] Ben-Artzi M, Koch H, Saut I C. Dispersion estimates for fourth-order Schrödinger equation [J]. *C R Acad Sci*, 2000, 330(1):87–92.

[9] Miao C, Xu G, Zhao L. Global well-posedness and scattering for the defousing energy critical nonlinear Schrödinger equation of fourth order in the radial case [J]. *J Differ Equ*, 2009, 246:3715–3749.

[10] Miao C, Xu G, Zhao L. Global well-posedness and scattering for the focusing energy critical nonlinear Schrödinger equations of fourth order in dimension $d \geqslant 9$ [J]. *J Differ Equ*, 2011, 251:3381–3402.

[11] Pausader B. Global well-poedness for energy critical fourth-order Schrödinger equations in the radial case [J]. *Dyn Partial Differ Equ*, 2007, 4(3):197–225.

[12] Pausader B. The focusing energy-critical fourth-order Schrödinger equations with radial data, discrete contin [J]. *Dyn Syst*, 2009, 24:1275–1292.

[13] Pausader B. The cubic fourth-order Schrödinger equation [J]. *J Funct Anal*, 2009, 256:2473–2517.

[14] Guo C, Cui S. Well-posedness of the Cauchy problem of high dimension non-isotropic fourth-order Schrödinger equations in Sobolev spaces [J]. *Nonlinear Anal*, 2009, 70:3761–3772.

[15] Wang Y. Nonlinear fourth-order Schrödinger equations with radial data [J]. *Nonlinear Anal*, 2012, 75:2534–2541.

[16] Pausader B, Shao S. The mass-critical fourth-order Schrödinger equation in high dimensions [J]. *J Hyper Diff Equ*, 2010, 7:651–705.

[17] Zhu S, Yang H, Zhang J. Blow-up of rough solutions nonlinear to the fourth-order nonlinear Schrödinger equation [J]. *Nonlinear Anal*, 2011, 74:6186–6201.

[18] Guo A, Cui S. On the Cauchy problem of fourth-order nonlinear Schrödinger equations [J]. *Nonlinear Anal*, 2007, 66:2911–2930.

[19] Zhou Y. Cauchy problem of nonlinear Schrödinger equation with initial data in Sobolev space $W^{s,p}$ for $p < 2$ [J]. *Trans Amer Math Soc*, 2010, 362:4683–4694.

[20] Cazenave T, Vega L, Vilela M C. A note on the nonlinear Schrödinger equation in weak L^p spaces [J]. *Commun Contemp Math*, 2001, 3(1):153–162.

[21] Hyakuna R, Tsutsumi M. On existence of global solutions of Schrödinger equation with subcritical nonlinearity for $\widehat{L}^p$-initial data [J]. *Proc Amer Math Soc*, 2012, 140:3905–3920.

[22] Hyakuna R. Global solutions to the Hartree equation for large L^p-initial data [J]. *Indiana Univ Math J*, 2019, 68:1149–1172.

[23] Hyakuna R. Local and global well-posedness, and $L^{p'}$-decay estimates for 1D nonlinear Schrödinger equation with Cauchy data in L^p [J]. *J Funct Anal*, 2020, 278, 108511, 38 pp.

[24] Vargas A, Vega L. Global well-posedness for $1D$ non-linear Schrödinger equation for data with an infinte L^2 norm [J]. *J Math Pures Appl*, 2001, 80:1029–1044.

[25] Bourgain J. Global solutions of nonlinear Schrödinger equations [M]. Rhode Island: Amer Math Soc Colloquium Publ, vol 46, 1999.

[26] Dinh V D. On the focusing mass-critical nonlinear fourth-order Schrödinger equation below the energy space [J]. *Dyn Partial Differ Equ*, 2017, 14:295–320.

[27] Dinh V D. Dynamics of radial solutions for the focusing fourth-order nonlinear Schrödinger equations [J]. *Nonlinearity*, 2021, 34(2):776–821.

[28] Fibich G, Ilan B, Papanicolaou G. Self-focusing with fourth order dispersion [J]. *SIAM J Appl Math*, 2002, 62(4):1437–1462.

Existence of Global Solution for the Nonlinear Fourth-Order Schrödinger Equations with Initial Data in $\widehat{L}^p$-Spaces

WANG Deng[1] YANG Han[1]

[1]School of Mathematics, Southwest Jiaotong University, Chengdu 611756, China.
E-mail: Wangdeng@my.swjtu.edu.cn; hanyang95@263.net

Abstract The purpose of this paper is to study global well-posedness of the Cauchy problem for the nonlinear fourth-order Schrödinger equations with initial data $u_0 \in \widehat{L}^p$. Much less is known about the solvability of this Cauchy problem when $p \neq 2$. Moreover, motivated by some results for the second-order Schrödinger equations, and with an data-decomposition lemma for $\widehat{L}^p$-spaces and the Strichartz estimates, the authors show that the problem has a global solution in the case of $p > 2$ and under some conditions of nonlinear term index.

Keywords Fourth-order Schrödinger equations, Global solution, $\widehat{L}^p$-initial data, Strichartz estimates

2000 MR Subject Classification 35A01, 35G25, 35Q55

The English translation of this paper will be published in
Chinese Journal of Contemporary Mathematics, Vol. 43 No. 2, 2022
by ALLERTON PRESS, INC., USA