数 学 年 刊 A 辑
2022, 43(2):153–190
DOI: 10.16205/j.cnki.cama.2022.0011

带权无穷小双代数*

张 毅[1] 高 兴[2]

提要 作为非齐次结合经典 Yang-Baxter 方程的代数抽象, 带权无穷小双代数在数学和数学物理领域扮演着重要的角色. 本文引入了带权无穷小 Hopf 模的概念, 证明了带权拟三角无穷小单位双代数上的任意模都有一个自然的带权无穷小单位 Hopf 模结构. 利用一种新的方式装饰平面根森林, 并证明根森林的空间, 连同它上边的余乘和一组嫁接算子是集合上权为零的自由多重 1- 余圈无穷小单位双代数. 给出了余乘的一个组合解释. 作为应用, 得到了未装饰的平面根森林上的余圈无穷小单位双代数范畴中的初始对象, 它也是 (非交换)Connes-Kreimer-Hopf 代数中的研究对象. 最后, 分别从任意带权无穷小双代数和带权交换无穷小双代数导出了两个预李代数, 其中第二个构造推广了 Novikov 代数上的 Gelfand-Dorfman 定理.

关键词 根森林, 无穷小双代数, 带算子代数, 预李代数
MR (2000) 主题分类 16W99, 05C05, 16T10, 16T30, 17B60, 81R10
中图法分类 O153.3
文献标志码 A
文章编号 1000-8314(2022)02-0153-38

§1 引 言

§1.1 无穷小双代数

无穷小双代数的概念源于 Joni-Rota[1] 的开创性工作, 目的是为牛顿差分法的计算提供一个代数框架. 具体来说, 无穷小双代数是一个模 A, 它同时是一个代数 (可以没有单位) 和一个余代数 (可以没有余单位), 并且使得余代数的余乘 $\Delta : A \to A \otimes A$ 满足

$$\Delta(ab) = a \cdot \Delta(b) + \Delta(a) \cdot b, \quad \forall\, a, b \in A. \tag{1.1}$$

Aguiar[2] 证明了不存在非平凡的同时具有单位和余单位的无穷小双代数. 在文 [3] 中, Aguiar 以无穷小 Hopf 代数为名给一个无穷小双代数配备了一个对极 S, 考虑了它的许多组合性质, 并发现它在 Yang-Baxter 方程, Drinfeld 对, 预李代数和支撑代数等领域有广泛的应用. 无穷小双代数和无穷小 Hopf 代数的基本理论最初是在文 [2, 4–5] 中建立的, 例如拟三角无穷小双代数, 对应的结合 Yang-Baxter 方程和 Drinfeld 对. 2010 年, 白[6]介绍

本文 2021 年 1 月 21 日收到, 2021 年 11 月 24 日收到修改稿.
[1]南京信息工程大学数学与统计学院, 南京 210044; 南京信息工程大学江苏省应用数学中心/江苏省系统建模与数据分析国际合作联合实验室, 南京 210044. E-mail: zhangy2016@nuist.edu.cn
[2]通信作者. 兰州大学数学与统计学院, 兰州 730000. E-mail: gaoxing@lzu.edu.cn
*本文受到国家自然科学基金 (No. 12101316, No. 12071191, No. 11771191) 和南京信息工程大学人才启动金 (No. 21r014) 的资助.

[0]1. 这篇论文是在多年前开始的, 受这篇论文启发的一些其它论文已经发表[20, 50, 59−60]. 关于带权无穷小双代数的最新进展促使我们恰当地完成了这篇论文. 应该指出的是, 文 [50, 59] 是两种不同的结构, 它们都不能涵盖本文第 4 节中的结果.

了反对称无穷小双代数的概念, 并发现它与叶形 D-双代数[6], Frobenius 代数[6], $\mathcal{O}$-算子[7], 和广义结合 Yang-Baxter 方程[8]有着密切的联系. 近年来, 王 - 王[9]推广了 Aguiar[2] 的结果并且对辫子无穷小 Hopf 代数的 Drinfeld 对进行了系统的研究. Yau[10] 引入了无穷小 Hom 双代数, 并由刘 -Makhlouf-Menni-Panaite[11] 作了进一步研究.

§1.2 无穷小双代数带权的动机

2006 年, Loday-Ronco[12] 引入了另一种观点下的无穷小双代数和无穷小 Hopf 代数, 并由 Foissy[13−14] 在根树上带来了生机. 具体来说, Loday 和 Ronco 观点下的无穷小双代数是一个模 A, 它同时是一个代数 (带单位) 和一个余代数 (带余单位), 并且使其余乘 Δ 满足下面的相容性条件:

$$\Delta(ab) = a\cdot\Delta(b) + \Delta(a)\cdot b - a\otimes b,\quad \forall\, a,b\in A. \tag{1.2}$$

在 Ebrahimi-Fard 的博士论文[15]中, 他统一了这两个相容性条件 —— 等式 (1.1) 和 (1.2)—— 使之成为一个带权的形式:

$$\Delta(ab) = a\cdot\Delta(b) + \Delta(a)\cdot b + \lambda(a\otimes b),\quad \forall\, a,b\in A,$$

其中 $\lambda\in\mathbf{k}$ 是一个固定常数. 这就引出了带权无穷小双代数 (Hopf 代数) 的概念[15], 见下文定义 2.1.

我们的第二个动机来源于带权的结合经典 Yang-Baxter 方程[15], 它以非齐次结合经典 Yang-Baxter 方程为名被 Ogievetsky-Popov[16] 重新发现. 平行于经典 Yang-Baxter 方程的解给出李双代数和量子群[17]这一众所周知的事实, Aguiar[2] 研究了结合 Yang-Baxter 方程 (简写为 AYBE)[18−19]:

$$r_{13}r_{12} - r_{12}r_{23} + r_{23}r_{13} = 0,$$

并证明了代数 A 中 AYBE 的任意解 r 都诱导出一个权为零的无穷小单位双代数. Ebrahimi-Fard[15] 通过引入带权结合经典 Yang-Baxter 方程:

$$r_{13}r_{12} - r_{12}r_{23} + r_{23}r_{13} = \lambda r_{13},$$

推广了该结果. 值得一提的是, 通过关联一个带权的主导子[15−16,20], 代数 A 上的带权结合经典 Yang-Baxter 方程的任一解都可以赋予 A 一个带权无穷小双代数. 因此, 带权无穷小双代数可视为带权结合经典 Yang-Baxter 方程的代数含义.

§1.3 和组合学的联系

根树和根森林是组合学和代数学中重要的研究对象. 最重要的例子之一是根森林的 Connes-Kreimer-Hopf 代数, 它在文 [21–26] 中被广泛地介绍和研究, 并用于处理量子场论中的重整化问题[27−30]. 在根森林上还有许多其它的 Hopf 代数结构, 例如 Foissy-Holtkamp Hopf 代数[31−32], Loday-Ronco Hopf 代数[33]和 Grossman-Larson Hopf 代数[34]. 这些根森林上的代数结构之所以具有重要意义, 是因为它们大多具有泛性质. 例如, 根森林上的 Connes-Kreimer Hopf 代数从带有线性算子的代数范畴中的初始对象继承其代数结构[26,31]. 最近, 通过装饰平面根森林, 根森林的这一泛性质在文 [35] 中得到了推广, 并在文 [36] 中通过平面二元树研究了 Loday-Ronco-Hopf 代数的泛性质.

上一段提到的带有 (一个或多个) 线性算子代数的概念是由 Kurosh[37] 引入的. 后来, 郭[38]称它们为 Ω-带算子代数, 并在一些组合对象上构造了这类代数的自由对象, 如

Motzkin 路, 根森林和括号字. 这里的 Ω 是一个用来标记线性算子的集合, 另见 [39–40]. 借助于一个嫁接算子, 著名的根森林的 Connes-Kreimer-Hopf 代数也可以放在带算子代数的框架下. 此外, 其顶点由非空集合 Ω 装饰的平面根森林 $H_{\mathrm{RT}}(\Omega)$, 连同一族嫁接算子 $(B_\omega^+)_{\omega\in\Omega}$ 是 Ω-带算子代数范畴下的起始对象 (或空集上的自由对象)[35,41].

第一个有趣的例子是在多项式代数 $\mathbf{k}\langle x_1,\cdots,x_n\rangle$ 上构造一个权为 λ 的无穷小双代数. 我们还在一类装饰平面根森林 $H_{\mathrm{RT}}(X,\Omega)$ 上构造了权为 0 的无穷小双代数, 并给出了它的余乘的组合解释, 就像在 Connes-Kreimer Hopf 代数中通过容许剪切得到的余乘一样. 受 $H_{\mathrm{RT}}(X,\Omega)$ 上的嫁接算子 $(B_\omega^+)_{\omega\in\Omega}$ 的启发, 我们将我们的框架扩展到 Ω-带算子代数的框架下, 并引入权为 λ 的 Ω-带算子无穷小双代数 (Hopf 代数). 进一步, 关联一个无穷小观点下的 Hochschild 1- 余循环条件和单位, 我们引入了权为 λ 的 Ω-余循环无穷小单位双代数 (Hopf 代数). 通常, 组合对象具有一些泛性质, 我们证明了带装饰的根森林 $H_{RT}(X,\Omega)$, 连同一族嫁接算子 $(B_\omega^+)_{\omega\in\Omega}$, 是权为零的 Ω-余圈无穷小单位双代数 (Hopf 代数) 范畴的自由对象.

§1.4 和罗巴代数的联系

罗巴代数的概念起源于 Baxter[42] 对概率论的研究, 是为了在浮动理论中理解 Spitzer 恒等式, 一些著名的数学家, 例如 Atkinson-Cartier-Rota[43] 对其作了更深的研究. 更准确地说, 对于给定的交换环 $\mathbf{k}$ 和固定常数 $\lambda\in\mathbf{k}$, 权为 λ 的罗巴代数是指二元组 (R,P), 其中 R 是结合代数, $P: R\to R$ 是线性映射, 且满足以下的罗巴等式:

$$P(x)P(y)=P(xP(y)+P(x)y+\lambda xy),\quad \forall\, x,y\in R, \tag{1.3}$$

称 P 为一个权为 λ 的罗巴算子. 罗巴代数可以视为积分算子的代数抽象, 平行于微分代数是微分算子的代数抽象这一基本事实. 设 (C,Δ,ε) 是余代数, (A,μ) 为结合代数, 则 C 到 A 的全体 $\mathbf{k}$-线性映射的集合 $\mathrm{Hom}_{\mathbf{k}}(C,A)$ 在卷积

$$(f\star g):=\mu(f\otimes g)\Delta,\quad \forall\, f,g\in \mathrm{Hom}_{\mathbf{k}}(C,A)$$

之下是结合代数. 进一步地, 假设 C 是双代数, 并用 C 替换 A, Ebrahimi-Fard[15] 在 $\mathrm{Hom}_{\mathbf{k}}(C,C)$ 上定义了一个新的结合乘法 $\circ$, 即 $\mathrm{Hom}_{\mathbf{k}}(C,C)$ 上线性映射的合成. 设 (C,μ,Δ) 是权为 λ 的无穷小双代数. 定义线性映射

$$\gamma_L:\mathrm{Hom}_{\mathbf{k}}(C,C)\to \mathrm{Hom}_{\mathbf{k}}(C,C),\quad f\mapsto \mathrm{id}_C\star f,$$

$$\gamma_R:\mathrm{Hom}_{\mathbf{k}}(C,C)\to \mathrm{Hom}_{\mathbf{k}}(C,C),\quad f\mapsto f\star \mathrm{id}_C,$$

则 γ_L,γ_R 分别是 $(\mathrm{Hom}_{\mathbf{k}}(C,C),\circ)$ 上两个权为 λ 的交换罗巴算子[15, 命题3.14].

§1.5 和预李代数的联系

预李代数最早出现在 Vinberg 对于凸齐次锥的研究工作中[44], 同时也独立地出现在关于结合代数上同调的研究中[45]. 它与数学和数学物理中的许多领域有着显著的联系, 如李群和李代数上的复结构和辛结构, 经典和量子 Yang-Baxter 方程, 顶点代数, 量子场论和 operads(见 [46–47] 及其参考文献). Aguiar[5] 从权为零的无穷小双代数出发构造了一个预李代数结构. 我们推广了 Aguiar 的构造, 并从任意一个权为 λ 的无穷小双代数导出了一个预李代数. 此外, 本文引入了权为 λ 的导数的概念, 推广了著名的经典导子的概念. 有

了这个概念, 我们在带权观点下推广了 Novikov 代数上的 Gelfand-Dorfman 定理. 作为应用, 我们从一个带权交换无穷小双代数导出了一个新的预李代数.

鉴于从结合代数到带权无穷小双代数的构造 (见例 2.1(a)), 我们发现结合代数, 预李代数, 李代数和带权无穷小双代数之间有着密切的关系. 这一情形可以用下面不同代数范畴意义下的交换图来概括.

$$
\begin{tikzcd}
\text{结合代数} \arrow[r] \arrow[d] & \text{带权无穷小单位双代数} \arrow[d] \\
\text{李代数} & \text{预李代数} \arrow[l]
\end{tikzcd}
$$

本文安排如下: 第 2 节首先引入了权为 λ 的无穷小单位双代数的概念. 然后, 证明了任何结合代数 (带单位) 都有一个自然的带权无穷小单位双代数结构. 此外, 还引入了带权无穷小余单位双代数的概念, 它促使我们引入带权增广代数. 作为带权导子的对偶, 提出了带权余导子的概念 (见定义 2.6), 并证明了权为 λ 的无穷小双代数的对偶也是权为 λ 的无穷小双代数 (见定理 2.2).

受 Hopf 模的启发, 第 3 节引入了带权无穷小单位 Hopf 模的概念 (见定义 3.1), 它推广了 Aguiar[2] 研究的无穷小 Hopf 模. 我们证明了经典 Hopf 模的一些基本例子在带权无限小双代数的背景下也具有带权无限小 Hopf 版本 (见例 3.3). 我们证明了当 A 是带权拟三角无穷小单位双代数时, 任意 A 模都有一个自然的带权无穷小单位 Hopf 模结构.

第 4 节主要研究装饰平面根森林上的无穷小单位双代数结构. 在回顾了平面根森林的基本知识之后, 首先给出了一种新的装饰平面根森林的方法, 这使得我们构造更一般的自由对象成为可能. 通过运用无穷小观点下的 Hochschild 1- 余循环, 在 $H_{\rm RT}(X,\Omega)$ 上构造了一个新的余乘使其成为一个新的余代数结构 (见引理 4.4). 给出了这个新的余乘的组合解释 (见定理 4.1). 进一步地, 关于拼接乘法, 以空树为单位, $H_{\rm RT}(X,\Omega)$ 可以成为一个权为零的无穷小单位双代数 (见定理 4.2). 将带权无穷小双代数与带算子代数相结合, 提出了带权 Ω-算子无穷小双代数的概念 (见定义 4.3(a)). 当关联无穷小 1- 余循环条件时, 引入了加权 Ω-余循环无穷小单位双代数 (见定义 4.3(c)). 有了这些概念, 我们证明了 $H_{\rm RT}(X,\Omega)$ 是集合 X 上权为零的自由余循环无穷小单位双代数 (见定理 4.3).

第 5 节从带权无穷小双代数推导出一个预李代数结构 (见定理 5.1). 作为应用, 在 $H_{\rm RT}(X,\Omega)$ 上构造了一个预李代数结构 $(H_{\rm RT}(X,\Omega),\rhd_{\rm RT})$ 和一个李代数结构 $(H_{\rm RT}(X,\Omega),[-,-]_{\rm RT})$. 最后给出了 $\rhd_{\rm RT}$ 和 $[-,-]_{\rm RT}$ 的组合解释.

符号: 设 $\mathbf{k}$ 是一个单位交换环, 除非指定相反, 否则它就是所有模, 代数, 余代数, 双代数, 张量积以及线性映射的基环. 代数指的是结合代数 (可能没有单位), 余代数指的是余结合余代数 (可能没有余单位). 我们使用 Sweedler 表示法:

$$\Delta(a)=\sum_{(a)}a_{(1)}\otimes a_{(2)}.$$

对于代数 A, 张量代数 $A\otimes A$ 有一个 A-双模结构, 其中左作用和右作用定义如下:

$$a\cdot(b\otimes c):=ab\otimes c \quad 和 \quad (b\otimes c)\cdot a:=b\otimes ca,\quad \forall\, a,b,c\in A. \tag{1.4}$$

§2 带权无穷小双代数

§2.1 基本定义和例子

本节首先回顾带权无穷小双代数的概念[15], 它同时推广了 Joni-Rota[1] 引入的无穷小双代数以及 Loday-Ronco[12] 提出的无穷小双代数. 其次探究了带权无穷小双代数的基本性质.

定义 2.1[15] 设 λ 是 $\mathbf{k}$ 中某个固定元素.

(a) 称三元组 (A,μ,Δ) 是权为 λ 的无穷小双代数, 如果 (A,μ) 是一个代数 (不含单位), (A,Δ) 是一个余代数 (不含余单位), 且余乘 Δ 满足 A 上带权的导子等式, 即

$$\Delta(ab)=a\cdot\Delta(b)+\Delta(a)\cdot b+\lambda(a\otimes b),\quad \forall\, a,b\in A. \tag{2.1}$$

(b) 若 $(A,\mu,1)$ 是单位 $\mathbf{k}$-代数, 则称四元组 $(A,\mu,1,\Delta)$ 是权为 λ 的无穷小单位双代数.

(c) 若 (A,Δ,ε) 是余单位 $\mathbf{k}$-余代数, 则称四元组 $(A,\mu,\Delta,\varepsilon)$ 是权为 λ 的无穷小余单位双代数.

余下全文, 我们将使用中缀符号 ε-与形容词 infinitesimal 互换.

注 2.1 (a) 这种涉及权重的定义方法使我们能够统一等式 (1.1) 和 (1.2) 中的两个相容性条件, 它们分别被运用于文 [1, 12]. 具体来说, Joni-Rota[1] 介绍的无穷小双代数的权是零, Loday-Ronco[12] 提出的无穷小双代数的权是 -1.

(b) 关于定义中特别强调单位性的目的是, 我们使用的 1-余循环条件需要单位. 特别地, 我们需要利用单位在装饰平面根森林上构造无穷小单位双代数. 事实上, 由 Loday-Ronco[12] 引入的无穷小双代数具有单位和余单位性质. 这里我们需要提醒读者, 当我们在带权无穷小双代数范畴下同时考虑单位和余单位的时候, 必须要求权 $\lambda\neq 0$, 这是因为不存在同时具有单位和余单位的权为零的无穷小双代数[2].

定义 2.2 设 A, B 是两个权为 λ 的无穷小双代数, 称 $\mathbf{k}$-线性映射 $\phi: A\to B$ 是从 A 到 B 的无穷小双代数同态, 如果 ϕ 既是代数同态又是余代数同态. 无穷小单位 (余单位) 双代数同态可以用同样的方式给出定义.

注 2.2 设 $(A,\mu,1,\Delta)$ 是权为 λ 的无穷小单位双代数, 则 $\Delta(1)=-\lambda(1\otimes 1)$. 因为

$$\Delta(1)=\Delta(1\cdot 1)=1\cdot\Delta(1)+\Delta(1)\cdot 1+\lambda(1\otimes 1)=2\Delta(1)+\lambda(1\otimes 1).$$

例 2.1 下面是一些带权无穷小单位 (余单位) 双代数的例子.

(a) 任意的结合代数 $(A,\mu,1)$ 上有一个自然的权为 λ 的无穷小单位双代数结构, 它的余乘定义为:

$$\Delta(a):=-\lambda(a\otimes 1),\quad \forall\, a\in A.$$

(b) 文 [2, 例2.3.5] 中多项式代数 $\mathbf{k}\langle x_1,x_2,x_3,\cdots\rangle$ 上有权为零的无穷小单位双代数结

构, 它的余乘 Δ 由等式 (2.1) 和

$$\Delta(x_n)=\sum_{i=0}^{n-1}x_i\otimes x_{n-1-i}=1\otimes x_{n-1}+x_1\otimes x_{n-2}+\cdots+x_{n-1}\otimes 1$$

给出, 其中规定 $x_0=1$.

(c) 文 [2, 例2.3.2] 中设四元组 $Q=(Q_0,Q_1,s,t)$ 是箭图. 它由顶点的集合 Q_0, 箭向的集合 Q_1, 两个把每个箭向 $a\in Q_1$ 和它的源点 $s(a)\in Q_0$ 和汇点 $t(a)\in Q_0$ 连接起来的映射 $s,t:Q_1\to Q_0$ 组成, 则路代数 $\mathbf{k}Q$ 上有权为零的无穷小单位双代数结构, 它的余乘定义为:

$$\Delta(a_1\cdots a_n):=\begin{cases}0, & \text{如果}\, n=0,\\ s(a)\otimes t(a), & \text{如果}\, n=1,\\ s(a_1)\otimes a_2\cdots a_n+a_1\cdots a_{n-1}\otimes t(a_n) & \\ +\displaystyle\sum_{i=1}^{n-2}a_1\cdots a_i\otimes a_{i+2}\cdots a_n, & \text{如果}\, n\geqslant 2,\end{cases}$$

其中 $a_1\cdots a_n$ 是 $\mathbf{k}Q$ 中的路. 特别地, 当 $n=0$ 时, $a_1\cdots a_n\in Q_0$.

(d) 文 [48, 章节 1.4] 中设 $(A,\mu,1,\Delta,\varepsilon,c)$ 是辫子双代数, 其中 $A=\mathbf{k}\oplus\ker\varepsilon$, 辫子 $c:A\otimes A\to A\otimes A$ 定义为:

$$c:\begin{cases}1\otimes 1\mapsto 1\otimes 1,\\ a\otimes 1\mapsto 1\otimes a,\\ 1\otimes b\mapsto b\otimes 1,\\ a\otimes b\mapsto 0,\end{cases}$$

其中 $a,b\in\ker\varepsilon$, 则 $(A,\mu,1,\Delta,\varepsilon)$ 是权为 -1 的无穷小单位余单位双代数.

(e) 文 [12, 章节 2.3] 中设 V 是向量空间, 则 V 上的张量代数是张量模

$$T(V):=\bigoplus_{n=0}^{\infty}T^nV=\mathbf{k}\oplus V\oplus V^{\otimes 2}\cdots.$$

配备一个叫做拼接的结合乘法:

$$(v_1\otimes v_2\cdots v_i)\otimes(v_{i+1}\otimes\cdots v_n)\mapsto v_1\otimes v_2\cdots v_n,\quad 0\leqslant i\leqslant n.$$

按照惯例, 记 v_1v_0, $v_{n+1}v_n=1$. 张量代数是一个著名的自由结合代数, 则 $T(V)$ 上有权为 -1 的无穷小单位双代数结构, 它的余乘定义为

$$\Delta(v_1\cdots v_n):=\sum_{i=0}^{n}v_1\cdots v_i\otimes v_{i+1}\cdots v_n.$$

(f) 一个系数在 $\mathbf{k}$ 中的非交换多项式代数 $\mathbf{k}\langle x_1,\cdots,x_n\rangle$ 是由 $\{x_1,\cdots,x_n\}$ 生成的自由代数. 记

$$\mathrm{Mon}:=\{x_{i_1}^{\alpha_1}x_{i_2}^{\alpha_2}\cdots x_{i_m}^{\alpha_m}\mid 1\leqslant i_1,i_2,\cdots,i_m\leqslant n,\alpha_k\in\mathbb{N}\},$$

则 Mon 中的元素被称为 $\mathbf{k}\langle x_1,\cdots,x_n\rangle$ 的单项式, 其中的元素来自于 $\{x_1,\cdots,x_n\}$ 中所有字的集合. 注意到 Mon 是 $\mathbf{k}\langle x_1,\cdots,x_n\rangle$ 的一个 $\mathbf{k}$-基并且 Mon 是带有单位 $x_0:=1$ 的自由幺半群. 记 $\mathbf{k}\langle x_1,\cdots,x_n\rangle$ 上的乘法为 m. 对任意长度 $l(w)=n$ 的字 $w\in\mathrm{Mon}$, 定义一个

新的符号来选取 w 的元素. 记

$$w[i,j]:=\begin{cases} w \text{ 的第 } i \text{ 个元素到第 } j \text{ 个元素}, & \text{如果} 1\leqslant i\leqslant j\leqslant n,\\ 1, & \text{其它}.\end{cases}$$

对于任意的字 $w\in\mathrm{Mon}$, 定义

$$\Delta_\varepsilon(w):=\begin{cases} 0, & \text{如果 } w=0,\\ -\lambda(1\otimes 1), & \text{如果 } w=1,\\ \displaystyle\sum_{i=1}^{n} w[1,i-1]\otimes w[i+1,n]+\lambda\sum_{i=1}^{n-1} w[1,i]\otimes w[i+1,n], & \text{如果 } l(w)=n>0,\end{cases}$$

则 $(\mathbf{k}\langle x_1,\cdots,x_n\rangle,\Delta_\varepsilon,m)$ 是一个权为 λ 的 ε-单位双代数.

§2.2 基本性质

我们首先刻画一个引理作为预备.

引理 2.1 设 $(A,\mu,\Delta,\varepsilon)$ 是权为 λ 的无穷小余单位双代数, 则

$$\varepsilon(ab)=-\lambda\varepsilon(a)\varepsilon(b),\quad \forall\, a,b\in A.$$

证 对任意的 $a\in A$, 由余单位性可得

$$a=(\varepsilon\otimes\mathrm{id})\Delta(a)=\sum_{(a)}(\varepsilon\otimes\mathrm{id})\,a_{(1)}\otimes a_{(2)}=\sum_{(a)}\varepsilon(a_{(1)})a_{(2)}. \tag{2.2}$$

因此

$$\varepsilon(a)=\sum_{(a)}\varepsilon(a_{(1)})\varepsilon(a_{(2)})=(\varepsilon\otimes\varepsilon)\Delta(a). \tag{2.3}$$

对任意的 $a,b\in A$,

$$\begin{aligned}\varepsilon(ab)&=(\varepsilon\otimes\varepsilon)\Delta(ab)\qquad(\text{由等式 } (2.3))\\ &=(\varepsilon\otimes\varepsilon)(a\cdot\Delta(b)+\Delta(a)\cdot b+\lambda(a\otimes b))\quad(\text{由等式 } (2.1))\\ &=(\varepsilon\otimes\varepsilon)\Big(\sum_{(b)}ab_{(1)}\otimes b_{(2)}+\sum_{(a)}a_{(1)}\otimes a_{(2)}b+\lambda(a\otimes b)\Big)\\ &=\sum_{(b)}\varepsilon(ab_{(1)})\varepsilon(b_{(2)})+\sum_{(a)}\varepsilon(a_{(1)})\varepsilon(a_{(2)}b)+\lambda\varepsilon(a)\varepsilon(b)\\ &=\sum_{(b)}\varepsilon(ab_{(1)}\varepsilon(b_{(2)}))+\sum_{(a)}\varepsilon(\varepsilon(a_{(1)})a_{(2)}b)+\lambda\varepsilon(a)\varepsilon(b)\\ &=\varepsilon(ab)+\varepsilon(ab)+\lambda\varepsilon(a)\varepsilon(b)\qquad(\text{由等式 } (2.2)).\end{aligned}$$

得证.

注 2.3 (a) 当 $\lambda=-1$, 余单位 ε 是代数同态, 这一结果和经典情形一致. 在这种情形下, 如果代数 A 有单位 1, 则 $\varepsilon(1)=1_{\mathbf{k}}$.

(b) Aguiar[5] 介绍的余单位无穷小双代数的权是 0; Loday-Ronco[12] 提出的余单位无穷小双代数的权是 -1.

受引理 2.1 的启发, 我们引入带权增广代数的概念, 它推广了 Aguiar[5] 研究的增广代数.

定义 2.3 设 λ 是 $\mathbf{k}$ 中的某个固定元素. 称三元组 (A,μ,ε) 是权为 λ 的增广代数, 如果 (A,μ) 是代数 (可以不含单位), 线性映射 $\varepsilon: A\to\mathbf{k}$ 是权为 λ 的增广映射. 即对于任意的 $a,b\in A$, 有

$$\varepsilon(ab)=-\lambda\varepsilon(a)\varepsilon(b). \tag{2.4}$$

定义 2.4 设 (A,μ_A,ε_A) 和 (B,μ_B,ε_B) 是两个权为 λ 的增广代数. 称从 A 到 B 的代数同态 $\phi: A\to B$ 是增广的, 如果它满足 $\varepsilon_B\phi=\varepsilon_A$.

注 2.4 由引理 2.1 可得, 任意的权为 λ 的无穷小余单位双代数是权为 λ 的增广代数.

下面的结果提供了一种在带权无穷小双代数上添加余单位的方法.

命题 2.1 令 (A,μ,Δ) 是权为 λ 的无穷小双代数, 它作为代数是由非空集合 S 生成的. 设 $\varepsilon: A\to\mathbf{k}$ 是权为 λ 的增广映射并且余单位性 $(\varepsilon\otimes\mathrm{id})\Delta=\mathrm{id}=(\mathrm{id}\otimes\varepsilon)\Delta$ 在 S 上成立, 则四元组 $(A,\mu,\Delta,\varepsilon)$ 是权为 λ 的无穷小余单位双代数.

证 我们只需要证明 A 上余单位性成立, 即

$$(\varepsilon\otimes\mathrm{id})\Delta(ab)=ab,\quad \forall\, a,b\in S.$$

对任意的 $a,b\in S$, 由假设可得

$$(\varepsilon\otimes\mathrm{id})\Delta(a)=a\quad 和\quad (\varepsilon\otimes\mathrm{id})\Delta(b)=b.$$

进而有

$$\begin{aligned}(\varepsilon\otimes\mathrm{id})\Delta(ab)&=(\varepsilon\otimes\mathrm{id})(a\cdot\Delta(b)+\Delta(a)\cdot b+\lambda(a\otimes b))\\&=(\varepsilon\otimes\mathrm{id})\Big(\sum_{(b)}ab_{(1)}\otimes b_{(2)}+\sum_{(a)}a_{(1)}\otimes a_{(2)}b+\lambda(a\otimes b)\Big)\\&=\sum_{(a)}\varepsilon(ab_{(1)})\otimes b_{(2)}+\sum_{(a)}\varepsilon(a_{(1)})\otimes a_{(2)}b+\lambda(\varepsilon(a)\otimes b)\\&=-\lambda\sum_{(a)}\varepsilon(a)\varepsilon(b_{(1)})\otimes b_{(2)}+\sum_{(a)}\varepsilon(a_{(1)})\otimes a_{(2)}b+\lambda(\varepsilon(a)\otimes b)\\&=-\lambda\varepsilon(a)b+ab+\lambda(\varepsilon(a)\otimes b)\\&=ab.\end{aligned}$$

因此 ε 是左余单位. 由类似的计算可得 ε 也是右余单位. 命题得证.

通过一个合适的乘法的构造, 下面的结果表明两个权为 λ 的增广代数的张量积仍然可以是权为 λ 的增广代数.

命题 2.2 设 (A,μ_A,ε_A) 和 (B,μ_B,ε_B) 是两个权为 λ 的增广代数, 则 $A\otimes B$ 上有新的结合代数结构, 其乘法 $\cdot_\varepsilon$ 定义为

$$\begin{aligned}(a_1\otimes b_1)\cdot_\varepsilon(a_2\otimes b_2):=&\ \varepsilon_B(b_1)a_1a_2\otimes b_2+\varepsilon_A(a_2)a_1\otimes b_1b_2\\&+\lambda\varepsilon_A(a_2)\varepsilon_B(b_1)a_1\otimes b_2,\quad \forall\, a_i\in A, b_i\in B, 1\leqslant i\leqslant 2.\end{aligned}\tag{2.5}$$

进而, $A\otimes B$ 是权为 λ 的增广代数, 其增广映射定义为

$$\varepsilon_{A\otimes B}(a\otimes b):=\varepsilon_A(a)\varepsilon_B(b),\quad \forall\, a\in A, b\in B. \tag{2.6}$$

证 只需要验证下面的结合律成立. 即对任意的 $a_i\in A, b_i\in B, 1\leqslant i\leqslant 3$,

$$((a_1\otimes b_1)\cdot_\varepsilon(a_2\otimes b_2))\cdot_\varepsilon(a_3\otimes b_3)=(a_1\otimes b_1)\cdot_\varepsilon((a_2\otimes b_2)\cdot_\varepsilon(a_3\otimes b_3)).$$

一方面,

$$\begin{aligned}
&((a_1\otimes b_1)\cdot_\varepsilon(a_2\otimes b_2))\cdot_\varepsilon(a_3\otimes b_3)\\
&=(\varepsilon_B(b_1)a_1a_2\otimes b_2+\varepsilon_A(a_2)a_1\otimes b_1b_2+\lambda\varepsilon_A(a_2)\varepsilon_B(b_1)a_1\otimes b_2)\cdot_\varepsilon(a_3\otimes b_3)\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\text{(由等式 (2.5))}\\
&=\varepsilon_B(b_1)(a_1a_2\otimes b_2)\cdot_\varepsilon(a_3\otimes b_3)+\varepsilon_A(a_2)(a_1\otimes b_1b_2)\cdot_\varepsilon(a_3\otimes b_3)\\
&\quad+\lambda\varepsilon_A(a_2)\varepsilon_B(b_1)(a_1\otimes b_2)\cdot_\varepsilon(a_3\otimes b_3)\\
&=\varepsilon_B(b_1)(\varepsilon_B(b_2)a_1a_2a_3\otimes b_3+\varepsilon_A(a_3)a_1a_2\otimes b_2b_3+\lambda\varepsilon_A(a_3)\varepsilon_B(b_2)a_1a_2\otimes b_3)\\
&\quad+\varepsilon_A(a_2)(\varepsilon_B(b_1b_2)a_1a_3\otimes b_3+\varepsilon_A(a_3)a_1\otimes b_1b_2b_3+\lambda\varepsilon_A(a_3)\varepsilon_B(b_1b_2)a_1\otimes b_3)\\
&\quad+\lambda\varepsilon_A(a_2)\varepsilon_B(b_1)(\varepsilon_B(b_2)a_1a_3\otimes b_3+\varepsilon_A(a_3)a_1\otimes b_2b_3+\lambda\varepsilon_A(a_3)\varepsilon_B(b_2)a_1\otimes b_3)\\
&=\varepsilon_B(b_1)\varepsilon_B(b_2)a_1a_2a_3\otimes b_3+\varepsilon_B(b_1)\varepsilon_A(a_3)a_1a_2\otimes b_2b_3\\
&\quad+\varepsilon_A(a_2)\varepsilon_B(b_1b_2)a_1a_3\otimes b_3+\varepsilon_A(a_2)\varepsilon_A(a_3)a_1\otimes b_1b_2b_3\\
&\quad+\lambda\varepsilon_B(b_1)\varepsilon_A(a_3)\varepsilon_B(b_2)a_1a_2\otimes b_3+\lambda\varepsilon_A(a_2)\varepsilon_A(a_3)\varepsilon_B(b_1b_2)a_1\otimes b_3\\
&\quad+\lambda\varepsilon_A(a_2)\varepsilon_B(b_1)\varepsilon_B(b_2)a_1a_3\otimes b_3+\lambda\varepsilon_A(a_2)\varepsilon_B(b_1)\varepsilon_A(a_3)a_1\otimes b_2b_3\\
&\quad+\lambda^2\varepsilon_A(a_2)\varepsilon_B(b_1)\varepsilon_A(a_3)\varepsilon_B(b_2)a_1\otimes b_3\\
&=\varepsilon_B(b_1)\varepsilon_B(b_2)a_1a_2a_3\otimes b_3+\varepsilon_B(b_1)\varepsilon_A(a_3)a_1a_2\otimes b_2b_3\\
&\quad+\lambda\varepsilon_B(b_1)\varepsilon_A(a_3)\varepsilon_B(b_2)a_1a_2\otimes b_3-\lambda\varepsilon_A(a_2)\varepsilon_B(b_1)\varepsilon_B(b_2)a_1a_3\otimes b_3\\
&\quad+\varepsilon_A(a_2)\varepsilon_A(a_3)a_1\otimes b_1b_2b_3-\lambda^2\varepsilon_A(a_2)\varepsilon_A(a_3)\varepsilon_B(b_1)\varepsilon_B(b_2)a_1\otimes b_3\\
&\quad+\lambda\varepsilon_A(a_2)\varepsilon_B(b_1)\varepsilon_B(b_2)a_1a_3\otimes b_3+\lambda\varepsilon_A(a_2)\varepsilon_B(b_1)\varepsilon_A(a_3)a_1\otimes b_2b_3\\
&\quad+\lambda^2\varepsilon_A(a_2)\varepsilon_B(b_1)\varepsilon_A(a_3)\varepsilon_B(b_2)a_1\otimes b_3\quad\text{(由等式 (2.4))}\\
&=\varepsilon_B(b_1)\varepsilon_B(b_2)a_1a_2a_3\otimes b_3+\varepsilon_B(b_1)\varepsilon_A(a_3)a_1a_2\otimes b_2b_3\\
&\quad+\lambda\varepsilon_B(b_1)\varepsilon_A(a_3)\varepsilon_B(b_2)a_1a_2\otimes b_3+\varepsilon_A(a_2)\varepsilon_A(a_3)a_1\otimes b_1b_2b_3\\
&\quad+\lambda\varepsilon_A(a_2)\varepsilon_B(b_1)\varepsilon_A(a_3)a_1\otimes b_2b_3.
\end{aligned}$$

另一方面,

$$\begin{aligned}
&(a_1\otimes b_1)\cdot_\varepsilon((a_2\otimes b_2)\cdot_\varepsilon(a_3\otimes b_3))\\
&=(a_1\otimes b_1)\cdot_\varepsilon(\varepsilon_B(b_2)a_2a_3\otimes b_3+\varepsilon_A(a_3)a_2\otimes b_2b_3+\lambda\varepsilon_A(a_3)\varepsilon_B(b_2)a_2\otimes b_3)\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\text{(由等式 (2.5))}\\
&=\varepsilon_B(b_2)(a_1\otimes b_1)\cdot_\varepsilon(a_2a_3\otimes b_3)+\varepsilon_A(a_3)(a_1\otimes b_1)\cdot_\varepsilon(a_2\otimes b_2b_3)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+\lambda\varepsilon_A(a_3)\varepsilon_B(b_2)(a_1\otimes b_1)\cdot_\varepsilon(a_2\otimes b_3)\\
=&\ \varepsilon_B(b_2)(\varepsilon_B(b_1)a_1a_2a_3\otimes b_3+\varepsilon_A(a_2a_3)a_1\otimes b_1b_3+\lambda\varepsilon_A(a_2a_3)\varepsilon_B(b_1)a_1\otimes b_3)\\
&+\varepsilon_A(a_3)(\varepsilon_B(b_1)a_1a_2\otimes b_2b_3+\varepsilon_A(a_2)a_1\otimes b_1b_2b_3+\lambda\varepsilon_A(a_2)\varepsilon_B(b_1)a_1\otimes b_2b_3)\\
&+\lambda\varepsilon_A(a_3)\varepsilon_B(b_2)(\varepsilon_B(b_1)a_1a_2\otimes b_3+\varepsilon_A(a_2)a_1\otimes b_1b_3+\lambda\varepsilon_A(a_2)\varepsilon_B(b_1)a_1\otimes b_3)\\
=&\ \varepsilon_B(b_2)\varepsilon_B(b_1)a_1a_2a_3\otimes b_3-\lambda\varepsilon_B(b_2)\varepsilon_A(a_2)\varepsilon_A(a_3)a_1\otimes b_1b_3\\
&-\lambda^2\varepsilon_B(b_2)\varepsilon_A(a_2)\varepsilon_A(a_3)\varepsilon_B(b_1)a_1\otimes b_3+\varepsilon_A(a_3)\varepsilon_B(b_1)a_1a_2\otimes b_2b_3\\
&+\varepsilon_A(a_3)\varepsilon_A(a_2)a_1\otimes b_1b_2b_3+\lambda\varepsilon_A(a_3)\varepsilon_A(a_2)\varepsilon_B(b_1)a_1\otimes b_2b_3\\
&+\lambda\varepsilon_A(a_3)\varepsilon_B(b_2)\varepsilon_B(b_1)a_1a_2\otimes b_3+\lambda\varepsilon_A(a_3)\varepsilon_B(b_2)\varepsilon_A(a_2)a_1\otimes b_1b_3\\
&+\lambda^2\varepsilon_A(a_3)\varepsilon_B(b_2)\varepsilon_A(a_2)\varepsilon_B(b_1)a_1\otimes b_3\quad(\text{由等式 }(2.4))\\
=&\ \varepsilon_B(b_2)\varepsilon_B(b_1)a_1a_2a_3\otimes b_3+\varepsilon_A(a_3)\varepsilon_B(b_1)a_1a_2\otimes b_2b_3\\
&+\varepsilon_A(a_3)\varepsilon_A(a_2)a_1\otimes b_1b_2b_3+\lambda\varepsilon_A(a_3)\varepsilon_A(a_2)\varepsilon_B(b_1)a_1\otimes b_2b_3\\
&+\lambda\varepsilon_A(a_3)\varepsilon_B(b_2)\varepsilon_B(b_1)a_1a_2\otimes b_3.
\end{aligned}
$$

因此结合律成立.

现在继续证明 $A\otimes B$ 是权为 λ 的增广代数. 对任意的 $a_1\otimes b_1, a_2\otimes b_2\in A\otimes B$,

$$
\begin{aligned}
&\varepsilon_{A\otimes B}((a_1\otimes b_1)\cdot_\varepsilon(a_2\otimes b_2))\\
=&\ \varepsilon_{A\otimes B}(\varepsilon_B(b_1)a_1a_2\otimes b_2+\varepsilon_A(a_2)a_1\otimes b_1b_2+\lambda\varepsilon_A(a_2)\varepsilon_B(b_1)a_1\otimes b_2)\\
&\hfill(\text{由等式 }(2.5))\\
=&\ \varepsilon_B(b_1)\varepsilon_{A\otimes B}(a_1a_2\otimes b_2)+\varepsilon_A(a_2)\varepsilon_{A\otimes B}(a_1\otimes b_1b_2)\\
&+\lambda\varepsilon_A(a_2)\varepsilon_B(b_1)\varepsilon_{A\otimes B}(a_1\otimes b_2)\\
=&\ \varepsilon_B(b_1)\varepsilon_A(a_1a_2)\varepsilon_B(b_2)+\varepsilon_A(a_2)\varepsilon_A(a_1)\varepsilon_B(b_1b_2)\\
&+\lambda\varepsilon_A(a_2)\varepsilon_B(b_1)\varepsilon_A(a_1)\varepsilon_B(b_2)\quad(\text{由等式 }(2.6))\\
=&\ -\lambda\varepsilon_B(b_1)\varepsilon_A(a_1)\varepsilon_A(a_2)\varepsilon_B(b_2)-\lambda\varepsilon_A(a_2)\varepsilon_A(a_1)\varepsilon_B(b_1)\varepsilon_B(b_2)\\
&+\lambda\varepsilon_A(a_2)\varepsilon_B(b_1)\varepsilon_A(a_1)\varepsilon_B(b_2)\quad(\text{由等式 }(2.4))\\
=&\ -\lambda\varepsilon_A(a_1)\varepsilon_B(b_1)\varepsilon_A(a_2)\varepsilon_B(b_2)\\
=&\ -\lambda\varepsilon_{A\otimes B}(a_1\otimes b_1)\varepsilon_{A\otimes B}(a_2\otimes b_2).
\end{aligned}
$$

综上所述, 命题得证.

令 $(A,\mu,1,\Delta)$ 是权为 λ 的无穷小单位双代数, 则 **k**-模 $A\otimes A$ 上有余代数结构, 其余乘定义为

$$\Delta_{A\otimes A}: A\otimes A\overset{\Delta\otimes\Delta}{\longrightarrow}A\otimes A\otimes A\otimes A\overset{\mathrm{id}_A\otimes\tau\otimes\mathrm{id}_A}{\longrightarrow}A\otimes A\otimes A\otimes A,$$

其中 $\tau: A\otimes A\to A\otimes A, a\otimes b\mapsto b\otimes a$ 是转换映射[49, 例2.2.2]. 然而在这个余乘之下, 乘法 $\mu: A\otimes A\to A$ 不再是余代数同态. 事实上,

$$\Delta\circ\mu(a\otimes b)=\Delta(ab)=a\cdot\Delta(b)+\Delta(a)\cdot b+\lambda(a\otimes b)$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{(b)} ab_{(1)} \otimes b_{(2)} + \sum_{(a)} a_{(1)} \otimes a_{(2)}b + \lambda(a \otimes b)\\
&\neq \sum_{(a)}\sum_{(b)} a_{(1)}b_{(1)} \otimes a_{(2)}b_{(2)}\\
&= (\mu \otimes \mu) \circ \Delta_{A\otimes A}(a \otimes b).
\end{aligned}
$$

下面, 我们在 $A \otimes A$ 上构造一个新的余乘来解决这个不相容的问题, 这个构造推广了权为零时, Aguiar[2, 引理3.5] 的结果. 首先我们回顾权为 λ 的类群的概念. 设 (C, Δ) 是余代数. 称 C 中元素 e 是权为 λ 的类群元[50], 如果 $\Delta(e) = \lambda(e \otimes e)$. 根据注 2.2, 权为 λ 的无穷小单位双代数的单位元 1 是权为 $-\lambda$ 的类群元.

命题 2.3　设 1_A, 1_B 是两个权为 $-\lambda$ 的类群元, $(A, \Delta_A, 1_A)$, $(B, \Delta_B, 1_B)$ 是余结合余代数, 则 $A \otimes B$ 上有余结合余代数结构, 其余乘定义为

$$
\begin{aligned}
\Delta(a \otimes b) :=& \sum_{(a)} (a_{(1)} \otimes 1_B) \otimes (a_{(2)} \otimes b) + \sum_{(b)} (a \otimes b_{(1)}) \otimes (1_A \otimes b_{(2)})\\
&+ \lambda(a \otimes 1_B) \otimes (1_A \otimes b),
\end{aligned} \tag{2.7}
$$

其中 $a_{(1)}, a_{(2)}, b_{(1)}, b_{(2)}$ 来自于 Sweedler 记法 $\Delta_A(a) = \sum_{(a)} a_{(1)} \otimes a_{(2)}$ 和 $\Delta_B(b) = \sum_{(b)} b_{(1)} \otimes b_{(2)}$.

证　只需要验证余结合律成立. 即对任意的 $a \otimes b \in A \otimes B$,

$$
(\mathrm{id} \otimes \Delta)\Delta(a \otimes b) = (\Delta \otimes \mathrm{id})\Delta(a \otimes b).
$$

由等式 (2.7) 和注记 2.2 中 $\Delta_A(1_A) = -\lambda(1_A \otimes 1_A)$ 可得

$$
\begin{aligned}
\Delta(1_A \otimes b) &= (-\lambda \otimes 1_B) \otimes (1_A \otimes b) + \sum_{(b)} (1_A \otimes b_{(1)}) \otimes (1_A \otimes b_{(2)})\\
&\quad + \lambda(1_A \otimes 1_B) \otimes (1_A \otimes b)\\
&= \sum_{(b)} (1_A \otimes b_{(1)}) \otimes (1_A \otimes b_{(2)}).
\end{aligned} \tag{2.8}
$$

类似地,

$$
\Delta(a \otimes 1_B) = \sum_{(a)} (a_{(1)} \otimes 1_B) \otimes (a_{(2)} \otimes 1_B). \tag{2.9}
$$

一方面,

$$
\begin{aligned}
&(\mathrm{id} \otimes \Delta)\Delta(a \otimes b)\\
&= (\mathrm{id} \otimes \Delta)\Big(\sum_{(a)} (a_{(1)} \otimes 1_B) \otimes (a_{(2)} \otimes b) + \sum_{(b)} (a \otimes b_{(1)}) \otimes (1_A \otimes b_{(2)})\\
&\quad + \lambda(a \otimes 1_B) \otimes (1_A \otimes b)\Big)\\
&= \sum_{(a)} (a_{(1)} \otimes 1_B) \otimes \Delta(a_{(2)} \otimes b) + \sum_{(b)} (a \otimes b_{(1)}) \otimes \Delta(1_A \otimes b_{(2)})\\
&\quad + \lambda(a \otimes 1_B) \otimes \Delta(1_A \otimes b)\\
&= \sum_{(a)} (a_{(1)} \otimes 1_B) \otimes \Big(\sum_{(a_{(2)})} (a_{(2)(1)} \otimes 1_B) \otimes (a_{(2)(2)} \otimes b) + \sum_{(b)} (a_{(2)} \otimes b_{(1)}) \otimes (1_A \otimes b_{(2)})
\end{aligned}
$$

$$+\lambda(a_{(2)}\otimes 1_B)\otimes(1_A\otimes b)\Big)+\sum_{(b)}(a\otimes b_{(1)})\otimes\Big(\sum_{(b_{(2)})}(1_A\otimes b_{(2)(1)})\otimes(1_A\otimes b_{(2)(2)})\Big)$$

$$+\lambda(a\otimes 1_B)\otimes\Big(\sum_{(b)}(1_A\otimes b_{(1)})\otimes(1_A\otimes b_{(2)})\Big)\quad(\text{由等式 (2.7) 和 (2.8)})$$

$$=\sum_{(a)}(a_{(1)}\otimes 1_B)\otimes(a_{(2)}\otimes 1_B)\otimes(a_{(3)}\otimes b)$$

$$+\sum_{(a)}\sum_{(b)}(a_{(1)}\otimes 1_B)\otimes(a_{(2)}\otimes b_{(1)})\otimes(1_A\otimes b_{(2)})$$

$$+\lambda\sum_{(a)}(a_{(1)}\otimes 1_B)\otimes(a_{(2)}\otimes 1_B)\otimes(1_A\otimes b)$$

$$+\sum_{(b)}(a\otimes b_{(1)})\otimes(1_A\otimes b_{(2)})\otimes(1_A\otimes b_{(3)})$$

$$+\lambda\sum_{(b)}(a\otimes 1_B)\otimes(1_A\otimes b_{(1)})\otimes(1_A\otimes b_{(2)}).$$

另一方面,

$$(\Delta\otimes\mathrm{id})\Delta(a\otimes b)$$

$$=(\Delta\otimes\mathrm{id})\Big(\sum_{(a)}(a_{(1)}\otimes 1_B)\otimes(a_{(2)}\otimes b)+\sum_{(b)}(a\otimes b_{(1)})\otimes(1_A\otimes b_{(2)})$$

$$+\lambda(a\otimes 1_B)\otimes(1_A\otimes b)\Big)$$

$$=\sum_{(a)}\Delta(a_{(1)}\otimes 1_B)\otimes(a_{(2)}\otimes b)+\sum_{(b)}\Delta(a\otimes b_{(1)})\otimes(1_A\otimes b_{(2)})$$

$$+\lambda\Delta(a\otimes 1_B)\otimes(1_A\otimes b)$$

$$=\sum_{(a)}\sum_{(a_{(1)})}(a_{(1)(1)}\otimes 1_B)\otimes(a_{(1)(2)}\otimes 1_B)\otimes(a_{(2)}\otimes b)$$

$$+\sum_{(b)}\Big(\sum_{(a)}(a_{(1)}\otimes 1_B)\otimes(a_{(2)}\otimes b_{(1)})$$

$$+\sum_{(b_{(1)})}(a\otimes b_{(1)(1)})\otimes(1_A\otimes b_{(1)(2)})$$

$$+\lambda(a\otimes 1_B)\otimes(1_A\otimes b_{(1)})\Big)\otimes(1_A\otimes b_{(2)})$$

$$+\lambda\sum_{(a)}(a_{(1)}\otimes 1_B)\otimes(a_{(2)}\otimes 1_B)\otimes(1_A\otimes b)\quad(\text{由等式 (2.7) 和 (2.9)})$$

$$=\sum_{(a)}(a_{(1)}\otimes 1_B)\otimes(a_{(2)}\otimes 1_B)\otimes(a_{(3)}\otimes b)$$

$$+\sum_{(b)}\sum_{(a)}(a_{(1)}\otimes 1_B)\otimes(a_{(2)}\otimes b_{(1)})\otimes(1_A\otimes b_{(2)})$$

$$+\sum_{(b)}(a\otimes b_{(1)})\otimes(1_A\otimes b_{(2)})\otimes(1_A\otimes b_{(3)})$$

$$
\begin{aligned}
&+\lambda\sum_{(b)}(a\otimes 1_B)\otimes(1_A\otimes b_{(1)})\otimes(1_A\otimes b_{(2)})\\
&+\lambda\sum_{(a)}(a_{(1)}\otimes 1_B)\otimes(a_{(2)}\otimes 1_B)\otimes(1_A\otimes b)\\
=\ &(\mathrm{id}\otimes\Delta)\Delta(a\otimes b).
\end{aligned}
$$

得证.

于是我们得到下面的结果, 它同时推广了 Aguiar[2] 和 Foissy[13] 的结果.

定理 2.1　我们有下面两个对偶陈述.

(a) 设 $(A,\mu_A,\Delta_A,\varepsilon_A)$ 是权为 λ 的无穷小余单位双代数并且视 $(A\otimes A,\cdot_\varepsilon)$ 为命题 2.2 中的代数, 则 $\Delta_A:(A,\mu_A)\to(A\otimes A,\cdot_\varepsilon)$ 是代数同态.

(b) 设 $(A,\mu_A,\Delta_A,1_A)$ 是权为 λ 的无穷小单位双代数并且视 $(A\otimes A,\Delta)$ 为命题 2.3 中的余代数, 则 $\mu:=\mu_{A\otimes A}:(A\otimes A,\Delta)\to(A,\Delta_A)$ 是余单位同态.

证　(a) 我们只需要证明 $\Delta(a)\cdot_\varepsilon\Delta(b)=\Delta(ab)$, $\forall\, a,b\in A$ 成立. 事实上,

$$
\begin{aligned}
&\Delta_A(a)\cdot_\varepsilon\Delta_A(b)\\
=\ &\Big(\sum_{(a)}a_{(1)}\otimes a_{(2)}\Big)\cdot_\varepsilon\Big(\sum_{(b)}b_{(1)}\otimes b_{(2)}\Big)\\
=\ &\sum_{(a)}\sum_{(b)}(a_{(1)}\otimes a_{(2)})\cdot_\varepsilon(b_{(1)}\otimes b_{(2)})\\
=\ &\sum_{(a)}\sum_{(b)}(\varepsilon(a_{(2)})a_{(1)}b_{(1)}\otimes b_{(2)}+\varepsilon(b_{(1)})a_{(1)}\otimes a_{(2)}b_{(2)}+\lambda\varepsilon(a_{(2)})\varepsilon(b_{(1)})a_{(1)}\otimes b_{(2)})\\
=\ &\sum_{(b)}ab_{(1)}\otimes b_{(2)}+\sum_{(a)}a_{(1)}\otimes a_{(2)}b+\lambda(a\otimes b)\quad(\text{由余单位性})\\
=\ &a\cdot\Delta_A(b)+\Delta_A(a)\cdot b+\lambda(a\otimes b)\\
=\ &\Delta_A(ab).
\end{aligned}
$$

(b) 它是 (a) 的对偶.

§2.3 带权无穷小双代数的对偶

本节通过引入带权余导子的概念, 证明了权为 λ 的无穷小双代数的对偶也是权为 λ 的无穷小双代数.

定义 2.5[20]　设 λ 是 $\mathbf{k}$ 中的某个固定元素, (A,μ) 是代数, W 是 (A,A)-双模. 称映射 $D:A\to W$ 是 A 的权为 λ 的导子, 如果它满足等式 (2.1), 即

$$D\mu=s(\mathrm{id}_A\otimes D)+t(D\otimes\mathrm{id}_A)+\lambda(\mathrm{id}_A\otimes\mathrm{id}_A),$$

其中 $s:A\otimes W\to W$ 和 $t:W\otimes A\to W$ 是两个双模结构映射. 这里, 视 $W=A\otimes A$ 为 (A,A)-双模.

对偶地, 我们引入带权余导子的概念.

定义 2.6 设 λ 是 $\mathbf{k}$ 中的某个固定元素, C 是余代数, W 是 (C,C)-双余模. 称映射 $D:W\to C$ 是权为 λ 的余导子, 如果它满足

$$\Delta D=(\mathrm{id}_C\otimes D)s+(D\otimes\mathrm{id}_C)t+\lambda(\mathrm{id}_C\otimes\mathrm{id}_C),$$

其中 $s:W\to C\otimes W$ 和 $t:W\to W\otimes C$ 是两个双余模结构映射. 这里, 通过映射

$$s=\Delta\otimes\mathrm{id}_C \quad 和 \quad t=\mathrm{id}_C\otimes\Delta \tag{2.10}$$

视 $C\otimes C$ 为 (C,C)-双余模.

注 2.5 (a) 经典导子是权为零的导子, 经典余导子是权为零的余导子[5].

(b) 我们强调经典双代数与带权无穷小双代数的主要区别是关于余乘 Δ 和乘法 μ 的相容性条件. 更准确地说, Δ 在经典双代数里是代数同态, 然而在带权无穷小双代数里是带权导子.

在经典双代数中, 余乘 Δ 是代数同态, 它等价于乘法 μ 是余代数同态. 在带权无穷小双代数中, 我们也有类似的刻画.

命题 2.4 设 (A,μ) 是代数, (A,Δ) 是余代数, 则下列陈述等价:

(a) $\Delta:A\to A\otimes A$ 是权为 λ 的导子.

(b) $\mu:A\otimes A\to A$ 是权为 λ 的余导子.

这里, 根据等式 (1.4), A 作为代数, 视 $A\otimes A$ 为 (A,A)-双模. 根据等式 (2.10), A 作为余代数, 视 $A\otimes A$ 为 (A,A)-双余模.

证 注意到等式 (2.1) 里的相容性条件可以重写为

$$\Delta\mu=(\mu\otimes\mathrm{id}_A)(\mathrm{id}_A\otimes\Delta)+(\mathrm{id}_A\otimes\mu)(\Delta\otimes\mathrm{id}_A)+\lambda(\mathrm{id}_A\otimes\mathrm{id}_A), \tag{2.11}$$

且等式 (2.11) 蕴含映射 $\Delta:A\to A\otimes A$ 是代数 (A,μ) 的带权导子, 它的像集 $A\otimes A$ 是 (A,A)-双模. 换言之, 映射 $\mu:A\otimes A\to A$ 是带权余导子, 它把 A-双余模 $A\otimes A$ 中的元素映到像集 —- 余代数 (A,Δ) 中.

定理 2.2 设 (A,μ,Δ) 是权为 λ 的无穷小双代数且有模同构 $A^*\otimes A^*\cong(A\otimes A)^*$, 则对偶空间 A^* 是权为 λ 的无穷小双代数, 其乘法是

$$A^*\otimes A^*\cong(A\otimes A)^*\xrightarrow{\Delta^*}A^*.$$

余乘是

$$A^*\xrightarrow{m^*}(A\otimes A)^*\cong A^*\otimes A^*.$$

证 由命题 2.4, 权为 λ 的导子和权为 λ 的余导子互为对偶, 则由经典代数和余代数之间的有限对偶性可证得定理成立.

注 2.6 (a) 设 (A,μ,Δ) 是权为 λ 的无穷小双代数, 则 $(A,-\mu,\Delta)$ 和 $(A,\mu,-\Delta)$ 是两个权为 $-\lambda$ 的无穷小双代数, 并且 $(A,-\mu,-\Delta)$ 是权为 λ 的无穷小双代数.

(b) 设 (A,μ,Δ) 是权为零的无穷小双代数. 令 $\mu^{op}=\mu\tau$, $\Delta^{cop}=\tau\Delta$, 则 $(A,\mu^{op},\Delta^{cop})$ 是权为零的无穷小双代数[5].

§3　带权无穷小 Hopf 代数

本节首先引入带权无穷小 (单位)Hopf 模的概念, 并列举一些具体的带权无穷小 Hopf 模的例子. 其次证明了当 A 是第四节介绍的带权拟三角无穷小单位双代数时, 任意 A 模都有一个自然的带权无穷小单位 Hopf 模结构.

§3.1　基本概念和例子

我们首先引入带权无穷小 Hopf 模的概念.

定义 3.1　设 λ 是 $\mathbf{k}$ 中的某个固定元素, (A, μ, Δ) 是权为 λ 的无穷小双代数. 称 $\mathbf{k}$-模 M 是权为 λ 的 (左) 无穷小 Hopf 模, 如果 M 既有左 A-模结构 $\gamma: A\otimes M \to M, a\otimes m \mapsto am$, 又有左 A-余模结构 $\Lambda: M \to A\otimes M, m \mapsto \sum\limits_{(m)} m_{(-1)} \otimes m_{(0)}$, 使得

$$\Lambda\gamma = (\mu\otimes \mathrm{id}_M)(\mathrm{id}_A \otimes \Lambda) + (\mathrm{id}_A \otimes \gamma)(\Delta\otimes \mathrm{id}_M) + \lambda(\mathrm{id}_A \otimes \mathrm{id}_M), \tag{3.1}$$

即

$$\Lambda(am) = a\Lambda(m) + \Delta(a)m + \lambda(a\otimes m), \quad \forall\, a\in A, m\in M. \tag{3.2}$$

进一步地, 如果 $(A, \mu, 1, \Delta)$ 是权为 λ 的无穷小单位双代数, 那么称 M 是权为 λ 的 (左) 无穷小单位 Hopf 模.

注 3.1　(a) 对任意的 $a\in A$, $m\in M$, 我们采用下面符号

$$\gamma(a\otimes m) = am \quad 和 \quad \Lambda(m) = \sum_{(m)} m_{(-1)}\otimes m_{(0)}$$

来表示 $\gamma(a\otimes m)\in M$ 和 $\Lambda(m)\in A\otimes M$. 在上述记法之下, 等式 (3.2) 中的带权无穷小 Hopf 模的相容性条件可被记为

$$\sum_{(m)} (am)_{(-1)}\otimes (am)_{(0)} = \sum_{(m)} am_{(-1)}\otimes m_{(0)} + \sum_{(a)} a_{(1)}\otimes a_{(2)}\cdot m + \lambda a\otimes m,$$

它和经典的 Hopf 模的相容性条件

$$\sum_{(m)} (am)_{(-1)}\otimes (am)_{(0)} = \sum_{(m),(a)} a_{(1)}m_{(-1)}\otimes a_{(2)}\cdot m_{(0)}$$

是不同的.

(b) Aguiar[5] 研究的左无穷小 Hopf 模是权为零的无穷小 Hopf 模.

带权无穷小 Hopf 模满足和经典 Hopf 代数上的经典 Hopf 模类似的一些性质. 改编自文 [51, 章节1.9], 下面的例子表明经典 Hopf 模的例子也具有带权无穷小双代数意义下的带权无穷小 Hopf 模结构. 关于权为零的情况下的结果, 可参考文 [5].

例 3.1　(a) 设 λ 是 $\mathbf{k}$ 中的某个固定元素, (A, μ, Δ) 是权为 λ 的无穷小双代数. 取 $\gamma=\mu$, $\Lambda=\Delta$, 根据带权无穷小双代数的定义, A 是它自身上的权为 λ 的无穷小Hopf代数.

(b) 设 V 是线性空间. 定义

$$\gamma = \mu\otimes \mathrm{id}_V : A\otimes A\otimes V \to A\otimes V \quad 和 \quad \Lambda = \Delta\otimes \mathrm{id}_V : A\otimes V\to A\otimes A\otimes V, \tag{3.3}$$

则 $A\otimes V$ 是权为 λ 的无穷小Hopf 模. 事实上, 对任意的 $a\otimes v\in A\otimes V$, 有

$$(\mathrm{id}_A\otimes\Lambda)\Lambda(a\otimes v) = (\mathrm{id}_A\otimes(\Delta\otimes \mathrm{id}_V))(\Delta\otimes \mathrm{id}_V)(a\otimes v) \quad (由等式\ (3.3))$$

$$
\begin{aligned}
&= (\mathrm{id}_A \otimes (\Delta \otimes \mathrm{id}_V))(\Delta(a) \otimes v) \\
&= \sum_{(a)} (\mathrm{id}_A \otimes (\Delta \otimes \mathrm{id}_V))(a_{(1)} \otimes a_{(2)} \otimes v) \\
&= \sum_{(a)} a_{(1)} \otimes \Delta(a_{(2)}) \otimes v \\
&= \sum_{(a)} \Delta(a_{(1)}) \otimes a_{(2)} \otimes v \ (\text{由余结合律}) \\
&= \sum_{(a)} (\Delta \otimes \mathrm{id}_{A\otimes V})(a_{(1)} \otimes a_{(2)} \otimes v) \\
&= (\Delta \otimes \mathrm{id}_{A\otimes V})(\Delta(a) \otimes v) \\
&= (\Delta \otimes \mathrm{id}_{A\otimes V})\Lambda(a \otimes v).
\end{aligned}
$$

因此余结合律成立. 接下来我们验证相容性条件.

$$
\begin{aligned}
\Lambda\gamma(a \otimes b \otimes v) &= (\Delta \otimes \mathrm{id}_V)(\mu \otimes \mathrm{id}_V)(a \otimes b \otimes v) \\
&= \Delta(ab) \otimes v \quad (\text{由等式 } (3.3)) \\
&= (a \cdot \Delta(b) + \Delta(a) \cdot b + \lambda(a \otimes b)) \otimes v \quad (\text{由等式 } (2.1)) \\
&= (\mu \otimes \mathrm{id}_{A\otimes V})(\mathrm{id}_A \otimes \Delta \otimes \mathrm{id}_v)(a \otimes b \otimes v) \\
&\quad + (\mathrm{id}_A \otimes \mu \otimes \mathrm{id}_V)(\Delta \otimes \mathrm{id}_{A\otimes V})(a \otimes b \otimes v) \\
&\quad + \lambda(\mathrm{id}_A \otimes \mathrm{id}_{A\otimes V})(a \otimes b \otimes v) \\
&= (\mu \otimes \mathrm{id}_{A\otimes V})(\mathrm{id}_A \otimes \Lambda)(a \otimes b \otimes v) + (\mathrm{id}_A \otimes \gamma)(\Delta \otimes \mathrm{id}_{A\otimes V})(a \otimes b \otimes v) \\
&\quad + \lambda(\mathrm{id}_A \otimes \mathrm{id}_{A\otimes V})(a \otimes b \otimes v).
\end{aligned}
$$

因此等式 (3.1) 给定的带权无穷小 Hopf 模的相容性条件成立.

§3.2 模和带权无穷小 Hopf 模

本小节证明了当 A 是带权拟三角无穷小单位双代数, 任意 A 模上有一个带权无穷小单位 Hopf 模结构. 我们首先给出本节使用的一些基本定义和符号, 关于 $\lambda = 0$ 的经典结果, 可参考文 [2, 第 5 章].

定义 3.2 设 λ 是 $\mathbf{k}$ 中的某个固定元素, A 是单位代数, W 是 A-双模.

(a) 称关联元素 $r \in W$ 的线性映射 $\Delta_r : A \to W$ 是权 λ 主的, 如果它满足

$$\Delta_r(a) = a \cdot r - r \cdot a - \lambda(a \otimes 1), \quad \forall\, a \in A. \tag{3.4}$$

(b) 称元素 $r \in W$ 是 A-不变的, 如果它满足 $a \cdot r = r \cdot a$, $\forall\, a \in A$.

注 3.2 由等式 (3.4) 定义的 Δ_r 是权为 λ 的导子.

现在我们回顾带权拟三角 ε-单位双代数的概念. 设 A 是单位代数, $r = \sum\limits_i u_i \otimes v_i \in A \otimes A$, 则权为 λ 的主导子

$$\Delta_r : A \to A \otimes A, \quad a \mapsto a \cdot r - r \cdot a - \lambda(a \otimes 1)$$

是余结合的当且仅当元素

$$r_{13}r_{12} - r_{12}r_{23} + r_{23}r_{13} - \lambda r_{13} \in A \otimes A \otimes A$$

是 A-不变的[15]. 有了这个事实, 如果 r 是 A 的权为 λ 的结合 Yang-Baxter 方程的解, 则四元组 $(A, \mu, 1, \Delta_r)$ 是权为 λ 的 ε-单位双代数[15]. 我们将四元组 $(A, \mu, 1, r)$ 称为一个带权拟三角 ε-单位双代数. 更准确地, 我们有如下定义.

定义 3.3[20]　设 $(A, \mu, 1)$ 是单位代数. 称四元组 $(A, \mu, 1, r)$ 是权为 λ 的拟三角无穷小单位双代数, 如果 $r \in A \otimes A$ 是 A 的权为 λ 的结合 Yang-Baxter 方程的解.

设 Δ_r 是等式 (3.4) 定义的权为 λ 的主导子.

注 3.3　(a) 四元组 $(A, \mu, 1, \Delta_r)$ 是权为 λ 的无穷小单位双代数.

(b) Aguiar[2] 研究的拟三角无穷小双代数是权为零的拟三角无穷小双代数. 在这种情况下, 四元组 $(A, \mu, 1, \Delta_r)$ 是权为零的无穷小单位双代数.

(c) 设 $(A, \mu, 1, r)$ 是权为 λ 的拟三角无穷小单位双代数且 $r = \sum\limits_i u_i \otimes v_i \in A \otimes A$. 在 A 上定义两个二元运算 $\prec, \succ$ 为

$$a \succ b := \sum_i u_i a v_i b \quad 和 \quad a \prec b := \sum_i a u_i b v_i + \lambda ab,$$

则三元组 $(A, \prec, \succ)$ 是叶形代数[20].

我们需要下面的引理.

引理 3.1[20]　设 $(A, \mu, 1, r)$ 是权为 λ 的的拟三角无穷小单位双代数且 $\Delta := \Delta_r$, 则

$$\Delta(a) = a \cdot r - r \cdot a - \lambda(a \otimes 1), \tag{3.5}$$

$$(\Delta \otimes \mathrm{id})(r) = -r_{23}r_{13}, \tag{3.6}$$

$$(\mathrm{id} \otimes \Delta)(r) = r_{13}r_{12} - \lambda(r_{13} + r_{12}). \tag{3.7}$$

反之, 对一些 $r = \sum\limits_i u_i \otimes v_i \in A \otimes A$, 如果权为 λ 的无穷小单位双代数 $(A, \mu, 1, \Delta)$ 满足等式 (3.5)–(3.7), 那么 $(A, \mu, 1, r)$ 是权为 λ 的拟三角无穷小单位双代数并且 $\Delta = \Delta_r$.

现在, 我们陈述这一节的主要结果.

定理 3.1　设 $(A, \mu, 1, r)$ 是权为 λ 的拟三角无穷小单位双代数, M 是左 A-模, 则 M 是 A 上权为 λ 的无穷小单位 Hopf 模, 其余作用 $\Lambda : M \to A \otimes M$ 定义为:

$$\Lambda(m) := -\sum_i u_i \otimes v_i m, \quad \forall\, m \in M.$$

证　我们首先验证余结合律:

$$(\mathrm{id}_A \otimes \Lambda)\Lambda(m) = (\Delta_r \otimes \mathrm{id}_A), \quad \forall\, m \in M.$$

设 $r = \sum\limits_i u_i \otimes v_i$, 则由引理 3.1 可得

$$(\Delta_r \otimes \mathrm{id}_A)(r) = \sum_i \Delta_r(u_i) \otimes v_i = -r_{23}r_{13} = -\sum_{i,j} u_i \otimes u_j \otimes v_j v_i.$$

因此

$$
\begin{aligned}
(\Delta_r \otimes \mathrm{id}_A)\Lambda(m) &= -\sum_i \Delta_r(u_i) \otimes v_i m = \sum_{i,j} u_i \otimes u_j \otimes v_j v_i m \\
&= -\sum_i u_i \otimes \Lambda(v_i m) = (\mathrm{id}_A \otimes \Lambda)\Lambda(m).
\end{aligned}
$$

接下来我们验证等式 (3.2) 中的带权无穷小单位 Hopf 模的相容性条件. 因为 $\Delta_r(a) = a \cdot r - r \cdot a - \lambda(a \otimes 1)$, 所以

$$
\begin{aligned}
a\Lambda(m) + \Delta_r(a)m &= -\sum_i a u_i \otimes v_i m + \sum_i a u_i \otimes v_i m - \sum_i u_i \otimes v_i a m - \lambda(a \otimes m) \\
&= -\sum_i u_i \otimes v_i a m - \lambda(a \otimes m) \\
&= \Lambda(am) - \lambda(a \otimes m).
\end{aligned}
$$

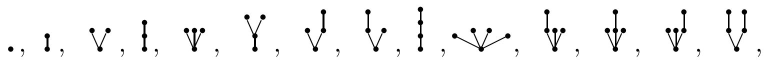
定理得证.

§4 根森林上的无穷小单位双代数

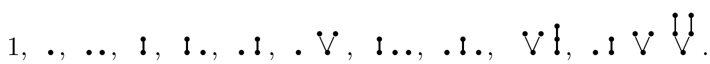
这一节首先回顾平面根森林[52]和装饰平面根森林[31,38]的定义. 其次, 提供了一个新的方法对平面根森林进行装饰, 这种方法推广了文 [31, 35, 38] 中介绍和研究的方法. 最后, 在装饰平面根森林上定义了余乘, 以使其具有余代数结构, 并着眼于在其上构造一个无穷小单位双代数.

§4.1 装饰平面根森林

根树是连通无圈的有限图. 它有一个特殊的顶点, 称为根. 平面根树是能被固定嵌入到平面的根树. 部分顶点个数是 $1,2,3,4,5$ 的平面根树如下所示:

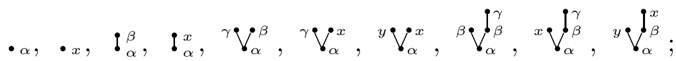


其中树的根画在最下面[52]. 设 $\mathcal{T}$ 是平面根树的集合, $M(\mathcal{T})$ 是由 $\mathcal{T}$ 生成的自由幺半群, 它上面的乘法是拼接乘法, 记为 m_{RT}, 通常被省略. 记 1 为 $M(\mathcal{T})$ 上的空树, 它是 $M(\mathcal{T})$ 的单位元. 称 $M(\mathcal{T})$ 中的元素为平面根森林, 它是平面根树的非交换拼接, 记为 $F = T_1 \cdots T_n$, 其中 $T_1, \cdots, T_n \in \mathcal{T}$, $n \geqslant 0$. 这里我们采用惯例, 当 $n = 0$ 时, $F = 1$. 下面是一些平面根森林的例子.

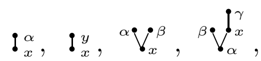


我们现在详细介绍一种平面根森林的新装饰. 设 Ω 是非空集合, X 是另一集合且 $X \cap \Omega = \emptyset$. 记 $\mathcal{T}(X \sqcup \Omega)$ 是顶点由集合 $X \sqcup \Omega$ 中元素装饰的平面根树的集合. 定义 $\mathcal{F}(X \sqcup \Omega) := M(\mathcal{T}(X \sqcup \Omega))$ 为装饰平面根树生成的自由幺半群. 称 $\mathcal{F}(X \sqcup \Omega)$ 中的元素为装饰平面根森林. 设 $\mathcal{T}(X,\Omega)$ $(\mathcal{F}(X,\Omega))$ 是 $\mathcal{T}(X \sqcup \Omega)$ $(\mathcal{F}(X \sqcup \Omega))$ 的子集, 由内点只能被集合 Ω 中的元素装饰, 叶子节点可以被 $X \sqcup \Omega$ 中的元素装饰的平面根树 (根森林) 组成. 换言之, 所有的内点, 以及一些叶子节点是由集合 Ω 里边的元素装饰. 如果一个根树只有一个顶点, 则我们视这个顶点为叶子节点. 从而它既可以被 Ω 装饰又可以被 X 装饰. 下面

是 $\mathcal{T}(X,\Omega)$ 中一些装饰平面根树的例子:



然而, 下面这些例子不在 $\mathcal{T}(X,\Omega)$ 中:



其中 $x,y\in X$, $\alpha,\beta,\gamma\in\Omega$.

我们强调这个新的装饰方法是很广泛的, 包括非交换 Connes-Kreimer-Hopf 代数[32]中的未装饰平面根森林, Foissy-Holtkamp-Hopf 代数[31]中的未装饰平面根森林和文 [35] 中的未装饰平面根森林. 参见下面的注记 4.1.

注 4.1　下面是新装饰平面根森林的一些特殊情形.

(a) 如果 $X=\emptyset$ 和 Ω 都是单点集, 那么 $\mathcal{F}(X,\Omega)$ 中所有的装饰平面根森林都有一个相同的装饰, 因此在同构意义下, 相当于这些平面根森林没有装饰. 不带装饰的平面根森林正是众所周知的 Foissy-Holtkamp Hopf 代数的研究对象, 它也是著名的非交换观点下的 Connes-Kreimer Hopf 代数[31−32].

(b) 如果 $X=\emptyset$, 那么 $\mathcal{F}(X,\Omega)$ 是装饰Foissy-Holtkamp Hopf 代数的研究对象[31].

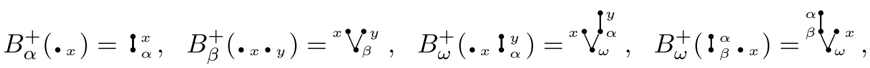
(c) 当 $\Omega=\{\sigma\}$ 是单点集, 那么 $\mathcal{F}(X,\Omega)$ 在文 [35] 中被引入和研究, 并构造了装饰平面根森林上的余循环 Hopf 代数.

(d) 文 [38] 要求平面根森林的所有叶子节点由 X 中的元素装饰, 所有内点由 Ω 中的元素装饰, 然而这种装饰方法处理不了单位的问题, 并且这种装饰根森林上的所有代数结构都是非单位的.

定义 $H_{\rm RT}(X,\Omega):=\mathbf{k}\mathcal{F}(X,\Omega)=\mathbf{k}M(\mathcal{T}(X,\Omega))$ 是 $\mathcal{F}(X,\Omega)$ 生成的自由 $\mathbf{k}$-模. 对任意的 $\omega\in\Omega$, $F\in H_{\rm RT}(X,\Omega)$, 定义

$$B_\omega^+: H_{\rm RT}(X,\Omega)\to H_{\rm RT}(X,\Omega),\quad F\mapsto B_\omega^+(F)$$

为线性嫁接算子, 其中 $B_\omega^+(F)$ 是指将装饰平面根森林 F 嫁接到一个带有装饰 ω 的新的根点上所得的装饰平面根树. 特别地, $B_\omega^+(1)=\bullet_\omega$. 下面是更多关于嫁接算子的例子.



其中 $\alpha,\beta,\omega\in\Omega$, $x,y\in X$. 注意到 $H_{\rm RT}(X,\Omega)$ 关于拼接乘法 m_{RT} 是封闭的.

设 $F=T_1\cdots T_n\in\mathcal{F}(X,\Omega)$, $n\geqslant 0$, $T_1,\cdots,T_n\in\mathcal{T}(X,\Omega)$, 定义 ${\rm bre}(F):=n$ 为 F 的宽度. 这里我们采用惯例, 当 $n=0$, ${\rm bre}(1):=0$.

为了定义装饰平面根森林的深度, 我们首先在 $\mathcal{F}(X,\Omega)$ 上建立一个归纳的结构. 定义 $\bullet_X:=\{\bullet_x\mid x\in X\}$ 和集合

$$\mathcal{F}_0:=M(\bullet_X)=S(\bullet_X)\sqcup\{1\},$$

其中 $M(\bullet_X)$ 和 $S(\bullet_X)$ 分别是由 $\bullet_X$ 生成的 $\mathcal{F}(X,\Omega)$ 的子幺半群和子半群. 这里有一个符号滥用的情形, $M(\bullet_X)$ 当然也是由集合 $\bullet_X$ 生成的自由幺半群, 不过这两个幺半群在同构意义下是唯一的. 因此在不致引起混淆的情形下, 我们不再区分它们.

对于给定的 $n\geqslant 0$, 假设 $\mathcal{F}_n$ 已经被定义, 于是我们定义

$$\mathcal{F}_{n+1}:=M(\bullet_X\sqcup(\sqcup_{\omega\in\Omega}B_\omega^+(\mathcal{F}_n))).$$

因此我们得到 $\mathcal{F}_n \subseteq \mathcal{F}_{n+1}$ 和

$$\mathcal{F}(X,\Omega) = \varinjlim \mathcal{F}_n = \bigcup_{n=0}^{\infty} \mathcal{F}_n. \tag{4.1}$$

称元素 $\mathcal{F}_n \setminus \mathcal{F}_{n-1}$ 里的元素 F 的深度是 n, 记为 $\operatorname{dep}(F) = n$. 下面是一些例子:

$$\operatorname{dep}(1) = \operatorname{dep}(\bullet_x) = 0, \quad \operatorname{dep}(\bullet_\omega) = \operatorname{dep}(B^+_\omega(1)) = 1,$$

$$\operatorname{dep}(\bullet_x \mathbf{I}^{y}_{\omega} \bullet_y) = \operatorname{dep}(\mathbf{I}^{y}_{\omega}) = \operatorname{dep}(B^+_\omega(\bullet_y)) = 1,$$

$$\operatorname{dep}(\mathbf{I}^{\alpha}_{\omega}) = \operatorname{dep}(B^+_\omega(B^+_\alpha(1))) = 2, \quad \operatorname{dep}({}^{\alpha}\mathbf{V}^{x}_{\omega}) = \operatorname{dep}(B^+_\omega(B^+_\alpha(1)\bullet_x)) = 2,$$

其中 $\alpha, \omega \in \Omega$, $x, y \in X$.

§4.2 装饰平面根森林上新的余乘的构造

这一小节在 $H_{\mathrm{RT}}(X,\Omega)$ 上构造一个新的余乘, 使其成为一个权为零的无穷小单位双代数.

对任意的基元 $F \in \mathcal{F}(X,\Omega)$, 我们利用数学归纳法, 通过对 F 的深度 $\operatorname{dep}(F)$ 作归纳来定义 $\Delta_\varepsilon(F)$. 对于归纳的起点 $\operatorname{dep}(F) = 0$, 定义

$$\Delta_\varepsilon(F) := \begin{cases} 0, & F = 1, \\ 1 \otimes 1, & F = \bullet_x, x \in X, \\ \bullet_{x_1} \cdot \Delta_\varepsilon(\bullet_{x_2} \cdots \bullet_{x_m}) + \Delta_\varepsilon(\bullet_{x_1}) \cdot (\bullet_{x_2} \cdots \bullet_{x_m}), & F = \bullet_{x_1} \cdots \bullet_{x_m}, m \geqslant 2, x_i \in X. \end{cases} \tag{4.2}$$

这里的第三种情形, Δ_ε 的定义最终归结为其宽度上的归纳且左右作用定义为等式 (1.4). 对于归纳步骤 $\operatorname{dep}(F) \geqslant 1$, 我们把余乘的定义归结到根森林宽度的归纳上. 若 $\operatorname{bre}(F) = 1$, 对一些 $\omega \in \Omega$ 和 $\overline{F} \in \mathcal{F}(X,\Omega)$, 我们可以记 $F = B^+_\omega(\overline{F})$, 并且定义

$$\Delta_\varepsilon(F) := \Delta_\varepsilon B^+_\omega(\overline{F}) := \overline{F} \otimes 1 + (\mathrm{id} \otimes B^+_\omega)\Delta_\varepsilon(\overline{F}). \tag{4.3}$$

换言之

$$\Delta_\varepsilon B^+_\omega = \mathrm{id} \otimes 1 + (\mathrm{id} \otimes B^+_\omega)\Delta_\varepsilon. \tag{4.4}$$

我们称等式 (4.3) 或等价的等式 (4.4) 是无穷小 1-余循环条件. 若 $\operatorname{bre}(F) \geqslant 2$, 我们可以记 $F = T_1 T_2 \cdots T_m$, $m \geqslant 2$, $T_1, \cdots, T_m \in \mathcal{T}(X,\Omega)$, 并且定义

$$\Delta_\varepsilon(F) := T_1 \cdot \Delta_\varepsilon(T_2 \cdots T_m) + \Delta_\varepsilon(T_1) \cdot (T_2 \cdots T_m). \tag{4.5}$$

下面我们展示一些例子, 以便更好地理解 Δ_ε.

例 4.1 令 $x, y \in X$ 且 $\alpha, \beta, \omega \in \Omega$, 则

$$\Delta_\varepsilon(\bullet_\alpha) = \Delta_\varepsilon(B^+_\alpha(1)) = 1 \otimes 1,$$

$$\Delta_\varepsilon(\mathbf{I}^{x}_{\alpha}) = \Delta_\varepsilon(B^+_\alpha(\bullet_x)) = \bullet_x \otimes 1 + 1 \otimes \bullet_\alpha,$$

$$\Delta_\varepsilon(\bullet_\beta \mathbf{I}^{x}_{\alpha}) = \bullet_\beta \cdot \Delta_\varepsilon(\mathbf{I}^{x}_{\alpha}) + \Delta_\varepsilon(\bullet_\beta) \cdot \mathbf{I}^{x}_{\alpha} = \bullet_\beta \bullet_x \otimes 1 + \bullet_\beta \otimes \bullet_\alpha + 1 \otimes \mathbf{I}^{x}_{\alpha},$$

$$\Delta_\varepsilon({}^{\beta}\mathbf{V}^{\mathbf{I}^{x}_{\alpha}}_{\omega}) = \Delta_\varepsilon(B^+_\omega(\bullet_\beta \mathbf{I}^{x}_{\alpha})) = \bullet_\beta \mathbf{I}^{x}_{\alpha} \otimes 1 + \bullet_\beta \bullet_x \otimes \bullet_\omega + \bullet_\beta \otimes \mathbf{I}^{\alpha}_{\omega} + 1 \otimes \mathbf{I}^{\substack{x\\ \alpha}}_{\omega}.$$

例 4.2　Foissy[13] 构造了不带装饰的平面根森林上的无穷小 Hopf 代数, 其余乘 Δ 定义为

$$\Delta(F):=\begin{cases}1\otimes 1, & \text{如果 } F=1,\\ F\otimes 1+(\mathrm{id}\otimes B^+)\Delta(\overline{F}), & \text{如果 } F=B^+(\overline{F}),\\ F_1\cdot\Delta(F_2)+\Delta(F_1)\cdot F_2-F_1\otimes F_2, & \text{如果 } F=F_1F_2.\end{cases}$$

因此

$$\Delta(\bullet)=\bullet\otimes 1+1\otimes\bullet,$$

$$\Delta\Big(\begin{smallmatrix}\bullet\\|\\\bullet\end{smallmatrix}\Big)=\begin{smallmatrix}\bullet\\|\\\bullet\end{smallmatrix}\otimes 1+\bullet\otimes\bullet+1\otimes\begin{smallmatrix}\bullet\\|\\\bullet\end{smallmatrix},$$

$$\Delta\Big(\bullet\begin{smallmatrix}\bullet\\|\\\bullet\end{smallmatrix}\Big)=\bullet\begin{smallmatrix}\bullet\\|\\\bullet\end{smallmatrix}\otimes 1+\bullet\bullet\otimes\bullet+\bullet\otimes\begin{smallmatrix}\bullet\\|\\\bullet\end{smallmatrix}+1\otimes\bullet\begin{smallmatrix}\bullet\\|\\\bullet\end{smallmatrix},$$

$$\Delta\Big(\begin{smallmatrix}&&\bullet\\&&|\\\bullet&&\bullet\\&\vee&\end{smallmatrix}\Big)=\begin{smallmatrix}&&\bullet\\&&|\\\bullet&&\bullet\\&\vee&\end{smallmatrix}\otimes 1+\bullet\begin{smallmatrix}\bullet\\|\\\bullet\end{smallmatrix}\otimes\bullet+\bullet\bullet\otimes\begin{smallmatrix}\bullet\\|\\\bullet\end{smallmatrix}+\bullet\otimes\begin{smallmatrix}\bullet\\|\\\bullet\\|\\\bullet\end{smallmatrix}+1\otimes\begin{smallmatrix}&&\bullet\\&&|\\\bullet&&\bullet\\&\vee&\end{smallmatrix},$$

这和例 4.2 中列举的余乘是不同的, 即使我们忽略例 4.2 中根森林的装饰.

注 4.2　等式 (4.3) 中给出的无穷小 1-余循环条件和 Connes-Kreimer[22] 研究的经典 1-余循环条件

$$\Delta(F)=\Delta(B^+(\overline{F}))=F\otimes 1+(\mathrm{id}\otimes B^+)\Delta(\overline{F}),\ \forall\, F=B^+(\overline{F})\in\mathcal{T}\tag{4.6}$$

是不同的.

§4.3　余乘的组合解释

这一小节将对余乘 Δ_ε 给出一个组合解释. 令 $V(F)$ 为根森林 F 的所有顶点的集合. Foissy[13,31] 在平面根森林上引入了几类序关系, 这为在根森林上定义森林双理想提供了可能. 我们发现 Foissy[13,31] 的结果同样适用于装饰平面根森林.

定义 4.1　设 $F=T_1\cdots T_n\in\mathcal{F}(X,\Omega)$, 其中 $T_1,\cdots,T_n\in\mathcal{T}(X,\Omega)$, $n\geqslant 0$, 并设 $u,v\in V(F)$, 则称

(a) $u\leqslant_{\mathrm{h}} v$ (更高), 如果在 F 中存在从 u 到 v 的连通定向路径, 要求这个路径必须沿着 F 的边并且 F 的边是从根到叶子节点定向的.

(b) $u\leqslant_{\mathrm{l}} v$ (更靠左), 如果对于 $\leqslant_{\mathrm{h}}$, u 和 v 不相容并且满足下面两个断言之一:

(i) u 是 T_i 的顶点, v 是 T_j 的顶点, 其中 $1\leqslant j<i\leqslant n$.

(ii) u 和 v 都是 T_i 的顶点, 并且在删掉 T_i 的根后所得的装饰根森林中 $u\leqslant_{\mathrm{l}} v$.

(c) $u\leqslant_{\mathrm{h,l}} v$ (更高或更靠左), 如果 $u\leqslant_{\mathrm{h}} v$ 或者 $u\leqslant_{\mathrm{l}} v$.

(d) 称集合 $I\subseteq V(F)$ 是 F 的双理想, 记为 $I\trianglelefteq F$, 如果 $u\in I$ 且 $v\in V(F)$, 使得 $u\leqslant_{\mathrm{h,l}} v\Rightarrow v\in I$. 如果双理想 $I\neq V(F)$, 那么称 I 是 F 的真双理想, 记为 $I\vartriangleleft F$.

空集 $\emptyset$ 是 F 的一个双理想. 任意一个 F 的真双理想 I 都不包含 F 中最右边平面根树 T_n 的根, 这是因为最右边平面根树 T_n 的根是 $V(F)$ 中的关于序 $\leqslant_{\mathrm{h,l}}$ 的最小顶点.

例 4.3　令 $F={}^{\beta}\!\vee^{\gamma}_{\alpha}$. 对于 F 的顶点, 下面的排列表格分别列举出序关系 $\leqslant_{\mathrm{h}}$ 和 $\leqslant_{\mathrm{l}}$.

符号 $\times$ 表示这些顶点在对应的序关系下是不相容的.

$\leqslant_{\rm h}$	$\bullet_\alpha$	$\bullet_\beta$	$\bullet_\gamma$
$\bullet_\alpha$	$=$	$\leqslant_{\rm h}$	$\leqslant_{\rm h}$
$\bullet_\beta$	$\geqslant_{\rm h}$	$=$	$\times$
$\bullet_\gamma$	$\geqslant_{\rm h}$	$\times$	$=$

$\leqslant_{\rm l}$	$\bullet_\alpha$	$\bullet_\beta$	$\bullet_\gamma$
$\bullet_\alpha$	$=$	$\times$	$\times$
$\bullet_\beta$	$\times$	$=$	$\geqslant_{\rm l}$
$\bullet_\gamma$	$\times$	$\leqslant_{\rm l}$	$=$

因此 $\bullet_\alpha \leqslant_{\rm h,l} \bullet_\gamma \leqslant_{\rm h,l} \bullet_\beta$ 并且 ${}^{\beta}\!\vee_{\alpha}^{\gamma}$ 有三个真双理想: $\emptyset$, $\{\bullet_\beta\}$, $\{\bullet_\beta, \bullet_\gamma\}$.

注 4.3 正如文 [13, 章节 2.1] 所示, 对于任意的 $F \in \mathcal{F}(X,\Omega)$,

(a) 序 $\leqslant_{\rm h}$ 是 $V(F)$ 上的一个偏序, 它的 Hasse 图是装饰平面根森林 F;

(b) 序 $\leqslant_{\rm l}$ 是 $V(F)$ 上的一个偏序, 序 $\leqslant_{\rm h,l}$ 是 $V(F)$ 上的一个全序.

下面的引理刻画了装饰平面根森林 F 的所有真森林双理想.

引理 4.1 设 $F \in \mathcal{F}(X,\Omega)$, $u_n \leqslant_{\rm h,l} \cdots \leqslant_{\rm h,l} u_1$ 是它的所有顶点, 则 F 恰好有 n 个真森林双理想:

$$I_k = \{u_1, \cdots, u_{k-1}\}, \quad k = 1, \cdots, n,$$

其中按照惯例 $I_1 = \emptyset$.

证 它和文 [13, 引理 13] 中的证明是一样的.

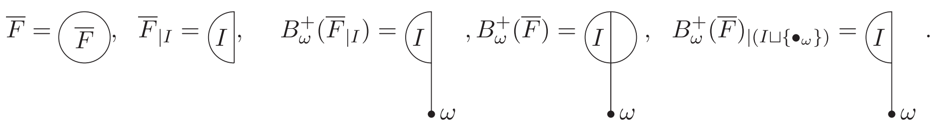
对任意的集合 $I \subseteq V(F)$, 令 $F_{|I}$ 是 F 的导出装饰平面根子森林, 它的顶点的集合是 I, 它的边是 I 中顶点之间的 F 的边. 换言之, 如果把 F 看作图, 那么 $F_{|I}$ 是 F 限制在 I 上的导出子图. 特别地,

$$F_{|\emptyset} := 1 \quad 和 \quad 1_{|I} := 0. \tag{4.7}$$

注 4.4 设 $F = B^+_\omega(\overline{F})$, $\omega \in \Omega$, $\overline{F} \in \mathcal{F}(X,\Omega)$ 并且 $I \subseteq V(\overline{F})$, 则

$$B^+_\omega(\overline{F}_{|I}) = B^+_\omega(\overline{F})_{|(I \sqcup \{\bullet_\omega\})},$$

如下图所示:



引理 4.2 设 $F = B^+_\omega(\overline{F})$, $\omega \in \Omega$, $\overline{F} \in \mathcal{F}(X,\Omega)$, 并且 $I \subseteq V(\overline{F})$, 则 $I \trianglelefteq \overline{F}$ 当且仅当 $I \trianglelefteq F$.

证 根据定义 4.1 和根 $\bullet_\omega$ 关于序 $\leqslant_{\rm h,l}$ 是 $V(F)$ 中最小元的事实可得结果成立.

定理 4.1 采用引理 4.1 中的符号, 我们有

$$\Delta_\varepsilon(F) = \sum_{I_k \trianglelefteq F} F_{|I_k} \otimes F_{|\overline{I}_k} = \sum_{k=1}^{n} F_{|I_k} \otimes F_{|\overline{I}_k}, \tag{4.8}$$

其中 $\overline{I}_k := V(F) \setminus (I_k \sqcup \{u_k\}) = \{u_{k+1}, \cdots, u_n\}$, $k = 1, \cdots, n$, 按照惯例 $\overline{I}_n = \emptyset$.

证 根据引理 4.1 可得第二个等式成立. 根据线性性, 我们只需要证明对任意的基元 $F \in \mathcal{F}(X,\Omega)$ 第一个等式成立即可. 我们采用数学归纳法, 对 F 的顶点个数 $n := |V(F)| \geqslant 0$

进行归纳来证明这一结果. 如果 $n=0$, 那么由等式 (4.7) 可知 $F=1$ 并且 $F_{|I_k}=1_{|I_k}=0$. 根据等式 (4.2) 可得

$$\Delta_\varepsilon(F)=\Delta_\varepsilon(1)=0=\sum_{I_k\trianglelefteq F}F_{|I_k}\otimes F_{|\overline{I}_k}.$$

对于给定的 $m\geqslant 1$, 假设对于 $n<m$ 情形结果成立, 下面考虑 $n=m$ 情形. 在这种情形之下, 我们对 F 的宽度进行归纳来证明结果成立. 因为 $F\in\mathcal{F}(X,\Omega)$, 其中 $|V(F)|=n\geqslant 1$, 所以 $F\neq 1$ 且 $\mathrm{bre}(F)\geqslant 1$. 如果 $\mathrm{bre}(F)=1$, 那么我们需要考虑下面两种情形.

情形 1　$F=\bullet_x$, $x\in X$. 在这种情形下, F 只有一个真双理想 $\emptyset$. 由等式 (4.2) 和等式 (4.7) 可得,

$$\Delta_\varepsilon(F)=\Delta_\varepsilon(\bullet_x)=1\otimes 1=F_{|\emptyset}\otimes F_{|\emptyset}=\sum_{I_k\trianglelefteq F}F_{|I_k}\otimes F_{|\overline{I}_k}.$$

情形 2　$F=B^+_\omega(\overline{F})$, $\overline{F}\in\mathcal{F}(X,\Omega)$, $\omega\in\Omega$. 根据引理 4.1, $\overline{F}$ 的真森林双理想是 I_k, $k=1,\cdots,n-1$. 因此

$$\begin{aligned}
\Delta_\varepsilon(F)&=\Delta_\varepsilon(B^+_\omega(\overline{F}))\\
&=\overline{F}\otimes 1+(\mathrm{id}\otimes B^+_\omega)\Delta_\varepsilon(\overline{F})\quad(\text{由等式}(4.3))\\
&=\overline{F}\otimes 1+(\mathrm{id}\otimes B^+_\omega)\Big(\sum_{I_k\trianglelefteq\overline{F}}\overline{F}_{|I_k}\otimes\overline{F}_{|\overline{I}_k}\Big)\quad(\text{由归纳假设})\\
&=F_{|V(\overline{F})}\otimes F_{|\emptyset}+\sum_{I_k\trianglelefteq\overline{F}}\overline{F}_{|I_k}\otimes B^+_\omega(\overline{F}_{|\overline{I}_k})\\
&=F_{|V(\overline{F})}\otimes F_{|\emptyset}+\sum_{I_k\trianglelefteq\overline{F}}\overline{F}_{|I_k}\otimes B^+_\omega\big(\overline{F}_{|V(\overline{F})\setminus(I_k\sqcup\{u_k\})}\big)\\
&=F_{|V(\overline{F})}\otimes F_{|\emptyset}+\sum_{I_k\trianglelefteq F,I_k\neq V(\overline{F})}\overline{F}_{|I_k}\otimes B^+_\omega\big(\overline{F}_{|V(\overline{F})\setminus(I_k\sqcup\{u_k\})}\big)\quad(\text{由引理 4.2 })\\
&=F_{|V(\overline{F})}\otimes F_{|\emptyset}+\sum_{I_k\trianglelefteq F,I_k\neq V(\overline{F})}\overline{F}_{|I_k}\otimes B^+_\omega(\overline{F})_{|(V(\overline{F})\setminus(I_k\sqcup\{u_k\}))\sqcup\{\bullet_\omega\}}\\
&\qquad\qquad(\text{由注记 4.4})\\
&=F_{|V(\overline{F})}\otimes F_{|\emptyset}+\sum_{I_k\trianglelefteq F,I_k\neq V(\overline{F})}F_{|I_k}\otimes F_{|V(F)\setminus(I_k\sqcup\{u_k\})}\\
&=\sum_{I_k\trianglelefteq F}F_{|I_k}\otimes F_{|\overline{I}_k}.
\end{aligned}$$

假设对于 $n=m$ 且 $\mathrm{bre}(F)<k$ 情形结果成立. 下面考虑情形 $n=m$ 和 $\mathrm{bre}(F)=k\geqslant 2$. 于是我们记 $F=TF'$, 对一些 $T\in\mathcal{T}(X,\Omega)$, $F'\in\mathcal{F}(X,\Omega)$. 一方面,

$$\begin{aligned}
\Delta_\varepsilon(F)&=\Delta_\varepsilon(TF')\\
&=T\cdot\Delta_\varepsilon(F')+\Delta_\varepsilon(T)\cdot F'\quad(\text{由等式 (4.5)})\\
&=T\cdot\sum_{I_{k_2}\trianglelefteq F'}F'_{|I_{k_2}}\otimes F'_{|\overline{I}_{k_2}}+\Big(\sum_{I_{k_1}\trianglelefteq T}T_{|I_{k_1}}\otimes T_{|\overline{I}_{k_1}}\Big)\cdot F'\quad(\text{由归纳假设})\\
&=\sum_{I_{k_2}\trianglelefteq F'}TF'_{|I_{k_2}}\otimes F'_{|\overline{I}_{k_2}}+\sum_{I_{k_1}\trianglelefteq T}T_{|I_{k_1}}\otimes T_{|\overline{I}_{k_1}}F'\quad(\text{由等式 (1.4)}).
\end{aligned}$$

另一方面,

$$
\begin{aligned}
&\sum_{I_k \trianglelefteq F} F_{|I_k} \otimes F_{|\overline{I}_k}\\
&= \sum_{\substack{I_k \trianglelefteq TF',\\ I_k \cap V(F') \neq \emptyset}} F_{|I_k} \otimes F_{|\overline{I}_k} + \sum_{\substack{I_k \trianglelefteq TF',\\ I_k \cap V(F') = \emptyset}} F_{|I_k} \otimes F_{|\overline{I}_k}\\
&= \sum_{\substack{I_k = V(T) \sqcup I_{k_2},\\ \emptyset \neq I_{k_2} \trianglelefteq F'}} F_{|I_k} \otimes F_{|\overline{I}_k} + \Big(\sum_{I_k \trianglelefteq T} F_{|I_k} \otimes F_{|\overline{I}_k} + \sum_{I_k = V(T)} F_{|I_k} \otimes F_{|\overline{I}_k} \Big)\\
&= \sum_{\substack{I_k = V(T) \sqcup I_{k_2},\\ I_{k_2} \trianglelefteq F'}} F_{|I_k} \otimes F_{|\overline{I}_k} + \sum_{I_k \trianglelefteq T} F_{|I_k} \otimes F_{|\overline{I}_k}\\
&= \sum_{\substack{I_k = V(T) \sqcup I_{k_2},\\ I_{k_2} \trianglelefteq F'}} F_{|I_k} \otimes F_{|V(F) \setminus (I_k \sqcup \{u_k\})} + \sum_{I_k \trianglelefteq T} F_{|I_k} \otimes F_{|V(F) \setminus (I_k \sqcup \{u_k\})}\\
&= \sum_{I_{k_2} \trianglelefteq F'} F_{|V(T) \sqcup I_{k_2}} \otimes F_{|V(F) \setminus (V(T) \sqcup I_{k_2} \sqcup \{u_{k_2}\})} + \sum_{I_k \trianglelefteq T} F_{|I_k} \otimes F_{|(V(T) \setminus (I_k \sqcup \{u_k\})) \sqcup V(F')}\\
&= \sum_{I_{k_2} \trianglelefteq F'} TF'_{|I_{k_2}} \otimes F'_{|V(F') \setminus (I_{k_2} \sqcup \{u_{k_2}\})} + \sum_{I_k \trianglelefteq T} F_{|I_k} \otimes T_{|V(T) \setminus (I_k \sqcup \{u_k\})} F'\\
&= \sum_{I_{k_2} \trianglelefteq F'} TF'_{|I_{k_2}} \otimes F'_{|\overline{I}_{k_2}} + \sum_{I_k \trianglelefteq T} T_{|I_k} \otimes T_{|\overline{I}_k} F'.
\end{aligned}
$$

这就完成了宽度 $\mathrm{bre}(F)$ 的归纳证明从而完成了对 $n = |V(F)|$ 的归纳证明. 因此等式 (4.8) 成立.

例 4.4 (a) 考虑 $F = \bullet_\beta \mathbf{I}_\alpha^x$, 则 $\bullet_\alpha \leqslant_{\mathrm{h,l}} \bullet_x \leqslant_{\mathrm{h,l}} \bullet_\beta$. 根据引理 4.1, F 有三个真森林双理想 $\emptyset$, $\{\bullet_\beta\}$ 和 $\{\bullet_\beta, \bullet_x\}$. 因此根据定理 4.1,

$$
\begin{aligned}
\Delta_\varepsilon(\bullet_\beta \mathbf{I}_\alpha^x) &= F_{|\emptyset} \otimes F_{|V(F) \setminus \{\bullet_\beta\}} + F_{|\{\bullet_\beta\}} \otimes F_{|V(F) \setminus (\{\bullet_\beta\} \sqcup \{\bullet_x\})}\\
&\quad + F_{|\{\bullet_\beta, \bullet_x\}} \otimes F_{|V(F) \setminus (\{\bullet_\beta, \bullet_x\} \sqcup \{\bullet_\alpha\})}\\
&= F_{|\emptyset} \otimes F_{|\{\bullet_x, \bullet_\alpha\}} + F_{|\{\bullet_\beta\}} \otimes F_{|\{\bullet_\alpha\}} + F_{|\{\bullet_\beta, \bullet_x\}} \otimes F_{|\emptyset}\\
&= 1 \otimes \mathbf{I}_\alpha^x + \bullet_\beta \otimes \bullet_\alpha + \bullet_\beta \bullet_x \otimes 1.
\end{aligned}
$$

(b) 令 $F = {}^{\beta}\bigvee_{\omega}^{\mathbf{I}_\alpha^x}$, 则 $\bullet_\omega \leqslant_{\mathrm{h,l}} \bullet_\alpha \leqslant_{\mathrm{h,l}} \bullet_x \leqslant_{\mathrm{h,l}} \bullet_\beta$, 从而 F 有四个真森林双理想 $\emptyset$, $\{\bullet_\beta\}$, $\{\bullet_\beta, \bullet_x\}$ 和 $\{\bullet_\beta, \bullet_x, \bullet_\alpha\}$. 根据定理 4.1 可得

$$
\begin{aligned}
\Delta_\varepsilon\Big({}^{\beta}\bigvee_{\omega}^{\mathbf{I}_\alpha^x}\Big) &= F_{|\emptyset} \otimes F_{|V(F) \setminus \{\bullet_\beta\}} + F_{|\{\bullet_\beta\}} \otimes F_{|V(F) \setminus (\{\bullet_\beta\} \sqcup \{\bullet_x\})}\\
&\quad + F_{|\{\bullet_\beta, \bullet_x\}} \otimes F_{|V(F) \setminus (\{\bullet_\beta, \bullet_x\} \sqcup \{\bullet_\alpha\})}\\
&\quad + F_{|\{\bullet_\beta, \bullet_x, \bullet_\alpha\}} \otimes F_{|V(F) \setminus (\{\bullet_\beta, \bullet_x, \bullet_\alpha\} \sqcup \{\bullet_\omega\})}\\
&= F_{|\emptyset} \otimes F_{|\{\bullet_x, \bullet_\alpha, \bullet_\omega\}} + F_{|\{\bullet_\beta\}} \otimes F_{|\{\bullet_\alpha, \bullet_\omega\}} + F_{|\{\bullet_\beta, \bullet_x\}} \otimes F_{|\{\bullet_\omega\}}\\
&\quad + F_{|\{\bullet_\beta, \bullet_x, \bullet_\alpha\}} \otimes F_{|\emptyset}\\
&= 1 \otimes \mathbf{I}_{\omega\,\alpha}^{\;\;x} + \bullet_\beta \otimes \mathbf{I}_\omega^\alpha + \bullet_\beta \bullet_x \otimes \bullet_\omega + \bullet_\beta \mathbf{I}_\alpha^x \otimes 1.
\end{aligned}
$$

观察到 (a) 和 (b) 中的结果与例 4.1 中由余乘归纳定义所得的结果一致.

§4.4 装饰平面根森林上的无穷小单位双代数的构造

本小节讨论 $H_{\mathrm{RT}}(X,\Omega)$ 上一个权为零的无穷小单位双代数. 我们先记录一些引理作为准备.

引理 4.3 设 $F_1,F_2\in H_{\mathrm{RT}}(X,\Omega)$, 则 $\Delta_\varepsilon(F_1F_2)=F_1\cdot\Delta_\varepsilon(F_2)+\Delta_\varepsilon(F_1)\cdot F_2$.

证 类似于定理 4.1 的证明中的 $\mathrm{bre}(F)\geqslant 2$ 情况. 我们有

$$\begin{aligned}\Delta_\varepsilon(F_1F_2)&=\sum_{I_k\trianglelefteq F_1F_2}(F_1F_2)_{|I_k}\otimes(F_1F_2)_{|\overline{I}_k}\\&=\sum_{\substack{I_k\trianglelefteq F_1F_2,\\ I_k\cap V(F_2)\neq\emptyset}}(F_1F_2)_{|I_k}\otimes(F_1F_2)_{|\overline{I}_k}+\sum_{\substack{I_k\trianglelefteq F_1F_2,\\ I_k\cap V(F_2)=\emptyset}}(F_1F_2)_{|I_k}\otimes(F_1F_2)_{|\overline{I}_k}\\&=F_1\cdot\Delta_\varepsilon(F_2)+\Delta_\varepsilon(F_1)\cdot F_2.\end{aligned}$$

得证.

引理 4.4 二元对 $(H_{\mathrm{RT}}(X,\Omega),\Delta_\varepsilon)$ 是余代数 (不含单位).

证 首先, 根据定理 4.1 可得

$$\Delta_\varepsilon(F)\in H_{\mathrm{RT}}(X,\Omega)\otimes H_{\mathrm{RT}}(X,\Omega),\quad\forall\, F\in\mathcal{F}(X,\Omega).$$

因此我们只需要证明余结合律

$$(\mathrm{id}\otimes\Delta_\varepsilon)\Delta_\varepsilon(F)=(\Delta_\varepsilon\otimes\mathrm{id})\Delta_\varepsilon(F),\quad\forall\, F\in\mathcal{F}(X,\Omega)$$

成立. 假设 F 有顶点: $u_n\leqslant_{\mathrm{h,l}}u_{n-1}\leqslant_{\mathrm{h,l}}\cdots\leqslant_{\mathrm{h,l}}u_1$. 为简单起见, 对于 $1\leqslant i<j\leqslant n$, 我们记

$$[i,j]:=\{u_i,\cdots,u_j\}.$$

特别地, 对于 $1\leqslant k\leqslant n$,

$$[1,k-1]=\{u_1,\cdots,u_{k-1}\}=I_k\quad\text{并且}\quad[k+1,n]=\{u_{k+1},\cdots,u_n\}=\overline{I}_k.$$

一方面, 根据定理 4.1 可得

$$\begin{aligned}(\Delta_\varepsilon\otimes\mathrm{id})\Delta_\varepsilon(F)&=(\Delta_\varepsilon\otimes\mathrm{id})\sum_{k=1}^{n}F_{|I_k}\otimes F_{|\overline{I}_k}\\&=(\Delta_\varepsilon\otimes\mathrm{id})\sum_{k=1}^{n}F_{|[1,k-1]}\otimes F_{|[k+1,n]}\\&=\sum_{k=1}^{n}\Delta_\varepsilon(F_{|[1,k-1]})\otimes F_{|[k+1,n]}\\&=\sum_{k=1}^{n}\Big(\sum_{i=1}^{k-1}F_{|[1,i-1]}\otimes F_{|[i+1,k-1]}\Big)\otimes F_{|[k+1,n]}\\&=\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{k-1}F_{|[1,i-1]}\otimes F_{|[i+1,k-1]}\otimes F_{|[k+1,n]}\end{aligned}$$

$$= \sum_{k=2}^{n} \sum_{i=1}^{k-1} F_{|[1,i-1]} \otimes F_{|[i+1,k-1]} \otimes F_{|[k+1,n]}.$$

另一方面, 再次利用定理 4.1 可得

$$\begin{aligned}(\mathrm{id} \otimes \Delta_\varepsilon)\Delta_\varepsilon(F) &= (\mathrm{id} \otimes \Delta_\varepsilon) \sum_{i=1}^{n} F_{|I_i} \otimes F_{|\overline{I}_i} \\ &= (\mathrm{id} \otimes \Delta_\varepsilon) \sum_{i=1}^{n} F_{|[1,i-1]} \otimes F_{|[i+1,n]} \\ &= \sum_{i=1}^{n} F_{|[1,i-1]} \otimes \Delta_\varepsilon(F_{|[i+1,n]}) \\ &= \sum_{i=1}^{n} F_{|[1,i-1]} \otimes \Big(\sum_{k=i+1}^{n} F_{|[i+1,k-1]} \otimes F_{|[k+1,n]} \Big) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=i+1}^{n} F_{|[1,i-1]} \otimes F_{|[i+1,k-1]} \otimes F_{|[k+1,n]} \\ &= \sum_{k=2}^{n} \sum_{i=1}^{k-1} F_{|[1,i-1]} \otimes F_{|[i+1,k-1]} \otimes F_{|[k+1,n]} \\ &= (\Delta_\varepsilon \otimes \mathrm{id})\Delta_\varepsilon(F).\end{aligned}$$

引理得证.

现在我们得到本小节的主要结果.

定理 4.2 四元组 $(H_{\mathrm{RT}}(X,\Omega),\, m_{RT}, 1,\, \Delta_\varepsilon)$ 是权为零的无穷小单位双代数.

证 因为 $H_{\mathrm{RT}}(X,\Omega)$ 在拼接乘法 m_{RT} 下是封闭的, 所以三元组 $(H_{\mathrm{RT}}(X,\Omega),\, m_{RT}, 1)$ 是一个单位代数. 因此根据引理 4.3 和引理 4.4 可得定理成立.

§4.5 自由 Ω-余循环无穷小单位双代数

带有 (一个或多个) 线性算子代数的概念是由 Kurosh[37] 引入的. 后来, 郭[38]称它们为 Ω-带算子代数, 并在集合构造了自由带算子代数, 另见文 [39, 49]. 在本小节中, 我们概念化了带算子代数和无穷小双代数的结合, 并刻画了 $H_{\mathrm{RT}}(X,\Omega)$ 在这些代数范畴中的自由性.

定义 4.2[38] 设 Ω 是非空集合.

(a) 设 M 是幺半群, $P_\omega : M \to M$, $\omega \in \Omega$ 是 M 上的一族集合映射或称算子. 称二元组 $(M, (P_\omega)_{\omega\in\Omega})$ 是 Ω-带算子幺半群.

(b) 设 A 是 (单位) 代数, $P_\omega : A \to A$, $\omega \in \Omega$ 是 A 上的一族线性映射. 称二元组 $(A, (P_\omega)_{\omega\in\Omega})$ 是 Ω-带算子 (单位) 代数.

受等式 (4.4) 启发, 我们引入下面这些概念.

定义 4.3 设 X 是集合, Ω 是非空集合, λ 是 $\mathbf{k}$ 中某个固定元素.

(a) 设 $H = (H, m, \Delta)$ 是权为 λ 的无穷小双代数, $P_\omega : H \to H, \omega \in \Omega$ 是一族线性算子. 称二元对 $(H, (P_\omega)_{\omega\in\Omega})$ 是权为 λ 的 Ω-带算子无穷小双代数. 进一步地, 如果 H 有单

位, 则称 H 是权为 λ 的 Ω-带算子无穷小单位双代数.

(b) 设 $(H, (P_\omega)_{\omega\in\Omega})$ 和 $(H', (P'_\omega)_{\omega\in\Omega})$ 是两个权为 λ 的 Ω-带算子无穷小双代数. 称线性映射是 Ω-带算子无穷小双代数同态, 如果 ϕ 是无穷小双代数同态并且满足 $\phi\circ P_\omega = P'_\omega\circ\phi$, $\omega\in\Omega$. Ω-带算子无穷小单位双代数同态可以用相同的方式定义.

由于单位 1 是下面等式 (4.9) 的一部分, 因此我们在引入下面概念的时候需要考虑单位性.

(c) 设 $H=(H, m, 1, \Delta, (P_\omega)_{\omega\in\Omega})$ 是权为 λ 的 Ω-带算子无穷小双代数. 称 H 是权为 λ 的 Ω-余循环无穷小单位双代数, 如果它满足下面的无穷小余循环条件:

$$\Delta P_\omega = \mathrm{id}\otimes 1 + (\mathrm{id}\otimes P_\omega)\Delta, \quad \forall\omega\in\Omega. \tag{4.9}$$

(d) 称权为 λ 的 Ω-带算子无穷小单位双代数 $(H_X, m_X, 1_X, \Delta_X, (P_\omega)_{\omega\in\Omega})$ 是集合 X 上的权为 λ 的自由 Ω-余循环无穷小单位双代数, 如果它和集合映射 $j_X: X\to H_X$ 一起满足下面的泛性质, 即对任意的权为 λ 的 Ω-余循环无穷小单位双代数 $(H, m, 1, \Delta, (P'_\omega)_{\omega\in\Omega})$ 和任意的集合映射 $f: X\to H$ 满足 $\Delta(f(x)) = 1\otimes 1$, $x\in X$, 则存在唯一的 Ω-带算子无穷小单位双代数同态 $\overline{f}: H_X\to H$, 使得 $\overline{f}j_X = f$.

当 Ω 是单点集, 我们将要省略符号 Ω. 下面的结果推广了文 [22, 26, 35, 38, 53] 中研究的泛性质. 回顾等式 (4.1) 中

$$\mathcal{F}(X,\Omega) = \varinjlim \mathcal{F}_n = \bigcup_{n=0}^{\infty}\mathcal{F}_n.$$

引理 4.5[50,定理4.5] 令 X 是集合, Ω 是非空集合, $j_X: X\hookrightarrow \mathcal{F}(X,\Omega)$, $x\mapsto \bullet_x$ 是自然嵌入, 则下面的结论成立:

(a) 四元组 $(\mathcal{F}(X,\Omega), m_{RT}, 1, (B^+_\omega)_{\omega\in\Omega})$ 和映射 j_X 一起是 X 上自由 Ω-带算子幺半群.

(b) 四元组 $(\mathcal{F}(X,\Omega), m_{RT}, 1, (B^+_\omega)_{\omega\in\Omega})$ 和映射 j_X 一起是 X 上自由 Ω-带算子单位代数.

定理 4.3 令 X 是集合, Ω 是非空集合, $j_X: X\hookrightarrow\mathcal{F}(X,\Omega)$, $x\mapsto\bullet_x$ 是自然嵌入, 则五元组 $(H_{\mathrm{RT}}(X,\Omega), m_{RT}, 1, \Delta_\varepsilon, (B^+_\omega)_{\omega\in\Omega})$ 带上映射 j_X 是 X 上权为零的自由 Ω-余循环无穷小单位双代数.

证 根据定理 4.2, $(H_{\mathrm{RT}}(X,\Omega), m_{RT}, 1, \Delta_\varepsilon)$ 是权为零的无穷小单位双代数. 进一步, 带上一族嫁接算子 $(B^+_\omega)_{\omega\in\Omega}$, 根据等式 (4.4), 它是权为零的 Ω-余循环无穷小单位双代数.

设 $(H, m, 1, \Delta, (P_\omega)_{\omega\in\Omega})$ 是权为零的 Ω-余循环无穷小单位双代数, $f: X\to H$ 是集合映射, 它的像满足 $\Delta(f(x)) = 1\otimes 1$, $x\in X$. 特别地, $(H, m, 1, \{P_\omega \mid \omega\in\Omega\})$ 是 Ω-带算子单位代数. 由引理 4.5 (b) 可得, 存在唯一的 Ω-带算子单位代数同态 $\overline{f}: H_{\mathrm{RT}}(X,\Omega)\to H$, 使得 $\overline{f}\circ j_X = f$. 接下来我们只需要验证余乘 Δ 和 Δ_ε 的相容性, 即

$$\Delta\overline{f}(F) = (\overline{f}\otimes\overline{f})\Delta_\varepsilon(F), \quad \forall F\in\mathcal{F}(X,\Omega), \tag{4.10}$$

我们利用数学归纳法, 通过对 F 的深度 $\mathrm{dep}(F)\geqslant 0$ 作归纳来证明等式 (4.10). 对于归纳起点 $\mathrm{dep}(F)=0$, 我们有 $F=\bullet_{x_1}\cdots\bullet_{x_m}$, $m\geqslant 0$, $x_1,\cdots,x_m\in X$. 这里我们采用惯例, 当 $m=0$ 时, $F=1$. 如果 $m=0$, 那么根据注记 2.2 和等式 (4.2),

$$\Delta\overline{f}(F) = \Delta\overline{f}(1) = \Delta(1) = 0 = (\overline{f}\otimes\overline{f})\Delta_\varepsilon(1) = (\overline{f}\otimes\overline{f})\Delta_\varepsilon(F).$$

如果 $m \geqslant 1$, 那么

$$\begin{aligned}
&\Delta\overline{f}(\bullet_{x_1}\cdots\bullet_{x_m})\\
&=\Delta(\overline{f}(\bullet_{x_1})\cdots\overline{f}(\bullet_{x_m}))\\
&=\sum_{i=1}^{m}(\overline{f}(\bullet_{x_1})\cdots\overline{f}(\bullet_{x_{i-1}}))\cdot\Delta(\overline{f}(\bullet_{x_i}))\cdot(\overline{f}(\bullet_{x_{i+1}})\cdots\overline{f}(\bullet_{x_m}))\quad(\text{由等式 }(2.1))\\
&=\sum_{i=1}^{m}(\overline{f}(\bullet_{x_1})\cdots\overline{f}(\bullet_{x_{i-1}}))\cdot\Delta\big(f(x_i)\big)\cdot(\overline{f}(\bullet_{x_{i+1}})\cdots\overline{f}(\bullet_{x_m}))\\
&=\sum_{i=1}^{m}(\overline{f}(\bullet_{x_1})\cdots\overline{f}(\bullet_{x_{i-1}}))\cdot(1\otimes 1)\cdot(\overline{f}(\bullet_{x_{i+1}})\cdots\overline{f}(\bullet_{x_m}))\\
&=\sum_{i=1}^{m}\overline{f}(\bullet_{x_1})\cdots\overline{f}(\bullet_{x_{i-1}})\otimes\overline{f}(\bullet_{x_{i+1}})\cdots\overline{f}(\bullet_{x_m})\\
&=\sum_{i=1}^{m}\overline{f}(\bullet_{x_1}\cdots\bullet_{x_{i-1}})\otimes\overline{f}(\bullet_{x_{i+1}}\cdots\bullet_{x_m})\\
&=\sum_{i=1}^{m}(\overline{f}\otimes\overline{f})(\bullet_{x_1}\cdots\bullet_{x_{i-1}}\otimes\bullet_{x_{i+1}}\cdots\bullet_{x_m})\\
&=(\overline{f}\otimes\overline{f})\Big(\sum_{i=1}^{m}\bullet_{x_1}\cdots\bullet_{x_{i-1}}\otimes\bullet_{x_{i+1}}\cdots\bullet_{x_m}\Big)\\
&=(\overline{f}\otimes\overline{f})\Delta_{\varepsilon}(\bullet_{x_1}\cdots\bullet_{x_m})\quad(\text{由等式 }(4.8)).
\end{aligned}$$

对于 $n \geqslant 0$, $\operatorname{dep}(F) \leqslant n$, 假设等式 (4.10) 成立. 下面考虑 $\operatorname{dep}(F) = n+1$ 的情形. 我们采用对根森林的宽度 $\operatorname{bre}(F)$ 作归纳来证明这一情形. 因为 $\operatorname{dep}(F) = n+1 \geqslant 1$, 所以 $F \neq 1$, $\operatorname{bre}(F) \geqslant 1$. 如果 $\operatorname{bre}(F) = 1$, 那么对于一些 $\overline{F} \in \mathcal{F}(X,\Omega)$ 和 $\omega \in \Omega$, $F = B_{\omega}^{+}(\overline{F})$. 因此

$$\begin{aligned}
\Delta\overline{f}(F) &= \Delta\overline{f}(B_{\omega}^{+}(\overline{F})) = \Delta P_{\omega}(\overline{f}(\overline{F}))\\
&=\overline{f}(\overline{F})\otimes 1+(\mathrm{id}\otimes P_{\omega})\Delta(\overline{f}(\overline{F}))\quad(\text{由等式 }(4.9))\\
&=\overline{f}(\overline{F})\otimes 1+(\mathrm{id}\otimes P_{\omega})(\overline{f}\otimes\overline{f})\Delta_{\varepsilon}(\overline{F})\quad(\text{由对 }\operatorname{dep}(F)\text{ 的归纳假设})\\
&=\overline{f}(\overline{F})\otimes 1+(\overline{f}\otimes P_{\omega}\overline{f})\Delta_{\varepsilon}(\overline{F})\\
&=\overline{f}(\overline{F})\otimes 1+(\overline{f}\otimes \overline{f}B_{\omega}^{+})\Delta_{\varepsilon}(\overline{F})\quad(\text{由 }\overline{f}\text{ 是带算子代数同态})\\
&=(\overline{f}\otimes\overline{f})\Big(\overline{F}\otimes 1+(\mathrm{id}\otimes B_{\omega}^{+})\Delta_{\varepsilon}(\overline{F})\Big)\\
&=(\overline{f}\otimes\overline{f})\Delta_{\varepsilon}(B_{\omega}^{+}(\overline{F}))=(\overline{f}\otimes\overline{f})\Delta_{\varepsilon}(F).
\end{aligned}$$

对于 $\operatorname{dep}(F) = n+1$ 和 $\operatorname{bre}(F) \leqslant m$, 假设等式 (4.10) 成立, 并除掉第一个归纳假设 $\operatorname{dep}(F) \leqslant n$ 的情形. 下面考虑 $\operatorname{dep}(F) = n+1$ 和 $\operatorname{bre}(F) = m+1 \geqslant 2$ 的情形. 于是对一些 $F_1, F_2 \in \mathcal{F}(X,\Omega)$, 其中 $0 < \operatorname{bre}(F_1), \operatorname{bre}(F_2) < m+1$. 我们可以记 $F = F_1F_2$. 运用 Sweedler 记法, 我们可以记

$$\Delta_{\varepsilon}(F_1)=\sum_{(F_1)}F_{1(1)}\otimes F_{1(2)}\quad \text{和}\quad \Delta_{\varepsilon}(F_2)=\sum_{(F_2)}F_{2(1)}\otimes F_{2(2)}.$$

由宽度的归纳假设可得,

$$\begin{aligned}\Delta(\overline{f}(F_1)) &= (\overline{f}\otimes\overline{f})\Delta_\varepsilon(F_1) = \sum_{(F_1)}\overline{f}(F_{1(1)})\otimes\overline{f}(F_{1(2)}),\\ \Delta(\overline{f}(F_2)) &= (\overline{f}\otimes\overline{f})\Delta_\varepsilon(F_2) = \sum_{(F_2)}\overline{f}(F_{2(1)})\otimes\overline{f}(F_{2(2)}).\end{aligned}\tag{4.11}$$

从而,

$$\begin{aligned}\Delta\overline{f}(F) &= \Delta\overline{f}(F_1F_2) = \Delta(\overline{f}(F_1)\overline{f}(F_2)) = \overline{f}(F_1)\cdot\Delta(\overline{f}(F_2)) + \Delta(\overline{f}(F_1))\cdot\overline{f}(F_2)\\ &= \overline{f}(F_1)\cdot\Big(\sum_{(F_2)}\overline{f}(F_{2(1)})\otimes\overline{f}(F_{2(2)})\Big) + \Big(\sum_{(F_1)}\overline{f}(F_{1(1)})\otimes\overline{f}(F_{1(2)})\Big)\cdot\overline{f}(F_2)\\ &\qquad\text{(由等式 (4.11))}\\ &= \sum_{(F_2)}\overline{f}(F_1)\overline{f}(F_{2(1)})\otimes\overline{f}(F_{2(2)}) + \sum_{(F_1)}\overline{f}(F_{1(1)})\otimes\overline{f}(F_{1(2)})\overline{f}(F_2)\quad\text{(由等式 (1.4))}\\ &= \sum_{(F_2)}\overline{f}(F_1F_{2(1)})\otimes\overline{f}(F_{2(2)}) + \sum_{(F_1)}\overline{f}(F_{1(1)})\otimes\overline{f}(F_{1(2)}F_2)\\ &= (\overline{f}\otimes\overline{f})\Big(\sum_{(F_2)}F_1F_{2(1)}\otimes F_{2(2)} + \sum_{(F_1)}F_{1(1)}\otimes F_{1(2)}F_2\Big)\\ &= (\overline{f}\otimes\overline{f})\Big(F_1\cdot\Big(\sum_{(F_2)}F_{2(1)}\otimes F_{2(1)}\Big) + \Big(\sum_{(F_1)}F_{1(1)}\otimes F_{1(2)}\Big)\cdot F_2\Big)\\ &\qquad\text{(由等式 (1.4))}\\ &= (\overline{f}\otimes\overline{f})\big(F_1\cdot\Delta_\varepsilon(F_2) + \Delta_\varepsilon(F_1)\cdot F_2\big)\\ &= (\overline{f}\otimes\overline{f})\Delta_\varepsilon(F_1F_2)\quad\text{(由引理 4.3)}\\ &= (\overline{f}\otimes\overline{f})\Delta_\varepsilon(F).\end{aligned}$$

这完成了对宽度 $\mathrm{bre}(F)$ 的归纳证明, 从而完成了对深度 $\mathrm{dep}(F)$ 的归纳证明. 因此结论成立.

注 4.5 郭[38]分别在 Motzkin 路径 $\mathcal{P}(X,\Omega)$ 和 Motzkin 字 $\mathcal{W}(X,\Omega)$ 上构造了 X 上的自由 Ω-带算子幺半群. 根据范畴中自由对象的唯一性, 作为 Ω-带算子幺半群, 有 $\mathcal{F}(X,\Omega)\cong\mathcal{P}(X,\Omega)\cong\mathcal{W}(X,\Omega)$, 其中第一个同构依赖于我们在平面根森林上提供的新的装饰方法.

§5 带权无穷小双代数和预李代数

本节从一个权为 λ 的无穷小双代数导出一个预李代数. 关于权为零的情况下的经典结果, 参考文 [5].

§5.1 从带权无穷小双代数到预李代数

预李代数是一类非结合代数, 并有许多其它名称, 如左对称代数, Koszul-Vinberg 代数, 拟结合代数等, 更多详情参见文 [46–47].

定义 5.1 设 A 是 $\mathbf{k}$-模, $\rhd : A\otimes A\to A$ 是 A 上二元线性运算. 称 $(A,\rhd)$ 是 (左) 预李代数, 如果它满足

$$(a\rhd b)\rhd c-a\rhd(b\rhd c)=(b\rhd a)\rhd c-b\rhd(a\rhd c),\quad \forall\, a,b,c\in A. \tag{5.1}$$

预李代数和李代数之间的紧密联系可以由下面两个基本的性质得到刻画.

引理 5.1[45, 定理1] 设 $(A,\rhd)$ 是预李代数. 定义二元运算 $[-,-]:A\otimes A\to A$ 为

$$[a,b]:=a\rhd b-b\rhd a,\quad \forall\, a,b\in A, \tag{5.2}$$

则 $(A,[-,-])$ 是李代数. 因此李代数可以看成预李代数的自然推广. 这也是预李代数名字的由来.

下面的结果刻画了带权无穷小双代数与预李代数之间的联系.

定理 5.1 设 (A,μ,Δ) 是权为 λ 的无穷小单位双代数, 则 $(A,\rhd)$ 是一个预李代数, 其中

$$\rhd : A\otimes A\to A,\quad a\otimes b\mapsto a\rhd b:=\sum_{(b)} b_{(1)}ab_{(2)}. \tag{5.3}$$

这里 $b_{(1)}$, $b_{(2)}$ 来自于 Sweedler 记法 $\Delta(b)=\sum\limits_{(b)} b_{(1)}\otimes b_{(2)}$.

证 令 $a,b,c\in A$, 则由等式 (2.1) 可得

$$\begin{aligned}
&\Delta\Big(\sum_{(c)} c_{(1)}bc_{(2)}\Big)\\
=&\sum_{(c)}\Delta(c_{(1)}bc_{(2)})\\
=&\sum_{(c)}(c_{(1)}b\cdot\Delta(c_{(2)})+\Delta(c_{(1)}b)\cdot c_{(2)}+\lambda c_{(1)}b\otimes c_{(2)})\\
=&\sum_{(c)}(c_{(1)}b\cdot\Delta(c_{(2)})+(c_{(1)}\cdot\Delta(b)+\Delta(c_{(1)})\cdot b+\lambda(c_{(1)}\otimes b))\cdot c_{(2)}+\lambda c_{(1)}b\otimes c_{(2)})\\
=&\sum_{(c)}(c_{(1)}b\cdot\Delta(c_{(2)})+c_{(1)}\cdot\Delta(b)\cdot c_{(2)}+\Delta(c_{(1)})\cdot bc_{(2)}+\lambda c_{(1)}\otimes bc_{(2)}+\lambda c_{(1)}b\otimes c_{(2)})\\
=&\sum_{(c)}\Big(\sum_{(c_{(2)})} c_{(1)}bc_{(2)(1)}\otimes c_{(2)(2)}+\sum_{(b)} c_{(1)}b_{(1)}\otimes b_{(2)}c_{(2)}+\sum_{(c_{(1)})} c_{(1)(1)}\otimes c_{(1)(2)}bc_{(2)}\\
&+\lambda c_{(1)}\otimes bc_{(2)}+\lambda c_{(1)}b\otimes c_{(2)}\Big)\\
=&\sum_{(c)} c_{(1)}bc_{(2)}\otimes c_{(3)}+\sum_{(c),(b)} c_{(1)}b_{(1)}\otimes b_{(2)}c_{(2)}+\sum_{(c)} c_{(1)}\otimes c_{(2)}bc_{(3)}\\
&+\lambda\sum_{(c)} c_{(1)}\otimes bc_{(2)}+\lambda\sum_{(c)} c_{(1)}b\otimes c_{(2)}\quad(\text{由余结合律}).
\end{aligned}$$

因此结合等式 (5.3) 可得

$$\begin{aligned}
a\rhd(b\rhd c)&=a\rhd\Big(\sum_{(c)} c_{(1)}bc_{(2)}\Big)\\
&=\sum_{(c)} c_{(1)}bc_{(2)}ac_{(3)}+\sum_{(c),(b)} c_{(1)}b_{(1)}ab_{(2)}c_{(2)}+\sum_{(c)} c_{(1)}ac_{(2)}bc_{(3)}
\end{aligned}$$

$$+\lambda\sum_{(c)}c_{(1)}abc_{(2)}+\lambda\sum_{(c)}c_{(1)}bac_{(2)}.$$

而且

$$(a\rhd b)\rhd c=\Big(\sum_{(b)}b_{(1)}ab_{(2)}\Big)\rhd c=\sum_{(c),(b)}c_{(1)}b_{(1)}ab_{(2)}c_{(2)}.$$

因此

$$\begin{aligned}(a\rhd b)\rhd c-a\rhd(b\rhd c)=&-\sum_{(c)}c_{(1)}bc_{(2)}ac_{(3)}-\sum_{(c)}c_{(1)}ac_{(2)}bc_{(3)}\\&-\lambda\sum_{(c)}(c_{(1)}abc_{(2)}+c_{(1)}bac_{(2)}).\end{aligned}\tag{5.4}$$

观察到等式 (5.4) 关于 a 和 b 是对称的, 因此

$$(a\rhd b)\rhd c-a\rhd(b\rhd c)=(b\rhd a)\rhd c-b\rhd(a\rhd c),$$

从而 $(A,\rhd)$ 是预李代数.

§5.2 从交换带权无穷小双代数到预李代数

定义 5.2 设 $(A,\rhd)$ 是预李代数, 则称二元对 $(A,\rhd)$ 是 Novikov 代数, 如果它满足

$$(a\rhd b)\rhd c=(a\rhd c)\rhd b,\quad \forall\, a,b\in A.$$

我们现在提供一种新的方法来构造一个预李代数. 我们首先刻画一个引理.

引理 5.2 设 (A,μ,Δ) 是权为 λ 的无穷小双代数. 定义 $\mathcal{D}=\mu\Delta:A\to A$, 则

$$\mathcal{D}(ab)=a\mathcal{D}(b)+\mathcal{D}(a)b+\lambda ab.$$

证 由等式 (2.1) 可得

$$\begin{aligned}\mathcal{D}(ab)&=\mu\Delta(ab)=\mu(a\cdot\Delta(b)+\Delta(a)\cdot b+\lambda a\otimes b)\\&=\mu\Big(\sum_{(b)}ab_{(1)}\otimes b_{(2)}+\sum_{(a)}a_{(1)}\otimes a_{(2)}b+\lambda a\otimes b\Big)\\&=\sum_{(b)}ab_{(1)}b_{(2)}+\sum_{(a)}a_{(1)}a_{(2)}b+\lambda ab\\&=a\mathcal{D}(b)+\mathcal{D}(a)b+\lambda ab.\end{aligned}$$

得证.

这一结果激发我们引入下面修改的导子的概念, 它推广了经典的导子定义.

定义 5.3 设 λ 是 $\mathbf{k}$ 中的某个固定元素, A 是代数, 则称线性映射 $\mathcal{D}:A\to A$ 是权为 λ 的修改的导子, 如果

$$\mathcal{D}(ab)=a\mathcal{D}(b)+\mathcal{D}(a)b+\lambda ab,\quad \forall\, a,b\in A.\tag{5.5}$$

注 5.1 (a) 经典的导子是权为零的修改的导子, 它在微分代数和李代数领域占据着重要的地位.

(b) 等式 (5.5) 中的算子 $\mathcal{D}$ 是一个特殊的微分型算子[54, 猜想4.7].

定理 5.2 设 κ, λ 是 $\mathbf{k}$ 中的固定元素, (A,μ) 是交换代数, $\mathcal{D}: A \to A$ 是权为 λ 的修改导子. 定义

$$a \rhd_{\mathcal{D}} b := \mu(a \otimes \mathcal{D}(b)) + \kappa ab = a\mathcal{D}(b) + \kappa ab, \tag{5.6}$$

则 $(A, \rhd_{\mathcal{D}})$ 是预李代数, 进一步地, 它也是 Novikov 代数.

证 对于任意的 $a, b, c \in A$,

$$\begin{aligned}
&(a \rhd_{\mathcal{D}} b) \rhd_{\mathcal{D}} c - a \rhd_{\mathcal{D}} (b \rhd_{\mathcal{D}} c)\\
={}& (a\mathcal{D}(b) + \kappa ab) \rhd_{\mathcal{D}} c - a \rhd_{\mathcal{D}} (b\mathcal{D}(c) + \kappa bc) \quad (\text{由等式 } (5.6))\\
={}& a\mathcal{D}(b)\mathcal{D}(c) + \kappa a\mathcal{D}(b)c + \kappa ab\mathcal{D}(c) + \kappa^2 abc - a\mathcal{D}(b\mathcal{D}(c))\\
&- \kappa ab\mathcal{D}(c) - \kappa a\mathcal{D}(bc) - \kappa^2 abc\\
={}& a\mathcal{D}(b)\mathcal{D}(c) - a\mathcal{D}(b\mathcal{D}(c)) + \kappa a\mathcal{D}(b)c - \kappa a\mathcal{D}(bc)\\
={}& a\mathcal{D}(b)\mathcal{D}(c) - a(b\mathcal{D}^2(c) + \mathcal{D}(b)\mathcal{D}(c) + \lambda b\mathcal{D}(c)) + \kappa a\mathcal{D}(b)c\\
&- \kappa a(b\mathcal{D}(c) + \mathcal{D}(b)c + \lambda bc) \quad (\text{由等式 } (5.5))\\
={}& -ab\mathcal{D}^2(c) - \lambda ab\mathcal{D}(c) - \kappa ab\mathcal{D}(c) - \kappa\lambda abc\\
={}& -ab(\mathcal{D}^2(c) + (\kappa+\lambda)\mathcal{D}(c) + \kappa\lambda c).
\end{aligned}$$

当 A 是交换代数时, 注意到上面的等式关于 a 和 b 是对称的. 因此 $(A, \rhd_{\mathcal{D}})$ 是预李代数. 接下来我们证明 $(A, \rhd_{\mathcal{D}})$ 是 Novikov 代数. 对于任意的 $a, b, c \in A$,

$$\begin{aligned}
(a \rhd_{\mathcal{D}} b) \rhd_{\mathcal{D}} c &= (a\mathcal{D}(b) + \kappa ab)\mathcal{D}(c) + \kappa(a\mathcal{D}(b) + \kappa ab)c\\
&= a\mathcal{D}(b)\mathcal{D}(c) + \kappa ab\mathcal{D}(c) + \kappa a\mathcal{D}(b)c + \kappa^2 abc\\
&= a\mathcal{D}(c)\mathcal{D}(b) + \kappa a\mathcal{D}(c)b + \kappa ac\mathcal{D}(b) + \kappa^2 abc \quad (\text{由 } A \text{ 是交换的})\\
&= a\mathcal{D}(c)\mathcal{D}(b) + \kappa ac\mathcal{D}(b) + \kappa a\mathcal{D}(c)b + \kappa^2 abc\\
&= (a\mathcal{D}(c) + \kappa ac)\mathcal{D}(b) + \kappa(a\mathcal{D}(c) + \kappa ac)b\\
&= (a \rhd_{\mathcal{D}} c) \rhd_{\mathcal{D}} b.
\end{aligned}$$

证毕.

作为上面结果的直接推论, 我们得到 Novikov 代数上的一个带权观点下的 Gelfand-Dorfman 定理.

推论 5.1 (Weighted Gelfand-Dorfman) 设 (A,μ) 是交换代数, $\mathcal{D}: A \to A$ 是权为 λ 的修改导子. 定义

$$a \rhd_{\mathcal{D}} b := \mu(a \otimes \mathcal{D}(b)) = a\mathcal{D}(b), \tag{5.7}$$

则 $(A, \rhd_{\mathcal{D}})$ 是预李代数, 进一步地, 它也是 Novikov 代数.

证 在定理 5.2 中取 $\kappa = 0$ 可得结果成立.

推论 5.2 设 κ, λ 是 $\mathbf{k}$ 中的固定元素, (A, μ, Δ) 是权为 λ 的交换无穷小双代数. 定义

$$\rhd_{\varepsilon}: A \otimes A \to A,\ a \otimes b \mapsto a \rhd_{\varepsilon} b := \sum_{(b)} ab_{(1)}b_{(2)} + \kappa ab,$$

其中 $b_{(1)}, b_{(2)}$ 来自于 Sweedler 记法 $\Delta(b) = \sum_{(b)} b_{(1)} \otimes b_{(2)}$, 则 $(A, \rhd_\varepsilon)$ 是预李代数, 并且是 Novikov 代数.

证　由引理 5.2 和定理 5.2 可得结果成立.

注 5.2　我们强调定理 5.2 是非常广泛的一个结果. 具体来说,

(a) Novikov 代数上的 Gelfand-Dorfman 定理是定理 5.2 中 $\kappa = \lambda = 0$ 的特殊情形;

(b) Filipov[55] 介绍和研究的一个 Novikov 代数是定理 5.2 中 $\lambda = 0$ 的特殊情形;

(c) 对于固定元 $\kappa \in A$, 等式 (5.6) 也定义一个 Novikov 代数, 它推广了 Xu[56] 的研究结果, 另见 [46, 注记 3.7].

§5.3 装饰平面根森林上的预李代数 —— 第一个构造

作为定理 5.1 的一个应用, 这一小节为 $H_{\mathrm{RT}}(X,\Omega)$ 装备了一个预李代数结构 $(H_{\mathrm{RT}}(X,\Omega), \rhd_{\mathrm{RT}})$ 和李代数结构 $(H_{\mathrm{RT}}(X,\Omega), [-,-]_{\mathrm{RT}})$. 最后还分别给出了 $\rhd_{\mathrm{RT}}$ 和 $[-,-]_{\mathrm{RT}}$ 的组合解释.

定理 5.3　设 $H_{\mathrm{RT}}(X,\Omega)$ 是定理 4.2 中给定的权为零的无穷小单位双代数.

(a) 二元对 $(H_{\mathrm{RT}}(X,\Omega), \rhd_{\mathrm{RT}})$ 是预李代数, 其中

$$F_1 \rhd_{\mathrm{RT}} F_2 := \sum_{(F_2)} F_{2(1)} F_1 F_{2(2)}, \quad \forall\, F_1, F_2 \in H_{\mathrm{RT}}(X,\Omega).$$

(b) 二元对 $(H_{\mathrm{RT}}(X,\Omega), [-,-]_{\mathrm{RT}})$ 是李代数, 其中

$$[F_1, F_2]_{\mathrm{RT}} := F_1 \rhd_{\mathrm{RT}} F_2 - F_2 \rhd_{\mathrm{RT}} F_1, \quad \forall\, F_1, F_2 \in H_{\mathrm{RT}}(X,\Omega).$$

证　由定理 4.2 和定理 5.1 可知, $(H_{\mathrm{RT}}(X,\Omega), \rhd_{\mathrm{RT}})$ 是预李代数. 剩余部分, 根据引理 5.1 可证得结果成立.

$H_{\mathrm{RT}}(X,\Omega)$ 上的 $\rhd_{\mathrm{RT}}$ 和 $[-,-]_{\mathrm{RT}}$ 也有一个组合解释. 采用引理 4.1 和定理 4.1 中的符号, 我们有如下推论.

推论 5.3　对任意的 $F_1, F_2 \in H_{\mathrm{RT}}(X,\Omega)$,

$$F_1 \rhd_{\mathrm{RT}} F_2 = \sum_{I_{k_2} \lhd F_2} F_{2|I_{k_2}} F_1 F_{2|\overline{I}_{k_2}}, \tag{5.8}$$

并且

$$[F_1, F_2]_{\mathrm{RT}} = \sum_{I_{k_2} \lhd F_2} F_{2|I_{k_2}} F_1 F_{2|\overline{I}_{k_2}} - \sum_{I_{k_1} \lhd F_1} F_{1|I_{k_1}} F_2 F_{1|\overline{I}_{k_1}}. \tag{5.9}$$

证　由定理 4.1 和定理 5.3 可得结果成立.

例 5.1　设 $F_1 = \bullet_x$, $F_2 = \mathbf{I}^{\beta}_{\alpha}$, $F_3 = \bullet_\gamma \mathbf{I}^{y}_{\omega}$, 其中 $\alpha, \beta, \gamma, \omega \in \Omega$, $x, y \in X$. 由引理 4.1 可知, F_1 只有一个真森林双理想 $\emptyset$. F_2 有两个真森林双理想 $\emptyset$ 和 $\{\bullet_\beta\}$. F_3 有三个真森林双理想 $\emptyset$, $\{\bullet_\gamma\}$ 和 $\{\bullet_\gamma, \bullet_y\}$. 由等式 (5.8) 和等式 (5.9) 可得,

$$F_1 \rhd_{\mathrm{RT}} F_2 = F_{2|\emptyset} F_1 F_{2|\{\bullet_\alpha\}} + F_{2|\{\bullet_\beta\}} F_1 F_{2|\emptyset} = 1 F_1 \bullet_\alpha + \bullet_\beta F_1 1 = \bullet_x \bullet_\alpha + \bullet_\beta \bullet_x,$$

$$F_2 \rhd_{\mathrm{RT}} F_1 = 1 F_2 1 = \mathbf{I}^{\beta}_{\alpha}, \qquad F_2 \rhd_{\mathrm{RT}} F_3 = \mathbf{I}^{\beta}_{\alpha} \mathbf{I}^{y}_{\omega} + \bullet_\gamma \mathbf{I}^{\beta}_{\alpha} \bullet_\omega + \bullet_\gamma \bullet_y \mathbf{I}^{\beta}_{\alpha},$$

$$[F_1, F_2]_{\mathrm{RT}} = \bullet_x \bullet_\alpha + \bullet_\beta \bullet_x - \mathbf{I}^{\beta}_{\alpha}.$$

下面我们验证 F_1, F_2, F_3 满足等式 (5.1). 由定理4.3 可知,

$$\begin{aligned}
\Delta_\varepsilon(F_3) =&\ \Delta_\varepsilon(\bullet_\gamma \mathbf{I}^{y}_{\omega}) = 1\otimes \mathbf{I}^{y}_{\omega} + \bullet_\gamma\otimes\bullet_\omega + \bullet_\gamma\bullet_y\otimes 1,\\
\Delta_\varepsilon(F_2\rhd_{\mathrm{RT}} F_3) =&\ 1\otimes\bullet_\alpha\mathbf{I}^{y}_{\omega} + \bullet_\beta\otimes\mathbf{I}^{y}_{\omega} + \mathbf{I}^{\beta}_{\alpha}\otimes\bullet_\omega + \mathbf{I}^{\beta}_{\alpha}\bullet_y\otimes 1 + 1\otimes\mathbf{I}^{\beta}_{\alpha}\bullet_\omega + \bullet_\gamma\otimes\bullet_\alpha\bullet_\omega\\
&+\bullet_\gamma\bullet_\beta\otimes\bullet_\omega + \bullet_\gamma\mathbf{I}^{\beta}_{\alpha}\otimes 1 + 1\otimes\bullet_y\mathbf{I}^{\beta}_{\alpha} + \bullet_\gamma\otimes\mathbf{I}^{\beta}_{\alpha} + \bullet_\gamma\bullet_y\otimes\bullet_\alpha + \bullet_\gamma\bullet_y\bullet_\beta\otimes 1.
\end{aligned}$$

根据定理 5.3,

$$\begin{aligned}
(F_1\rhd_{\mathrm{RT}} F_2)\rhd_{\mathrm{RT}} F_3 =&\ \bullet_x\bullet_\alpha\mathbf{I}^{y}_{\omega} + \bullet_\beta\bullet_x\mathbf{I}^{y}_{\omega} + \bullet_\gamma\bullet_x\bullet_\alpha\bullet_\omega + \bullet_\gamma\bullet_\beta\bullet_x\bullet_\omega + \bullet_\gamma\bullet_y\bullet_x\bullet_\alpha + \bullet_\gamma\bullet_y\bullet_\beta\bullet_x,\\
F_1\rhd_{\mathrm{RT}}(F_2\rhd_{\mathrm{RT}} F_3) =&\ \bullet_x\bullet_\alpha\mathbf{I}^{y}_{\omega} + \bullet_\beta\bullet_x\mathbf{I}^{y}_{\omega} + \mathbf{I}^{\beta}_{\alpha}\bullet_x\bullet_\omega + \mathbf{I}^{\beta}_{\alpha}\bullet_y\bullet_x + \bullet_x\mathbf{I}^{\beta}_{\alpha}\bullet_\omega + \bullet_\gamma\bullet_x\bullet_\alpha\bullet_\omega\\
&+\bullet_\gamma\bullet_\beta\bullet_x\bullet_\omega + \bullet_\gamma\mathbf{I}^{\beta}_{\alpha}\bullet_x + \bullet_x\bullet_y\mathbf{I}^{\beta}_{\alpha} + \bullet_\gamma\bullet_x\mathbf{I}^{\beta}_{\alpha} + \bullet_\gamma\bullet_y\bullet_x\bullet_\alpha + \bullet_\gamma\bullet_y\bullet_\beta\bullet_x.
\end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned}
&F_1\rhd_{\mathrm{RT}}(F_2\rhd_{\mathrm{RT}} F_3) - (F_1\rhd_{\mathrm{RT}} F_2)\rhd_{\mathrm{RT}} F_3\\
=&\ (\mathbf{I}^{\beta}_{\alpha}\bullet_x\bullet_\omega + \bullet_x\mathbf{I}^{\beta}_{\alpha}\bullet_\omega) + (\mathbf{I}^{\beta}_{\alpha}\bullet_y\bullet_x + \bullet_x\bullet_y\mathbf{I}^{\beta}_{\alpha})\\
&+(\bullet_\gamma\mathbf{I}^{\beta}_{\alpha}\bullet_x + \bullet_\gamma\bullet_x\mathbf{I}^{\beta}_{\alpha}),
\end{aligned}$$

它关于 $F_1=\bullet_x$ 和 $F_2=\mathbf{I}^{\beta}_{\alpha}$ 对称, 因此

$$(F_1\rhd_{\mathrm{RT}} F_2)\rhd_{\mathrm{RT}} F_3 - F_1\rhd_{\mathrm{RT}}(F_2\rhd_{\mathrm{RT}} F_3) = (F_2\rhd_{\mathrm{RT}} F_1)\rhd_{\mathrm{RT}} F_3 - F_2\rhd_{\mathrm{RT}}(F_1\rhd_{\mathrm{RT}} F_3).$$

注 5.3 我们强调我们构造的预李代数 $(H_{\mathrm{RT}}(X,\Omega),\rhd_{\mathrm{RT}})$ 和 Chapoton 与 Livernet[57] 从代算观点出发在根森林上构造的自由预李代数是不同的. 在文 [57] 的框架下, Matt[58] 给了下面的例子:

$$\bullet_\beta\rhd\mathbf{I}^{\beta}_{\alpha} = 2\,{}^{\beta}\mathbf{V}^{\beta}_{\alpha} + \mathbf{I}^{\beta}_{\substack{\beta\\ \alpha}},$$

它不同于我们在例 5.1 中用 $\bullet_\beta$ 替换 F_1 所得到的 $\bullet_\beta\rhd_{\mathrm{RT}}\mathbf{I}^{\beta}_{\alpha} = \bullet_\beta\bullet_\alpha + \bullet_\beta\bullet_\beta$.

致谢 我们感谢 Foissy 教授的建议, 这些建议对提高本文的质量非常有帮助. 张毅在中国留学基金委的支持下访问了南加州大学数学系, 感谢 Susan Montgomery 教授在访问期间的热情接待. 本文作者衷心感谢审稿人提出的宝贵意见.

参 考 文 献

[1] Joni S, Rota G C. Coalgebras and bialgebras in combinatorics [J]. *Stud Appl Math*, 1979, 61:93–139.

[2] Aguiar M. Infinitesimal Hopf algebras [J]. *Contemp Math*, 2000, 267:1–29.

[3] Aguiar M. Infinitesimal Hopf algebras and the cd-index of polytopes [J]. *Discrete Comput Geom*, 2002, 27:3–28.

[4] Aguiar M. On the associative analog of Lie bialgebras [J]. *J Algebra*, 2001, 244:492–532.

[5] Aguiar M. Infinitesimal bialgebras, pre-Lie and dendriform algebras [C]//Lecture Notes in Pure and Appl Math, New York: Dekker, 2004, 237:1–33.

[6] Bai C M. Double constructions of Frobenius algebras, Connes cocycles and their duality [J]. *J Noncommut Geom*, 2010, 4:475–530.

[7] Bai C M, Guo L, Ni X. $\mathcal{O}$-Operators on associative algebras and associative Yang-Baxter equations [J]. *Pacific J Math*, 2012, 256:257–289.

[8] Bai C M, Guo L, Ni X. $\mathcal{O}$-Operators on associative algebras, associative Yang-Baxter equations and dendriform algebras [C]// Quantized algebra and physics, Nankai Ser Pure Appl Math Theoret Phys, Hackensack, NJ: World Sci Publ, 2012, 8:10–51.

[9] Wang S X, Wang S H. Drinfeld double for braided infinitesimal Hopf algebras [J]. *Comm Algebra*, 2014, 42:2195–2212.

[10] Yau D. Infinitesimal Hom-bialgebras and Hom-Lie bialgebras [EB/OL]. arXiv: 1001.5000.

[11] Liu L, Makhlouf A, Menini C, et al. $\{\sigma, \tau\}$-Rota-Baxter operators, infinitesimal Hom-bialgebras and the associative (Bi)Hom-Yang-Baxter equation [J]. *Canad Math Bull*, 2019, 62:355–372.

[12] Loday J L, Ronco M O. On the structure of cofree Hopf algebras [J]. *J Reine Angew Math*, 2006, 592:123–155.

[13] Foissy L. The infinitesimal Hopf algebra and the poset of planar forests [J]. *J Algebraic Combin*, 2009, 30:277–309.

[14] Foissy L. The infinitesimal Hopf algebra and the operads of planar forests [J]. *Int Math Res Not IMRN*, 2010, 3:395–435.

[15] Ebrahimi-Fard K. Rota-Baxter algebras and the Hopf algebra of renormalization [D]. Bonn: Bonn University, 2006.

[16] Ogievetsky O, Popov T. R-Matrices in rime [J]. *Adv Theor Math Phys*, 2010, 14:439–505.

[17] Drinfeld V G. Quantum groups [R]. Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Berkeley, 1986, 798–820.

[18] Polishchuk A. Classical Yang-Baxter equation and the A_∞-constraint [J]. *Adv Math*, 2002, 168:56–95.

[19] Zhelyabin V N. Jordan bialgebras of symmetric elements and Lie bialgebras [J]. *Siberian Mathematical Journal*, 1998, 39:261–276.

[20] Zhang Y, Gao X, Zheng J W. Weighted infinitesimal unitary bialgebras on matrix algebras and weighted associative Yang-Baxter equations [J]. *Advances in Mathematics*, 2022, 51, DOI:10.11845/sxjz.2021126b.

[21] Brouder C, Frabetti A, Menous F. Combinatorial Hopf algebras from renormalization [J]. *J Algebraic Combin*, 2010, 32:557–578.

[22] Connes A, Kreimer D. Hopf algebras, renormalization and non-commutative geometry [J]. *Comm Math Phys*, 1998, 199:203–242.

[23] Chapoton F, Frabetti A. From quantum electrodynamics to posets of planar binary trees [C]//Combinatorics and Physics, Contemp Math, Providence, RI: Amer Math Soc, 2011, 539:53–66.

[24] Foissy L. Finite-dimensional comodules over the Hopf algebra of rooted trees [J]. *J Algebra*, 2002, 255:89–120.

[25] Hoffman M E. Combinatorics of rooted trees and Hopf algebras [J]. *Trans Amer Math Soc*, 2003, 355:3795–3811.

[26] Moerdijk I. On the Connes-Kreimer construction of Hopf algebras [J]. *Contemp Math*, 2001, 271:311–321.

[27] Connes A, Kreimer D. Renormalization in quantum field theory and the Riemann-Hilbert problem, I, the Hopf algebra structure of graphs and the main theorem [J]. *Comm Math Phys*, 2000, 210:249–273.

[28] Ebrahimi-Fard K, Guo L, Kreimer D. Spitzer's identity and the algebraic Birkhoff decomposition in pQFT [J]. *J Phys A*: *Math Gen*, 2004, 37:11037–11052.

[29] Guo L, Paycha S, Zhang B. Algebraic Birkhoff factorization and the Euler-Maclaurin formula on cones [J]. *Duke Math J*, 2017, 166:537–571.

[30] Kreimer D. On the Hopf algebra structure of perturbative quantum field theories [J]. *Adv Theor Math Phys*, 1998, 2:303–334.

[31] Foissy L. Les algèbres de Hopf des arbres enracinés décorés. I. [Hopf algebras of decorated rooted trees. I, II] [J]. *Bull Sci Math*, 2002, 126: 193–239, 249–288 (in French).

[32] Holtkamp R. Comparison of Hopf algebras on trees [J]. *Arch Math* (*Basel*), 2003, 80:368–383.

[33] Loday J L, Ronco M O. Hopf algebra of the planar binary trees [J]. *Adv Math*, 1998, 139:293–309.

[34] Grossman R, Larson R G. Hopf-algebraic structure of families of trees [J]. *J Algebra*, 1989, 126:184–210.

[35] Zhang T J, Gao X, Guo L. Hopf algebras of rooted forests, cocyles, and free Rota-Baxter algebras [J]. *J Math Phys*, 2016, 57:101701.

[36] Zhang Y, Gao X. Hopf algebras of planar binary trees: an operated algebra approach [J]. *J Algebraic Combin*, 2020, 51:567–588.

[37] Kurosh A G. Free sums of multiple operator algebras [J]. *Siberian Math J*, 1960, 1:62–70.

[38] Guo L. Operated semigroups, Motzkin paths and rooted trees [J]. *J Algebraic Combin*, 2009, 29:35–62.

[39] Bokut L A, Chen Y Q, Qiu J. Gröbner-Shirshov bases for associative algebras with multiple operators and free Rota-Baxter algebras [J]. *J Pure Appl Algebra*, 2010, 214:89–110.

[40] Gao X, Guo L. Rota's classification problem, rewriting systems and Gröbner-Shirshov bases [J]. *J Algebra*, 2017, 470:219–253.

[41] Kreimer D, Panzer E. Renormalization and Mellin transforms, computer algebra in quantum field theory [C]. Texts Monogr Symbol Comput, Vienna: Springer-Verlag, 2013:195–223.

[42] Baxter G. An analytic problem whose solution follows from a simple algebraic identity [J]. *Pacific J Math*, 1960, 10:731–742.

[43] Rota G. Baxter operators, an introduction [M]//Joseph P S Kung(ed.). Gian-Carlo Rota on combinatorics, introductory papers and commentaries, Boston: Birkhäuser, 1995.

[44] Vinberg E B. The theory of homogeneous convex cones [J]. *Transl Moscow Math Soc*, 1963, 2:303–358.

[45] Gerstenhaber M, The cohomology structure of an associative ring [J]. *Ann of Math* (2), 1963, 78:267–288.

[46] Bai C M. Introduction to pre-Lie algebras [C]//Algebra and Applications 1: Non-associative Algebras and Categories, Wiley Online Library: ISTE and Wiley, 7:243–273.

[47] Manchon D. A short survey on pre-Lie algebras [M]//Noncommutative geometry and physics: renormalisation, motives, index theory, ESI Lect Math Phys, Zürich: Eur Math Soc, 2011:89–102.

[48] Foissy L. Quantization of the Hopf algebras of decorated planar rooted trees, preprint, 2008.

[49] Guo L. An introduction to Rota-Baxter algebra [M]. Beijing: International Press, 2012.

[50] Zhang Y, Chen D, Gao X, et al. Weighted infinitesimal unitary bialgebras on rooted forests and weighted cocycles [J]. *Pacific J Math*, 2019, 302:741–766.

[51] Montgomery S. Hopf algebras and their actions on rings [M]//Regional Conference Series in Mathematics, 82, Providence, RI: American Mathematical Society, 1993.

[52] Stanley R P. Enumerative combinatorics [M]. Cambridge: Cambridge University Press, 1999.

[53] Foissy L. Introduction to Hopf algebra of rooted trees, URL: http://loic.foissy.free.fr/pageperso/p11.pdf.

[54] Guo L, Sit W, Zhang R. Differential type operators and Gröbner-Shirshov bases [J]. *J Symb Comput*, 2013, 52:97–123.

[55] Filipov V T. A class of simple nonassociative algebras [J]. *Mat Zametki*, 1989, 45:101–105.

[56] Xu X. On simple Novikov algebras and their irreducible modules [J]. *J Algebra*, 1996, 185:905–934.

[57] Chapoton F, Livernet M. Pre-Lie algebras and the rooted trees operad [J]. *Int Math Res Not IMRN*, 2001, 8:395–408.

[58] Matt S. Pre-Lie algebras and incidence categories of colored rooted trees [EB/OL]. arXiv:1007.4784.

[59] Zhang Y, Gao X, Luo Y F. Weighted infinitesimal unitary bialgebras of rooted forests, symmetric cocycles and pre-Lie algebras [J]. *J Algebraic Combin*, 2021, 53:771–803.

[60] Zhang Y, Zheng J W, Luo Y F. Weighted infinitesimal unitary bialgebras, pre-Lie, matrix algebras and polynomial algebras [J]. *Comm Algebra*, 2019, 47:5164–5181.

Weighted Infinitesimal Bialgebras

ZHANG Yi[1] GAO Xing[2]

[1]School of Mathematics and Statistics, Nanjing University of Information Science and Technology, Nanjing 210044, China; Center for Applied Mathematics of Jiangsu Province/Jiangsu International Joint Laboratory on System Modeling and Data Analysis, Nanjing University of Information Science and Technology, Nanjing 210044, China. E-mail: zhangy2016@nuist.edu.cn

[2]Corresponding. School of Mathematics and Statistics, Lanzhou University, Lanzhou 730000, China. E-mail: gaoxing@lzu.edu.cn

Abstract As an algebraic meaning of the nonhomogenous associative Yang-Baxter equation, weighted infinitesimal bialgebras play an important role in mathematics and mathematical physics. In this paper, the authors introduce the concept of weighted infinitesimal Hopf modules and show that any module carries a natural structure of weighted infinitesimal unitary Hopf module over a weighted quasitriangular infinitesimal unitary bialgebra. They decorate planar rooted forests in a new way, and prove that the space of rooted forests, together with a coproduct and a family of grafting operations, is the free Ω-cocycle infinitesimal unitary bialgebra of weight zero on a set. A combinatorial description of the coproduct is given. As applications, the authors obtain the initial object in the category of cocycle infinitesimal unitary bialgebras on undecorated planar rooted forests, which is the object studied in the (noncommutative) Connes-Kreimer Hopf algebra. Finally, they derive two pre-Lie algebras from an arbitrary weighted infinitesimal bialgebra and weighted commutative infinitesimal bialgebra, respectively. The second construction generalizes the Gelfand-Dorfman theorem on Novikov algebras.

Keywords Rooted forest, Infinitesimal bialgebra, Operated algebra, Pre-Lie algebra

2000 MR Subject Classification 16W99, 05C05, 16T10, 16T30, 17B60, 81R10

The English translation of this paper will be published in
Chinese Journal of Contemporary Mathematics, Vol. 43 No. 2, 2022
by ALLERTON PRESS, INC., USA