数 学 年 刊 A 辑
2022, 43(2):213–226
DOI: 10.16205/j.cnki.cama.2022.0014

Gorenstein AC 亏范畴 *

曹天涯[1] 刘仲奎[2] 杨晓燕[2]

提要 作者定义了 Gorenstein AC 导出范畴 $\mathbf{D}^b_{gac}(R)$ 并且和导出范畴作了一些比较. 作者定义了 Gorenstein AC 奇点范畴 $\mathbf{D}^b_{gacsg}(R)$, 在这个范畴中具有有限 Gorenstein AC- 投射维数的模都是零对象. 同时, 作者给出了由 Gorenstein AC- 投射模构成的稳定范畴到奇点范畴的三角嵌入 $F : \underline{\mathcal{GAC}} \to \mathbf{D}^b_{sg}(R)$. 通过作函子 F 的商引入 Gorenstein AC 亏范畴 $\mathbf{D}^b_{gacd}(R)$, 并且给出三角等价 $\mathbf{D}^b_{gacd}(R) \cong \mathbf{D}^b_{gacsg}(R)$.

关键词 Gorenstein AC 导出范畴, Gorenstein AC 亏范畴, Gorenstein AC 奇点范畴, 稳定范畴
MR (2000) 主题分类 18G35, 18E30
中图法分类 O175.29
文献标志码 A
文章编号 1000-8314(2022)02-0213-14

§1 引 言

Gorenstein 投射模的概念是由 Enochs 和 Jenda[1] 引入. Gorenstein 投射模是 Gorenstein 同调代数的基础 (见 [2–5]), 并且它们被广泛地使用在稳定范畴和奇点范畴的理论研究中 (见 [6–7]). 特别地, 当环是 Gorenstein 环时, Gorenstein 投射模有非常好的同调性质. 为了在任意环上研究 Gorenstein 同调代数, Bravo[8] 等人引入 Gorenstein AC- 投射模和 Gorenstein AC- 内射模的概念. 我们用 $\mathcal{P}$, $\mathcal{GP}$, $\mathcal{GAC}$ 分别表示投射模, Gorenstein 投射模, Gorenstein AC- 投射模的类. 他们证明 $(\mathcal{GAC}, \mathcal{GAC}^{\perp})$ 构成完备遗传的余挠对, 并且在任意环上建立了 Gorenstein AC- 投射模型结构.

本文用 $\mathbf{K}^b(R)$ 和 $\mathbf{D}^b(R)$ 分别表示有界同伦范畴和有界导出范畴, 用 $\mathbf{K}^b(\mathcal{P})$ 表示投射模构成的有界同伦范畴. 环上奇点范畴是指 Verdier 商 $\mathbf{D}^b_{sg}(R) := \mathbf{D}^b(R)/\mathbf{K}^b(\mathcal{P})$, 这个范畴最早在 Buchweitz[6] 未发表的论文中引入. Buchweitz 定理证明存在三角嵌入 $F : \underline{\mathcal{GP}} \to \mathbf{D}^b_{sg}(R)$, 其中 $\underline{\mathcal{GP}}$ 是 Gorenstein 投射模构成的稳定范畴. 若任意左 R- 模都有有限的 Gorenstein 投射维数, 则 F 是三角等价. Bergh[9] 等人通过上述三角嵌入函子定义了 Gorenstein 亏范畴 $\mathbf{D}^b_{defect}(R) := \mathbf{D}^b_{sg}(R)/\operatorname{Im} F$(见 [9–11]). 由于 $\mathbf{D}^b_{defect}(R) = 0$ 当且仅当任意 R- 模都有有限的 Gorenstein 投射维数, 因此 $\mathbf{D}^b_{defect}(R)$ 度量了任意环与 Gorenstein 环之间的距离.

受到上述工作的启发,本文第三节引入了 Gorenstein AC 导出范畴 $\mathbf{D}^*_{gac}(R) := \mathbf{K}^*(R)/\mathbf{K}^*_{gac}(R)$. 正如 Gorenstein 导出范畴在 Gorenstein 同调代数研究中发挥的作用一样,

本文 2020 年 1 月 12 日收到, 2021 年 8 月 18 日收到修改稿.
[1]西北师范大学计算机科学与工程学院, 兰州 730070. E-mail: caotianya1979@126.com
[2]西北师范大学数学与统计学院, 兰州 730070. E-mail: liuzk@nwnu.edu.cn; yangxy@nwnu.edu.cn
*本文受到甘肃省自然科学基金 (No. 21JR1RA229) 和甘肃省高等学校创新基金 (No. 2020A-11) 的资助.

Gorenstein AC 导出范畴 $\mathbf{D}^*_{gac}(R)$ 为 Gorenstein AC 同调代数的研究也提供了很好的理论框架. 我们得到了 $\mathbf{D}^*_{gac}(R)$ 的一些性质并且研究了它与导出范畴之间的关系, 这些结论在后续部分的讨论中起到了重要作用. 同时, 我们还定义了 Gorenstein AC 奇点范畴 $\mathbf{D}^b_{gac}(R)/\mathbf{K}^b(\mathcal{GAC})$, 用 $\mathbf{D}^b_{gacsg}(R)$ 表示. 我们证明 $\mathbf{D}^b_{gacsg}(R)=0$ 当且仅当对任意 R- 模 M 都有 $\mathcal{GAC}$-res.dim$M<\infty$.

在本文第四节中我们证明由 Gorenstein AC- 投射模构成的全子范畴是一个 Frobenius 范畴, 并且存在三角嵌入函子 $F:\underline{\mathcal{GAC}}\to\mathbf{D}^b_{sg}(R)$. 这是 Buchweitz 定理在 Gorenstein AC 投射模上的一个推广. 同时, 我们证明 F 的像在 $\mathbf{D}^b_{sg}(R)$ 中是稠密的. 在第五节中我们定义了 Gorenstein AC 亏范畴 $\mathbf{D}^b_{gacd}(R):=\mathbf{D}^b_{sg}(R)/\mathrm{Im}\,F$. 证明存在三角等价 $\mathbf{D}^b_{gacsg}(R)\cong\mathbf{D}^b_{gacd}(R)$ 和 $\mathbf{D}^b_{gacd}(R)\cong\mathbf{K}^{-,b}(\mathcal{P})/\mathbf{K}^{-,b}_{\mathcal{GAC}}(\mathcal{P})$, 其中 $\mathbf{K}^{-,b}_{\mathcal{GAC}}(\mathcal{P})$ 表示同伦范畴 $\mathbf{K}^{-,b}(\mathcal{P})$ 的子范畴.

§2 基 本 概 念

下面给出本文需要的一些基本概念和记号.

复形: 我们把模 M 当作轴复形 $\cdots\to0\to M\to0\to\cdots$, 其中 M 在复形的 0 层次其余位置都是 0. 对任意整数 n, $X[n]$ 表示复形 X 平移 n 个位置, 即 $X[n]^m=X^{n+m}$ 和 $\mathrm{d}^m_{X[n]}=(-1)^n\mathrm{d}^{n+m}_X$. 给定两个 R- 复形 X 和 Y, Hom 复形定义为 $\mathrm{Hom}_R(X,Y)$, 第 n 个齐次分支为 $\mathrm{Hom}_R(X,Y)^n=\prod\limits_{k\in\mathbb{Z}}\mathrm{Hom}_R(X^k,Y^{k+n})$, 第 n 次微分 $\mathrm{d}^n(f^k)=(\mathrm{d}^{k+n}_Yf^k-(-1)^nf^{k+1}\mathrm{d}^k_X)_{k\in\mathbb{Z}}$, 其中 $f=(f^k)\in\mathrm{Hom}_R(X,Y)^n$.

复形态射 $f,g:X\to Y$ 被称为同伦, 是指存在一簇 R- 模同态 $(s^n:X^n\to Y^{n-1})_{n\in\mathbb{Z}}$, 对任意 $n\in\mathbb{Z}$ 都满足 $f^n-g^n=\mathrm{d}^{n-1}_Ys^n+s^{n+1}\mathrm{d}^n_X$, 用记号 $f\sim g$ 表示. 复形态射 $f:X\to Y$ 被称为拟同构, 是指对任意 $n\in\mathbb{Z}$ 都有 $\mathrm{H}^n(f):\mathrm{H}^n(X)\to\mathrm{H}^n(Y)$ 是同构.

给定复形态射 $f:X\to Y$, 定义映射锥 Cone(f) 是如下复形: 第 n 次齐次分支 $\mathrm{Cone}(f)^n=X_{n+1}\oplus Y_n$, 第 n 次微分 $\mathrm{d}^n_{\mathrm{Cone}(f)}=\begin{pmatrix}-\mathrm{d}^{n+1}_X & 0\\ f^{n+1} & \mathrm{d}^n_Y\end{pmatrix}$, $n\in\mathbb{Z}$. 对复形 X, 左强制截断 $X_{\leqslant n}$ 如下:

$$\cdots\to X^{n-2}\xrightarrow{\mathrm{d}^{n-2}_X}X^{n-1}\xrightarrow{\mathrm{d}^{n-1}_X}X^n\to0\to0\to\cdots.$$

左温和截断 ${}_{\tau\leqslant n}X$ 如下:

$$\cdots\to X^{n-2}\xrightarrow{\mathrm{d}^{n-2}_X}X^{n-1}\longrightarrow\mathrm{Ker}(\mathrm{d}^n_X)\to0\to0\to\cdots.$$

对偶的可以定义复形的右强制截断和右温和截断.

Verdier 商: 设 $\mathcal{B}$ 是三角范畴 $\mathcal{K}$ 的三角子范畴. Verdier 商被定义为 $\mathcal{K}/\mathcal{B}:=S^{-1}\mathcal{K}$, 其中 S 是由 $\mathcal{B}$ 确定的饱和乘法系, S 中的每个态射 $f:X\to Y$ 都是右分式的等价类 a/s, 表示 $X\overset{s}{\Longleftarrow}Z\xrightarrow{a}Y$. 设 $Q:\mathcal{K}\to\mathcal{K}/\mathcal{B}$ 是局部化函子, 它作用在对象 X 上还是自身, 把态射 $f:X\to Y$ 变成 f/id_X.

称三角范畴 $\mathcal{D}$ 的全子范畴 $\mathcal{C}$ 是稠密的，是指满足以下条件：设 $\mathcal{D}$ 中态射 $f: X \to Y$ 能通过 $\mathcal{C}$ 中的对象分解，并且对于好三角 $X \xrightarrow{f} Y \to Z \to X[1]$, 其中 Z 在 $\mathcal{C}$ 中，则 X, Y 都在 $\mathcal{C}$ 中. 一个经典的例子就是在同伦范畴中所有零调复形作成其稠密子范畴. 关于稠密子范畴的判断有一个重要方法称之为 Rickard 准则：三角范畴 $\mathcal{D}$ 的三角全子范畴 $\mathcal{C}$ 是稠密的当且仅当 $\mathcal{C}$ 中对象的任意直和项仍在 $\mathcal{C}$ 中 (见 [12]).

Gorenstein AC- 投射模：　称 R- 模 M 是 Gorenstein 投射的，如果存在一个投射模构成的正合序列： $P^\bullet = \cdots \to P^{-1} \to P^0 \xrightarrow{\mathrm{d}^0} P^1 \to P^2 \to \cdots$, 对任意投射模 P, 函子 $\mathrm{Hom}_R(-, P)$ 作用在上述序列仍然保持正合，并且 $M \cong \mathrm{Kerd}^0$. 模 N 被称为 FP_∞ 型的，如果 N 存在有限生成投射模的投射分解. 称 L 是 level, 如果对任意 FP_∞ 型右 R- 模 N 都有 $\mathrm{Tor}_R^1(N, L) = 0$. 若上面序列 $P^\bullet$ 被函子 $\mathrm{Hom}_R(-, L)$ 作用后仍保持正合，则称模 $M \cong \mathrm{Ker}\,\mathrm{d}^0$ 是 Gorenstein AC- 投射的. 显然，由上面的定义可知 $\mathcal{P} \subseteq \mathcal{GAC} \subseteq \mathcal{GP}$.

由文 [8] 可知 Gorenstein AC- 投射模 $\mathcal{GAC}$ 是可解的，即，它是包含投射模的类并且关于扩张和满同态的核封闭. 由文 [8] 我们知道，任意 R- 模 M 都有 $\mathcal{GAC}$- 分解 $\cdots \to X^{-n} \to \cdots \to X^0 \to M \to 0$, 也就是说，上面序列中每个 X^i 都是 Gorenstein AC- 投射的并且被函子 $\mathrm{Hom}_R(G, -)$ 作用后仍正合，其中 G 是 Gorenstein AC- 投射模. 通过类似于比较定理的证明容易得到：在同伦等价意义下 $\mathcal{GAC}$- 分解是唯一的. 我们定义了模 M 的 $\mathcal{GAC}$- 分解维数 $\mathcal{GAC}$-res.dim$M$, 是指存在这样的 $\mathcal{GAC}$- 分解 $0 \to X^{-n} \to \cdots \to X^0 \to M \to 0$ 的最小整数 $n \geqslant 0$, 假如这样的正整数不存在，记作： $\mathcal{GAC}$-res.dim$M = \infty$.

稳定范畴：　假设 $\mathcal{A}$ 是有足够投射对象的阿贝尔范畴. 对任意对象 M, N, 用 $\mathcal{P}(M, N)$ 表示从 M 到 N 能被某个投射对象分解的态射构成的阿贝尔群. 定义 $\mathcal{A}$ 的稳定范畴 $\underline{\mathcal{A}} := \mathcal{A}/\mathcal{P}$, 其中 $\underline{\mathcal{A}}$ 中的对象就是 $\mathcal{A}$ 中的对象, 态射集 $\mathrm{Hom}_{\underline{\mathcal{A}}}(M, N) := \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(M, N)/\mathcal{P}(M, N)$. 下面用 $\underline{\mathcal{M}}$ 表示 R- 模范畴的稳定范畴. 显然， $\underline{\mathcal{M}}$ 是加法范畴，并且 M 在 $\underline{\mathcal{M}}$ 中同构于零对象当且仅当 M 是投射模的直和项. 设 X 和 Y 都是 R- 模，则在 $\underline{\mathcal{M}}$ 中 $X \cong Y$ 当且仅当存在 $C, D \in \mathcal{P}$, 使得在 R- 模范畴中 $X \oplus C \cong Y \oplus D$.

§3　相对于 Gorenstein AC- 投射模的导出范畴

在这一节中，我们引入 Gorenstein AC 导出范畴的概念，研究了它与导出范畴之间的关系，并在此基础上定义了 Gorenstein AC 奇点范畴.

定义 3.1　复形 X 被称为 $\mathcal{GAC}$- 零调的，是指对任意 Gorenstein AC- 投射模 G 来说，复形 $\mathrm{Hom}_R(G, X)$ 仍然是零调的. R- 复形的态射 $f: X \to Y$ 被称为 $\mathcal{GAC}$- 拟同构，是指对任意 $G \in \mathcal{GAC}$ 都有 $\mathrm{Hom}_R(G, f)$ 是拟同构. 对于 $* \in \{\mathrm{blank}, -, b\}$, 我们用记号 $\mathbf{K}_{ac}^*(R)$ 和 $\mathbf{K}_{gac}^*(R)$ 分别表示由零调复形和 $\mathcal{GAC}$- 零调复形构成的同伦子范畴.

注 3.1　(1) 因为 $\mathcal{P} \subseteq \mathcal{GAC}$, 所以 $\mathcal{GAC}$- 零调复形是零调的，$\mathcal{GAC}$- 拟同构是拟同构. 显然， $\mathbf{K}_{ac}^*(R)$ 是 $\mathbf{K}^*(R)$ 的厚子三角范畴， $\mathbf{K}_{gac}^*(R)$ 是 $\mathbf{K}_{ac}^*(R)$ 的厚子三角范畴，也是 $\mathbf{K}^*(R)$ 的厚子三角范畴.

(2) 由文 [13] 知复形 X 是 $\mathcal{GAC}$- 零调当且仅当对任意复形 $D \in \mathbf{K}^-(\mathcal{GAC})$ 都有 $\mathrm{Hom}_R(D,X)$ 是零调的，这里 $\mathbf{K}^-(\mathcal{GAC})$ 表示由 $\mathcal{GAC}$ 构成的上有界复形的同伦范畴. 再者，由文 [13] 可知 R- 复形态射 $f: X \to Y$ 是 $\mathcal{GAC}$- 拟同构当且仅当 $\mathrm{Hom}_R(G,f)$ 是拟同构，其中 $G \in \mathbf{K}^-(\mathcal{GAC})$.

定义 3.2[14] 相对于 Gorenstein AC- 投射模的导出范畴 $\mathbf{D}^*_{gac}(R)$ 被定义这样的 Verdier 商：

$$\mathbf{D}^*_{gac}(R) := \mathbf{K}^*(R)/\mathbf{K}^*_{gac}(R),$$

我们称之为 Gorenstein AC 导出范畴.

注 3.2 (1) 事实上，$\mathbf{D}^*_{gac}(R)$ 是正合范畴 (R-Mod, $\mathcal{E}_{\mathcal{GAC}}$) 的导出范畴, 在 Neeman[12] 对正合范畴定义的意义下，其中 $\mathcal{E}_{\mathcal{GAC}}$ 是指在 R- 模范畴中所有 $\mathcal{GAC}$- 零调的短正合序列的类.

(2) 设任意 level 模都有有限的投射维数, 则由文 [8] 可知 $\mathcal{GAC} = \mathcal{GP}$, 此时 Gorenstein AC 导出范畴 $\mathbf{D}^*_{gac}(R)$ 就是 Gorenstein 导出范畴 $\mathbf{D}^*_{gp}(R)$ (见 [15]). 设 R 是凝聚环，则 $\mathbf{D}^*_{gac}(R)$ 和 Ding[16] 导出范畴是一致的. 设任意 R- 模都有有限的投射维数，则 $\mathcal{GP} = \mathcal{GAC} = \mathcal{P}$. 此时， $\mathbf{D}^*_{gac}(R)$, $\mathbf{D}^*_{gp}(R)$ 和 $\mathbf{D}^*(R)$ 是一样的.

我们用 $\mathbf{K}^b_{ac}(\mathcal{GAC})$ 和 $\mathbf{K}^b_{gac}(\mathcal{GAC})$ 表示 Gorenstein AC- 投射模构成的零调复形的有界同伦范畴和 $\mathcal{GAC}$- 零调复形的有界同伦范畴. 在这部分我们得到 Gorenstein AC 有界导出范畴性质和与之相关的一些三角等价.

定义 $\mathbf{K}^{-,gacb}(\mathcal{GAC})$ 是 $\mathbf{K}^-(\mathcal{GAC})$ 的全子范畴如下：

$$\mathbf{K}^{-,gacb}(\mathcal{GAC}) := \left\{ X \in \mathbf{K}^-(\mathcal{GAC}) \,\middle|\, \begin{array}{c} \text{存在} \ \ n = n(X) \in \mathbb{Z}, \text{ 使得} \\ \mathrm{H}^i(\mathrm{Hom}(G,X)) = 0, \forall i \leqslant n, \forall G \in \mathcal{GAC} \end{array} \right\}.$$

下面是 Gorenstein AC 导出范畴的基本性质 (见 [14]).

引理 3.1[14] 设 R 是环，则下结论成立.

(1) 设 $X \in \mathbf{K}^-(\mathcal{GAC})$, $Y \in \mathbf{K}(R)$, 则局部化函子诱导出群同构 $F: \mathrm{Hom}_{\mathbf{K}(R)}(X,Y) \cong \mathrm{Hom}_{\mathbf{D}_{gac}(R)}(X,Y)$, $f \to f/\mathrm{id}_X$.

(2) $\mathbf{D}^-_{gac}(R)$ 是 $\mathbf{D}_{gac}(R)$ 的三角子范畴， $\mathbf{D}^b_{gac}(R)$ 是 $\mathbf{D}^-_{gac}(R)$ 的三角子范畴, 从而也是 $\mathbf{D}_{gac}(R)$ 的三角子范畴.

(3) R-Mod 是 $\mathbf{D}^b_{gac}(R)$ 的满子范畴，或者说，合成函子 R-Mod$\to \mathbf{K}^b(R) \to \mathbf{D}^b_{gac}(R)$ 是满忠实的.

(4) 对任意 $X \in \mathbf{K}^b(R)$, 存在函子 $F: \mathbf{K}^b(R) \to \mathbf{K}^{-,gacb}(\mathcal{GAC})$ 和 $\mathcal{GAC}$- 拟同构 $\varphi_X: F(X) \to X$, 并且在 X 上是函子的.

(5) 存在三角等价 $\mathbf{D}^b_{gac}(R) \cong \mathbf{K}^{-,gacb}(\mathcal{GAC})$. 特别地，若对任意模 M, 都有 $\mathcal{GAC}$-res.dim$M < \infty$, 则 $\mathbf{D}^b_{gac}(R) \cong \mathbf{K}^b(\mathcal{GAC})$.

引理 3.2[17] 设 $\mathcal{D}_1$ 和 $\mathcal{D}_2$ 都是三角范畴 $\mathcal{C}$ 的三角子范畴，$\mathcal{D}_1$ 是 $\mathcal{D}_2$ 的三角子范畴，

则 $\mathcal{D}_2/\mathcal{D}_1$ 是 $\mathcal{C}/\mathcal{D}_1$ 的三角子范畴，并且存在三角等价 $(\mathcal{C}/\mathcal{D}_1)/(\mathcal{D}_2/\mathcal{D}_1)\cong\mathcal{C}/\mathcal{D}_2$.

命题 3.1　设 R 是环，则存在下列三角等价：

$$\mathbf{D}^b_{gac}(R)/\mathbf{K}^b_{ac}(\mathcal{GAC})\cong\mathbf{D}^b(R).$$

证　首先，我们证明三角等价 $\mathbf{K}^b_{ac}(\mathcal{GAC})\cong\mathbf{K}^b_{ac}(R)/\mathbf{K}^b_{gac}(R)$. 设 $G:\mathbf{K}^b_{ac}(\mathcal{GAC})\to\mathbf{K}^b_{ac}(R)/\mathbf{K}^b_{gac}(R)$ 是嵌入函子 $i:\mathbf{K}^b_{ac}(\mathcal{GAC})\to\mathbf{K}^b_{ac}(R)$ 和商函子 $q:\mathbf{K}^b_{ac}(R)\to\mathbf{K}^b_{ac}(R)/\mathbf{K}^b_{gac}(R)$ 的合成函子. 因为 $\mathbf{K}^b_{ac}(R)/\mathbf{K}^b_{gac}(R)$ 是 $\mathbf{D}^b_{gac}(R)=\mathbf{K}^b(R)/\mathbf{K}^b_{gac}(R)$ 的三角子范畴，通过引理 3.1(1) 可知 G 是满忠实的函子. 对任意复形 $X\in\mathbf{K}^b_{ac}(R)$, 由引理 3.1(4) 知存在 $\mathcal{GAC}$- 拟同构 $P\to X$, 其中 $P\in\mathbf{K}^{-,gacb}(\mathcal{GAC})$. 显然 P 是零调的. 因为 $\mathcal{GAC}$ 关于满同态的核是封闭的，所以对任意 $i\in\mathbb{Z}$, 都有 $\operatorname{Im}\mathrm{d}^i_P\in\mathcal{GAC}$. 由 $\mathbf{K}^{-,gacb}(\mathcal{GAC})$ 的定义，存在整数 n, 使得

$$\mathrm{H}^i(\mathrm{Hom}_R(G,P))=0,\quad\forall i\leqslant n,\ \forall G\in\mathcal{GAC}.$$

因此存在 $\mathcal{GAC}$- 拟同构 ${}_{\tau\geqslant n}P\to P$, 这里的复形 ${}_{\tau\geqslant n}P$ 是如下 P 的右温和截断：

$$\cdots\to 0\to\operatorname{Im}\mathrm{d}^{n-1}\to P^n\to P^{n+1}\to\cdots\to P^m\to 0\to\cdots.$$

因为 ${}_{\tau\geqslant n}P\in\mathbf{K}^b_{ac}(\mathcal{GAC})$, 从而在 $\mathbf{D}^b_{gac}(R)$ 中 $G({}_{\tau\geqslant n}P)={}_{\tau\geqslant n}P\cong P\cong X$, 即就是 G 稠密，所以 G 是三角等价.

其次，由引理 3.2 可得三角等价

$$\begin{aligned}\mathbf{D}^b_{gac}(R)/\mathbf{K}^b_{ac}(\mathcal{GAC})&\cong(\mathbf{K}^b(R)/\mathbf{K}^b_{gac}(R))/(\mathbf{K}^b_{ac}(R)/\mathbf{K}^b_{gac}(R))\\&\cong\mathbf{K}^b(R)/\mathbf{K}^b_{ac}(R)\\&=\mathbf{D}^b(R).\end{aligned}$$

我们用 $\langle\mathcal{GAC}\rangle$ 表示 $\mathbf{D}^b(R)$ 的由 $\mathcal{GAC}$ 生成的三角子范畴，或者说 $\langle\mathcal{GAC}\rangle$ 是 $\mathbf{D}^b(R)$ 的包含 $\mathcal{GAC}$ 的最小三角子范畴.

命题 3.2　设 R 是环，则有下面的交换图：

$$\begin{tikzcd}\langle\mathcal{GAC}\rangle \arrow[r] \arrow[d] & \mathbf{D}^b(R) \arrow[d]\\ \mathbf{K}^b(\mathcal{GAC})/\mathbf{K}^b_{ac}(\mathcal{GAC}) \arrow[r] & \mathbf{K}^{-,gacb}(\mathcal{GAC})/\mathbf{K}^b_{ac}(\mathcal{GAC})\end{tikzcd}$$

这里的水平函子是嵌入的，竖直函子是三角等价的. 特别地，存在三角等价

$$\mathbf{D}^b(R)/\langle\mathcal{GAC}\rangle\cong\mathbf{D}^b_{gac}(R)/\mathbf{K}^b(\mathcal{GAC}).$$

证　由引理 3.1(5) 和命题 3.1 可得三角等价函子 $H:\mathbf{D}^b(R)\xrightarrow{\cong}\mathbf{K}^{-,gacb}(\mathcal{GAC})/\mathbf{K}^b_{ac}(\mathcal{GAC})$. 因为 $\langle\mathcal{GAC}\rangle$ 是由 $\mathcal{GAC}$ 生成的 $\mathbf{D}^b(R)$ 的三角子范畴，所以 $H(\langle\mathcal{GAC}\rangle)$ 是一个由 $\mathcal{GAC}$ 生成的 $\mathbf{K}^{-,gacb}(\mathcal{GAC})/\mathbf{K}^b_{ac}(\mathcal{GAC})$ 的三角子范畴. 我们知道 $\mathbf{K}^b(\mathcal{GAC})/\mathbf{K}^b_{ac}(\mathcal{GAC})$ 是 $\mathbf{K}^{-,gacb}(\mathcal{GAC})/\mathbf{K}^b_{ac}(\mathcal{GAC})$ 的三角子范畴，并且是由 $\mathcal{GAC}$ 生成的. 因此 $H(\langle\mathcal{GAC}\rangle)=$

$\mathbf{K}^b(\mathcal{GAC})/\mathbf{K}^b_{ac}(\mathcal{GAC})$. 显然, $\langle\mathcal{GAC}\rangle\cong\mathbf{K}^b(\mathcal{GAC})/\mathbf{K}^b_{ac}(\mathcal{GAC})$. 这样存在下面的三角等价:

$$\begin{aligned}\mathbf{D}^b(R)/\langle\mathcal{GAC}\rangle&\cong(\mathbf{K}^{-,gacb}(\mathcal{GAC})/\mathbf{K}^b_{ac}(\mathcal{GAC}))/(\mathbf{K}^b(\mathcal{GAC})/\mathbf{K}^b_{ac}(\mathcal{GAC}))\\&\cong\mathbf{K}^{-,gacb}(\mathcal{GAC})/\mathbf{K}^b(\mathcal{GAC})\\&\cong\mathbf{D}^b_{gac}(R)/\mathbf{K}^b(\mathcal{GAC}).\end{aligned}$$

定义 3.3 设 R 是环, 相对于 Gorenstein AC- 投射模的奇点范畴被定义为如下的 Verdier 商:

$$\mathbf{D}^b_{gacsg}(R):=\mathbf{D}^b_{gac}(R)/\mathbf{K}^b(\mathcal{GAC}),$$

这里我们也称为 Gorenstein AC 奇点范畴.

注 3.3 (1) 由引理 3.1(5), 我们可得下列典范的三角等价 $\mathbf{D}^b_{gacsg}(R)\cong\mathbf{K}^{-,gacb}(\mathcal{GAC})/\mathbf{K}^b(\mathcal{GAC})$.

(2) 若 R 是凝聚环, 则 Gorenstein AC 奇点范畴 $\mathbf{D}^b_{gacsg}(R)$ 和 Ding 奇点范畴 $\mathbf{D}^b_{dpsg}(R)$ (见 [18]) 是一致的. 若 R 是凝聚环并且所有平坦模都有有限投射维数, 则 $\mathcal{GAC}=\mathcal{GP}$, 从而 $\mathbf{D}^b_{gacsg}(R)$ 和 Gorenstein 奇点范畴 $\mathbf{D}^b_{gpsg}(R)$(见 [10–11]) 是一致的.

命题 3.3 设 R 是环, 则 $\mathbf{D}^b_{gacsg}(R)=0$ 当且仅当对任意 R- 模 M, 都有 $\mathcal{GAC}$-res.dim$M<\infty$.

证 由引理 3.1(5) 可知, 对任意 R- 模 M, 若 $\mathcal{GAC}$-res.dim$M<\infty$, 则 $\mathbf{D}^b_{gac}(R)\cong\mathbf{K}^b(\mathcal{GAC})$. 因此 $\mathbf{D}^b_{gacsg}(R)=0$.

反之, 若 $\mathbf{D}^b_{gacsg}(R)=0$, 并且 X 是 R- 模, 则在 $\mathbf{D}^b_{gacsg}(R)$ 中 $X=0$. 利用 $\mathbf{D}^b_{gacsg}(R)$ 的定义, 存在 $Y\in\mathbf{K}^b(\mathcal{GAC})$, 使得在 $\mathbf{D}^b_{gac}(R)$ 中有 $X\cong Y$. 设 $f/t:Y\xLeftarrow{t}Z\xrightarrow{f}X$ 是 $\mathbf{D}^b_{gac}(R)$ 中的同构并且 t 是 $\mathcal{GAC}$- 拟同构, 则 f 是一个 $\mathcal{GAC}$- 拟同构. 因此存在 $\mathcal{GAC}$- 拟同构 $s:Y\to Z$, 使得 $ts\sim\mathrm{id}_Y$. 这样 $fs:Y\to X$ 在 $\mathbf{D}^b_{gac}(R)$ 中是一个 $\mathcal{GAC}$- 拟同构. 所以 $\mathrm{H}^n(\mathrm{Hom}_R(G,Y))=0$, $n\neq 0$, $G\in\mathcal{GAC}$. 再者, 我们可得 $\mathrm{H}^n(Y)=0$, $n\neq0$. 设 $Y=\quad 0\to Y^{-m}\to Y^{-m+1}\to\cdots\to Y^{n-1}\to Y^n\to 0$, 其中 m,n 是非负整数. 我们取左温和截断 ${}_{\tau\leqslant 0}Y$ 和下面零调复形

$$Y'=\quad 0\to\mathrm{Ker}(\mathrm{d}^0_Y)\to Y^0\to\cdots\to Y^{n-1}\to Y^n\to 0.$$

显然, $\mathrm{Ker}(\mathrm{d}^0_Y)\in\mathcal{GAC}$. 因为 $i:{}_{\tau\leqslant 0}Y\to Y$ 是一个 $\mathcal{GAC}$- 拟同构, 所以 $fsi:{}_{\tau\leqslant 0}Y\to X$ 是 $\mathcal{GAC}$- 拟同构. 这样存在零调复形

$$0\to Y^{-m}\to Y^{-m+1}\to\cdots\to Y^{-1}\to\mathrm{Ker}(\mathrm{d}^0_Y)\to X\to 0.$$

因此 X 有有限的 Gorenstein AC 投射维数.

命题 3.4 设 R 是环. 若 $\mathbf{D}^b_{sg}(R)=0$, 则 $\mathbf{D}^b_{gacsg}(R)=0$.

证 众所周知 $\mathbf{D}^b_{sg}(R)=0$ 当且仅当任意 R- 模有有限的投射维数. 因为 $\mathcal{P}\subseteq\mathcal{GAC}$, 所以对任意 R- 模 M, $\mathcal{GAC}$-res.dim$M<\infty$ 不超过其投射维数. 由命题 3.3 可知 $\mathbf{D}^b_{gacsg}(R)=0$.

§4 Gorenstein AC- 投射模的稳定范畴

定义 4.1[19]　设 $\mathcal{A}$ 是加法范畴. 在 $\mathcal{A}$ 中的核 - 余核对 (i,p) 是这样的态射对: $A' \xrightarrow{i} A \xrightarrow{p} A''$, 其中 i 是 p 的核, p 是 i 的余核. 在 $\mathcal{A}$ 中, 核 - 余核对构成的类表示为 $\mathcal{E}$, 如果对态射 i 来说, 存在态射 p 使得 $(i,p)\in\mathcal{E}$, 称态射 i 为 admissible- 单. 类似地, admissible- 满可对偶地定义.

范畴 $\mathcal{A}$ 上的正合结构指的就是这样核 - 余核对的类, 在同构下封闭并且满足以下公理:

[E0] 对任意对象 $A\in\mathcal{A}$, 恒等态射 1_A 都是 admissible- 单.

[E0$^{\rm op}$] 对任意对象 $A\in\mathcal{A}$, 恒等态射 1_A 都是 admissible- 满.

[E1] admissible- 单的类关于合成是封闭的.

[E1$^{\rm op}$] admissible- 满的类关于合成是封闭的.

[E2] admissible- 单沿着任意态射的推出存在并且也生成了 admissible- 单.

[E2$^{\rm op}$] admissible- 满沿着任意态射的拉回存在并且也生成了 admissible- 满.

正合范畴就是由加法范畴 $\mathcal{A}$ 和 $\mathcal{A}$ 上的正合结构 $\mathcal{E}$ 构成的对 $(\mathcal{A},\mathcal{E})$, 其中 $\mathcal{E}$ 的元素也被称为短正合列. 称正合范畴是 Frobenius 的, 如果它有足够多的投射对象和足够多的内射对象, 并且投射对象和内射对象是一致的. 由文 [20] 中 Happel 定理我们知道, Frobenius 范畴的稳定范畴是三角范畴.

引理 4.1　$(\mathcal{GAC},\mathcal{E})$ 是正合范畴, 这里 $\mathcal{E}$ 是三项都在 $\mathcal{GAC}$ 中的短正合列.

证　我们容易看出 [E0] 成立. 下面只需验证其他公理.

对于 [E1$^{\rm op}$], 设 $f: P_1\to P_2$ 和 $g: P_2\to P_3$ 都是在 $\mathcal{GAC}$ 中的 admissible- 满. 事实上, 对短正合列 $0\to \mathrm{Ker}(gf)\to P_1\xrightarrow{gf} P_3\to 0$ 来说, 因为 $\mathcal{GAC}$ 关于满态射的核是封闭的, 所以 $\mathrm{Ker}(gf)\in\mathcal{GAC}$.

对于 [E1], 设 $0\to P_0\xrightarrow{i} P_1\to P_2\to 0$ 和 $0\to P_1\xrightarrow{j} P_1'\to P_1''\to 0$ 都属于 $\mathcal{E}$. 我们得到下列推出图:

$$\begin{tikzcd}
 & & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & P_0 \arrow[r, "i"] \arrow[d, equal] & P_1 \arrow[r] \arrow[d, "j"] & P_2 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & P_0 \arrow[r, "ji"] & P_1' \arrow[r] \arrow[d] & P_2' \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & & P_1'' \arrow[r, equal] \arrow[d] & P_1'' \arrow[d] & \\
 & & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

因为 $P_2, P_1'' \in \mathcal{GAC}$, $\mathcal{GAC}$ 关于扩张封闭，所以 $P_2' \in \mathcal{GAC}$. 故 $0 \to P_0 \xrightarrow{ji} P_1' \to P_2' \to 0 \in \mathcal{E}$.

对于 [E2$^{\rm op}$], 设 $f: P_2 \to P_3$ 是在 $\mathcal{GAC}$ 中的 admissible- 满， $g: P_2' \to P_3$ 是在 $\mathcal{GAC}$ 中的任意态射．我们得到下列拉回图，并且第二行属于 $\mathcal{E}$:

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & P_1 \arrow[r] \arrow[d, equal] & X \arrow[r] \arrow[d] & P_2' \arrow[r] \arrow[d, "g"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & P_1 \arrow[r] & P_2 \arrow[r, "f"] & P_3 \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

因为 $P_1, P_2' \in \mathcal{GAC}$, 所以 $X \in \mathcal{GAC}$. 从而 $0 \to P_1 \to X \to P_2' \to 0 \in \mathcal{E}$.

对偶地，我们可以证明 [E2]. 命题得证.

引理 4.2 $(\mathcal{GAC}, \mathcal{E})$ 是 Frobenius 范畴．进而，稳定范畴 $\underline{\mathcal{GAC}}$ 是三角范畴.

证 因为 $\mathcal{P} \subseteq \mathcal{GAC}, \mathcal{P} \subseteq {}^{\perp}\mathcal{GAC}$, 并且 $\mathcal{P} \subseteq \mathcal{GAC}^{\perp}$, 所以 $\mathcal{P}$ 是 $\mathcal{GAC}$ 中的相对投射 - 内射对象．利用 Gorenstein AC- 投射模的定义我们知道，对任意 $X \in \mathcal{GAC}$, 存在正合序列 $0 \to X \to P_1 \to G_1 \to 0 \in \mathcal{E}$ 和 $0 \to G_2 \to P_2 \to X \to 0 \in \mathcal{E}$, 使得 $P_1, P_2 \in \mathcal{P}$. 从而 $\mathcal{GAC}$ 有足够多的投射对象和足够多的内射对象．这样 $(\mathcal{GAC}, \mathcal{E})$ 是 Frobenius 范畴．进一步，可得其稳定范畴 $\underline{\mathcal{GAC}}$ 是三角范畴.

下面我们回顾文 [21] 中 ∂- 函子的定义．设 $(\Theta, \mathcal{E})$ 是正合范畴， $\mathcal{C}$ 是三角范畴．加法函子 $F: \Theta \longrightarrow \mathcal{C}$ 被称为 ∂- 函子，如果对任意短正合序列： $X \xrightarrow{i} Y \xrightarrow{d} Z \in \mathcal{E}$, 都存在态射 $\omega_{(i,d)}: F(Z) \to F(X)[1]$, 使得下列序列是好三角：

$$F(X) \xrightarrow{F(i)} F(Y) \xrightarrow{F(d)} F(Z) \xrightarrow{\omega_{(i,d)}} F(X)[1].$$

再者，态射 ω 是自然的，即就是说，给出两个短正合序列之间的态射如下：

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "i"] \arrow[d, "f"] & Y \arrow[r, "d"] \arrow[d, "g"] & Z \arrow[d, "h"] \\ X' \arrow[r, "i'"] & Y' \arrow[r, "d'"] & Z' \end{tikzcd}$$

我们有下面好三角之间的三角射：

$$\begin{tikzcd} F(X) \arrow[r, "F(i)"] \arrow[d, "F(f)"] & F(Y) \arrow[r, "F(d)"] \arrow[d, "F(g)"] & F(Z) \arrow[r, "\omega_{(i,d)}"] \arrow[d, "F(h)"] & F(X)[1] \arrow[d, "F(f)[1]"] \\ F(X') \arrow[r, "F(i')"] & F(Y') \arrow[r, "F(d')"] & F(Z') \arrow[r, "\omega_{(i',d')}"] & F(X')[1] \end{tikzcd}$$

命题 4.1 对任意环，都存在三角嵌入函子

$$F: \underline{\mathcal{GAC}} \longrightarrow \mathbf{D}_{sg}^b(R),$$

这里定义对任意 $G \in \mathcal{GAC}$, $F(G) = G \in \mathbf{D}^b(R)/\mathbf{K}^b(\mathcal{P})$, G 是轴复形，或者说， $(P^\bullet$,d) 是由 Gorenstein AC- 投射模 G 确定的正合序列， $F(G) = P^\bullet_{\leqslant 0} \in \mathbf{K}^{-,b}(\mathcal{P})/\mathbf{K}^b(\mathcal{P}) \cong \mathbf{D}_{sg}^b(R)$.

证 显然存在嵌入函子 $i:\mathcal{GAC}\longrightarrow\mathbf{D}^b(R)$. 设 $q:\mathbf{D}^b(R)\longrightarrow\mathbf{D}^b_{sg}(R)=\mathbf{D}^b(R)/\mathbf{K}^b(\mathcal{P})$ 是商函子. 用 $F'=qi:\mathcal{GAC}\longrightarrow\mathbf{D}^b_{sg}(R)$ 表示合成函子，则 F' 是满忠实函子. 由文 [10] 或文 [22] 我们容易得到 F' 诱导满忠实函子 $F:\underline{\mathcal{GAC}}\longrightarrow\mathbf{D}^b_{sg}(R)$. 显然， F' 是一个 ∂- 函子. 我们注意到 F' 把投射模变为零，这样由文 [21] 可得 F 是一个三角函子.

为了证明 Buchweitz 定理的逆定理，在文 [23] 中引入了左同伦的概念. 由文 [23–24] 我们知道，零伦是左零伦，同伦等价是左同伦等价，同时有关左同伦的一些基本性质如下所列.

引理 4.3 [24] 设 $P,Q\in\mathbf{K}^{-,b}(\mathcal{P})$, 则下列命题成立.

(1) 设 $f:P\to Q$ 是左同伦映射，则对任意 $n\ll 0$ 诱导的映射 $\overline{f^n}:\operatorname{Ker}\mathrm{d}^n_P\to\operatorname{Ker}\mathrm{d}^n_Q$ 都可以通过某个投射模分解.

(2) 设 $f:P\to Q$ 是左同伦等价，则对任意 $n\ll 0$ 诱导的映射 $\overline{f^n}:\operatorname{Ker}\mathrm{d}^n_P\to\operatorname{Ker}\mathrm{d}^n_Q$ 在 $\underline{\mathcal{M}}$ 中是同构 ($\underline{\mathcal{M}}$ 表示 R-Mod 的稳定范畴).

(3) 设 $f:P\to Q$ 是复形链映射，则 $\operatorname{Cone}(f)\in\mathbf{K}^b(\mathcal{P})$ 当且仅当 f 是左同伦等价.

引理 4.4 设 $X\in\mathbf{K}^{-,b}(\mathcal{P})$, 则 $X\in\operatorname{Im}F\subseteq\mathbf{D}^b_{sg}(R)$ 当且仅当 $\operatorname{Ker}\mathrm{d}^n_X\in\mathcal{GAC}$, $n\ll 0$, 这里的函子 F 是命题 4.1 中出现的.

证 设 $X\in\operatorname{Im}F$, 则存在 $G\in\mathcal{GAC}$, 使得 $F(G)\cong X$ 属于 $\mathbf{D}^b_{sg}(R)$. 利用 Gorenstein AC- 投射模的定义，我们得到正合序列

$$P^\bullet:=\cdots\to P^{-1}\to P^0\xrightarrow{\mathrm{d}^0_{P^\bullet}}P^1\to P^2\to\cdots,$$

其中 $\operatorname{Ker}\mathrm{d}^0_{P^\bullet}\cong G$. 利用 F 的定义，可得 $F(G)=P^\bullet_{\leqslant 0}$. 因此在 $\mathbf{D}^b_{sg}(R)$ 中， $P^\bullet_{\leqslant 0}\cong X$. 这样有右分式

$$X\overset{f}{\Longleftarrow}Z\overset{s}{\Longrightarrow}P^\bullet_{\leqslant 0},$$

其中 $Z\in\mathbf{K}^{-,b}(\mathcal{P})$, $\operatorname{Cone}(f)\in\mathbf{K}^b(\mathcal{P})$, $\operatorname{Cone}(s)\in\mathbf{K}^b(\mathcal{P})$. 由引理 4.3(2),(3) 得到 f 和 s 是左同伦等价，对任意 $n\ll 0$, 在 $\underline{\mathcal{M}}$ 中， $\operatorname{Ker}\mathrm{d}^n_X\cong\operatorname{Ker}\mathrm{d}^n_{P^\bullet}$. 从而存在 U 和 V 在 R- 模范畴中使得 $\operatorname{Ker}\mathrm{d}^n_X\oplus U\cong\operatorname{Ker}\mathrm{d}^n_{P^\bullet}\oplus V$. 因为 $\operatorname{Ker}\mathrm{d}^n_{P^\bullet}\in\mathcal{GAC}$ 和 $\mathcal{GAC}$ 关于直和项封闭，所以 $\operatorname{Ker}\mathrm{d}^n_X\in\mathcal{GAC}$.

假设 $X:=\ \cdots\to X^{n-1}\to X^n\to\cdots\to X^{m-1}\to X^m\to 0\to\cdots$, 在 $\mathbf{K}^{-,b}(\mathcal{P})$ 中，并且对任意 $n\ll 0$, 都有 $\operatorname{Ker}\mathrm{d}^n_X\in\mathcal{GAC}$. 存在左的温和截断

$$\tau_{\leqslant n}X:\cdots\to X^{n-2}\to X^{n-1}\to\operatorname{Ker}\mathrm{d}^n_X\to 0$$

是正合序列，其中对任意 $m\leqslant n$, 都有 $\operatorname{Ker}\mathrm{d}^m_X\in\mathcal{GAC}$. 由 Gorenstein AC- 投射模 $\operatorname{Ker}\mathrm{d}^n_X$ 的定义可得下列正合序列:

$$\begin{tikzcd}
P^\bullet:=\cdots \arrow[r] & X^{n-2} \arrow[r] & X^{n-1} \arrow[rr] \arrow[dr] & & P^n \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & P^0 \arrow[r] & P^1 \arrow[r] & \cdots \\
& & & \operatorname{Ker}\mathrm{d}^n_X \arrow[ur, hook] & & & & &
\end{tikzcd}$$

显然， $\operatorname{Ker} d^0_{P^\bullet} \in \mathcal{GAC}$ 和 $F(\operatorname{Ker} d^0_{P^\bullet}) = P^\bullet_{\leqslant 0}$. 这样有 $X' := 0 \to X^n \to X^{n+1} \to \cdots \to X^{m-1} \to X^m \to 0$ 和 $P' := 0 \to P^n \to P^{n+1} \to \cdots \to P^0 \to 0$ 在 $\mathbf{K}^b(\mathcal{P})$ 中. 利用奇点范畴的定义知道 $X' \cong P' \cong 0 \in \mathbf{D}^b_{sg}(R)$. 因此在 $\mathbf{D}^b_{sg}(R)$ 中，可得 $X \cong X_{\leqslant n-1} \cong P^\bullet_{\leqslant 0}$. 从而 $X \cong F(\operatorname{Ker} d^0_{P^\bullet}) \in \operatorname{Im} F$.

命题 4.2 $\operatorname{Im} F$ 是 $\mathbf{D}^b_{sg}(R)$ 的稠密子范畴.

证 设 $G \in \mathcal{GAC}$, $(P^\bullet, d)$ 是由 $G \in \mathcal{GAC}$ 的定义确定的正合序列，则 $F(G) = P^\bullet_{\leqslant 0}$. 假设在 $\mathbf{D}^b_{sg}(R)$ 中， $P^\bullet_{\leqslant 0} \cong Q \oplus L$, 这里 $Q, L \in \mathbf{K}^{-,b}(\mathcal{P})$. 与引理 4.4 的证明类似，我们容易得到对任意 $n \ll 0$, 在 $\underline{\mathcal{M}}$ 中都有 $\operatorname{Ker} d^n_{P^\bullet} \cong \operatorname{Ker} d^n_{Q\oplus L} \cong \operatorname{Ker} d^n_Q \oplus \operatorname{Ker} d^n_L$. 因此存在同构 $\operatorname{Ker} d^n_{P^\bullet} \oplus U \cong \operatorname{Ker} d^n_Q \oplus \operatorname{Ker} d^n_L \oplus V$, 其中 $U, V \in \mathcal{P}$. 因为 $\operatorname{Ker} d^n_{P^\bullet} \in \mathcal{GAC}$, $\operatorname{Ker} d^n_Q$, $\operatorname{Ker} d^n_L$ 在 $\mathcal{GAC}$ 中，利用引理 4.4 知 $Q, L \in \operatorname{Im} F$.

§5 Gorenstein AC 亏范畴

定义 5.1 设 R 是任意环， Gorenstein AC 亏范畴被定义为如下的 Verdier 商：

$$\mathbf{D}^b_{gacd}(R) := \mathbf{D}^b_{sg}(R)/\operatorname{Im} F,$$

这里的 F 是命题 4.1 中的的函子.

注 5.1 (1) 显然，有三角等价 $\mathbf{D}^b_{gacd}(R) \cong (\mathbf{K}^{-,b}(\mathcal{P})/\mathbf{K}^b(\mathcal{P}))/\operatorname{Im} F$.

(2) 若每个 level 模有有限的投射维数，则由文 [8] 可得 $\mathcal{GAC} = \mathcal{GP}$, 此时 Gorenstein AC 亏范畴 $\mathbf{D}^b_{gacd}(R)$ 就是在文 [11] 定义的 Gorenstein 亏范畴 $\mathbf{D}^b_{defect}(R)$.

命题 5.1 设 $F : \underline{\mathcal{GAC}} \to \mathbf{D}^b_{sg}(R)$ 是命题 4.1 中的三角嵌入函子，则

$$\operatorname{Im} F = \langle \mathcal{GAC} \rangle / \mathbf{K}^b(\mathcal{P}).$$

特别地，我们有三角等价 $\mathbf{D}^b_{gacd}(R) \cong \mathbf{D}^b(R)/\langle \mathcal{GAC} \rangle$.

证 显然， $\langle \mathcal{GAC} \rangle / \mathbf{K}^b(\mathcal{P})$ 是 $\mathbf{D}^b(R)/\mathbf{K}^b(\mathcal{P})$ 中由 $\mathcal{GAC}$ 生成的三角子范畴，这里我们把 $\mathcal{GAC}$ 中的对象看作成轴复形. 由命题 4.2 可知， $\operatorname{Im} F$ 是 $\mathbf{D}^b_{sg}(R)$ 中包含 $\mathcal{GAC}$ 的有厚度的三角子范畴. 因此 $\langle \mathcal{GAC} \rangle / \mathbf{K}^b(\mathcal{P}) \subseteq \operatorname{Im} F$. 由 F 的定义可得 $\operatorname{Im} F \subseteq \langle \mathcal{GAC} \rangle / \mathbf{K}^b(\mathcal{P})$. 因此 $\operatorname{Im} F = \langle \mathcal{GAC} \rangle / \mathbf{K}^b(\mathcal{P})$. 这样存在下列三角等价：

$$\begin{aligned}\mathbf{D}^b_{gacd}(R) &= \mathbf{D}^b_{sg}(R)/\operatorname{Im} F \cong (\mathbf{D}^b(R)/\mathbf{K}^b(\mathcal{P}))/(\langle \mathcal{GAC} \rangle / \mathbf{K}^b(\mathcal{P})) \\ &\cong \mathbf{D}^b(R)/\langle \mathcal{GAC} \rangle.\end{aligned}$$

定理 5.1 对任意环 R, 都存在三角等价

$$\mathbf{D}^b_{gacsg}(R) \cong \mathbf{D}^b_{gacd}(R).$$

证　下列三角等价成立：

$$\begin{aligned}\mathbf{D}^b_{gacsg}(R) &= \mathbf{D}^b_{gac}(R)/\mathbf{K}^b(\mathcal{GAC})\\ &\cong \mathbf{D}^b(R)/\langle\mathcal{GAC}\rangle\\ &\cong \mathbf{D}^b_{gacd}(R).\end{aligned}$$

这里第一个三角等价由命题 3.2 可得，第二个三角等价由命题 5.1 可得.

定义 $\mathbf{K}^{-,b}(\mathcal{P})$ 的全子范畴 $\mathbf{K}^{-,b}_{\mathcal{GAC}}(\mathcal{P})$ 如下：

$$\mathbf{K}^{-,b}_{\mathcal{GAC}}(\mathcal{P}) := \left\{ X \in \mathbf{K}^{-,b}(\mathcal{P}) \middle| \begin{array}{l}\text{存在 } n\in\mathbb{Z}, \text{ 使得 } \mathrm{H}^m(X)=0\\ \forall m\leqslant n, \text{并且 } \mathrm{Ker}\,\mathrm{d}^n\in\mathcal{GAC}\end{array}\right\}.$$

下面这部分我们将通过定理形式给出 Gorenstein AC 亏范畴的一个重要刻画.

定理 5.2　对任意环 R, 存在三角等价：

$$\mathbf{D}^b_{gacd}(R)\cong\mathbf{K}^{-,b}(\mathcal{P})/\mathbf{K}^{-,b}_{\mathcal{GAC}}(\mathcal{P}).$$

为了证明上面的定理，我们给出了下面两个引理.

引理 5.1　设 $f: X\to Y$ 是 $\mathbf{K}^{-,b}(\mathcal{P})$ 中的同伦等价，并且 $X\in\mathbf{K}^{-,b}_{\mathcal{GAC}}(\mathcal{P})$, 则 $Y\in\mathbf{K}^{-,b}_{\mathcal{GAC}}(\mathcal{P})$. 或者说，$\mathbf{K}^{-,b}_{\mathcal{GAC}}(\mathcal{P})$ 关于 $\mathbf{K}^{-,b}(\mathcal{P})$ 中的同构是封闭的.

证　因为 $X\in\mathbf{K}^{-,b}_{\mathcal{GAC}}(\mathcal{P})$, 这样由定义存在 $n\in\mathbb{Z}$, 使得对任意 $m\leqslant n$, 都有 $\mathrm{H}^m(X)=0$ 并且 $\mathrm{Ker}\,\mathrm{d}^n_X\in\mathcal{GAC}$. 众所周知同伦等价是拟同构. 因此，对任意 $m\leqslant n$ 得到 $\mathrm{H}^m(Y)=0$. 利用引理 4.3(2) 我们知道，对任意 $n\ll 0$, $\mathrm{Ker}\,\mathrm{d}^n_X\cong\mathrm{Ker}\,\mathrm{d}^n_Y$ 属于 $\underline{\mathcal{M}}$. 这样存在 R- 模范畴中的同构 $\mathrm{Ker}\,\mathrm{d}^n_X\oplus P\cong\mathrm{Ker}\,\mathrm{d}^n_Y\oplus Q$, 其中 $P,Q\in\mathcal{P}$. 因为 $\mathrm{Ker}\,\mathrm{d}^n_X\in\mathcal{GAC}$, $\mathcal{GAC}$ 关于直和项封闭，所以 $\mathrm{Ker}\,\mathrm{d}^n_Y\in\mathcal{GAC}$. 因此 $Y\in\mathbf{K}^{-,b}_{\mathcal{GAC}}(\mathcal{P})$.

引理 5.2　$\mathbf{K}^{-,b}_{\mathcal{GAC}}(\mathcal{P})$ 是 $\mathbf{K}^{-,b}(\mathcal{P})$ 的厚子范畴.

证　首先我们证明 $\mathbf{K}^{-,b}_{\mathcal{GAC}}(\mathcal{P})$ 对映射锥是封闭的.

设 $X,Y\in\mathbf{K}^{-,b}_{\mathcal{GAC}}(\mathcal{P})$, 则存在整数 n, 使得对任意 $m\leqslant n$, 都有 $\mathrm{H}^m(X)=\mathrm{H}^m(Y)=0$, 并且 $\mathrm{Ker}\,\mathrm{d}^n_X,\mathrm{Ker}\,\mathrm{d}^n_Y\in\mathcal{GAC}$. 假设 $f:X\to Y$ 复形链映射，我们得到下面的交换图：

$$\begin{tikzcd}
{}_{\tau\leqslant n}X \arrow[d, "f'"'] & \cdots \arrow[r] & X^{n-2} \arrow[r, "\mathrm{d}_X^{n-2}"] \arrow[d, "f^{n-2}"'] & X^{n-1} \arrow[r, "\mathrm{d}_X^{n-1}"] \arrow[d, "f^{n-1}"'] & \mathrm{Ker}\,\mathrm{d}^n_X \arrow[r] \arrow[d, "\overline{f^n}"'] & 0\\
{}_{\tau\leqslant n}Y & \cdots \arrow[r] & Y^{n-2} \arrow[r] & Y^{n-1} \arrow[r] & \mathrm{Ker}\,\mathrm{d}^n_Y \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

这里的映射 $\overline{f^n}:\mathrm{Ker}\,\mathrm{d}^n_X\to\mathrm{Ker}\,\mathrm{d}^n_Y$ 是由 $f^n: X^n\to Y^n$ 诱导的. 我们知道 ${}_{\tau\leqslant n}X$, ${}_{\tau\leqslant n}Y$ 是零调复形并且它们的每个核都是 Gorenstein AC- 投射模. 对任意 $m\leqslant n-3$, 都有 $\mathrm{d}^m_{\mathrm{Cone}(f')}=\mathrm{d}^m_{\mathrm{Cone}(f)}$, 还有 $\mathrm{Ker}\,\mathrm{d}^{n-3}_{\mathrm{Cone}(f')}$ 是 Gorenstein AC- 投射模，所以 $\mathrm{Cone}(f)\in\mathbf{K}^{-,b}_{\mathcal{GAC}}(\mathcal{P})$.

其次， $\mathbf{K}^{-,b}_{\mathcal{GAC}}(\mathcal{P})$ 关于平移函子封闭，因此 $\mathbf{K}^{-,b}_{\mathcal{GAC}}(\mathcal{P})$ 是 $\mathbf{K}^{-,b}(\mathcal{P})$ 的三角子范畴. 因为 $\mathcal{GAC}$ 关于直和项封闭，所以 $\mathbf{K}^{-,b}_{\mathcal{GAC}}(\mathcal{P})$ 是 $\mathbf{K}^{-,b}(\mathcal{P})$ 的厚子范畴.

现在我们开始证明上面的定理.

定理 5.2 的证明 设 $F:\mathbf{K}^{-,b}(\mathcal{P})\to\mathbf{D}^b(R)$ 是三角等价函子. 首先, 我们证明 $F(\mathbf{K}^{-,b}_{\mathcal{GAC}}(\mathcal{P}))=\langle\mathcal{GAC}\rangle$. 假设 $X\in\mathbf{K}^{-,b}_{\mathcal{GAC}}(\mathcal{P})$, 存在整数 n, 使得对任意 $m\leqslant n$, 都有 $\mathrm{H}^m(X)=0$, 并且 $\mathrm{Ker}\,\mathrm{d}^n_X\in\mathcal{GAC}$. 我们考虑下面由 Gorenstein AC- 投射模构成的有界复形:

$$X_1:=\qquad 0\longrightarrow \mathrm{Ker}\,\mathrm{d}^n_X\longrightarrow X^n\longrightarrow X^{n+1}\longrightarrow\cdots.$$

显然, 存在拟同构 $X\to X_1$. 这样在导出范畴中 $F(X)=X\cong X_1\in\langle\mathcal{GAC}\rangle$. 因此, $F(\mathbf{K}^{-,b}_{\mathcal{GAC}}(\mathcal{P}))\subseteq\langle\mathcal{GAC}\rangle$.

反过来, 利用引理 5.2 我们知道, $\mathbf{K}^{-,b}_{\mathcal{GAC}}(\mathcal{P})$ 是 $\mathbf{K}^{-,b}(\mathcal{P})$ 的厚子范畴. 从而 $F(\mathbf{K}^{-,b}_{\mathcal{GAC}}(\mathcal{P}))$ 是 $\mathbf{D}^b(R)$ 的厚子范畴. 设 $X\in\mathcal{GAC}$. 由 Gorenstein AC- 投射模的定义, 存在正合序列 $P^\bullet$, 使得 $\mathrm{Ker}\,\mathrm{d}^0_{P^\bullet}\cong X$, 我们考虑其左强制截断 $P^\bullet_{\leqslant 0}$. 显然, $P^\bullet_{\leqslant 0}\in\mathbf{K}^{-,b}_{\mathcal{GAC}}(\mathcal{P})$, 并且在 $\mathbf{D}^b(R)$ 中 $F(P^\bullet_{\leqslant 0})\cong\mathrm{Ker}\,\mathrm{d}^0_{P^\bullet}\cong X$. 因此, $\langle\mathcal{GAC}\rangle\subseteq F(\mathbf{K}^{-,b}_{\mathcal{GAC}}(\mathcal{P}))$. 故 $F(\mathbf{K}^{-,b}_{\mathcal{GAC}}(\mathcal{P}))=\langle\mathcal{GAC}\rangle$. 由以上的讨论我们可得下面的交换图:

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{K}^b(\mathcal{P}) \arrow[r] \arrow[d, equal] & \mathbf{K}^{-,b}_{\mathcal{GAC}}(\mathcal{P}) \arrow[r] \arrow[d] & \mathbf{K}^{-,b}(\mathcal{P}) \arrow[d] \\
\mathbf{K}^b(\mathcal{P}) \arrow[r] & \langle\mathcal{GAC}\rangle \arrow[r] & \mathbf{D}^b(R)
\end{tikzcd}$$

其中水平箭头表示嵌入函子, 竖直箭头表示三角等价函子. 从而有下面的三角等价:

$$\begin{aligned}\mathbf{K}^{-,b}(\mathcal{P})/\mathbf{K}^{-,b}_{\mathcal{GAC}}(\mathcal{P})&\cong\mathbf{D}^b(R)/\langle\mathcal{GAC}\rangle\\&\cong\mathbf{D}^b_{gacd}(R),\end{aligned}$$

这里的第二个三角等价由命题 5.1 得到.

致谢 作者感谢审稿人提供的宝贵修改意见.

参 考 文 献

[1] Enochs E E, Jenda O M G. Gorenstein injective and projective modules [J]. *Math Z*, 1995, 220:611–633.

[2] Asadollahi J, Hafezi R, Vahed R. Gorenstein derived equivalences and their invariants [J]. *J Pure Appl Algebra* , 2014, 218(5):888–903.

[3] Bravo D, Gillespie J. Absolutely clean, level, and Gorenstein AC-injective complexes [J]. *Comm Algebra*, 2016, 44(5):2213–2233.

[4] Enochs E E, Jenda O M G. Relative homological algebra [M]//de Gruyter Expositions in Math, 30, Berlin:Walter de Gruyter, 2000.

[5] Zhang P. Categorical resolution of a class of derived categories [J]. *Sci China Math*, 2018, 61(2):391–402.

[6] Buchweitz R O. Matrix Cohen-Macaulay modules and Tate cohomology over Gorenstein rings [R]. unpublished manuscript, 1987.

[7] Happel D. On Gorenstein algebras [M]//Representatin Theory of Finite Groups and Finite-dimensional Algebras, Progress in Math, vol 95, Basel:Birkhäuser, 1991:389–404.

[8] Bravo D, Gillespie J, Hovey M. The stable module category of general ring [EB/OL]. arXiv:1405.5768, 2014.

[9] Bergh P A, Oppermann S, Jorgensen D A. The Gorenstein defect category [J]. *Quart J Math*, 2015, 66:459–471.

[10] Bao Y H, Du X N, Zhao Z B. Gorenstein singularity categories [J]. *J Algebra*, 2015, 428:122–137.

[11] Kong F, Zhang P. From CM-finite to CM-free [J]. *J Pure Appl Algebra*, 2016, 220:782–801.

[12] Neeman A. The derived category of an exact category [J]. *J Algebra*, 1990, 135(2):388–394.

[13] Christensen L W, Frankild A, Holm H. On Gorenstein projective, injective and flat dimensions-A functorial description with applications [J]. *J Algebra*, 2006, 302:231–279.

[14] Cao T Y, Liu Z K, Yang X Y. Derived category with respect to Gorenstein AC-projective modules [J]. *Kodai Math J*, 2018, 41:579–590.

[15] Gao N, Zhang P. Gorenstein derived categories [J]. *J Algebra*, 2010, 323:2041–2057.

[16] Ren W, Liu Z K, Yang G. Derived categories with respect to Ding modules [J]. *J Algebra Appl*, 2013, 12(6):13 pages.

[17] Verdier J L. Des catégories dérivées abéliennes [J]. *Asterisque*, 1996, 239:xii+253 pp.

[18] Chen W J, Liu Z K, Yang X Y. Singularity categories with respect to Ding projective modules [J]. *Acta Math Sinica*, 2017, 33:793–806.

[19] Bühler T, Exact categories [J]. *Expo Math*, 2010, 28(1):1–69.

[20] Happel D. On the derived categories of finite-dimensional algebra [J]. *Comment Math Helv*, 1987, 62:339–389.

[21] Chen X W, Relative singularity categories and Gorenstein-projective modules [J]. *Math Nachr*, 2011, 284:199–212.

[22] Li H H, Huang Z Y. Relative singularity categories [J]. *J Pure Appl Algebra*, 2015, 219:4090–4104.

[23] Zhu S J. Left homotopy theory and Buchweitz's theorem [D]. Shanghai: Shanghai Jiaotong Universty, 2011.

[24] Zhang P. Triangulated category and derived category [M]. Beijing: Science Press, 2015.

The Gorenstein AC Defect Category

CAO Tianya[1] LIU Zhongkui[2] YANG Xiaoyan[2]

[1]College of Computer Science and Engineering, Northwest Normal University, Lanzhou 730070, China. E-mail: caotianya1979@126.com

[2]College of Mathematics and Statistics, Northwest Normal University, Lanzhou 730070, China. E-mail: liuzk@nwnu.edu.cn; yangxy@nwnu.edu.cn

Abstract The authors introduce the Gorenstein AC derived category $\mathbf{D}_{gac}(R)$ and compare it with the derived category. Then the Gorenstein AC singularity category $\mathbf{D}^b_{gacsg}(R)$ is defined since its vanishing implies the finiteness of the Gorenstein AC-projective resolution dimension of any R-module. They give a triangle-embedding functor $F : \mathcal{GAC} \to \mathbf{D}^b_{sg}(R)$, from the stable category of Gorenstein AC-projective modules to the bounded singular category. the Gorenstein AC defect category $\mathbf{D}^b_{gacd}(R)$ is defined as the quotient of F. Moreover, it is proved that $\mathbf{D}^b_{gacd}(R)$ is triangle-equivalent to $\mathbf{D}^b_{gacsg}(R)$.

Keywords Gorenstein AC derived category, Gorenstein AC singularity category, Gorenstein AC defect category, Stable category

2000 MR Subject Classification 18G35, 18E30

The English translation of this paper will be published in

Chinese Journal of Contemporary Mathematics, Vol. 43 No. 2, 2022

by ALLERTON PRESS, INC., USA