

静脉血流动力学模型基本波的相互作用*

单 亿¹ 盛万成¹

提要 静脉系统是心血管系统的重要组成部分. 脉搏波在血液流动中有着突出的重要性. 本文主要研究静脉血流动力学模型基本波的相互作用. 血流动力学模型是 2×2 严格双曲型方程组, 其基本波包括疏散波和激波, 属于血液流动中的脉搏波. 基本波相互作用后血管截面面积和血流速度发生相应的变化.

关键词 血流动力学, 静脉, 疏散波, 激波, 基本波的相互作用

MR (2000) 主题分类 35L45, 35L65, 35L67

中图法分类 O175.29

文献标志码 A

文章编号 1000-8314(2022)04-0347-10

§1 引 言

在现代生活中, 心血管疾病正严重威胁着人类健康, 其中静脉曲张是静脉系统最常见的疾病, 多发生在下肢, 其形成原因主要是血液长期淤积, 引起静脉内的压力过高, 从而静脉血管出现迂曲、膨胀, 更甚会造成血栓形成. 脉搏波在这当中起了重要的作用. 对于心血管系统, 建立数学模型、进行理论研究, 能够帮助医学研究人员更好地理解人类生理和病理过程, 从而设计更优化的治疗方法, 最终突破医疗难题.

心血管系统, 由心脏和血管系统组成, 血液在其中循环流动. 血管系统包括动脉系统和静脉系统, 负责运输血液, 其结构复杂, 血管数量众多. 血液由血浆和血细胞组成, 并不是简单的流体. 基于心血管系统的复杂性, 建立整体的血流动力学模型非常困难, 因此构造局部的血流动力学模型. 目前关于血流动力学模型的研究大多与动脉有关^[1-5]. 与动脉相比, 静脉受到的关注要少得多. 由于静脉是高度非线性的, 极易变形, 对其数学模型进行简化是有必要的.

2017年, Spiller 等人在文 [6] 中考虑了一维静脉血管 2×2 血流动力学模型的 Riemann 问题, 其模型为

$$\begin{cases} A_t + (Au)_x = 0, \\ (Au)_t + (Au^2)_x + \frac{A}{\rho} p_x = -Ru, \end{cases} \quad (1.1)$$

其中 $A = A(x, t)$ 表示血管的横截面积, u 和 p 分别表示血液流动速度和血液所受压力. ρ 为血液密度, 假设为常数, $R \geq 0$ 表示血液在单位长度血管中受到的阻力, 为一个已知的

本文 2022 年 4 月 24 日收到, 2022 年 11 月 11 日收到修改稿.

¹上海大学数学系, 上海 200444. E-mail: shanyi@shu.edu.cn; mathwcheng@shu.edu.cn

*本文受到国家自然科学基金 (No. 12171305) 的资助.

函数. 我们主要考虑方程组 (1.1) 的齐次形式, 它对应于无阻力流动,

$$\begin{cases} A_t + (Au)_x = 0, \\ (Au)_t + (Au^2)_x + \frac{A}{\rho} p_x = 0. \end{cases} \quad (1.2)$$

有关模型的详细推导过程可见文 [7-8].

为了封闭方程组 (1.2), 根据血管的特征, 引入一个血管壁运动方程

$$p = p_e + K(x) \left[\left(\frac{A}{A_E} \right)^m - \left(\frac{A}{A_E} \right)^n \right], \quad (1.3)$$

其中 p_e 和 A_E 分别表示平衡状态下血管壁所受外部压力和血管横截面积, 均假设为常数, $m \geq 0$ 和 $n \leq 0$ 均为确定的实数. 对于静脉血液流动, $m \approx 10, n = -\frac{3}{2}$, 参考文 [6]. $K(x)$ 表示血管壁弹性系数, 在静脉中, $K(x)$ 满足

$$K(x) = \frac{E(x)}{12(1-\nu^2)} \left(\frac{h_e(x)}{r_e(x)} \right)^3.$$

这里 $E(x)$ 表示杨氏弹性模量, ν 为泊松比, 设为 $\nu = \frac{1}{2}$. $h_e(x)$ 和 $r_e(x)$ 分别表示平衡状态下血管壁厚度和血管半径. 关于血管壁运动方程的详细介绍可见文 [8-12]. 在本文中假设 E, h_e 以及 r_e 均为固定参数, 即 K 为常数.

§2 特征分析与基本波

§2.1 特征分析

令 $Q = (A, u)$, 则方程组 (1.2) 可化为

$$Q_t + A(Q)Q_x = 0, \quad (2.1)$$

其中

$$A(Q) = \begin{pmatrix} u & A \\ \frac{p_A}{\rho} & u \end{pmatrix}. \quad (2.2)$$

由 $|\lambda E - A(Q)| = 0$, 即 $(\lambda - u)^2 - \frac{A}{\rho} p_A = 0$, 可得矩阵 $A(Q)$ 有两个特征值

$$\lambda_1 = u - c, \quad \lambda_2 = u + c,$$

其中

$$c = \sqrt{\frac{A}{\rho} p_A} = \sqrt{\frac{K}{\rho} \left[m \left(\frac{A}{A_E} \right)^m - n \left(\frac{A}{A_E} \right)^n \right]}. \quad (2.3)$$

为了便于书写, 可将波速 (2.3) 改写为 $c = \sqrt{(m+1)\gamma_1 A^m + (n+1)\gamma_2 A^n}$, 其中

$$\gamma_1 = \frac{mK}{(m+1)\rho A_E^m} > 0, \quad \gamma_2 = -\frac{nK}{(n+1)\rho A_E^n} < 0.$$

通过计算, 特征值 λ_1 和 λ_2 对应的右特征向量分别为

$$\mathbf{r}_1 = \left(-\frac{c}{A}, 1 \right)^T, \quad \mathbf{r}_2 = \left(\frac{c}{A}, 1 \right)^T.$$

显然方程组 (1.2) 是严格双曲的. 由

$$\nabla \lambda_1 \cdot \mathbf{r}_1 = -\nabla \lambda_2 \cdot \mathbf{r}_2 = -\frac{K[m(m+2)\left(\frac{A}{A_E}\right)^m - n(n+2)\left(\frac{A}{A_E}\right)^n]}{2A\sqrt{\rho K[m\left(\frac{A}{A_E}\right)^m - n\left(\frac{A}{A_E}\right)^n]} \neq 0,$$

可知 1- 特征和 2- 特征都是真正非线性的. 因此, 可能出现的两族波都是疏散波或激波.

下面我们讨论方程组 (1.2) 的基本波.

§2.2 疏散波

首先, 我们考虑方程组 (1.2) 的光滑解. 通过计算, 特征值 λ_1, λ_2 对应的 Riemann 不变量分别为

$$\begin{cases} \lambda_1 = u - c, u + \int \frac{c(A)}{A} dA = \text{Const.}, \\ \lambda_2 = u + c, u - \int \frac{c(A)}{A} dA = \text{Const.}. \end{cases} \quad (2.4)$$

给定一左状态 $Q_l = (A_l, u_l)$, 则通过疏散波与左状态 Q_l 相连的右状态 $Q = (A, u)$ 满足以下关系:

$$\begin{cases} \overleftarrow{R}(Q_l, Q) \text{ (abbr. } \overleftarrow{R}(Q_l)) : u = u_l - \int_{A_l}^A \frac{c(\tau)}{\tau} d\tau, & A < A_l, \\ \overrightarrow{R}(Q_l, Q) \text{ (abbr. } \overrightarrow{R}(Q_l)) : u = u_l + \int_{A_l}^A \frac{c(\tau)}{\tau} d\tau, & A > A_l. \end{cases} \quad (2.5)$$

引理 2.1 在 (u, A) 平面上, 后向疏散波曲线 $\overleftarrow{R}(Q_l, Q)$ 是严格递减的, 前向疏散波曲线 $\overrightarrow{R}(Q_l, Q)$ 是严格递增的. 存在 A_α 满足: $\left(\frac{A_\alpha}{A_E}\right)^{m-n} = \frac{n(n-2)}{m(m-2)}$, 使得当 $A < A_\alpha$ 时, $\overleftarrow{R}(Q_l, Q)$ 是凸的, $\overrightarrow{R}(Q_l, Q)$ 是凹的; 当 $A > A_\alpha$ 时, $\overleftarrow{R}(Q_l, Q)$ 是凹的, $\overrightarrow{R}(Q_l, Q)$ 是凸的.

证 对于后向疏散波 $\overleftarrow{R}(Q_l, Q)$, 由 (2.5) 得

$$\frac{du}{dA} \Big|_{\overleftarrow{R}(Q_l, Q)} = -\frac{c}{A} < 0, \quad \frac{d^2u}{dA^2} \Big|_{\overleftarrow{R}(Q_l, Q)} = -\frac{K[m(m-2)\left(\frac{A}{A_E}\right)^m - n(n-2)\left(\frac{A}{A_E}\right)^n]}{2\rho A^2 c}.$$

因此, 存在 A_α 满足: $\left(\frac{A_\alpha}{A_E}\right)^{m-n} = \frac{n(n-2)}{m(m-2)}$, 使得当 $A < A_\alpha$ 时, $\frac{d^2u}{dA^2} \Big|_{\overleftarrow{R}(Q_l, Q)} > 0$; 当 $A > A_\alpha$ 时, $\frac{d^2u}{dA^2} \Big|_{\overleftarrow{R}(Q_l, Q)} < 0$.

类似地, 可以得到关于前向疏散波 $\overrightarrow{R}(Q_l, Q)$ 的证明.

§2.3 激波

下面, 我们考虑方程组 (1.2) 的间断解. 已知在间断线上解满足 Rankine-Hugoniot 条件:

$$\begin{cases} -\sigma[A] + [Au] = 0, \\ -\sigma[Au] + \left[Au^2 + \frac{A_E K}{\rho} \left(\frac{m}{m+1} \left(\frac{A}{A_E} \right)^{m+1} - \frac{n}{n+1} \left(\frac{A}{A_E} \right)^{n+1} \right) \right] = 0, \end{cases} \quad (2.6)$$

其中 $\sigma = \frac{dx}{dt}$ 为间断速度, $[A] = A - A_l$ 为间断线两边状态的跳跃. 由上式可得

$$(u - u_l)^2 = \frac{A - A_l}{AA_l} [\gamma_1(A^{m+1} - A_l^{m+1}) + \gamma_2(A^{n+1} - A_l^{n+1})].$$

根据 Lax 熵条件, 后向激波满足:

$$\lambda_1(Q) < \sigma_1 < \lambda_1(Q_l), \quad \sigma_1 < \lambda_2(Q),$$

前向激波满足:

$$\lambda_2(Q) < \sigma_2 < \lambda_2(Q_l), \quad \sigma_2 > \lambda_1(Q_l),$$

则有 $u < u_l$. 因此, 对于给定的左状态 $Q_l = (A_l, u_l)$, 通过激波与左状态 Q_l 相连的右状态 $Q = (A, u)$ 满足以下关系:

$$\left\{ \begin{array}{l} \overleftarrow{S}(Q_l, Q) : \begin{cases} u = u_l - \sqrt{\frac{A - A_l}{AA_l} [\gamma_1(A^{m+1} - A_l^{m+1}) + \gamma_2(A^{n+1} - A_l^{n+1})]}, & A > A_l, \\ \sigma_1 = u_l - \frac{1}{A_l} \sqrt{\frac{AA_l}{A - A_l} [\gamma_1(A^{m+1} - A_l^{m+1}) + \gamma_2(A^{n+1} - A_l^{n+1})]}. \end{cases} \\ \text{(或 } \overleftarrow{S}(Q_l)) \\ \overrightarrow{S}(Q_l, Q) : \begin{cases} u = u_l - \sqrt{\frac{A - A_l}{AA_l} [\gamma_1(A^{m+1} - A_l^{m+1}) + \gamma_2(A^{n+1} - A_l^{n+1})]}, & A < A_l, \\ \sigma_2 = u_l + \frac{1}{A_l} \sqrt{\frac{AA_l}{A - A_l} [\gamma_1(A^{m+1} - A_l^{m+1}) + \gamma_2(A^{n+1} - A_l^{n+1})]}. \end{cases} \\ \text{(或 } \overrightarrow{S}(Q_l)) \end{array} \right. \quad (2.7)$$

引理 2.2 在 (u, A) 平面上, 后向激波曲线 $\overleftarrow{S}(Q_l, Q)$ 是严格递减的, 前向激波曲线 $\overrightarrow{S}(Q_l, Q)$ 是严格递增的.

证 对于后向激波 $\overleftarrow{S}(Q_l, Q)$, 由 (2.7) 得

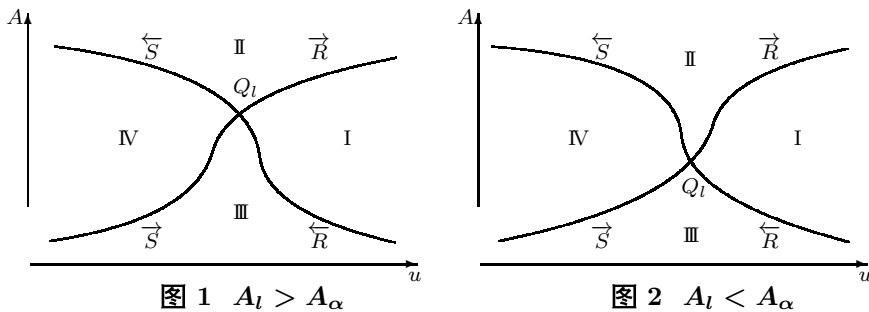
$$\frac{du}{dA} \Big|_{\overleftarrow{S}(Q_l, Q)} = \frac{1}{2(u - u_l)} \left(\frac{g}{A^2} + \frac{A - A_l}{AA_l} c^2 \right) < 0,$$

其中 $g = \gamma_1(A^{m+1} - A_l^{m+1}) + \gamma_2(A^{n+1} - A_l^{n+1})$.

类似地, 可以得到关于前向激波 $\overrightarrow{S}(Q_l, Q)$ 的证明.

注 2.1 通过计算可知, 激波曲线在 (u, A) 平面内有且仅有一个拐点, 除了 $A_l = A_\alpha$ 的情形.

综上所述, 将所有曲线放到 (u, A) 平面中, 如图 1 以及图 2 所示.



§3 基本波的相互作用

在静脉曲张以及血栓形成处, 血液流动速度 u 和血管横截面积 A 发生变化. 研究静脉血管内基本波的相互作用, 对理解病理过程有重要意义. 考虑方程组 (1.2) 的初值问题:

$$(A, u)|_{t=0} = \begin{cases} Q_l = (A_l, u_l), & x < x_1, \\ Q_0 = (A_0, u_0), & x_1 < x < x_2, \\ Q_r = (A_r, u_r), & x > x_2. \end{cases} \quad (3.1)$$

§3.1 两激波的相碰

当 $A_\alpha < A_0 < A_l$, $u_0 < u_l$, $A_r > A_0 > A_\alpha$, $u_r < u_0$ 时, 在 (x, t) 平面内 $t = 0$ 附近出现前向激波 \vec{S} 与后向激波 \overleftarrow{S} , 如图 3 所示, 其中 $Q_0 \in \vec{S}(Q_l, Q)$ 和 $Q_r \in \overleftarrow{S}(Q_0, Q)$. 根据熵条件, 前向激波 \vec{S} 的传播速度 $\sigma_2(Q_l, Q_0)$ 与后向激波 \overleftarrow{S} 的传播速度 $\sigma_1(Q_0, Q_r)$ 分别满足

$$0 < \lambda_2(Q_0) < \sigma_2(Q_l, Q_0) < \lambda_2(Q_l), \quad \lambda_1(Q_r) < \sigma_1(Q_0, Q_r) < \lambda_1(Q_0) < 0,$$

则 $\sigma_2(Q_l, Q_0) > \sigma_1(Q_0, Q_r)$. 显然前向激波 \vec{S} 与后向激波 \overleftarrow{S} 会在有限时间内发生相互碰撞.

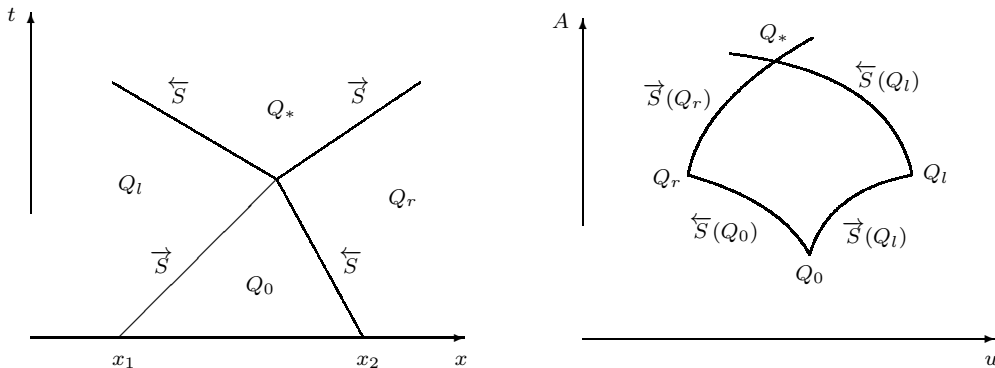


图 3 两激波相碰: $\vec{S}\overleftarrow{S} \rightarrow \overleftarrow{S}\vec{S}$

在 (u, A) 平面作 $\overleftarrow{S}(Q_l)$ 的图像, 由于 $\overleftarrow{S}(Q_l)$ 和 $\overleftarrow{S}(Q_0)$ 不可能相交, 因此 $Q_r \in IV(Q_l)$. 这表明 $\overleftarrow{S}(Q_l)$ 与 $\vec{S}(Q_r)$ 在 (u, A) 平面有一个唯一的交点 Q_* . 也就是说, 这两个激波在发生相互碰撞后, 互相穿过并且形成新的激波. 前向激波与后向激波相互碰撞的结果可以表示为

$$\vec{S}(Q_l, Q_0) \oplus \overleftarrow{S}(Q_0, Q_r) \rightarrow \overleftarrow{S}(Q_l, Q_*) \oplus \vec{S}(Q_*, Q_r),$$

这里 \oplus 指紧随着的意思, 简单记作 $\vec{S}\overleftarrow{S} \rightarrow \overleftarrow{S}\vec{S}$.

在血管中前向激波与后向激波发生相互碰撞, 则血管横截面积由先减后增变为先增后减, 血液流动速度保持减小.

§3.2 两疏散波的相碰

当 $A_0 > A_l > A_\alpha$, $u_0 > u_l$, $A_\alpha < A_r < A_0$, $u_r > u_0$ 时, 在 (x, t) 平面内 $t = 0$ 附近出现前向疏散波 \vec{R} 与后向疏散波 \overleftarrow{R} , 如图 4 所示. 其中 $Q_0 \in \vec{R}(Q_l, Q)$ 和 $Q_r \in \overleftarrow{R}(Q_0, Q)$. 此时, 我们可以得到

$$0 < \lambda_2(Q_l) < \lambda_2(Q_0), \quad \lambda_1(Q_0) < \lambda_1(Q_r) < 0.$$

显然前向疏散波 \vec{R} 与后向疏散波 \overleftarrow{R} 会在有限时间内发生相互碰撞.

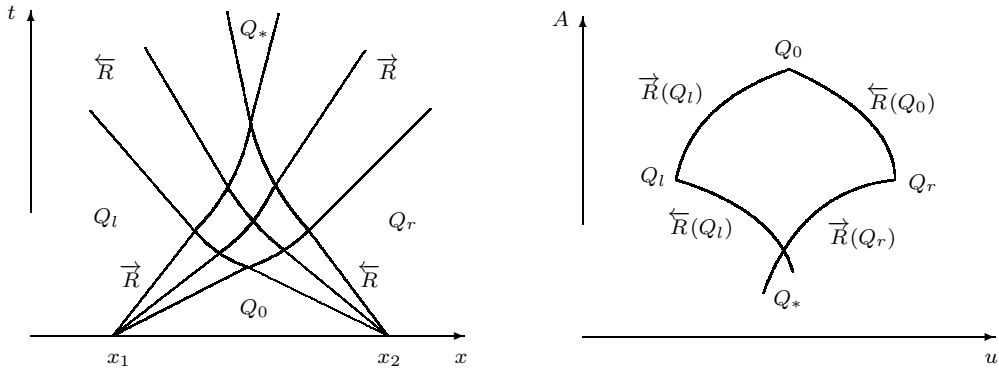


图 4 两疏散波的相碰: $\vec{R} \overleftarrow{R} \rightarrow \overleftarrow{R} \vec{R}$

易知 $Q_r \in I(Q_l)$. 这表明 $\overleftarrow{R}(Q_l)$ 与 $\vec{R}(Q_r)$ 在 (u, A) 平面有一个唯一的交点 Q_* . 也就是说, 这两个疏散波在有限时间内互相穿过并且形成新的疏散波. 前向疏散波与后向疏散波相互碰撞的结果可以表示为

$$\vec{R}(Q_l, Q_0) \oplus \overleftarrow{R}(Q_0, Q_r) \rightarrow \overleftarrow{R}(Q_l, Q_*) \oplus \vec{R}(Q_*, Q_r),$$

简单记作 $\vec{R} \overleftarrow{R} \rightarrow \overleftarrow{R} \vec{R}$.

关于前向疏散波 \vec{R} 与后向疏散波 \overleftarrow{R} 相互碰撞前后传播速度的变化, 有以下结论.

引理 3.1 前向疏散波 \vec{R} 与后向疏散波 \overleftarrow{R} 相互碰撞后, 前向疏散波 \vec{R} 的传播速度减小, 后向疏散波 \overleftarrow{R} 的传播速度增大.

证 对于前向疏散波 \vec{R} , 由 $Q_r \in \overleftarrow{R}(Q_0, Q)$ 可得

$$u_r - u_0 = - \int_{A_0}^{A_r} \frac{c(A)}{A} dA = \int_{A_r}^{A_0} \frac{c(A)}{A} dA, \quad A_r < A_0,$$

因

$$\frac{dc}{dA} - \frac{c}{A} = \frac{K[m(m-2)(\frac{A}{A_E})^m - n(n-2)(\frac{A}{A_E})^n]}{2\rho A c},$$

则当 $A > A_\alpha$ 时, 有 $\frac{dc}{dA} - \frac{c}{A} > 0$, 从而

$$\int_{A_r}^{A_0} \left(\frac{dc}{dA} - \frac{c}{A}\right) dA > 0, \quad A_\alpha < A_r < A_0,$$

因此 $u_0 + c_0 > u_r + c_r$, 即 $\lambda_2(Q_0) > \lambda_2(Q_r)$.

类似地, 可得 $u_l + c_l > u_* + c_*$, 即 $\lambda_2(Q_l) > \lambda_2(Q_*)$.

综上所述, 可知前向疏散波 \vec{R} 的传播速度减小.

类似于前向疏散波 \vec{R} 传播速度的比较, 对于后向疏散波 \overleftarrow{R} , 可得 $u_0 - c_0 < u_l - c_l$ 与 $u_r - c_r < u_* - c_*$, 即 $\lambda_1(Q_0) < \lambda_1(Q_l)$ 与 $\lambda_1(Q_r) < \lambda_1(Q_*)$, 因此后向疏散波 \overleftarrow{R} 的传播速度增大.

在血管中前向疏散波与后向疏散波发生相互碰撞, 则血管横截面积由先增后减变为先减后增, 血液流动速度保持增加.

§3.3 疏散波与激波的相碰

当 $A_0 > A_l > A_\alpha$, $u_0 > u_l$, $A_r > A_0 > A_\alpha$, $u_r < u_0$ 时, 在 (x, t) 平面内 $t = 0$ 附近出现前向疏散波 \vec{R} 与后向激波 \overleftarrow{S} , 如图 5 所示. 其中 $Q_0 \in \vec{R}(Q_l, Q)$ 和 $Q_r \in \overleftarrow{S}(Q_0, Q)$. 此时, 我们可以得到

$$0 < \lambda_2(Q_l) < \lambda_2(Q_0), \quad \lambda_1(Q_r) < \sigma_1(Q_0, Q_r) < \lambda_1(Q_0) < 0.$$

显然前向疏散波 \vec{R} 与后向激波 \overleftarrow{S} 会在有限时间内发生相互碰撞.

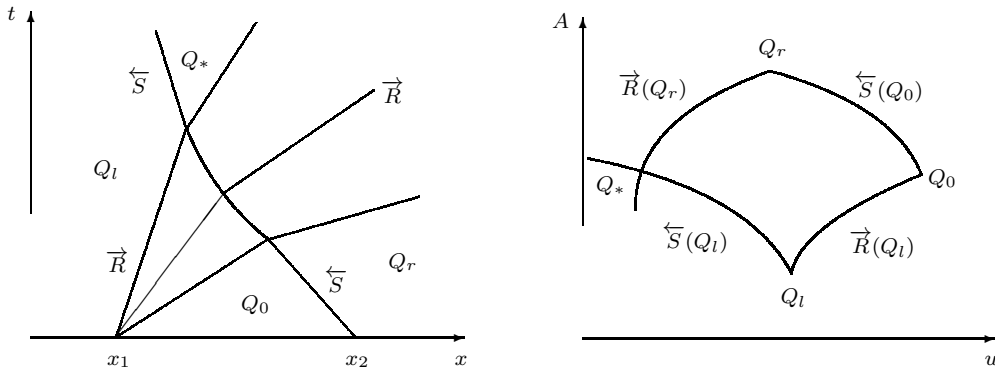


图 5 疏散波与激波的相碰: $\vec{R} \overleftarrow{S} \rightarrow \overleftarrow{S} \vec{R}$

易知 $Q_r \in \Pi(Q_l)$. 这表明 $\overleftarrow{S}(Q_l)$ 与 $\vec{R}(Q_r)$ 在 (u, A) 平面有一个唯一的交点 Q_* . 也就是说, 前向疏散波 \vec{R} 与后向激波 \overleftarrow{S} 在有限时间内互相穿过并且形成新的前向疏散波与后向激波. 前向疏散波与后向激波相互碰撞的结果可以表示为

$$\vec{R}(Q_l, Q_0) \oplus \overleftarrow{S}(Q_0, Q_r) \rightarrow \overleftarrow{S}(Q_l, Q_*) \oplus \vec{R}(Q_*, Q_r),$$

简单记作 $\vec{R} \overleftarrow{S} \rightarrow \overleftarrow{S} \vec{R}$.

在血管中前向疏散波与后向激波发生相互碰撞, 则血管横截面积保持增加, 血液流动速度由先增后减变为先减后增.

类似地, 前向激波 \overrightarrow{S} 与后向疏散波 \overleftarrow{R} 相互碰撞的结果可以简单记作 $\overrightarrow{S} \overleftarrow{R} \rightarrow \overleftarrow{R} \overrightarrow{S}$.

§3.4 两激波的追赶

当 $A_\alpha < A_0 < A_l$, $u_0 < u_l$, $A_\alpha < A_r < A_0$, $u_r < u_0$ 时, 在 (x, t) 平面内 $t = 0$ 附近出现两个前向激波 \overrightarrow{S}_1 与 \overrightarrow{S}_2 , 如图 6 所示, 其中 $Q_0 \in \overrightarrow{S}_1(Q_l, Q)$ 和 $Q_r \in \overrightarrow{S}_2(Q_0, Q)$. 根据熵条

件, \vec{S}_1 的传播速度 $\sigma_2^1(Q_l, Q_0)$ 与 \vec{S}_2 的传播速度 $\sigma_2^2(Q_0, Q_r)$ 分别满足

$$\lambda_2(Q_0) < \sigma_2^1(Q_l, Q_0) < \lambda_2(Q_l), \quad \lambda_2(Q_r) < \sigma_2^2(Q_0, Q_r) < \lambda_2(Q_0),$$

因此, $\sigma_2^1(Q_l, Q_0) > \sigma_2^2(Q_0, Q_r)$. 显然前向激波 \vec{S}_1 会在有限时间内追赶上前向激波 \vec{S}_2 .

易证 $Q_r \in \text{III}(Q_l)$. 这表明前向激波 \vec{S}_1 追赶上 \vec{S}_2 后透射出一个前向激波并且反射出一个后向疏散波. 这一结果可以表示为

$$\vec{S}(Q_l, Q_0) \oplus \vec{S}(Q_0, Q_r) \longrightarrow \overleftarrow{R}(Q_l, Q_*) \oplus \vec{S}(Q_*, Q_r),$$

简单记作 $\vec{S}\vec{S} \longrightarrow \overleftarrow{R}\vec{S}$.

在血管中两个前向激波发生追赶, 则血管横截面积保持减小, 血液流动速度由持续减小变为先增后减.

类似地, 两个后向激波 \overleftarrow{S} 发生追赶的结果可以简单记作 $\overleftarrow{S}\overleftarrow{S} \longrightarrow \overleftarrow{S}\overleftarrow{R}$.

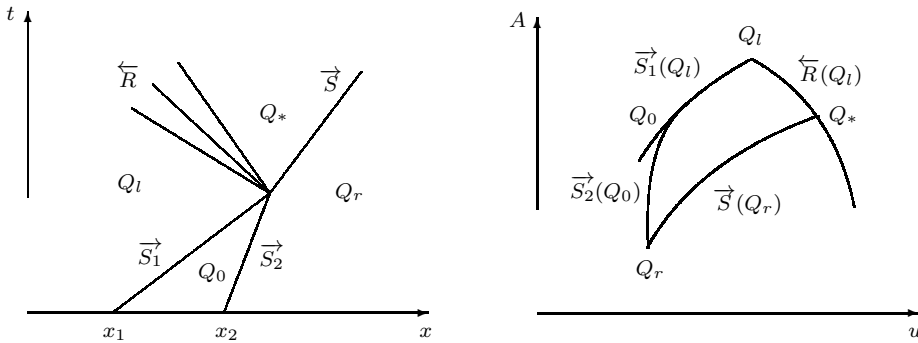


图 6 两激波的追赶: $\vec{S}\vec{S} \longrightarrow \overleftarrow{R}\vec{S}$

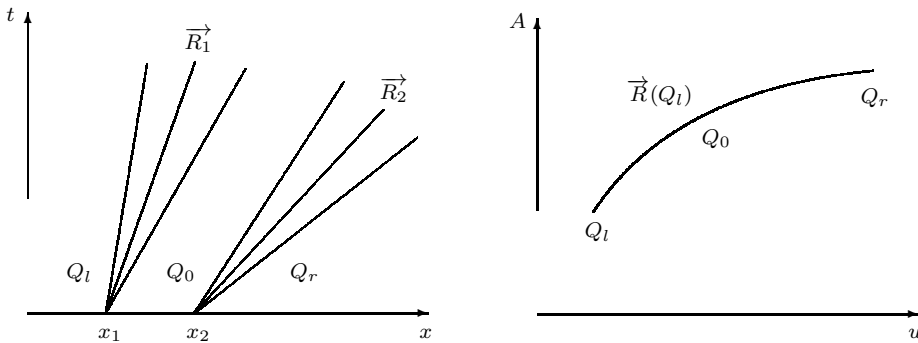


图 7 两疏散波的追赶: $\overleftarrow{R}\overleftarrow{R} \longrightarrow \overleftarrow{R}$

§3.5 两疏散波的追赶

当 $A_0 > A_l > A_\alpha$, $u_0 > u_l$, $A_r > A_0 > A_\alpha$, $u_r > u_0$ 时, 在 (x, t) 平面内 $t = 0$ 附近出现两个前向疏散波 \overleftarrow{R}_1 和 \overleftarrow{R}_2 , 如图 7 所示, 其中 $Q_0 \in \overleftarrow{R}_1(Q_l, Q)$ 和 $Q_r \in \overleftarrow{R}_2(Q_0, Q)$. 由于前向疏散波 \overleftarrow{R}_1 的波前速度与 \overleftarrow{R}_2 的波后速度相等, 因此这两个前向疏散波 \overleftarrow{R}_1 与 \overleftarrow{R}_2 不

可能发生追赶. 这就意味着 \vec{R}_1 与 \vec{R}_2 可以看做是一个前向疏散波 \vec{R} . 前向疏散波 \vec{R}_1 与 \vec{R}_2 相互作用的结果可以表示为

$$\vec{R}(Q_l, Q_0) \oplus \vec{R}(Q_0, Q_r) \rightarrow \vec{R}(Q_l, Q_r),$$

简单记作 $\vec{R}\vec{R} \rightarrow \vec{R}$.

在血管中两个前向疏散波发生追赶, 则血管横截面积和血液流动速度都保持增加.

类似地, 由于后向疏散波 \overleftarrow{R}_1 的波前速度与 \overleftarrow{R}_2 的波后速度相等, 因此两个后向疏散波相互作用的结果可以简单记作 $\overleftarrow{R}\overleftarrow{R} \rightarrow \overleftarrow{R}$.

综上所述, 我们可以得到以下结论.

定理 3.1 静脉血流动力学齐次方程组的初值问题 (1.2) 和 (3.1) 存在整体解. 表现为基本波 (脉搏波) 的相互作用. 结果可简单表述为

(1) 基本波相碰

$$\vec{S}\overleftarrow{S} \rightarrow \overleftarrow{S}\vec{S}, \quad \vec{R}\overleftarrow{R} \rightarrow \overleftarrow{R}\vec{R}, \quad \vec{R}\overleftarrow{S} \rightarrow \overleftarrow{S}\vec{R}, \quad \vec{S}\overleftarrow{R} \rightarrow \overleftarrow{R}\vec{S}.$$

(2) 基本波相追

$$\vec{S}\vec{S} \rightarrow \overleftarrow{R}\vec{S}, \quad \overleftarrow{S}\overleftarrow{S} \rightarrow \overleftarrow{S}\vec{R}, \quad \vec{R}\vec{R} \rightarrow \vec{R}, \quad \overleftarrow{R}\overleftarrow{R} \rightarrow \overleftarrow{R}.$$

参 考 文 献

- [1] Formaggia L, Lamponi D, Quarteroni A. One-Dimensional models for blood flow in arteries [J]. *J Eng Math*, 2003, 47(3-4):251-276.
- [2] Toro E F, Siviglia A. Modeling of physiological flows [M]. Milan: Springer-Verlag, 2012.
- [3] Toro E F, Siviglia A. Flow in collapsible tubes with discontinuous mechanical properties: mathematical model and exact solutions [J]. *Commun Comput Phys*, 2013, 13(2):361-385.
- [4] Sheng W C, Zhang Q L, Zheng Y X. The Riemann problem for a blood flow model in arteries [J]. *Commun Comput Phys*, 2020, 27(1):227-250.
- [5] 盛万成, 徐淑芳. 血液动力学中血管流激波与驻波的相互作用 [J]. *数学年刊 A 辑*, 2021, 42(1):1-10.
- [6] Spiller C, Toro E F, Vázquez-Cendeón M E, et al. On the exact solution of the Riemann problem for blood flow in human veins, including collapse [J]. *Appl Math Comput*, 2017, 303(C):178-189.
- [7] Toro E F. Brain venous haemodynamics, neurological diseases and mathematical modelling, a review [J]. *Appl Math Comput*, 2016, 272(2):542-579.
- [8] Formaggia L, Quarteroni A, Veneziani A. Cardiovascular mathematics: modeling and simulation of the circulatory system [M]. Milan: Springer-Verlag, 2009.
- [9] Fung Y C. Biomechanics: circulation, Second Edition [M]. New York: Springer-Verlag, 1997.
- [10] Pedley T J. The fluid mechanics of large blood vessels [M]. Cambridge: Cambridge University Press, 1980.

- [11] Quarteroni A, Tuveri M, Veneziani A. Computational vascular fluid dynamics: problems, models and methods [J]. *Comput Visual Sci*, 2000, 2(4):163–197.
- [12] Fullana J M, Zaleski S. A branched one-dimensional model of vessel networks [J]. *J Fluid Mech*, 2009, 621:183–204.

Interaction of Elementary Waves for a Blood Flow Dynamical Model in Veins

SHAN Yi¹ SHENG Wancheng¹

¹Department of Mathematics, Shanghai University, Shanghai 200444, China.

E-mail: shanyi@shu.edu.cn; mathwcheng@shu.edu.cn

Abstract The venous system is an important part of the cardiovascular system. Pulse waves play a prominent role in blood flow. This paper is concerned with the interaction of elementary waves in the dynamic model of blood flow in veins. The dynamic model of blood flow is a set of 2×2 strictly hyperbolic equations, and its elementary waves include rarefaction waves and shock waves, which belong to pulse wave in blood flow. The cross-sectional area and velocity of blood vessels change after elementary wave interaction.

Keywords Blood flow dynamics, Veins, Rarefaction wave, Shock wave, Interaction of elementary waves

2000 MR Subject Classification 35L45, 35L65, 35L67

The English translation of this paper will be published in

Chinese Journal of Contemporary Mathematics, Vol. 43 No. 4, 2022

by ALLERTON PRESS, INC., USA