数 学 年 刊 A 辑
2022, 43(4):357–366
DOI: 10.16205/j.cnki.cama.2022.0023

两个压缩体融合为一个压缩体的充分必要条件 *

刘 贺[1] 雷逢春[1] 李风玲[1]

提要 本文给出了两个压缩体沿紧致连通曲面 (带边曲面或闭曲面) 融合仍是一个压缩体 (有非空负边界) 的充分必要条件，还给出了两个 3 维流形沿着边界上的紧致连通带边曲面融合中的融合曲面为边界不可压缩的一个特征描述，同时还证明了压缩体的每个 Heegaard 分解是标准的.

关键词 压缩体， 3 维流形融合， Heegaard 分解

MR (2000) 主题分类 57M99

中图法分类 O189.21

文献标志码 A

文章编号 1000-8314(2022)04-0357-10

§1 引 言

从两个给定的 3 维流形出发，通过粘合两个流形边界上同胚的紧致子曲面，得到一个融合 3 维流形. 这是从已知 3 维流形出发构造新 3 维流形的常见方法. 3 维流形的 Heegaard 分解和 Dehn 手术是这种方法的典型例子.

给定两个紧致连通 3 维流形 M_1 和 M_2, 记 M_1 和 M_2 沿着它们的同胚的边界分支 (闭曲面) 融合所得的 3 维流形为 M. M_1 和 M_2 上的 Heegaard 分解结构自然诱导 M 上的一个 Heegaard 分解，称为融合 Heegaard 分解. 近年来，关于融合 Heegaard 分解的研究取得了很多重要的进展 (见 [1–4] 等).

沿带边曲面融合的 3 维流形的结果相对不多. Li[5] 给出两个 3 维流形沿平环融合所得的 3 维流形的一些重要性质，文 [6] 中给出两个柄体沿平环融合仍为柄体的充分必要条件，文 [7] 中给出两个柄体沿一个紧致连通带边曲面融合仍为柄体的充分必要条件.

本文给出了两个压缩体沿紧致连通曲面 (带边曲面或闭曲面) 融合仍是一个压缩体 (有非空负边界) 的充分必要条件，还给出了两个 3 维流形沿着边界上的紧致连通带边曲面融合中的融合曲面为边界不可压缩的一个特征描述，同时还证明了压缩体的任一个 Heegaard 分解是标准的.

本文第 2 节给出了基本的定义和后面要用到的一些已知结论，第 3 节给出了两个压缩体沿紧致连通带边曲面融合仍是一个压缩体 (有非空负边界) 的充分必要条件，第 4 节给出了两个压缩体沿闭曲面融合仍是一个压缩体 (有非空负边界) 的充分必要条件.

本文 2021 年 9 月 29 日收到， 2022 年 2 月 27 日收到修改稿.

[1]大连理工大学数学科学学院，辽宁 大连 116024.
E-mail: 1033410708@qq.com; fclei@dlut.edu.cn; fenglingli@dlut.edu.cn

*本文受到国家自然科学基金 (No. 12071051) 和中央高校基本科研业务费 (No. DUT21LAB302) 的资助.

§2 预备知识

本文所考虑的 3 维流形及其子流形都是紧致可定向的，所涉及的定义、术语等都是标准的，可参见文 [8–10]. 除非特别声明，假定所考虑的 3 维流形均无 2- 球面边界分支.

定义 2.1 设 M_1 和 M_2 是两个定向的紧致带边 3 维流形， $S_1 \subset \partial M_1$ 和 $S_2 \subset \partial M_2$ 是两个同胚的带有诱导定向的紧致子曲面， $h: S_1 \to S_2$ 为一个反向同胚. 则商空间

$$M/x \sim h(x), \quad x \in S_1$$

是一个定向的紧致 3 维流形 (使得 M_1 和 M_2 成为定向子流形), 称之为 M_1 和 M_2 沿 S_1 和 S_2(通过 h 的) 一个融合，记作 $M_1 \cup_h M_2$, 称 h 为粘合映射. 若把 S_1 和 S_2 在 $M_1 \cup_h M_2$ 中的共同像记作 S, 则通常也把 $M_1 \cup_h M_2$ 记作 $M_1 \cup_S M_2$.

定义 2.2 设 F 是一个连通的可定向闭曲面， $\mathcal{J}$ 是 F 上一组互不相交的本质简单闭曲线，从 $F \times [0,1]$ 出发，沿 $\mathcal{J} \times 1$ 中的每条曲线分别往 $F \times [0,1]$ 上加 2- 把柄，并将所得流形的每个 2- 球面边界分支用 3- 把柄填上，称所得流形 C 为一个压缩体，称所加的这些 2- 把柄为 C 的定义 2- 把柄. 在 C 的边界分支中，记 $F \times 0 = \partial_+ C$, 称 $\partial_+ C$ 为 C 的正边界；记 $\partial_- C = \partial C - \partial_+ C$, 称 $\partial_- C$ 为 C 的负边界.

显然， C 的正边界是连通的，而负边界未必连通. 如果 $C = F \times I$, 称 C 为一个平凡压缩体. 如果 $\partial_- C = \emptyset$, 则 C 就是一个亏格为 $g(F)$ 的柄体.

设 M 是一个紧致 3 维流形，F 是真嵌入于 M 中的一个可定向紧致曲面，$\eta(F) \cong F \times I$ 是 F 在 M 中的一个正则邻域. 记 $M \setminus F = \overline{M - \eta(F)}$, 称之为沿 F 切开 M 所得的流形.

定义 2.3 设 $\mathcal{D}$ 是压缩体 C 中的一组互不相交的本质圆片组，如果将 C 沿 $\mathcal{D}$ 切开所得流形为 $\partial_- C \times [0,1]$ 和若干实心球 (可能为空), 则称 $\mathcal{D}$ 为 C 的一个完全圆片系统. 如果 $\mathcal{D}$ 在 C 所有的完全圆片系统中分支数最少，则称 $\mathcal{D}$ 为 C 的一个极小完全圆片系统.

设 C 是一个压缩体，由往 $F \times I$ 的一侧加定义 2- 把柄和若干 3- 把柄 (可能为空) 而得. 在 C 的每个定义 2- 把柄中取一个核圆片，这些核圆片可通过 $F \times I$ 延拓为 C 中的一个完全圆片系统 $\mathcal{D}$. 由此可得压缩体的一个等价的对偶描述：设 S 为一个连通可定向闭曲面 (不必连通). 往 $S \times [0,1]$ 和一些实心球 (0- 把柄，可能为空) 上加若干 1- 把柄，使得这些 1- 把柄的端面落在 $S \times 0$ 或 0- 把柄的边界上，且所得的流形 C 是连通的，则 C 为一个压缩体.

由压缩体的定义，可知压缩体 C 有以下性质：

(1) C 是不可约的.

(2) 设 Δ 为 C 的一个极小完全圆片系统. 若 $\partial_- C = \emptyset$, 则 $C \setminus \Delta$ 是一个实心球. 若 $\partial_- C \neq \emptyset$, 则 $C \setminus \Delta = \partial_- C \times [0,1]$.

(3) 设 C 是一个非平凡的压缩体. 则 $\partial_+ C$ 在 C 中是可压缩的. 若 $\partial_- C \neq \emptyset$, 则 $\partial_- C$ 在 C 中是不可压缩的.

(4) 假设 D 为 C 的一个本质圆片，则存在 C 的一个完全圆片系统 Δ, 使得 $D \in \Delta$, 且 $C \setminus D$ 是两个压缩体或一个压缩体 (取决于 D 是否分离 C).

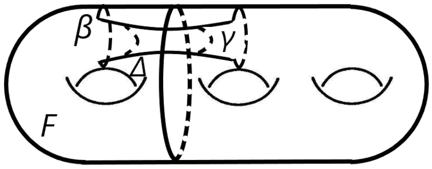

图 1 拟边界可压缩的曲面

定义 2.4 设 M 是一个紧致连通流形, F 是 M 中的一个真嵌入的曲面. 如果 F 从 M 上切下一个同胚于 $F\times[0,1]$ 的子流形, 则称 F 在 M 中是边界平行的. 如果 F 在 M 中是不可压缩的, 且非边界平行, 则称 F 为一个本质曲面.

对于柄体 H 中的本质曲面 F, 考虑 F 与 H 的一个完全圆片系统的相交可得如下结论.

命题 2.1 设 F 是柄体 $H_n(n\geqslant 1)$ 中一个边界不可压缩的本质曲面, 则 F 的每个分支都是一个本质圆片.

如果去掉边界不可压缩的限制, 亏格为 2 的柄体 H_2 中存在任意大亏格的带边不可压缩曲面, 例子见文 [9].

定义 2.5 设 C 是一个压缩体, A 是 C 中一个真嵌入的不可压缩的平环. 若 A 的一个边界分支落在 ∂_+C 上, 另一个边界分支落在 ∂_-C 上, 则称 A 是一个扩展平环.

下面是扩展平环的一个性质 (见 [10]).

命题 2.2 设 A 是压缩体 C 的一个扩展平环, 则存在 C 的一个完全圆片系统 $\mathcal{D}$, 使得 $A\bigcap\cup_{D\in\mathcal{D}}D=\emptyset$.

下面引入拟边界可压缩曲面的定义.

定义 2.6 设 M 是一个 3 维流形, $F\subset\partial M$ 是一个不可压缩的曲面. 若存在 M 中的一个本质圆片 Δ, 使得 $\partial\Delta\cap F$ 是 F 上一个真嵌入的本质弧 β, $\partial\Delta\cap(\overline{\partial M-F})$ 是 $\overline{\partial M-F}$ 上一个真嵌入的本质弧 γ, $\partial\beta=\partial\gamma$, $\beta\cup\gamma=\partial\Delta$, 则称 F 是拟边界可压缩的, 称 Δ 为 F 的一个拟边界压缩圆片 (见图 1). 若 F 不是拟边界可压缩的, 则称 F 是非拟边界可压缩的.

由定义直接可得如下结论.

命题 2.3 设 H_n 是一个亏格为 n 的柄体, $n\geqslant 1$, $F\subset\partial H_n$ 是一个带边的不可压缩曲面. 若对于 H_n 的每个本质圆片 D, 下列之一成立:

(1) $|\partial D\cap\partial F|\geqslant 3$, 或者

(2) ∂D 与 ∂F 的至少两个分支相交, 或者

(3) ∂D 与 ∂F 的一个分支同向相交于两点 (见图 2),

则 F 是非拟边界可压缩的.

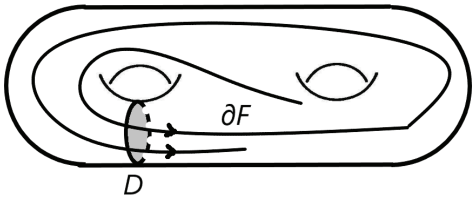

图 2 ∂D 与 ∂F 的一个分支同向相交于两点

命题 2.4 设 M_1 和 M_2 都是带边 3 维流形， $M = M_1 \cup_F M_2$, 其中 $F = \partial M_1 \cap \partial M_2$ 为紧致带边曲面.

(1) F 在 M 中是不可压缩的充分必要条件是 F 在 M_1 和 M_2 中都是不可压缩的.

(2) F 在 M 中是边界不可压缩的充分必要条件是 F 在 M_1 和 M_2 中都是非拟边界可压缩的.

证 (1) 注意到 F 在 M 中的一个压缩圆片必然包含在 M_1 或 M_2 中, 即知 (1) 成立.

(2) 由定义 2.6 可知， F 在 M 中是边界可压缩的等价于 F 在 M_1 或 M_2 中是拟边界可压缩的，即知结论成立.

下面的定理最早由 Haken[11] 得到.

定理 2.1 设 S_g 为亏格为 g 的连通可定向闭曲面， $M = S_g \times I$, $g \geqslant 1$, F 是 M 中一个连通的不可压缩和边界不可压缩的曲面. 则 F 或是一个本质扩展平环，或同痕于 $S_g \times 0$.

用定理 2.1 不难证明如下结论.

命题 2.5 设 C 是一个压缩体， F 是 C 中一个连通的不可压缩和边界不可压缩的曲面. 则 F 或是一个本质圆片，或是一个扩展平环，或平行于 $\partial_- C$ 的一个分支.

定义 2.7 设 M 是一个连通紧致可定向的 3 维流形， $(\partial_1 M, \partial_2 M)$ 为 ∂M 的一个分划. 若存在 M 中一个连通可定向闭曲面 F, 使得 F 把 M 切分成两个压缩体 V 和 W, 满足 $\partial_- V = \partial_1 M, \partial_- W = \partial_2 M, V \cap W = F = \partial_+ V = \partial_+ W$, 则称 $V \cup_F W$ 是 $(M; \partial_1 M, \partial_2 M)$ 的 (或简单地， M 的) 一个 Heegaard 分解， F 为 M 的一个 Heeggard 曲面. 称 $g(F)$ 为分解 $V \cup_F W$ 的亏格.

众所周知，每个紧致连通可定向 3 维流形都存在 Heegaard 分解.

定义 2.8 设 $V \cup_F W$ 是 3 维流形 M 的一个 Heegaard 分解. 如果存在本质圆片 $D \subset M$, 使得 $|\partial D \cap F| = 1$, 则称 $V \cup_F W$ 是 ∂- 可约的. 否则，称 $V \cup_F W$ 是非 ∂- 可约的.

Casson 和 Gordon 在文 [12] 中证明了下面的定理.

定理 2.2 设 $V \cup_F W$ 是 3 维流形 M 的一个 Heegaard 分解， ∂M 是可压缩的，则 $V \cup_F W$ 是 ∂- 可约的.

§3 两个压缩体沿带边曲面融合为一个压缩体的条件

下面的定理 3.1 给出两个柄体沿带边曲面融合为压缩体的条件.

定理 3.1 设 H_1 和 H_2 都是柄体, $C = H_1 \cup_A H_2$, 其中 $A = \partial H_1 \cap \partial H_2$ 为紧致连通带边曲面, A 在 H_1 和 H_2 中都是不可压缩的和非拟边界可压缩的. 则 C 是一个有非空负边界的压缩体的充分必要条件是 A 是一个平环, 且存在 C 的一个边界分支 F, A 的一个边界分支 $\alpha \subset F$ 把 F 分离成两个曲面 F_1 和 F_2, H_i 是往 $F_i \times I$ 上添加若干 1- 把柄所得的柄体, 所加的 1- 把柄的端面均落在 $F_i \times 1$ 上, $i = 1, 2$, $A = \alpha \times I$.

证 必要性: 由假设, A 在 H_1 和 H_2 中都是不可压缩的和非拟边界可压缩的带边曲面, 故 A 不是圆片. 由命题 2.4, A 在 C 中是不可压缩的和边界不可压缩的. 显然, A 在 C 中是分离的, 它把 C 分为 H_1 和 H_2. 由假设, C 是一个压缩体, $\partial_- C$ 必是连通的. 否则, H_1 和 H_2 中至少有一个是有非空负边界的压缩体, 与假设矛盾. 由命题 2.5 可知, A 或是 C 中一个本质圆片, 或是 C 中平行于 $\partial_- C$ 的一个分支的曲面, 或是 C 中一个分离的本质扩展平环.

A 不是圆片, 也不是闭曲面, 故 A 只能是 C 中的一个分离的本质扩展平环. 又 $\partial_- C$ 是连通的, 设 $\partial_- C = F$, $\alpha = A \cap F$, α 把 F 分离成两个曲面 F_1 和 F_2.

由命题 2.2, 存在 C 的一个完全圆片系统 $\mathcal{D}$, 使得 A 与 $\bigcup_{D \in \mathcal{D}} D$ 不交. 沿 $\mathcal{D}$ 切开 C 得到 $F \times I$, 而 A 也是 $F \times I$ 中的一个分离的本质扩展平环. C 可看作是往 $F \times I$ 上加若干 1- 把柄 $\{h_i^1, 1 \leqslant i \leqslant k\}$ 而得, 这些 1- 把柄与 $F \times I$ 的交恰好是 $\mathcal{D}$ 的所有切口, 不妨假设都落在 $F \times 1$ 上. 显然, 在 $F \times I$ 中, A 同痕于 $\alpha \times I$. 不妨设 H_1 是由往 $F_1 \times I$ 上加 1- 把柄 $\{h_i^1, 1 \leqslant i \leqslant j\}$ 而得 $(j \leqslant k)$, 而 H_2 是由往 $F_2 \times I$ 上加 1- 把柄 $\{h_i^1, j+1 \leqslant i \leqslant k\}$ 而得, 如图 3 所示. 必要性得证.

充分性显然.

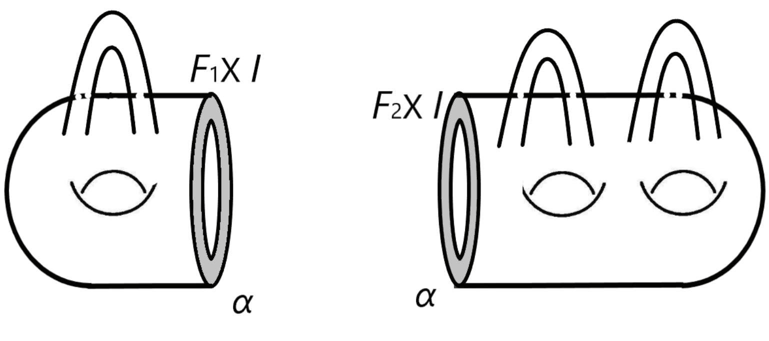

图 3　$F_1 \times I \bigcup$1- 把柄与 $F_2 \times I \bigcup$1- 把柄

下面是定理 3.1 的一个直接推论.

推论 3.1 设 H_1 和 H_2 都是柄体, $C = H_1 \cup_A H_2$, 其中 $A = \partial H_1 \cap \partial H_2$ 为紧致连通带边曲面, A 在 H_1 和 H_2 中都是不可压缩的和非拟边界可压缩的. 又设 F 是一个连通可定向闭曲面. 则 $C \cong F \times I$ 当且仅当 A 是一个平环, 存在 C 的一个边界分支 F, A

的一个边界分支 $\alpha \subset F$ 把 F 分离成两个曲面 F_1 和 F_2, $H_i = F_i \times I$, $i = 1, 2$, $A = \alpha \times I$.

注 3.1 若去掉定理 3.1 或推论 3.1 中 A 在 H_1 和 H_2 中都是非拟边界可压缩的条件，即允许 A 在 $H_1 \cup_A H_2$ 中是边界可压缩的，则 F 不必是扩展平环.

设 F 是一个亏格为 2 的可定向闭曲面， α 是 F 上一条分离的本质简单闭曲线，分离 F 成两个一次穿孔环面 F_1 和 F_2. 记 $M = F \times I$, $A_0 = \alpha \times I$. A_0 是 M 中一个本质扩展平环.

取 $F \times 1$ 上一个带子 $B_1 = I \times I$, 使得 $I \times \partial I \subset \alpha \times 1$, 如图 4 左图所示. 令 $A_1 = A_0 \cup B_1$, 并在 M 中将 A_1 同痕移动一下，使得 A_1 是 M 中真嵌入的曲面. 则 A_1 是一个三次穿孔的球面， A_1 的两个边界分支 α_1 和 α_2 在 $F \times 1$ 上是平行的， A_1 在 M 中是边界可压缩的， Δ_1 是 A_1 的一个边界压缩圆片，如图 4 右图所示. 实际上， A_1 将 M 切成一个亏格为 2 的柄体和一个亏格为 3 的柄体.

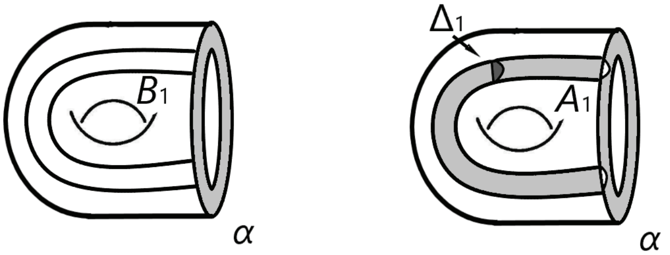

图 4 曲面 B_1 和 A_1

A_1 在 M 中是不可压缩的. 否则，设 D 是 A_1 在 M 中的一个压缩圆片. 注意到 ∂D 是 A_1 上一条本质简单闭曲线，而 A_1 是一个三次穿孔的球面，故 ∂D 平行于 A_1 的一个边界分支，但 ∂M 在 M 中是不可压缩的， A_1 的一个边界分支在 ∂M 上是平凡的. 显然， $\alpha, \alpha_1, \alpha_2$ 在 ∂M 上都是非平凡的，矛盾.

设 C 是一个压缩体， D 是 C 中的一个本质圆片，则 $C \setminus D$ 为一个压缩体或两个压缩体 (取决于 D 在 C 中是非分离的还是分离的). 若 D 在 C 中是分离的， D 把 C 分成两个压缩体 C_1 和 C_2, $C = C_1 \cup_D C_2$, 其中 $D \subset \partial_+ C_i$, $i = 1, 2$. 反之，若 D_i 是压缩体 C_i 的正边界上的一个圆片， $i = 1, 2$, 则 $C = C_1 \cup_{D_1 = D_2} C_2$ 是一个压缩体.

定理 3.2 设 C_1 和 C_2 都是压缩体， $C = C_1 \cup_A C_2$, 其中 $A = \partial C_1 \cap \partial C_2$ 为紧致连通带边曲面， A 在 C_1 和 C_2 中都是不可压缩的和非拟边界可压缩的. 则 C 是一个有非空负边界的压缩体的充分必要条件是 A 是一个平环，且存在 C 的一个边界分支 F, A 的一个边界分支 $\alpha \subset F$ 把 F 分离成两个曲面 F_1 和 F_2, $\partial_- C - F$ 有一个分划 $F_1' \cup F_2'$, C_i 是往 $(F_i' \cup F_i) \times I$ 上添加若干 1- 把柄所得的压缩体，所加的 1- 把柄的端面均落在 $(F_i' \cup F_i) \times 1$ 上， $i = 1, 2$, $A = \alpha \times I$.

定理 3.2 给出了两个压缩体的融合是一个有非空负边界的压缩体的特征描述，其证明与定理 3.1 的证明类似，此略.

§4 两个压缩体沿闭曲面融合为一个压缩体的条件

设 C_1 和 C_2 是两个压缩体， F_i 为 C_i 的一个边界分支， $i=1,2$, $f: F_1 \to F_2$ 是一个同胚. 记 $M = C_1 \cup_f C_2$, 记 F_1 和 F_2 在 M 中的共同像为 F, 则 M 也可记作 $C_1 \cup_F C_2$. 本节考虑 M 是一个压缩体的条件. 事实上，若 F_i 是 $\partial_- C_i$ 的一个分支， $F_j = \partial_+ C_j$, $(i,j) = (1,2)$ 或 $(2,1)$, 则 $M = C_1 \cup_F C_2$ 总是一个压缩体.

命题 4.1　若 F_i 是 $\partial_- C_i$ 的一个分支， $i=1,2$, 则 $M = C_1 \cup_F C_2$ 是一个压缩体当且仅当 C_1 或 C_2 是一个平凡的压缩体.

证　充分性显然. 下设 $M = C_1 \cup_F C_2$ 是一个压缩体. 因 F_i 是 $\partial_- C_i$ 的一个分支, $i=1,2$, 由压缩体的性质， F_i 在 C_i 中是不可压缩的， $i=1,2$. 由命题 2.4, F 在 M 中是不可压缩的. 因 F 是闭曲面， F 当然是边界不可压缩的. 由命题 2.5, F 平行于 $\partial_- M$ 的一个分支，从而 C_1 或 C_2 是一个平凡的压缩体.

$F = \partial_+ C_1 = \partial_+ C_2$ 时， $C_1 \cup_F C_2$ 是 M 的一个 Heegaard 分解. 在进一步讨论之前，我们先介绍 Heegaard 分解的稳定化.

定义 4.1　设 $V \cup_S W$ 是 3 维流形 M 的一个亏格为 g 的 Heegaard 分解， α 是 V 中一个真嵌入的简单弧， $\partial\alpha \subset S$, 且存在 S 上一个简单弧 β, $\partial\beta = \partial\alpha$, 且 $\alpha \cup \beta$ 界定 V 中一个圆片. 设 $N = \eta(\alpha) \cong D \times I$ 是 α 在 V 中的一个正则邻域，其中 D 是一个圆片, $N \cap S = D \times \{0,1\}$. 记 $V_1 = \overline{V - N}$, $W_1 = W \cup N$, $S_1 = V_1 \cap W_1$. 则 $V_1 \cup_{S_1} W_1$ 是 M 的一个亏格为 $g+1$ 的 Heegaard 分解，称之为 $V \cup_S W$ 的一次初等稳定化.

设 S 和 S' 是 M 中的两个 Heegaard 曲面. 若 S 和 S' 在 M 中是同痕的，则称对应的 Heegaard 分解是等价的.

设 $V \cup_S W$ 和 $V' \cup_{S'} W'$ 是 M 的两个 Heegaard 分解. 若 $V' \cup_{S'} W'$ 与 $V \cup_S W$ 的有限次的初等稳定化是等价的，则称 $V' \cup_{S'} W'$ 是 $V \cup_S W$ 的一个稳定化.

由定义容易知道， $V_1 \cup_{S_1} W_1$ 是 $V \cup_S W$ 的一次初等稳定化当且仅当 $V_1 \cup_{S_1} W_1 = (V \cup_S W)\#(T \cup_{\mathbb{T}} T')$, 其中 $T \cup_{\mathbb{T}} T'$ 是 S^3 的亏格为 1 的 Heegaard 分解； $V \cup_S W$ 的任意两个同亏格的稳定化是等价的. 下面的定理表明， S^3 的给定亏格的 Heegaard 分解是唯一的 (同痕意义下).

定理 4.1[13] (Waldhausen 定理)　S^3 的任意正亏格的 Heegaard 分解都是其 0 亏格的 Heegaard 分解的稳定化.

定义 4.2　设 C 是一个压缩体， S 是 C 内部的一个平行于 $\partial_+ C$ 的闭曲面，则 S 把 C 分成一个平凡的压缩体 $V = (\partial_+ C) \times I$ 和一个压缩体 $W \cong C$. 称 $(S; V, W)$ 是 $(C; \partial_+ C, \partial_- C)$ 的一个平凡的 Heegaard 分解. 若 $(C; \partial_+ C, \partial_- C)$ 的一个 Heegaard 分解 $V' \cup_{S'} W'$ 是其平凡 Heegaard 分解 $(S; V, W)$ 的稳定化，则称 $V' \cup_{S'} W'$ 是 C 的一个标准的 Heegaard 分解.

定义 4.3　设 C 是一个压缩体， (S_1, S_2) 是 ∂C 的一个分划. 不妨设 $S = \partial_+ C$ 是 S_1

的一个分支. C 可这样得到：沿 $S\times 1$ 上一组互不相交的简单闭曲线 $\mathcal{J}$ 中的每条曲线分别往 $S\times[0,1]$ 上加 2- 把柄，然后将所得流形的每个 2- 球面边界分支用 3- 把柄填充. 对于 $x\in S$, $x\notin\bigcup_{J\in\mathcal{J}}J$, 称 $\alpha=x\times I$ 为 C 中一个竖直弧. 对于 S_1 中的每个非 S 的分支 S', 取 C 中一个竖直弧 $\alpha_{S'}$ 连接 S 和 S'. 令 $V_0=\eta(S_1\bigcup_{S'\in S_1\setminus S}\alpha_{S'})$ 为 $S_1\bigcup_{S'\in S_1\setminus S}\alpha_{S'}$ 在 C 中的一个正则邻域, $W_0=\overline{C-V_0}$, $F_0=V_0\cap W_0$, 则易见 V_0 和 W_0 都是压缩体, $V_0\cup_{F_0}W_0$ 是 C 的一个 Heegaard 分解，其中 $\partial_-V=S_1$, $\partial_-W=S_2$. 称 $V_0\cup_{F_0}W_0$ 为 $(C;S_1,S_2)$ 的一个平凡的 Heegaard 分解. 若 $(C;S_1,S_2)$ 的一个 Heegaard 分解 $V'\cup_{S'}W'$ 是其平凡 Heegaard 分解的稳定化，则称 $V'\cup_{S'}W'$ 是标准的.

下面的定理可参见文 [14].

定理 4.2 (1) 柄体的每个 Heegaard 分解都是标准的;

(2) 设 S 为一个亏格为 n 的可定向闭曲面, $M=S\times I$, 则 $(M;S\times 0,S\times 1)$ 和 $(M;\partial(M),\emptyset)$ 的每个 Heegaard 分解都是标准的.

下面的定理可参见文 [15].

定理 4.3 设 C 是一个压缩体，则 $(C;\partial_+C,\partial_-C)$ 和 $(C;\partial C,\emptyset)$ 的每个 Heegaard 分解都是标准的.

下面的定理是定理 4.2 的一个推广，它表明对压缩体 C 的边界的任一分划 (S_1,S_2), $(C;S_1,S_2)$ 的 Heegaard 分解都是标准的.

定理 4.4 设 C 是一个压缩体, (S_1,S_2) 是 ∂C 的一个分划，则 $(C;S_1,S_2)$ 的任意一个 Heegaard 分解都同痕于 $(C;S_1,S_2)$ 的平凡 Heegaard 分解 $V_0\cup_{F_0}W_0$ 的一个稳定化，即 $(C;S_1,S_2)$ 的任意一个 Heegaard 分解都是标准的.

证 设 $X\cup_P Y$ 是 $(C;S_1,S_2)$ 的一个非平凡 Heegaard 分解, $S=\partial_+C$ 是 S_1 的一个分支. 若 $g(P)=g(F_0)$, 则显然 P 同痕于 F_0. 只需证明当 $g(P)>g(F_0)$ 时, $X\cup_P Y$ 是稳定化的. 记 $c=c(P)=\frac{1}{2}(\chi(S_2)-\chi(S_1))$, 称 c 为 $(C;S_1,S_2)$ 的边界差指标. 对 c 归纳来证. 由定理 4.2(2), $(M;S\times 0,S\times 1)$ 的每个 Heegaard 分解都是标准的，结论在 $c=0$ 时成立.

假设结论对 $c\leqslant k-1$ 的压缩体成立, $k\geqslant 1$.

设 $X\cup_P Y$ 的边界差指标 $c(P)=k$. C 是非平凡的压缩体，故 $S_1=\partial_-X$ 在 C 中是可压缩的. 由定理 2.2, $X\cup_P Y$ 是 ∂- 可约的，即存在 S 在 C 中一个压缩圆片 D, $\alpha=D\cap P$ 为一条简单闭曲线.

若 D 在 C 中是分离的，沿 D 切开 C 得到两个压缩体 C' 和 C'', 沿 α 切开 P 得到两个曲面 $P'\subset C'$ 和 $P''\subset C''$. 沿 D 的一个切口 $D_1\subset\partial C'$ 往 C' 粘上一个实心球 B_1 得到压缩体 $C_1\cong C'$, P' 自然延拓为 C_1 的一个 Heegaard 曲面 P_1. 类似地，沿 D 的另一个切口 $D_2\subset\partial C''$ 往 C'' 粘上一个实心球 B_2 得到压缩体 $C_2\cong C''$, P'' 自然延拓为 C_2 的一个 Heegaard 曲面 P_2. 这时 $0<g(P_1)$, $g(P_2)<g(P)$, P_1 和 P_2 中至少有一个是非平凡的. 不妨设 P_1 是非平凡的. 显见 $c(P_1)<c(P)$. 由归纳假设, P_1 是稳定化的，从而 $X\cup_P Y$ 是

稳定化的.

若 D 在 C 中是非分离的，则 α 在 F 上也是非分离的. 沿 D 切开 C 得到压缩体 C', 沿 α 切开 P 得到一个亏格为 $g(P)-1$ 且有两个边界分支的曲面 F'. 沿 D 的两个切口 $D_1, D_2 \subset \partial C'$ 往 C' 上各粘上一个实心球得到压缩体 $C^* \cong C'$. P' 自然延拓为 C^* 的一个 Heegaard 曲面 P^*, $g(P^*) = g(P) - 1$. 因 $X \cup_P Y$ 是 $(C; S_1, S_2)$ 的非平凡的 Heegaard 分解，$(C^*; P^*)$ 也是非平凡的，且显然有 $c(P^*) < c(P)$. 由归纳假设，$(C^*; P^*)$ 是稳定化的，从而 $X \cup_P Y$ 是稳定化的.

由定理 4.4 可得下面的定理.

定理 4.5　设 C_1 和 C_2 是两个压缩体，$F_i = \partial_+ C_i$, $i = 1, 2$, $f: F_1 \to F_2$ 是一个同胚，$M = C_1 \cup_f C_2 = C_1 \cup_F C_2$. 则 M 是一个压缩体且满足 $\partial_+ M = \partial_- C_i$ 和 $\partial_- M = \partial_- C_j$ 的充分必要条件是 F 在 M 中同痕于 $\partial_+ C_i$ 的一个稳定化曲面，$(i, j) = (1, 2)$ 或 $(2, 1)$.

证　必要性. 设 M 是一个压缩体，$\partial_+ M = \partial_- C_i$ 和 $\partial_- M = \partial_- C_j$, $(i, j) = (1, 2)$ 或 $(2, 1)$. 则 $(M; F)$ 是 $(M; \partial_- C_1, \partial_- C_2)$ 的一个 Heegaard 分解. 由定理 4.4 即知 F 在 M 中同痕于 $\partial_+ C_i$ 的一个稳定化曲面.

充分性. 假设 F 在 M 中同痕于 $\partial_+ C_i$ 的一个 m 次初等稳定化的曲面. 不妨设 $i = 1$. 则存在 C_1 中 m 个互不相交的本质圆片 $\mathcal{D} = \{D_1, \cdots, D_m\}$ 和 C_2 中 m 个互不相交的本质圆片 $\mathcal{E} = \{E_1, \cdots, E_m\}$, 使得 $|D_i \cap E_i| = 1$, $1 \leqslant i \leqslant m$, $D_i \cap E_j = \emptyset$, $1 \leqslant i \neq j \leqslant m$. 这样，沿 $\mathcal{D}$ 切开 C_1 所得的流形同胚于 $\partial_- C_1 \times I$, 沿 $\mathcal{E}$ 切开 C_2 所得的流形为一个压缩体 C'. 显然 $M \cong C'$, 即 M 是一个压缩体.

参　考　文　献

[1] Johnson J, Minsky Y, Moriah Y. Heegaard splittings with large subsurface distances [J]. *Algebr Geom Topol*, 2010, 10(4):2251–2275.

[2] Kim J. Generalized Heegaard splittings and the disk complex [J]. *Osaka J Math*, 2020, 57(1):103–140.

[3] Li T. Heegaard splittings of 3-manifolds [C]//Proceedings of the International Congress of Mathematicians-Seoul 2014, Vol II, Seoul: Kyung Moon Sa, 2014:1245–1257.

[4] Schultens J, Weidmann R. Destabilizing amalgamated Heegaard splittings [C]//Gordon C, Moriah Y, Workshop on Heegaard Splittings, Geom Topol Publ Coventry, 2007, 12:319–334.

[5] Li T. Rank and genus of 3-manifolds [J]. *J Amer Math Soc*, 2013, 26:777–829.

[6] Lei F. Some properties of an annulus sum of 3-manifolds [J]. *Noutheast Math J*, 1994, 10(3):325–329.

[7] Lei F, Liu H, Li F, et al. A necessary and sufficient condition for a surface sum of two handlebodies to be a handlebody [J]. *Sci China Math*, 2020, 63(10):1997–2004.

[8] Hempel J. 3-Manifolds [M]. Annals of Math Studies, 86, Princeton, NJ: Princeton University Press, 1976.

[9] Jaco W. Lectures on three manifold topology [M]. Providence, RI: CBMS Regional Conference Series in Mathematics, 1980.

[10] Schultens J. Introduction to 3-manifolds [M]//Graduate Studies in Mathematics, vol 151, Providence, RI: American Mathematical Society, 2014.

[11] Haken W. Some results on surfaces in 3-manifolds [M]. Studies in Mathematics, vol 5, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ: The Mathematical Association of America, 1968.

[12] Casson A, Gordon C McA. Reducing Heegaard splittings [J]. *Topology Appl*, 1987, 27: 275–283.

[13] Waldhausen F. Heegaard-Zerlegungen der 3-sphare [J]. *Topology*, 1968, 7:195–203.

[14] Scharlemann M. Heegaard splittings of compact 3-manifolds [M]//Sher R B, Daverman R J(ed), Handbook on Geometric Topology, Chapter 18, Amsterdam: Elsevier, 2001.

[15] Scharlemann M, Thompson A. Heegaard splittings of (surface)×I are standard [J]. *Math Ann*, 1993, 295:549–564.

A Sufficient and Necessary Condition for a Surface Sum of Two Compression Bodies to be a Compression Body

LIU He[1] LEI Fengchun[1] LI Fengling[1]

[1]School of Mathematical Sciences, Dalian University of Technology, Dalian 116024, Liaoning, China.
E-mail: 1033410708@qq.com; fclei@dlut.edu.cn; fenglingli@dlut.edu.cn

Abstract In the paper, the authors give a sufficient and necessary condition for an amalgamation of two compression bodies along a connected surface to be a compression body, and a characteristic for the amalgamated surface to be ∂-incompressible in the amalgamation of two 3-manifolds along a compact connected surface with non-empty boundary. They also show that every Heegaard splitting of a compression body is standard.

Keywords Compression body, Amalgamated 3-manifold, Heegaard splitting
2000 MR Subject Classification 57M99