数 学 年 刊 A 辑
2022, 43(4):367–386
DOI: 10.16205/j.cnki.cama.2022.0024

分数阶趋化模型在临界 Besov 空间中解的整体存在性*

赵继红[1]　李秀蓉[2]

提要 该文主要研究如下的分数阶趋化模型:

$$\begin{cases}\partial_t u+(-\Delta)^{\frac{\alpha}{2}}u=\nabla\cdot(u\nabla v), & (x,t)\in\mathbb{R}^n\times(0,\infty),\\ \varepsilon\partial_t v+(-\Delta)^{\frac{\beta}{2}}v=u, & (x,t)\in\mathbb{R}^n\times(0,\infty),\\ u(x,0)=u_0(x),\quad v(x,0)=v_0(x), & x\in\mathbb{R}^n,\end{cases}$$

其中 $\alpha\in[1,2]$, $\beta\in(0,2]$, $\varepsilon\geqslant 0$. 基于分数阶耗散方程在 Chemin-Lerner 混合时空空间中的线性估计和 Fourier 局部化方法, 作者得到了如下结果: (1) 当 $\varepsilon=0$ 时, 建立了次临界情形 $1<\alpha\leqslant 2$ 下该模型在 Besov 空间中的局部适定性和小初值问题的整体适定性, 优化了 [陈化, 吕文斌, 吴少华. 分数阶趋化模型在 Besov 空间中解的存在性. 中国科学: 数学, 2019, 49(12): 1–17] 所得适定性结果中正则性和可积性指标的范围. 并且还建立了临界情形 $\alpha=1$ 下该模型在 Besov 空间中小初值问题的整体适定性; (2) 当 $\varepsilon>0$ 时, 利用特殊的迭代技巧, 作者分别建立了次临界情形 $1<\alpha\leqslant 2$ 和临界情形 $\alpha=1$ 下该模型在 Besov 空间中的局部适定性和小初值问题的整体适定性. 进一步, 利用模型所特有的代数结构, 作者还证明了对初值 v_0 无小性条件下解的整体存在性.

关键词 分数阶趋化模型, 整体解, Besov 空间
MR (2000) 主题分类 30H25, 35A01, 35R11, 92C17
中图法分类 O175.29
文献标志码 A
文章编号 1000-8314(2022)04-0367-20

§1 引　言

本文主要研究生物学中刻画趋化现象的分数阶 Keller-Segel 模型的初值问题:

$$\begin{cases}\partial_t u+(-\Delta)^{\frac{\alpha}{2}}u=\nabla\cdot(u\nabla v), & (x,t)\in\mathbb{R}^n\times(0,\infty),\\ \varepsilon\partial_t v+(-\Delta)^{\frac{\beta}{2}}v=u, & (x,t)\in\mathbb{R}^n\times(0,\infty),\\ u(x,0)=u_0(x),\quad v(x,0)=v_0(x), & x\in\mathbb{R}^n,\end{cases}\tag{1.1}$$

其中 $\alpha\in[1,2]$, $\beta\in(0,2]$, $\varepsilon\geqslant 0$, 未知函数 u 和 v 分别表示细胞的密度函数和细胞自身分泌的化学物质的浓度函数, 分数阶 Laplace 算子 $(-\Delta)^{\frac{\alpha}{2}}$ 的定义由如下 Fourier 变换给出:

$$(-\Delta)^{\frac{\alpha}{2}}u(x)=\mathcal{F}^{-1}(|\xi|^{\alpha}\mathcal{F}u(\xi)).$$

本文 2021 年 9 月 24 日收到, 2022 年 10 月 2 日收到修改稿.
[1]宝鸡文理学院数学与信息科学学院, 陕西 宝鸡 721013. E-mail: jihzhao@163.com
[2]西北农林科技大学理学院, 陕西 杨凌 712100. E-mail: cherryxr@126.com
*本文受到国家自然科学基金 (No. 11961030), 陕西省自然科学基础研究计划 - 面上项目 (No. 2022JM-034) 和宝鸡文理学院人才引进项目 (No. 209040020) 的资助.

当 $0<\alpha<2$ 时, 我们也可以利用奇异积分算子来表示分数阶 Laplace 算子:

$$(-\Delta)^{\frac{\alpha}{2}}u(x)=\sigma_{n,\alpha}P.V.\int_{\mathbb{R}^n}\frac{u(x)-u(y)}{|x-y|^{n+\alpha}}\mathrm{d}y,$$

其中 $\sigma_{n,\alpha}$ 是依赖于 n 和 α 的规范化常数.

显然, 若取 $\alpha=\beta=2$, 则系统 (1.1) 约化为生物学中刻画趋化现象的经典的 Keller-Segel 模型的简化情形:

$$\begin{cases}\partial_t u=\Delta u+\nabla\cdot(u\nabla v), & (x,t)\in\Omega\times(0,\infty),\\ \varepsilon\partial_t v-\Delta v=u-v, & (x,t)\in\Omega\times(0,\infty),\\ \nabla u\cdot\nu=\nabla v\cdot\nu=0, & (x,t)\in\partial\Omega\times(0,\infty),\\ u(x,0)=u_0(x),\quad v(x,0)=v_0(x), & x\in\Omega,\end{cases}\tag{1.2}$$

其中 Ω 为 $\mathbb{R}^n$ 中的有界光滑区域, ν 表示 $\partial\Omega$ 上的单位外法向量. 该模型由 Keller-Segel 在文 [1] 中首次提出, 主要用于刻画细胞在其自身分泌化学物质作用下所产生的趋化和聚集现象. 同时该模型还与刻画云雾或星云中大质量粒子引力间所产生的自相互作用的天体物理模型相关, 见文 [2]. 经过半个多世纪的数学研究, 已有很多对系统 (1.2) 解的整体存在性和爆破问题的研究成果, 这里我们列举一些结果如下:

$n=1$ 时, Osaki-Ygai 在文 [3] 中证明了系统 (1.2) 的解都是整体存在且有界的;

$n=2$ 时, Jager-Luckhaus 在文 [4] 中证明了对充分小的 $\frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega u_0(x)\mathrm{d}x$, 系统 (1.2) 存在唯一的整体正解, 而当 $\frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega u_0(x)\mathrm{d}x$ 充分大时, 存在径向解在有限时间发生爆破. Herrero-Velázquez 在文 [5–6] 中证明了存在非负径向对称的初值 (u_0,v_0) 满足 $\int_\Omega u_0(x)\mathrm{d}x>8\pi$, 则解 (u,v) 将在有限时间发生爆破并且 u 在坐标原点处有 Dirac-δ 型奇性. 随后, Biler[7], Gajewski-Zacharias[8] 和 Nagai-Senba-Yoshida[9] 分别证明了当初值满足 $\int_\Omega u_0(x)\mathrm{d}x<4\pi$ 时非负有界解的整体存在性和当初值满足 $\int_\Omega u_0(x)\mathrm{d}x<8\pi$ 时径向解的整体存在性. 进一步, 对于单连通区域 $\Omega\subset\mathbb{R}^2$, Horstman-Wang[10] 和 Senba-Suzuki[11] 分别证明了当初值满足条件 $\int_\Omega u_0(x)\mathrm{d}x=m$, 其中 $m\in\{4k\pi:k\in\mathbb{N}\}$ 时, 系统 (1.2) 解在有限时刻或者无限时刻发生爆破;

$n\geqslant 3$ 时, Winkler 在文 [12–13] 中证明了当初值 $u_0\in L^p(\Omega)$, $\nabla v_0\in L^q(\Omega)$, 其中 $p>\frac{n}{2}$, $q>n$ 时, 系统 (1.2) 解的整体有界性, 并证明了当 Ω 为 $\mathbb{R}^n$ 中的球域时, 对任意小的质量 $m>0$, 若初值满足 $\int_\Omega u_0(x)\mathrm{d}x=m$, 则系统 (1.2) 的解 (u,v) 在有限时刻或无限时刻发生爆破;

$\varepsilon=0$ 时, Karch 在文 [14] 中建立了系统 (1.2) 在临界 Besov 空间 $\dot{B}^{-2+\frac{n}{p}}_{p,\infty}(\mathbb{R}^n)(\frac{n}{2}<p<n)$ 中小初值问题的整体适定性; 随后, Iwabuchi 在文 [15] 中证明了系统 (1.2) 在临界 Besov 空间 $\dot{B}^{-2+\frac{n}{p}}_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ $(1\leqslant p<\infty,\ 1\leqslant q\leqslant\infty)$ 和 Fourier-Herz 空间 $\dot{\mathcal{B}}^{-2}_2(\mathbb{R}^n)$ 中的局部适定性和小初值问题的整体适定性, 并建立了临界 Besov 空间 $\dot{B}^{-2}_{\infty,q}(\mathbb{R}^n)(2<q\leqslant\infty)$ 上的不适定性; 最后, Iwabuchi–Nakamura 在文 [16] 中证明了系统 (1.2) 在 Triebel–Lizorkin 空间 $\dot{F}^{-2}_{\infty,2}(\mathbb{R}^n)=BMO^{-2}$ 小初值问题解的整体存在性. 再结合文 [15] 中的适定性结果, 我们可知, 简化的 Keller-Segel 系统 (1.2) 在空间 $\dot{B}^{-2+\frac{n}{p}}_{p,\infty}(\mathbb{R}^n)$ $(\max\{1,\frac{n}{2}\}<p<\infty)$ 和 $\dot{F}^{-2}_{\infty,2}(\mathbb{R}^n)=BMO^{-2}$ 是适定的, 而在空间 $\dot{B}^{-2}_{\infty,q}(\mathbb{R}^n)$ $(2<q\leqslant\infty)$ 中是不适定的;

更多的研究结果以及推广至双相型漂移 – 扩散系统的相关解的存在性结果可参考文 [17–27].

另一方面, 当 $\varepsilon=0$ 且 $\beta=2$ 时, 系统 (1.1) 约化为如下的分数阶 Keller-Segel 系统:

$$\begin{cases}\partial_t u+(-\Delta)^{\frac{\alpha}{2}}u=\nabla\cdot(u\nabla v), & (x,t)\in\mathbb{R}^n\times(0,\infty),\\ -\Delta v=u, & (x,t)\in\mathbb{R}^n\times(0,\infty),\\ u(x,0)=u_0(x), & x\in\mathbb{R}^n.\end{cases}\tag{1.3}$$

系统 (1.3) 由 Escudero 在文 [28] 中首次提出, 主要描述了进行 Lévy 飞行的随机游走细胞密度函数的时空分布. 由 [28] 可知, 当 $n=1$, $1<\alpha\leqslant 2$ 时, 系统 (1.3) 存在唯一的整体解. 然而当 $0<\alpha<1$ 时, Bournaveas–Calvez 在文 [29] 中证明了当初始细胞浓度过高时, 解将在有限时间出现奇性. 进一步, 当 $n\geqslant 2$ 时, 系统 (1.3) 小初值问题的解是整体存在的, 而对于大初值问题解可能会在有限时间发生爆破. 这里我们列举一些有关解的整体存在性和爆破的研究结果如下:

当 $1<\alpha<2$ 时, Biler-Karch 在文 [30] 证明了系统 (1.3) 在临界 Lebesgue 空间 $L^{\frac{n}{\alpha}}(\mathbb{R}^n)$ 中解的局部存在性和小初值对应解的整体存在性. 他们还证明了具有大初始质量的初值对应的正解将会在有限时间发生爆破;

当 $1<\alpha<2$ 时, Biler-Wu 在文 [31] 中证明了系统 (1.3) 在临界 Besov 空间 $\dot{B}^{1-\alpha}_{2,q}(\mathbb{R}^2)$ 中小初值对应解的整体适定性;

当 $1<\alpha\leqslant 2$ 时, 对含有更一般位势型非线性项的系统 (1.3), Zhai 在文 [32] 中建立了其在临界 Besov 空间中解的存在性, 唯一性和稳定性;

当 $0<\alpha\leqslant 1$ 时, Sugiyama-Yamamoto-Kato 在文 [33] 中证明了系统 (1.3) 在临界 Besov 空间 $\dot{B}^{-\alpha+\frac{n}{p}}_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ 中解的局部存在性和小初值问题解的整体存在性, 其中 $n\geqslant 3$, $2\leqslant p<n$, $1\leqslant q<2$;

当 $1<\alpha\leqslant 2$ 时, 本文的第一作者在文 [34] 中建立了系统 (1.3) 在临界 Besov 空间 $\dot{B}^{-\alpha+\frac{n}{p}}_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ 和 $\dot{B}^{-\alpha}_{\infty,1}(\mathbb{R}^n)$ 中小初值问题解的整体存在性和 Gevrey 解析性, 其中 $1\leqslant p<\infty$, $1\leqslant q\leqslant\infty$. 特别地, 对于临界情形 $\alpha=1$, 他还证明了系统 (1.3) 在临界 Besov 空间 $\dot{B}^{-1+\frac{n}{p}}_{p,1}(\mathbb{R}^n)$ 和 $\dot{B}^{-1}_{\infty,1}(\mathbb{R}^n)$ 中小初值问题解的整体存在性和 Gevrey 解析性, 其中 $1\leqslant p<\infty$;

当 $1<\alpha=\beta\leqslant 2$ 时, Wu-Zheng 在文 [35] 中建立了系统 (1.3) 在临界 Fourier-Herz 空间 $\dot{\mathcal{B}}^{2-2\alpha}_2(\mathbb{R}^n)$ 中的局部适定性和小初值问题的整体适定性. 他们还证明了当 $\alpha=2$, $2<q\leqslant\infty$ 时, 系统 (1.3) 在 Fourier-Herz 空间空间 $\dot{\mathcal{B}}^{-2}_q(\mathbb{R}^n)$ 和 Besov 空间 $\dot{B}^{-2}_{\infty,q}(\mathbb{R}^n)$ 中是不适定的;

当 $1<\alpha,\beta\leqslant 2$ 时, 陈化等在文 [36] 中建立了系统 (1.1) 在 Besov 空间 $\dot{B}^{2-\alpha-\beta+\frac{n}{p}}_{p,q}(\mathbb{R}^n)\times\dot{B}^{2-\alpha+\frac{n}{p}}_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ 中小初值问题的整体适定性, 其中 $1\leqslant p<\frac{2n}{2\alpha+\beta-3}$, $1\leqslant q\leqslant\infty$;

上述的部分结果已经推广至双相型的分数阶漂移 – 扩散系统, 更多的研究结果可参考文 [37–42].

本文主要研究分数阶趋化模型 (1.1) 在临界 Besov 空间中的整体适定性. 为此, 我们来回忆一下系统 (1.1) 所满足的伸缩不变性. 对任意的 $\lambda>0$, 令

$$u_\lambda(x,t)=\lambda^{\alpha+\beta-2}u(\lambda x,\lambda^\alpha t),\quad v_\lambda(x,t)=\lambda^{\alpha-2}v(\lambda x,\lambda^\beta t).\tag{1.4}$$

易知若 (u,v) 是系统 (1.1) 满足初值 (u_0,v_0) 的解, 则 (u_λ,v_λ) 亦是系统 (1.1) 满足初值 $(u_{\lambda,0},v_{\lambda,0})$ 的解, 其中

$$u_{\lambda,0}(x)=\lambda^{\alpha+\beta-2}u_0(\lambda x),\quad v_{\lambda,0}(x)=\lambda^{\alpha-2}v_0(\lambda x).\tag{1.5}$$

我们称 Banach 空间 $E \subset \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ 是系统 (1.1) 初值所属的临界空间是指范数在上述伸缩变换 (1.5) 下对所有的 $\lambda > 0$ 是不变的. 易验证系统 (1.1) 的初值 (u_0, v_0) 所在的临界 Besov 空间为 $\dot{B}_{p,q}^{2-\alpha-\beta+\frac{n}{p}}(\mathbb{R}^n) \times \dot{B}_{p,q}^{2-\alpha+\frac{n}{p}}(\mathbb{R}^n)$, 其中 $1 \leqslant p, q \leqslant \infty$.

下面我们来陈述本文的主要工作. 当 $\varepsilon = 0$ 时, 系统 (1.1) 约化为如下抛物 – 椭圆耦合的分数阶漂移 – 扩散方程组:

$$\begin{cases} \partial_t u + (-\Delta)^{\frac{\alpha}{2}} u = \nabla \cdot (u \nabla v), & (x,t) \in \mathbb{R}^n \times (0,\infty), \\ (-\Delta)^{\frac{\beta}{2}} v = u, & (x,t) \in \mathbb{R}^n \times (0,\infty), \\ u(x,0) = u_0(x), & x \in \mathbb{R}^n. \end{cases} \tag{1.6}$$

对应于次临界情形 $1 < \alpha \leqslant 2$ 和临界情形 $\alpha = 1$, 相应的我们有如下适定性结果.

定理 1.1 令 $1 < \alpha \leqslant 2$, $0 < \beta \leqslant 2$. 设 $u_0 \in \dot{B}_{p,q}^{2-\alpha-\beta+\frac{n}{p}}(\mathbb{R}^n)$, 其中

$$\begin{cases} 1 \leqslant p \leqslant \infty, \quad 1 \leqslant q \leqslant \infty, & \text{若 } 2 < \alpha + \beta \leqslant 3; \\ 1 \leqslant p < \dfrac{2n}{\alpha + \beta - 3}, \quad 1 \leqslant q \leqslant \infty, & \text{若 } 3 < \alpha + \beta \leqslant 4. \end{cases}$$

(i) 存在正常数 $\eta > 0$, 使得对任意的 $\|u_0\|_{\dot{B}_{p,q}^{2-\alpha-\beta+\frac{n}{p}}} \leqslant \eta$, 系统 (1.6) 存在唯一的整体解 u, 满足

$$u \in \mathcal{L}^\infty(0,\infty; \dot{B}_{p,q}^{2-\alpha-\beta+\frac{n}{p}}(\mathbb{R}^n)) \cap \mathcal{L}^1(0,\infty; \dot{B}_{p,q}^{2-\beta+\frac{n}{p}}(\mathbb{R}^n)). \tag{1.7}$$

特别地, 当 $1 \leqslant p, q < \infty$ 时, $u \in C([0,\infty), \dot{B}_{p,q}^{2-\alpha-\beta+\frac{n}{p}}(\mathbb{R}^n))$.

(ii) 当 $1 \leqslant p, q < \infty$ 时, 存在正数 $T > 0$, 使得系统 (1.6) 存在唯一的局部解 u, 满足

$$u \in C([0,T), \dot{B}_{p,q}^{2-\alpha-\beta+\frac{n}{p}}(\mathbb{R}^n)) \cap \mathcal{L}^\infty(0,T; \dot{B}_{p,q}^{2-\alpha-\beta+\frac{n}{p}}(\mathbb{R}^n)) \cap \mathcal{L}^1(0,T; \dot{B}_{p,q}^{2-\beta+\frac{n}{p}}(\mathbb{R}^n)). \tag{1.8}$$

定理 1.2 设 $\alpha = 1$, $1 \leqslant \beta \leqslant 2$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, 则存在正常数 $\eta > 0$, 使得对任意的 $u_0 \in \dot{B}_{p,1}^{1-\beta+\frac{n}{p}}(\mathbb{R}^n)$, 满足 $\|u_0\|_{\dot{B}_{p,1}^{1-\beta+\frac{n}{p}}} \leqslant \eta$, 系统 (1.6) 存在唯一的整体解 u, 满足

$$u \in \mathcal{L}^\infty(0,\infty; \dot{B}_{p,1}^{1-\beta+\frac{n}{p}}(\mathbb{R}^n)) \cap L^1(0,\infty; \dot{B}_{p,1}^{2-\beta+\frac{n}{p}}(\mathbb{R}^n)). \tag{1.9}$$

特别地, 当 $1 \leqslant p < \infty$ 时, $u \in C([0,\infty), \dot{B}_{p,1}^{1-\beta+\frac{n}{p}}(\mathbb{R}^n))$.

注 1.1 定理 1.1 推广了陈化等在文 [36] 中解的存在性结果. 具体来说, 我们将文 [36] 中对初值正则性和可积性指标 $\big(2\alpha + \beta > 3,\ p \in \big[1, \frac{2n}{2\alpha+\beta-3}\big)\big)$ 改进到更优的范围 (当 $2 < \alpha + \beta \leqslant 3$ 时 $1 \leqslant p \leqslant \infty$, 当 $3 < \alpha + \beta \leqslant 4$ 时 $1 \leqslant p < \frac{2n}{\alpha+\beta-3}\big)$. 并且, 我们在文 [42] 中对更复杂的双相型分数阶漂移 - 扩散系统建立了类似的结果.

注 1.2 定理 1.2 将文 [34] 中的解的整体存在性结果推广至 $\beta \neq 2$ 的情形.

当 $\varepsilon > 0$ 时, 依据方程所满足的伸缩不变性和分数阶耗散方程所满足的线性估计, 我们注意到当 $\alpha \neq \beta$ 时, u 和 v 所在的解空间在进行双线性估计时并不匹配, 因此无法有效获取解的整体存在性的有关结果. 但当 $\alpha = \beta$ 时, 系统 (1.1) 表现为如下抛物 – 抛物耦合

的分数阶漂移 – 扩散方程组:

$$\begin{cases}\partial_t u + (-\Delta)^{\frac{\alpha}{2}} u = \nabla \cdot (u \nabla v), & (x,t) \in \mathbb{R}^n \times (0,\infty),\\ \varepsilon \partial_t v + (-\Delta)^{\frac{\alpha}{2}} v = u, & (x,t) \in \mathbb{R}^n \times (0,\infty),\\ u(x,0) = u_0(x), & x \in \mathbb{R}^n.\end{cases} \tag{1.10}$$

因为 ε 的具体取值并不影响所得的主要结果, 所以不失一般性, 我们假设 $\varepsilon = 1$. 对应于次临界情形 $1 < \alpha \leqslant 2$ 和临界情形 $\alpha = 1$, 相应的我们有如下适定性结果.

定理 1.3　设 $1 < \alpha \leqslant 2$, $u_0 \in \dot{B}_{p,q}^{2-2\alpha+\frac{n}{p}}(\mathbb{R}^n)$, $v_0 \in \dot{B}_{p,q}^{2-\alpha+\frac{n}{p}}(\mathbb{R}^n)$, 其中

$$\begin{cases}1 \leqslant p \leqslant \infty, \ \ 1 \leqslant q \leqslant \infty, & \text{若 } 1 < \alpha \leqslant \dfrac{3}{2};\\ 1 \leqslant p < \dfrac{2n}{2\alpha - 3}, \ \ 1 \leqslant q \leqslant \infty, & \text{若 } \dfrac{3}{2} < \alpha \leqslant 2.\end{cases}$$

则存在正常数 $\eta > 0$, 使得对任意的初值 (u_0, v_0) 若满足

$$\|u_0\|_{\dot{B}_{p,q}^{2-2\alpha+\frac{n}{p}}} + \|v_0\|_{\dot{B}_{p,q}^{2-\alpha+\frac{n}{p}}} \leqslant \eta,$$

系统 (1.10) 存在唯一的整体解 (u, v), 满足

$$\begin{cases}u \in \mathcal{L}^\infty(0,\infty; \dot{B}_{p,q}^{2-2\alpha+\frac{n}{p}}(\mathbb{R}^n)) \cap \mathcal{L}^1(0,\infty; \dot{B}_{p,q}^{2-\alpha+\frac{n}{p}}(\mathbb{R}^n)),\\ v \in \mathcal{L}^\infty(0,\infty; \dot{B}_{p,q}^{2-\alpha+\frac{n}{p}}(\mathbb{R}^n)) \cap \mathcal{L}^1(0,\infty; \dot{B}_{p,q}^{2+\frac{n}{p}}(\mathbb{R}^n)).\end{cases} \tag{1.11}$$

特别地, 当 $1 \leqslant p, q < \infty$ 时, $u \in C([0,\infty), \dot{B}_{p,q}^{2-2\alpha+\frac{n}{p}}(\mathbb{R}^n))$, $v \in C([0,\infty), \dot{B}_{p,q}^{2-\alpha+\frac{n}{p}}(\mathbb{R}^n))$.

定理 1.4　设 $\alpha = 1$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$. 则存在正常数 $\eta > 0$, 使得对任意的初值 (u_0, v_0) 若满足

$$\|u_0\|_{\dot{B}_{p,1}^{\frac{n}{p}}} + \|v_0\|_{\dot{B}_{p,1}^{1+\frac{n}{p}}} \leqslant \eta,$$

系统 (1.10) 存在唯一的整体解 (u, v), 使得

$$\begin{cases}u \in \mathcal{L}^\infty(0,\infty; \dot{B}_{p,1}^{\frac{n}{p}}(\mathbb{R}^n)) \cap L^1(0,\infty; \dot{B}_{p,1}^{1+\frac{n}{p}}(\mathbb{R}^n)),\\ v \in \mathcal{L}^\infty(0,\infty; \dot{B}_{p,1}^{1+\frac{n}{p}}(\mathbb{R}^n)) \cap L^1(0,\infty; \dot{B}_{p,1}^{2+\frac{n}{p}}(\mathbb{R}^n)).\end{cases} \tag{1.12}$$

特别地, 当 $1 \leqslant p < \infty$ 时, $u \in C([0,\infty), \dot{B}_{p,1}^{\frac{n}{p}}(\mathbb{R}^n))$, $v \in C([0,\infty), \dot{B}_{p,1}^{1+\frac{n}{p}}(\mathbb{R}^n))$.

注 1.3　定理 1.3 改进了文 [36] 中的局部适定性结果. 这里我们利用了不同于文 [36] 中的迭代技巧, 证明了小初值问题解的整体存在性. 并且这种迭代方法还可应用到临界情形 $\alpha = 1$, 见定理 1.4.

注 1.4　为简单起见, 我们在定理 1.3 中只陈述了系统 (1.10) 小初值问题的整体适定性, 实际上, 系统 (1.10) 大初值问题的局部适定性也是成立的.

最后, 注意到在系统 (1.10) 中, 由于 v 满足的方程是依赖于 u 的线性方程, 从而我们期望能够去掉对初值 v_0 的小性条件要求仍能保证解的整体存在性. 实际上, 基于上述观察, 在 α, p, q 满足一定的约束条件下, 我们可得下面解的整体存在性结果.

定理 1.5 设 $1<\alpha\leqslant 2$, $u_0\in\dot{B}_{p,1}^{2-2\alpha+\frac{n}{p}}(\mathbb{R}^n)$, $v_0\in\dot{B}_{p,1}^{2-\alpha+\frac{n}{p}}(\mathbb{R}^n)$, 其中

$$\begin{cases}2\leqslant p<\infty, & \text{若 } 1<\alpha\leqslant\dfrac{3}{2};\\[2mm] 2\leqslant p<\dfrac{2n}{2\alpha-3}, & \text{若 } \dfrac{3}{2}<\alpha\leqslant 2.\end{cases}$$

则存在两个正常数 c_0, C_0, 使得如果初值 (u_0,v_0) 满足

$$C_0\|u_0\|_{\dot{B}_{p,1}^{2-2\alpha+\frac{n}{p}}}\exp\{C_0\|v_0\|_{\dot{B}_{p,1}^{2-\alpha+\frac{n}{p}}}\}\leqslant c_0, \tag{1.13}$$

则系统 (1.10) 存在唯一的整体解 (u,v) 满足 (1.11), 其中 $q=1$.

注 1.5 条件 (1.13) 表明, 我们无需对 $\|v_0\|_{\dot{B}_{p,1}^{2-\alpha+\frac{n}{p}}}$ 提小性条件要求, 只要 $\|u_0\|_{\dot{B}_{p,1}^{2-2\alpha+\frac{n}{p}}}$ 充分小使之满足条件 (1.13), 便能保证对应解的整体存在性. 这表明在系统 (1.10) 解的存在性分析中, u 比 v 起着更重要的作用.

注 1.6 定理 1.5 的证明方法不能应用到临界情形 $\alpha=1$, 主要原因是估计 $\|T_{\nabla v}u\|_{\dot{B}_{p,q}^{1+\frac{n}{p}}}\leqslant C\|v\|_{\dot{B}_{p,q}^{2+\frac{n}{p}}}\|u\|_{\dot{B}_{p,q}^{\frac{n}{p}}}$ 此时不再成立. 因此寻求新的方法将定理 1.5 的结果推广至临界情形 $\alpha=1$ 也是我们将来要考虑的重要问题.

本文结构如下: 第二节, 我们利用 Littlewood-Paley 二进制分解理论给出齐次 Besov 空间的定义, 并陈述与本文相关的一些齐次 Besov 空间的重要性质. 第三节, 我们利用 Fourier 局部化技巧, 处理 $\varepsilon=0$ 的情形, 并分别建立了次临界情形 $1<\alpha\leqslant 2$ 和临界情形 $\alpha=1$ 下非线性项在对应解空间中的双线性估计, 然后利用 Banach 不动点定理完成定理 1.1 和定理 1.2 的证明. 第四节, 我们对 $\varepsilon>0$ 的情形, 利用一类特殊的迭代技巧来完成定理 1.3 和定理 1.4 的证明, 第五节, 我们依据方程特有的代数结构, 引入特殊的加权函数来消除 v 对非线性项所产生的影响, 从而完成定理 1.5 的证明. 贯穿全文, C 表示正的一致常数, 符号 $X\lesssim Y$ 表示不等式 $X\leqslant CY$.

§2 预备知识

我们首先介绍 Fourier 变换. 用 $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ 表示 Schwartz 速降函数空间, 并用 $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ 表示其拓扑对偶空间, 即 Schwartz 缓增分布空间. 对于任意的 $f\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, 其 Fourier 变换 $\mathcal{F}(f)$ 定义为

$$\mathcal{F}(f)(\xi):=\int_{\mathbb{R}^n}\mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}x\cdot\xi}f(x)\mathrm{d}x,\quad \forall\,\xi\in\mathbb{R}^n.$$

上述 Fourier 变换映 $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ 到自身且是倒上的, 其 Fourier 逆变换由公式 $\mathcal{F}^{-1}=\overline{\mathcal{F}}$ 给出. 对于更一般的情形 $f\in\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, 其 Fourier 变换可由标准的对偶方法来定义, 即

$$\langle\mathcal{F}(f),g\rangle:=\langle f,\mathcal{F}(g)\rangle,\quad \forall\,f\in\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n),\quad g\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n).$$

§2.1 Littlewood-Paley 理论和 Besov 空间

下面我们介绍 $\mathbb{R}^n$ 上的 Littlewood-Paley 理论. 令 $\mathcal{C} := \left\{\xi \in \mathbb{R}^n,\ \frac{3}{4} \leqslant |\xi| \leqslant \frac{8}{3}\right\}$, 则存在光滑径向函数 φ 满足: $\mathrm{supp}\varphi \subset \mathcal{C}$, $0 \leqslant \varphi \leqslant 1$ 且

$$\sum_{j\in\mathbb{Z}} \varphi(2^{-j}\xi) = 1, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}.$$

基于上述 φ 的构造, 令 $h(x) = \mathcal{F}^{-1}\varphi(\xi)$. 则对任意的 $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, 我们定义齐次二进制分解算子 Δ_j 和 S_j 如下:

$$\Delta_j f := 2^{nj} \int_{\mathbb{R}^n} h(2^j y) f(x-y)\mathrm{d}y, \tag{2.1}$$

$$S_j f := \sum_{k\leqslant j-1} \Delta_k f. \tag{2.2}$$

形式上来看, Δ_j 表示投影到环 $\{|\xi| \sim 2^j\}$ 的投影算子, S_j 表示投影到球 $\{|\xi| \lesssim 2^j\}$ 的投影算子. 设 $\mathcal{S}'_h(\mathbb{R}^n)$ 是由满足下面性质的分布函数构成: $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ 且满足

$$\lim_{j\to-\infty} S_j f = 0.$$

则对于任意的 $f \in \mathcal{S}'_h(\mathbb{R}^n)$, 我们有如下的齐次 Littlewood-Paley 分解:

$$f = \sum_{j\in\mathbb{Z}} \Delta_j f.$$

特别的, 上述齐次二进制分解满足如下的拟正交性质:

$$\Delta_i \Delta_j f \equiv 0 \quad 若\ |i-j| \geqslant 2; \qquad \Delta_i(S_{j-1} f \Delta_j g) \equiv 0 \quad 若\ |i-j| \geqslant 5.$$

下面我们给出齐次 Besov 空间的定义 (见 [43]).

定义 2.1　设 $s \in \mathbb{R}$, $1 \leqslant p, r \leqslant \infty$. 对于 $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, 令

$$\|f\|_{\dot{B}^s_{p,r}} := \begin{cases} \Big(\sum\limits_{j\in\mathbb{Z}} 2^{jsr} \|\Delta_j f\|^r_{L^p}\Big)^{\frac{1}{r}}, & 1 \leqslant r < \infty, \\ \sup\limits_{j\in\mathbb{Z}} 2^{js} \|\Delta_j f\|_{L^p}, & r = \infty. \end{cases}$$

则齐次 Besov 空间 $\dot{B}^s_{p,r}(\mathbb{R}^n)$ 可定义为:

(i) 当 $s < \frac{n}{p}$ $\big($或 $s = \frac{n}{p}$, $r = 1\big)$ 时, 我们定义

$$\dot{B}^s_{p,r}(\mathbb{R}^n) := \{f \in \mathcal{S}'_h(\mathbb{R}^n) : \ \ \|f\|_{\dot{B}^s_{p,r}} < \infty\}.$$

(ii) 当 $k \in \mathbb{N}$, $\frac{n}{p} + k \leqslant s < \frac{n}{p} + k + 1$ $\big($或 $s = \frac{n}{p} + k + 1$, $r = 1\big)$, 则我们定义 $\dot{B}^s_{p,r}(\mathbb{R}^n)$ 为满足如下条件的分布函数构成的空间: $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ 且当 $|\beta| = k$ 时, 有 $\partial^\beta f \in \dot{B}^{s-k}_{p,r}(\mathbb{R}^n)$.

定义 2.2　设 $0 < T \leqslant \infty$, $s \in \mathbb{R}$, $1 \leqslant p, r, \rho \leqslant \infty$. 令

$$\|f\|_{\mathcal{L}^\rho_T(\dot{B}^s_{p,r})} := \Big(\sum_{j\in\mathbb{Z}} 2^{jsr} \Big(\int_0^T \|\Delta_j f(\cdot,t)\|^\rho_{L^p} \mathrm{d}t\Big)^{\frac{r}{\rho}}\Big)^{\frac{1}{r}},$$

$$\|f\|_{L^\rho_T(\dot{B}^s_{p,r})} := \Big(\int_0^T \Big(\sum_{j\in\mathbb{Z}} 2^{jsr} \|\Delta_j f(\cdot,t)\|^r_{L^p}\Big)^{\frac{\rho}{r}} \mathrm{d}t\Big)^{\frac{1}{\rho}}.$$

我们定义 Chemin-Lerner 混合时空空间 $\mathcal{L}^\rho(0,T;\dot{B}^s_{p,r}(\mathbb{R}^n))$ 和一般的空间 $L^\rho(0,T;\dot{B}^s_{p,r}(\mathbb{R}^n))$ 为空间 $\mathcal{C}([0,T];\mathcal{S}(\mathbb{R}^n))$ 分别在上述范数 $\|\cdot\|_{\mathcal{L}^\rho_T(\dot{B}^s_{p,r})}$ 和 $\|\cdot\|_{L^\rho_T(\dot{B}^s_{p,r})}$ 下的完备化空间. 这里当 $\rho=\infty$ 或 $r=\infty$ 时上述范数需做相对应的无穷范数的修正. 为简化记号, 当 $T=\infty$ 时, 我们用 $\|f\|_{\mathcal{L}^\rho_t(\dot{B}^s_{p,q})}$ 来表示 $\|f\|_{\mathcal{L}^\rho_\infty(\dot{B}^s_{p,q})}$.

§2.2 主要引理

我们先来陈述一些本文所需齐次 Besov 空间的性质, 更多的结果可见文 [43].

引理 2.1 齐次 Besov 空间有如下性质 (见 [43]):

(1) 若 $|s|<\frac{n}{p}$, $1\leqslant p,r<\infty$, 或 $s=\frac{n}{p}$, $r=1$ 时, $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ 在 $\dot{B}^s_{p,r}(\mathbb{R}^n)$ 中是稠密的.

(2) 存在一致常数 C, 使得

$$C^{-1}\|f\|_{\dot{B}^s_{p,r}}\leqslant\|\nabla f\|_{\dot{B}^{s-1}_{p,r}}\leqslant C\|f\|_{\dot{B}^s_{p,r}}. \tag{2.3}$$

(3) 设 $\sigma\in\mathbb{R}$. 则算子 $(-\Delta)^{\frac{\sigma}{2}}$ 是把 Besov 空间 $\dot{B}^s_{p,r}(\mathbb{R}^n)$ 映到 $\dot{B}^{s-\sigma}_{p,r}(\mathbb{R}^n)$ 的同构映射.

(4) 设 $1\leqslant p_1\leqslant p_2\leqslant\infty$, $1\leqslant r_1\leqslant r_2\leqslant\infty$, 则有如下的连续嵌入关系: $\dot{B}^s_{p_1,r_1}(\mathbb{R}^n)\hookrightarrow\dot{B}^{s-n(\frac{1}{p_1}-\frac{1}{p_2})}_{p_2,r_2}(\mathbb{R}^n)$.

(5) 设 $s_1,s_2\in\mathbb{R}$, $s_1<s_2$, $\vartheta\in(0,1)$, 则存在常数 C, 使得

$$\|f\|_{\dot{B}^{s_1\vartheta+s_2(1-\vartheta)}_{p,r}}\leqslant C\|f\|^{\vartheta}_{\dot{B}^{s_1}_{p,r}}\|f\|^{1-\vartheta}_{\dot{B}^{s_2}_{p,r}}. \tag{2.4}$$

并且, 对任意的 $0<T\leqslant\infty$, $1\leqslant\rho,\rho_1,\rho_2\leqslant\infty$ 使得 $\frac{1}{\rho}=\frac{1}{\rho_1}+\frac{1}{\rho_2}$, 我们有

$$\|f\|_{\mathcal{L}^\rho_T(\dot{B}^{s_1\vartheta+s_2(1-\vartheta)}_{p,r})}\leqslant C\|f\|^{\vartheta}_{\mathcal{L}^{\rho_1}_T(\dot{B}^{s_1}_{p,r})}\|f\|^{1-\vartheta}_{\mathcal{L}^{\rho_2}_T(\dot{B}^{s_2}_{p,r})}. \tag{2.5}$$

(6) 设 $s\in\mathbb{R}$, $1\leqslant p,r\leqslant\infty$, $f\in\mathcal{S}'_h(\mathbb{R}^n)$. 则 $f\in\dot{B}^s_{p,r}(\mathbb{R}^n)$ 当且仅当存在 $\{d_{j,r}\}_{j\in\mathbb{Z}}$, 使得 $d_{j,r}\geqslant 0$, $\|d_{j,r}\|_{l^r}=1$, 且

$$\|\Delta_j f\|_{L^p}\lesssim d_{j,r}2^{-js}\|f\|_{\dot{B}^s_{p,r}},\quad\forall j\in\mathbb{Z}.$$

(7) 由 Minkowski 不等式易知:

$$\begin{cases}\|f\|_{\mathcal{L}^\rho_T(\dot{B}^s_{p,r})}\leqslant\|f\|_{L^\rho_T(\dot{B}^s_{p,r})}, & \rho\leqslant r,\\ \|f\|_{L^\rho_T(\dot{B}^s_{p,r})}\leqslant\|f\|_{\mathcal{L}^\rho_T(\dot{B}^s_{p,r})}, & r\leqslant\rho.\end{cases} \tag{2.6}$$

因此, 当 $\rho=r$ 时, 我们有 $L^\rho(0,T;\dot{B}^s_{p,r}(\mathbb{R}^n))\cong\mathcal{L}^\rho(0,T;\dot{B}^s_{p,r}(\mathbb{R}^n))$.

我们会经常用到如下的 Bernstein 不等式 (见 [43]).

引理 2.2 设 $\mathcal{B}$ 和 $\mathcal{C}$ 分别是 $\mathbb{R}^n$ 中的球和环. 则存在正常数 C, 使得对任意的正实数 λ, 非负整数 k 和任意满足条件 $1\leqslant a\leqslant b\leqslant\infty$ 的实数对 (a,b), 我们有

$$\operatorname{supp}\mathcal{F}(f)\subset\lambda\mathcal{B}\quad\Rightarrow\quad\sup_{|\alpha|=k}\|\Lambda^\alpha f\|_{L^b}\leqslant C^{k+1}\lambda^{k+n(\frac{1}{a}-\frac{1}{b})}\|f\|_{L^a}, \tag{2.7}$$

$$\operatorname{supp}\mathcal{F}(f)\subset\lambda\mathcal{C}\quad\Rightarrow\quad C^{-1-k}\lambda^k\|f\|_{L^a}\leqslant\sup_{|\alpha|=k}\|\Lambda^\alpha f\|_{L^a}\leqslant C^{1+k}\lambda^k\|f\|_{L^a}. \tag{2.8}$$

为证明定理 1.5, 我们还需要如下分数阶 Laplace 算子 $(-\Delta)^{\frac{\alpha}{2}}$ 在 L^p 空间中的下界估计, 其证明可见文 [44–45].

引理 2.3 设 $\alpha \in [0,2]$, $p \in [2,\infty)$. 则对任意的 $f \in L^p$, 存在仅依赖于 n 和 p 的正常数 κ, 使得

$$\int_{\mathbb{R}^n} (-\Delta)^{\frac{\alpha}{2}} \Delta_j f |\Delta_j f|^{p-2} \Delta_j f \mathrm{d}x \geqslant \kappa 2^{\alpha j} \|\Delta_j f\|_{L^p}^p. \tag{2.9}$$

在本节最后我们简要介绍一下为处理非光滑函数乘积而引入的齐次 Bony 仿积分解 (见 [46]). 对于任意两个缓增广义函数 f 和 g, 我们定义 f 和 g 的仿积 $T_f g$ 如下:

$$T_f g := \sum_{j \in \mathbb{Z}} S_{j-1} f \Delta_j g = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \sum_{k \leqslant j-2} \Delta_k f \Delta_j g.$$

从而形式上, 对于 f 和 g 的乘积, 我们有如下的 Bony 仿积分解:

$$fg = T_f g + T_g f + R(f,g), \tag{2.10}$$

这里余项 $R(f,g)$ 有如下表示:

$$R(f,g) := \sum_{j \in \mathbb{Z}} \sum_{|j-j'| \leqslant 1} \Delta_j f \widetilde{\Delta}_j g, \quad \widetilde{\Delta}_j := \Delta_{j-1} + \Delta_j + \Delta_{j+1}.$$

§3　$\varepsilon = 0$ 的情形

§3.1　次临界情形 $1 < \alpha \leqslant 2$

对于次临界情形, 我们已对更复杂的双相型分数阶漂移 - 扩散系统建立了类似定理 1.1 的适定结果, 具体细节请见文 [42].

§3.2　临界情形 $\alpha = 1$

我们首先来回忆临界情形 $\alpha = 1$ 下线性分数阶方程在 Besov 空间框架下的线性估计, 其证明可见文 [47].

命题 3.1 设 $s \in \mathbb{R}$, $1 \leqslant p,q \leqslant \infty$, $0 < T \leqslant \infty$. 若初值 $u_0 \in \dot{B}^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)$, $f \in \mathcal{L}^1_T(\dot{B}^s_{p,q}(\mathbb{R}^n))$. 则对如下的分数阶线性方程的初值问题:

$$\begin{cases} \partial_t u + (-\Delta)^{\frac{1}{2}} u = f(x,t), & x \in \mathbb{R}^n,\ t > 0, \\ u(x,0) = u_0(x), & x \in \mathbb{R}^n, \end{cases} \tag{3.1}$$

存在唯一的解 u, 满足

$$u \in \mathcal{L}^\infty(0,T;\dot{B}^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)) \cap \mathcal{L}^1(0,T;\dot{B}^{s+1}_{p,q}(\mathbb{R}^n)),$$

且存在仅依赖于 n 的常数 $C > 0$, 使得

$$\|u\|_{\mathcal{L}^\infty_T(\dot{B}^s_{p,q})} + \|u\|_{\mathcal{L}^1_T(\dot{B}^{s+1}_{p,q})} \leqslant C(\|u_0\|_{\dot{B}^s_{p,q}} + \|f\|_{\mathcal{L}^1_T(\dot{B}^s_{p,q})}). \tag{3.2}$$

进一步, 若 $1 \leqslant p,q < \infty$, 则 $u \in C([0,T), \dot{B}^s_{p,q}(\mathbb{R}^n))$.

其次, 我们来建立系统 (1.6) 在齐次 Besov 空间中所满足的双线性估计.

引理 3.1 设 $1 \leqslant \beta \leqslant 2$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, $0 < T \leqslant \infty$. 则我们有如下估计:

$$\|u \nabla (-\Delta)^{-\frac{\beta}{2}} v\|_{L^1_T(\dot{B}^{2-\beta+\frac{n}{p}}_{p,1})} \lesssim \|u\|_{\mathcal{L}^\infty_T(\dot{B}^{1-\beta+\frac{n}{p}}_{p,1})} \|v\|_{L^1_T(\dot{B}^{2-\beta+\frac{n}{p}}_{p,1})}$$

$$+\|u\|_{L^1_T(\dot{B}^{2-\beta+\frac{n}{p}}_{p,1})}\|v\|_{\mathcal{L}^\infty_T(\dot{B}^{1-\beta+\frac{n}{p}}_{p,1})}. \tag{3.3}$$

证 我们利用 Bony 仿积分解 (2.10) 来估计 (3.3) 式的右端项:

$$u\nabla(-\Delta)^{-\frac{\beta}{2}}v = T_u\nabla(-\Delta)^{-\frac{\beta}{2}}v + T_{\nabla(-\Delta)^{-\frac{\beta}{2}}v}u + R(u,\nabla(-\Delta)^{-\frac{\beta}{2}}v). \tag{3.4}$$

对于 (3.4) 右端的两个仿积项, 由 (2.7) 和 (2.8) 可得

$$\begin{aligned}
&\|\Delta_j(T_u\nabla(-\Delta)^{-\frac{\beta}{2}}v)\|_{L^1_T(L^p)}\\
\lesssim& \sum_{|j'-j|\leqslant 4}\|S_{j'-1}u\|_{L^\infty_T(L^\infty)}\|\Delta_{j'}\nabla(-\Delta)^{-\frac{\beta}{2}}v\|_{L^1_T(L^p)}\\
\lesssim& \sum_{|j'-j|\leqslant 4}\sum_{k\leqslant j'-2}2^{\frac{kn}{p}}\|\Delta_k u\|_{L^\infty_T(L^p)}2^{j'(1-\beta)}\|\Delta_{j'}v\|_{L^1_T(L^p)}\\
\lesssim& \sum_{|j'-j|\leqslant 4}2^{j'(-1-\frac{n}{p})}\sum_{k\leqslant j'-2}2^{k(\beta-1)}2^{k(1-\beta+\frac{n}{p})}\|\Delta_k u\|_{L^\infty_T(L^p)}2^{j'(2-\beta+\frac{n}{p})}\|\Delta_{j'}v\|_{L^1_T(L^p)}\\
\lesssim& d_j2^{j(\beta-2-\frac{n}{p})}\|u\|_{\mathcal{L}^\infty_T(\dot{B}^{1-\beta+\frac{n}{p}}_{p,1})}\|v\|_{L^1_T(\dot{B}^{2-\beta+\frac{n}{p}}_{p,1})};
\end{aligned}\tag{3.5}$$

$$\begin{aligned}
&\|\Delta_j(T_{\nabla(-\Delta)^{-\frac{\beta}{2}}v}u)\|_{L^1_T(L^p)}\\
\lesssim& \sum_{|j'-j|\leqslant 4}\|S_{j'-1}\nabla(-\Delta)^{-\frac{\beta}{2}}v\|_{L^\infty_T(L^\infty)}\|\Delta_{j'}u\|_{L^1_T(L^p)}\\
\lesssim& \sum_{|j'-j|\leqslant 4}\sum_{k\leqslant j'-2}2^{k(1-\beta+\frac{n}{p})}\|\Delta_k v\|_{L^\infty_T(L^p)}\|\Delta_{j'}u\|_{L^1_T(L^p)}\\
\lesssim& \sum_{|j'-j|\leqslant 4}2^{j'(\beta-2-\frac{n}{p})}\sum_{k\leqslant j'-2}2^{k(1-\beta+\frac{n}{p})}\|\Delta_k v\|_{L^\infty_T(L^p)}2^{j'(2-\beta+\frac{n}{p})}\|\Delta_{j'}u\|_{L^1_T(L^p)}\\
\lesssim& d_j2^{j(\beta-2-\frac{n}{p})}\|v\|_{\mathcal{L}^\infty_T(\dot{B}^{1-\beta+\frac{n}{p}}_{p,1})}\|u\|_{L^1_T(\dot{B}^{2-\beta+\frac{n}{p}}_{p,1})},
\end{aligned}\tag{3.6}$$

这里 $(d_j)_{j\in\mathbb{Z}}\in l^1$ 满足 $d_j\geqslant 0$ 和 $\sum\limits_{j\in\mathbb{Z}}d_j=1$. 为处理 (3.4) 右端的余项, 我们分两种情形来考虑: 当 $1\leqslant p<2$ 时, 令 p' 为其共轭指标, 即 $2<p'\leqslant\infty$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1$, 则由 (2.7) 可得

$$\begin{aligned}
&\|\Delta_jR(u,\nabla(-\Delta)^{-\frac{\beta}{2}}v)\|_{L^1_T(L^p)}\\
\lesssim& 2^{j(n-\frac{n}{p})}\sum_{j'\geqslant j-2}\|\Delta_{j'}u\|_{L^\infty_T(L^{p'})}\|\widetilde{\Delta}_{j'}\nabla(-\Delta)^{-\frac{\beta}{2}}v\|_{L^1_T(L^p)}\\
\lesssim& 2^{j(n-\frac{n}{p})}\sum_{j'\geqslant j-2}2^{j'(1-\beta+\frac{n}{p}-\frac{n}{p'})}\|\Delta_{j'}u\|_{L^\infty_T(L^p)}\|\widetilde{\Delta}_{j'}v\|_{L^1_T(L^p)}\\
\lesssim& 2^{j(n-\frac{n}{p})}\sum_{j'\geqslant j-2}2^{(\beta-2-n)j'}2^{j'(1-\beta+\frac{n}{p})}\|\Delta_{j'}u\|_{L^\infty_T(L^p)}2^{j'(2-\beta+\frac{n}{p})}\|\widetilde{\Delta}_{j'}v\|_{L^1_T(L^p)}\\
\lesssim& d_j2^{j(\beta-2-\frac{n}{p})}\|u\|_{\mathcal{L}^\infty_T(\dot{B}^{1-\beta+\frac{n}{p}}_{p,1})}\|v\|_{L^1_T(\dot{B}^{2-\beta+\frac{n}{p}}_{p,1})};
\end{aligned}\tag{3.7}$$

而当 $p\geqslant 2$ 时, 有

$$\begin{aligned}
&\|\Delta_jR(u,\nabla(-\Delta)^{-\frac{\beta}{2}}v)\|_{L^1_T(L^p)}\\
\lesssim& 2^{\frac{jn}{p}}\sum_{j'\geqslant j-2}\|\Delta_{j'}u\|_{L^\infty_T(L^p)}\|\widetilde{\Delta}_{j'}\nabla(-\Delta)^{-\frac{\beta}{2}}v\|_{L^1_T(L^p)}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\lesssim 2^{\frac{jn}{p}} \sum_{j' \geqslant j-2} 2^{j'(\beta-2-\frac{2n}{p})} 2^{j'(1-\beta+\frac{n}{p})} \|\Delta_{j'} u\|_{L_T^\infty(L^p)} 2^{j'(2-\beta+\frac{n}{p})} \|\widetilde{\Delta}_{j'} v\|_{L_T^1(L^p)} \\
&\lesssim d_j 2^{j(\beta-2-\frac{n}{p})} \|u\|_{\mathcal{L}_T^\infty(\dot{B}_{p,1}^{1-\beta+\frac{n}{p}})} \|v\|_{L_T^1(\dot{B}_{p,1}^{2-\beta+\frac{n}{p}})}.
\end{aligned} \tag{3.8}
$$

结合上述估计 (3.5)–(3.8), 并由定义 2.2, 我们即得 (3.3). 引理 3.1 证毕.

为证明定理 1.2, 我们选取解空间为 $\mathcal{Y}_t := \mathcal{L}^\infty(0,\infty;\dot{B}_{p,1}^{1-\beta+\frac{n}{p}}(\mathbb{R}^n)) \cap L^1(0,\infty;\dot{B}_{p,1}^{2-\beta+\frac{n}{p}}(\mathbb{R}^n))$ 并赋予如下范数:

$$
\|u\|_{\mathcal{Y}_t} := \|u\|_{\mathcal{L}_t^\infty(\dot{B}_{p,1}^{1-\beta+\frac{n}{p}})} + \|u\|_{L_t^1(\dot{B}_{p,1}^{2-\beta+\frac{n}{p}})}.
$$

由引理 3.1 可知

$$
\|\nabla\cdot(u\nabla(-\Delta)^{-\frac{\beta}{2}}u)\|_{L_t^1(\dot{B}_{p,1}^{1-\beta+\frac{n}{p}})} \lesssim \|u\nabla(-\Delta)^{-\frac{\beta}{2}}u\|_{L_t^1(\dot{B}_{p,1}^{2-\beta+\frac{n}{p}})} \lesssim \|u\|_{\mathcal{Y}_t}^2. \tag{3.9}
$$

结合命题 3.1 中的线性估计, 存在两个正常数 C_0 和 C_1, 我们有

$$
\|u\|_{\mathcal{Y}_t} \leqslant C_0\|u_0\|_{\dot{B}_{p,1}^{1-\beta+\frac{n}{p}}} + C_1\|u\|_{\mathcal{Y}_t}^2.
$$

从而由 Banach 不动点定理 (见 [48]) 和命题 3.1, 我们即得系统 (1.6) 小初值问题解的整体存在性, 唯一性和正则性. 定理 1.2 证毕.

§4　$\varepsilon > 0$ 的情形

§4.1　次临界情形 $1 < \alpha \leqslant 2$

我们将利用 Banach 不动点定理结合不同的迭代技巧来证明定理 1.3. 为此, 我们先来叙述分数阶耗散方程初值问题在 Besov 空间框架下解的存在性, 详细证明可见文 [38].

命题 4.1　设 $s \in \mathbb{R}$, $1 \leqslant p,q,\rho_1 \leqslant \infty$, $0 < T \leqslant \infty$. 若初值 $u_0 \in \dot{B}_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)$, $f \in \mathcal{L}^{\rho_1}(0,T;\dot{B}_{p,q}^{s+\frac{\alpha}{\rho_1}-\alpha}(\mathbb{R}^n))$. 则对如下的分数阶耗散方程的初值问题:

$$
\begin{cases}
\partial_t u + (-\Delta)^{\frac{\alpha}{2}} u = f(x,t), & x \in \mathbb{R}^n,\ t > 0, \\
u(x,0) = u_0(x), & x \in \mathbb{R}^n,
\end{cases} \tag{4.1}
$$

存在唯一的解 u, 满足

$$
u \in \bigcap_{\rho_1 \leqslant \rho \leqslant \infty} \mathcal{L}^\rho(0,T;\dot{B}_{p,q}^{s+\frac{\alpha}{\rho}}(\mathbb{R}^n)),
$$

且存在仅依赖于 n 的正常数 C, 使得对任意的 $\rho_1 \leqslant \rho \leqslant \infty$, 有

$$
\|u\|_{\mathcal{L}_T^\rho(\dot{B}_{p,q}^{s+\frac{\alpha}{\rho}})} \leqslant C(\|u_0\|_{\dot{B}_{p,q}^s} + \|f\|_{\mathcal{L}_T^{\rho_1}(\dot{B}_{p,q}^{s+\frac{\alpha}{\rho_1}-\alpha})}). \tag{4.2}
$$

进一步, 若 $1 \leqslant p,q < \infty$, 则 $u \in C([0,T),\dot{B}_{p,q}^s(\mathbb{R}^n))$.

我们还需要用到如下系统 (1.6) 在齐次 Besov 空间所满足的双线性估计, 具体细节请见文 [42].

引理 4.1 设 $1<\alpha\leqslant 2$, $0<T\leqslant\infty$, 且

$$\begin{cases}1\leqslant p\leqslant\infty, & 1\leqslant q\leqslant\infty \quad \text{若 } 1<\alpha\leqslant\dfrac{3}{2},\\ 1\leqslant p<\dfrac{2n}{2\alpha-3}, & 1\leqslant q\leqslant\infty \quad \text{若 } \dfrac{3}{2}<\alpha\leqslant 2.\end{cases}$$

则我们有如下估计:

$$\begin{aligned}&\|u\nabla(-\Delta)^{-\frac{\alpha}{2}}v\|_{\mathcal{L}^1_T(\dot{B}^{3-2\alpha+\frac{n}{p}}_{p,q})}\\ \lesssim{}&\|u\|^{\theta_1}_{\mathcal{L}^\infty_T(\dot{B}^{2-2\alpha+\frac{n}{p}}_{p,q})}\|u\|^{1-\theta_1}_{\mathcal{L}^1_T(\dot{B}^{2-\alpha+\frac{n}{p}}_{p,q})}\|v\|^{\theta_2}_{\mathcal{L}^\infty_T(\dot{B}^{2-2\alpha+\frac{n}{p}}_{p,q})}\|v\|^{1-\theta_2}_{\mathcal{L}^1_T(\dot{B}^{2-\alpha+\frac{n}{p}}_{p,q})}\\ &+\|u\|^{\theta_2}_{\mathcal{L}^\infty_T(\dot{B}^{2-2\alpha+\frac{n}{p}}_{p,q})}\|u\|^{1-\theta_2}_{\mathcal{L}^1_T(\dot{B}^{2-\alpha+\frac{n}{p}}_{p,q})}\|v\|^{\theta_1}_{\mathcal{L}^\infty_T(\dot{B}^{2-2\alpha+\frac{n}{p}}_{p,q})}\|v\|^{1-\theta_1}_{\mathcal{L}^1_T(\dot{B}^{2-\alpha+\frac{n}{p}}_{p,q})},\end{aligned}\tag{4.3}$$

其中 $\frac{1}{\alpha}<\theta_1\leqslant 1$, $\theta_2=1-\theta_1$ 是两个给定的常数.

我们分以下五步来证明定理 1.3.

第一步 构造逼近解序列.

选取解空间如下:

$$\begin{cases}\widetilde{X}_{1,t}:=\mathcal{L}^\infty(0,\infty;\dot{B}^{2-2\alpha+\frac{n}{p}}_{p,q}(\mathbb{R}^n))\cap\mathcal{L}^1(0,\infty;\dot{B}^{2-\alpha+\frac{n}{p}}_{p,q}(\mathbb{R}^n));\\ \widetilde{X}_{2,t}:=\mathcal{L}^\infty(0,\infty;\dot{B}^{2-\alpha+\frac{n}{p}}_{p,q}(\mathbb{R}^n))\cap\mathcal{L}^1(0,\infty;\dot{B}^{2+\frac{n}{p}}_{p,q}(\mathbb{R}^n));\\ \widetilde{X}_t:=\widetilde{X}_{1,t}\times\widetilde{X}_{2,t},\end{cases}$$

其上分别赋予如下范数:

$$\begin{cases}\|u\|_{\widetilde{X}_{1,t}}:=\|u\|_{\mathcal{L}^\infty_t(\dot{B}^{2-2\alpha+\frac{n}{p}}_{p,q})}+\|u\|_{\mathcal{L}^1_t(\dot{B}^{2-\alpha+\frac{n}{p}}_{p,q})};\\ \|v\|_{\widetilde{X}_{2,t}}:=\|v\|_{\mathcal{L}^\infty_t(\dot{B}^{2-\alpha+\frac{n}{p}}_{p,q})}+\|v\|_{\mathcal{L}^1_t(\dot{B}^{2+\frac{n}{p}}_{p,q})};\\ \|(u,v)\|_{\widetilde{X}_t}:=\|u\|_{\widetilde{X}_{1,t}}+\|v\|_{\widetilde{X}_{2,t}}.\end{cases}$$

令 $u^{(0)}:=\mathrm{e}^{-t(-\Delta)^{\frac{\alpha}{2}}}u_0$, $v^{(0)}:=\mathrm{e}^{-t(-\Delta)^{\frac{\alpha}{2}}}v_0$, 即 $u^{(0)}$ 和 $v^{(0)}$ 分别是初值为 u_0 和 v_0 的方程 (4.1) 所对应的齐次方程的解 ($f=0$). 我们构造解序列 $(u^{(k+1)},v^{(k+1)})$ 如下:

$$\begin{cases}\partial_t u^{(k+1)}+(-\Delta)^{\frac{\alpha}{2}}u^{(k+1)}=\nabla\cdot(u^{(k)}\nabla v^{(k)}),\\ \partial_t v^{(k+1)}+(-\Delta)^{\frac{\alpha}{2}}v^{(k+1)}=u^{(k+1)},\\ u^{(k+1)}(x,0)=u_0(x),\quad v^{(k+1)}(x,0)=v_0(x).\end{cases}\tag{4.4}$$

由命题 4.1 易知 $u^{(0)}\in\widetilde{X}_{1,t}$, $v^{(0)}\in\widetilde{X}_{2,t}$. 利用数学归纳法和引理 4.1(取 $\alpha=\beta$) 可得对任意的 $k\in\mathbb{N}$, 若 $u^{(k)}\in\widetilde{X}_{1,t}$, $v^{(k)}\in\widetilde{X}_{2,t}$, 则 $\nabla\cdot(u^{(k)}\nabla v^{(k)})\in\mathcal{L}^1(0,\infty;\dot{B}^{2-2\alpha+\frac{n}{p}}_{p,q}(\mathbb{R}^n))$, 从而 $u^{(k+1)}\in\widetilde{X}_{1,t}$. 再利用命题 4.1 可知若 $u^{(k+1)}\in\widetilde{X}_{1,t}$, 则 $v^{(k+1)}\in\widetilde{X}_{2,t}$, 且存在一致常数 $C>0$, 使得

$$\|u^{(k+1)}\|_{\widetilde{X}_{1,t}}\leqslant C(\|u_0\|_{\dot{B}^{2-2\alpha+\frac{n}{p}}_{p,q}}+\|u^{(k)}\|_{\widetilde{X}_{1,t}}\|v^{(k)}\|_{\widetilde{X}_{2,t}}),\tag{4.5}$$

$$\|v^{(k+1)}\|_{\widetilde{X}_{2,t}}\leqslant C(\|v_0\|_{\dot{B}^{2-\alpha+\frac{n}{p}}_{p,q}}+\|u^{(k+1)}\|_{\widetilde{X}_{1,t}}).\tag{4.6}$$

从而对任意的 $k\in\mathbb{N}$, $(u^{(k)},v^{(k)})\in\widetilde{X}_t$.

第二步 小初值问题解序列的一致上界.

假设存在正常数 $\widetilde{C}$(其具体值我们随后确定), 使得

$$\|(u^{(k)},v^{(k)})\|_{\widetilde{X}_t}\leqslant\widetilde{C}. \tag{4.7}$$

则由 (4.5)–(4.6) 可知

$$\begin{aligned}\|(u^{(k+1)},v^{(k+1)})\|_{\widetilde{X}_t}&\leqslant(C+C^2)(\|u_0\|_{\dot{B}_{p,q}^{2-2\alpha+\frac{n}{p}}}+\|v_0\|_{\dot{B}_{p,q}^{2-\alpha+\frac{n}{p}}}+\|u^{(k)}\|_{\widetilde{X}_{1,t}}\|v^{(k)}\|_{\widetilde{X}_{2,t}})\\&\leqslant\widehat{C}(\|u_0\|_{\dot{B}_{p,q}^{2-2\alpha+\frac{n}{p}}}+\|v_0\|_{\dot{B}_{p,q}^{2-\alpha+\frac{n}{p}}}+\widetilde{C}^2),\end{aligned} \tag{4.8}$$

其中 $\widehat{C}:=C+C^2$. 进一步, 令

$$\widetilde{C}:=\frac{1-\sqrt{1-4\widehat{C}^2\big(\|u_0\|_{\dot{B}_{p,q}^{2-2\alpha+\frac{n}{p}}}+\|v_0\|_{\dot{B}_{p,q}^{2-\alpha+\frac{n}{p}}}\big)}}{2\widehat{C}},$$

并且令初值 $\|u_0\|_{\dot{B}_{p,q}^{2-2\alpha+\frac{n}{p}}}+\|v_0\|_{\dot{B}_{p,q}^{2-\alpha+\frac{n}{p}}}$ 充分小使得满足如下条件:

$$\widehat{C}\big(\|u_0\|_{\dot{B}_{p,q}^{2-2\alpha+\frac{n}{p}}}+\|v_0\|_{\dot{B}_{p,q}^{2-\alpha+\frac{n}{p}}}+\widetilde{C}^2\big)\leqslant\widetilde{C},$$

则由数学归纳法可得, 解序列 $(u^{(k)},v^{(k)})$ 在解空间 $\widetilde{X}_t$ 中是一致有上界 $\widetilde{C}$ 的.

第三步 解序列的收敛性.

下面我们来证明若初值充分小, 则实际上解序列 $(u^{(k)},v^{(k)})$ 是解空间 $\widetilde{X}_t$ 上的 Cauchy 列. 为此考虑解序列相邻项的差 $(u^{(k+1)}-u^{(k)},v^{(k+1)}-v^{(k)})$, 易知其满足如下方程组:

$$\begin{cases}\partial_t(u^{(k+1)}-u^{(k)})+(-\Delta)^{\frac{\alpha}{2}}(u^{(k+1)}-u^{(k)})=\nabla\cdot((u^{(k)}-u^{(k-1)})\nabla v^{(k)})\\\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad+\nabla\cdot(u^{(k-1)}\nabla(v^{(k)}-v^{(k-1)})),\\\partial_t(v^{(k+1)}-v^{(k)})+(-\Delta)^{\frac{\alpha}{2}}(v^{(k+1)}-v^{(k)})=u^{(k+1)}-u^{(k)},\\(u^{(k+1)}-u^{(k)})(x,0)=0,\quad(v^{(k+1)}-v^{(k)})(x,0)=0.\end{cases} \tag{4.9}$$

则类似于引理 4.1 的证明, 结合命题 3.1 可证得

$$\begin{aligned}\|u^{(k+1)}-u^{(k)}\|_{\widetilde{X}_{1,t}}&\leqslant C(\|(u^{(k)}-u^{(k-1)})\nabla v^{(k)}\|_{\mathcal{L}_t^1(\dot{B}_{p,q}^{3-2\alpha+\frac{n}{p}})}\\&\qquad+\|u^{(k-1)}\nabla(v^{(k)}-v^{(k-1)})\|_{\mathcal{L}_t^1(\dot{B}_{p,q}^{3-2\alpha+\frac{n}{p}})})\\&\leqslant C(\|u^{(k)}-u^{(k-1)}\|_{\widetilde{X}_{1,t}}\|v^{(k)}\|_{\widetilde{X}_{2,t}}+\|u^{(k-1)}\|_{\widetilde{X}_{1,t}}\|v^{(k)}-v^{(k-1)}\|_{\widetilde{X}_{2,t}})\\&\leqslant 2C\widetilde{C}\|(u^{(k)}-u^{(k-1)},v^{(k)}-v^{(k-1)})\|_{\widetilde{X}_t};\end{aligned} \tag{4.10}$$

$$\begin{aligned}\|v^{(k+1)}-v^{(k)}\|_{\widetilde{X}_{1,t}}&\leqslant C\|u^{(k+1)}-u^{(k)}\|_{\mathcal{L}_t^1(\dot{B}_{p,q}^{2-\alpha+\frac{n}{p}})}\\&\leqslant 2C^2\widetilde{C}\|(u^{(k)}-u^{(k-1)},v^{(k)}-v^{(k-1)})\|_{\widetilde{X}_t}.\end{aligned} \tag{4.11}$$

从而, 由 (4.10)–(4.11) 可得

$$\|(u^{(k+1)}-u^{(k)},v^{(k+1)}-v^{(k)})\|_{\widetilde{X}_t}\leqslant 2(C+C^2)\widetilde{C}\|(u^{(k)}-u^{(k-1)},v^{(k)}-v^{(k-1)})\|_{\widetilde{X}_t}. \tag{4.12}$$

显然, 如果我们取 $\widetilde{C}$ 充分小使得 $\widetilde{C}<\frac{1}{2(C+C^2)}$ (只需我们取初值 $\|u_0\|_{\dot{B}_{p,q}^{2-2\alpha+\frac{n}{p}}}+\|v_0\|_{\dot{B}_{p,q}^{2-\alpha+\frac{n}{p}}}$ 充分小, 这个便可以实现的), 则序列 $(u^{(k)},v^{(k)})$ 是 $\widetilde{X}_t$ 中的 Cauchy 列, 从而在 $\widetilde{X}_t$ 中存在

极限 (u,v), 此即为系统 (1.10) 的解.

第四步 解的正则性.

注意到 $(u,v)\in\widetilde{X}_t$, 由引理 4.1 可知系统 (1.10) 中的右端项满足

$$u\in\mathcal{L}^1(0,\infty;\dot{B}_{p,q}^{2-\alpha+\frac{n}{p}}(\mathbb{R}^n)),\quad \nabla\cdot(u\nabla v)\in\mathcal{L}^1(0,\infty;\dot{B}_{p,q}^{2-2\alpha+\frac{n}{p}}(\mathbb{R}^n)).$$

由命题 4.1 可知当 $1\leqslant p,q<\infty$ 时,

$$u\in C([0,\infty),\dot{B}_{p,q}^{2-2\alpha+\frac{n}{p}}(\mathbb{R}^n)),\quad v\in C([0,\infty),\dot{B}_{p,q}^{2-\alpha+\frac{n}{p}}(\mathbb{R}^n)).$$

第五步 解的唯一性.

假设 (u_1,v_1) 和 (u_2,v_2) 是系统 (1.10) 具有相同初值 (u_0,v_0) 的两个解. 则易知它们的差满足如下方程:

$$\begin{cases}\partial_t(u_1-u_2)+(-\Delta)^{\frac{\alpha}{2}}(u_1-u_2)=\nabla\cdot((u_1-u_2)\nabla v_1)+\nabla\cdot(u_2\nabla(v_1-v_2)),\\ \partial_t(v_1-v_2)+(-\Delta)^{\frac{\alpha}{2}}(v_1-v_2)=u_1-u_2,\\ (u_1-u_2)(x,0)=0,\quad (v_1-v_2)(x,0)=0.\end{cases}$$

类似于 (4.12), 我们可证得

$$\|(u_1-u_2,v_1-v_2)\|_{\widetilde{X}_t}\leqslant 2(C+C^2)\widetilde{C}\|(u_1-u_2,v_1-v_2)\|_{\widetilde{X}_t}. \tag{4.13}$$

因为我们已经假设 $2(C+C^2)\widetilde{C}<1$, 从而由 (4.13) 即得 $u_1=u_2$, $v_1=v_2$, 即系统 (1.10) 的解 (u,v) 是唯一的. 至此, 我们完成了定理 1.3 的证明.

§4.2 临界情形 $\alpha=1$

基于我们前面所用方法和所得结果, 我们简要叙述一下定理 1.4 的证明. 首先选取 (u,v) 所在的解空间为 $\widetilde{Y}_t:=\widetilde{Y}_{1,t}\times\widetilde{Y}_{2,t}$, 其中

$$\begin{cases}\widetilde{Y}_{1,t}:=\mathcal{L}^\infty(0,\infty;\dot{B}_{p,1}^{\frac{n}{p}}(\mathbb{R}^n))\cap L^1(0,\infty;\dot{B}_{p,1}^{1+\frac{n}{p}}(\mathbb{R}^n));\\ \widetilde{Y}_{2,t}:=\mathcal{L}^\infty(0,\infty;\dot{B}_{p,1}^{1+\frac{n}{p}}(\mathbb{R}^n))\cap L^1(0,\infty;\dot{B}_{p,1}^{2+\frac{n}{p}}(\mathbb{R}^n)),\end{cases}$$

且分别赋予如下范数:

$$\begin{cases}\|u\|_{\widetilde{Y}_{1,t}}:=\|u\|_{\mathcal{L}_t^\infty(\dot{B}_{p,1}^{\frac{n}{p}})}+\|u\|_{L_t^1(\dot{B}_{p,1}^{1+\frac{n}{p}})};\\ \|v\|_{\widetilde{Y}_{2,t}}:=\|v\|_{\mathcal{L}_t^\infty(\dot{B}_{p,1}^{1+\frac{n}{p}})}+\|v\|_{L_t^1(\dot{B}_{p,1}^{2+\frac{n}{p}})};\\ \|(u,v)\|_{\widetilde{Y}_t}:=\|u\|_{\widetilde{Y}_{1,t}}+\|v\|_{\widetilde{Y}_{2,t}}.\end{cases}$$

其次由命题 3.1 可知若 $u\in\widetilde{Y}_{1,t}$, 则 $v\in\widetilde{Y}_{2,t}$. 并且类似于引理 4.1 的证明可证得:

$$\nabla\cdot(u\nabla v)\in L^1(0,\infty;\dot{B}_{p,1}^{\frac{n}{p}}(\mathbb{R}^n)).$$

从而我们可利用次临界情形中迭代方法可证得: 当初值 (u_0,v_0) 的范数 $\|u_0\|_{\dot{B}_{p,1}^{\frac{n}{p}}}+\|v_0\|_{\dot{B}_{p,1}^{1+\frac{n}{p}}}$ 充分小时, 迭代系统 (4.4) 存在解序列 $(u^{(k)},v^{(k)})$ 是 $\widetilde{Y}_t$ 中一致有界的 Cauchy 列, 其极限即为系统 (1.10) 的解. 解的正则性和唯一性类似可证, 定理 1.4 证毕.

§5　定理 1.5 的证明

在定理 1.5 的条件假设下, 由注 3 可知对任意的 $u_0\in\dot{B}_{p,1}^{2-2\alpha+\frac{n}{p}}(\mathbb{R}^n)$, $v_0\in\dot{B}_{p,1}^{2-\alpha+\frac{n}{p}}(\mathbb{R}^n)$, 存在 $T>0$ 使得系统 (1.10) 在 $[0,T)$ 上存在唯一的局部解 (u,v), 满足

$$\begin{cases}u\in C([0,T),\dot{B}_{p,1}^{2-2\alpha+\frac{n}{p}}(\mathbb{R}^n))\cap\mathcal{L}^\infty(0,T;\dot{B}_{p,1}^{2-2\alpha+\frac{n}{p}}(\mathbb{R}^n))\cap L^1(0,T;\dot{B}_{p,1}^{2-\alpha+\frac{n}{p}}(\mathbb{R}^n)),\\ v\in C([0,T),\dot{B}_{p,1}^{2-\alpha+\frac{n}{p}}(\mathbb{R}^n))\cap\mathcal{L}^\infty(0,T;\dot{B}_{p,1}^{2-\alpha+\frac{n}{p}}(\mathbb{R}^n))\cap L^1(0,T;\dot{B}_{p,1}^{2+\frac{n}{p}}(\mathbb{R}^n)).\end{cases}$$

令 T^* 为此局部解 (u,v) 的最大存在时间, 则要证明定理 1.5, 只需证明在条件 (1.13) 下, 有 $T^*=\infty$.

我们首先来推导 v 的估计. 令 $\sigma>0$. 定义

$$T_\sigma:=\sup\Big\{t\in[0,T^*):\|u\|_{\mathcal{L}_t^\infty(\dot{B}_{p,1}^{2-2\alpha+\frac{n}{p}})}+\frac{\kappa}{2}\|u\|_{L_t^1(\dot{B}_{p,1}^{2-\alpha+\frac{n}{p}})}\leqslant\sigma\Big\},\tag{5.1}$$

其中 κ 为引理 2.3 中的正常数. 对系统 (1.10) 中的第二个方程两端同时作用二进制算子 Δ_j, 再将所得式子和 $|\Delta_jv|^{p-2}\Delta_jv$ 做 L^2 内积, 我们有

$$\frac{1}{p}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|\Delta_jv\|_{L^p}^p+\int_{\mathbb{R}^n}(-\Delta)^{\frac{\alpha}{2}}\Delta_jv|\Delta_jv|^{p-2}\Delta_jv\mathrm{d}x=\int_{\mathbb{R}^n}\Delta_ju|\Delta_jv|^{p-2}\Delta_jv\mathrm{d}x.\tag{5.2}$$

对于上式左端第二项, 由引理 2.3 可得

$$\int_{\mathbb{R}^n}(-\Delta)^{\frac{\alpha}{2}}\Delta_jv|\Delta_jv|^{p-2}\Delta_jv\mathrm{d}x\geqslant\kappa2^{\alpha j}\|\Delta_jv\|_{L^p}^p.$$

将上式带入 (5.2), 并利用 Hölder 不等式可得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|\Delta_jv\|_{L^p}+\kappa2^{\alpha j}\|\Delta_jv\|_{L^p}\leqslant\|\Delta_ju\|_{L^p}.\tag{5.3}$$

对任意的 $0<t<T_\sigma$, 将 (5.3) 两端同时在区间 $[0,t]$ 上积分, 然后将所得式子乘以 $2^{j(2-\alpha+\frac{n}{p})}$ 并取 l^1 范数, 有

$$\begin{aligned}\|v\|_{\mathcal{L}_t^\infty(\dot{B}_{p,1}^{2-\alpha+\frac{n}{p}})}+\kappa\|v\|_{L_t^1(\dot{B}_{p,1}^{2+\frac{n}{p}})}&\leqslant\|v_0\|_{\dot{B}_{p,1}^{2-\alpha+\frac{n}{p}}}+\|u\|_{L_t^1(\dot{B}_{p,1}^{2-\alpha+\frac{n}{p}})}\\&\leqslant\|v_0\|_{\dot{B}_{p,1}^{2-\alpha+\frac{n}{p}}}+\frac{2\sigma}{\kappa}.\end{aligned}\tag{5.4}$$

其次我们来推导 u 的估计. 为此引入如下加权 Chemin-Lerner 型范数: 对 $f(t)\in L_{\mathrm{loc}}^1(0,+\infty)$, $f(t)\geqslant0$, 及任意的 $s\in\mathbb{R}$, $p,\rho,r\in[1,\infty]$, 定义

$$\|u\|_{\mathcal{L}_{t,f}^\rho(\dot{B}_{p,r}^s)}:=\Big\{\sum_{j\in\mathbb{Z}}2^{jsr}\Big(\int_0^tf(\tau)\|\Delta_ju(\tau)\|_{L^p}^\rho\mathrm{d}\tau\Big)^{\frac{r}{\rho}}\Big\}^{\frac{1}{r}}.$$

若 $\rho=\infty$ 或 $r=\infty$, 上式范数中取相应的最大模范数. 注意到 (1.10) 中的第二个方程关于 u 是线性方程, 我们的主要想法是利用恰当的加权函数 $f(t)$ 来吸收第一个方程右端非线性项中 v 所带来的的困难. 为此, 对任意的 $\lambda>0$, 取

$$f(t)=\|v(\cdot,t)\|_{\dot{B}_{p,1}^{2+\frac{d}{p}}},\quad u_{\lambda,f}(x,t):=u(x,t)\exp\Big(-\lambda\int_0^tf(\tau)\mathrm{d}\tau\Big).$$

易知 $u_{\lambda,f}$ 满足如下方程:

$$\partial_tu_{\lambda,f}+\lambda f(t)u_{\lambda,f}+(-\Delta)^{\frac{\alpha}{2}}u_{\lambda,f}=\nabla\cdot(u_{\lambda,f}\nabla v).\tag{5.5}$$

对等式 (5.5) 左右两端同时作用二进制算子 Δ_j, 然后将所得结果和 $|\Delta_j u_{\lambda,f}|^{p-2}\Delta_j u_{\lambda,f}$ 做 L^2 内积, 可得

$$\begin{aligned}&\frac{1}{p}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|\Delta_j u_{\lambda,f}\|_{L^p}^p+\lambda f(t)\|\Delta_j u_{\lambda,f}\|_{L^p}^p+\int_{\mathbb{R}^n}(-\Delta)^{\frac{\alpha}{2}}\Delta_j u_{\lambda,f}|\Delta_j u_{\lambda,f}|^{p-2}\Delta_j u_{\lambda,f}\mathrm{d}x\\=&\int_{\mathbb{R}^n}\Delta_j\nabla\cdot(u_{\lambda,f}\nabla v)|\Delta_j u_{\lambda,f}|^{p-2}\Delta_j u_{\lambda,f}\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

类似于 (5.4) 的推导, 我们有

$$\begin{aligned}&\|u_{\lambda,f}\|_{\mathcal{L}_t^\infty(\dot{B}_{p,1}^{2-2\alpha+\frac{n}{p}})}+\lambda\|u_{\lambda,f}\|_{\mathcal{L}_{t,f}^1(\dot{B}_{p,1}^{2-2\alpha+\frac{n}{p}})}+\kappa\|u_{\lambda,f}\|_{L_t^1(\dot{B}_{p,1}^{2-\alpha+\frac{n}{p}})}\\\leqslant&\|u_0\|_{\dot{B}_{p,1}^{2-2\alpha+\frac{n}{p}}}+\|u_{\lambda,f}\nabla v\|_{L_t^1(\dot{B}_{p,1}^{3-2\alpha+\frac{n}{p}})}.\end{aligned}\tag{5.6}$$

注意到

$$\|u_{\lambda,f}\nabla v\|_{L_t^1(\dot{B}_{p,1}^{3-2\alpha+\frac{n}{p}})}=\int_0^t\|u_{\lambda,f}\nabla v(\tau)\|_{\dot{B}_{p,1}^{3-2\alpha+\frac{n}{p}}}\mathrm{d}\tau.$$

我们可利用类似于引理 4.1 的证明 (不考虑时间变量, $\alpha=\beta$) 来估计上式右端项的被积函数, 并可知存在一致常数 $\widetilde{C}>0$, 使得

$$\|u_{\lambda,f}\nabla v\|_{\dot{B}_{p,1}^{3-2\alpha+\frac{n}{p}}}\leqslant\widetilde{C}\big(\|v\|_{\dot{B}_{p,1}^{2+\frac{n}{p}}}\|u_{\lambda,f}\|_{\dot{B}_{p,1}^{2-2\alpha+\frac{n}{p}}}+\|v\|_{\dot{B}_{p,1}^{1+\frac{n}{p}}}\|u_{\lambda,f}\|_{\dot{B}_{p,1}^{3-2\alpha+\frac{n}{p}}}\big).$$

再利用插值不等式 (2.4) 和 Young 不等式可得

$$\begin{aligned}&\|u_{\lambda,f}\nabla v\|_{\dot{B}_{p,1}^{3-2\alpha+\frac{n}{p}}}\\\leqslant&\widetilde{C}\big(\|v\|_{\dot{B}_{p,1}^{2+\frac{n}{p}}}\|u_{\lambda,f}\|_{\dot{B}_{p,1}^{2-2\alpha+\frac{n}{p}}}+\|v\|_{\dot{B}_{p,1}^{2-\alpha+\frac{n}{p}}}^{\frac{1}{\alpha}}\|v\|_{\dot{B}_{p,1}^{2+\frac{n}{p}}}^{1-\frac{1}{\alpha}}\|u_{\lambda,f}\|_{\dot{B}_{p,1}^{2-\alpha+\frac{n}{p}}}^{\frac{1}{\alpha}}\|u_{\lambda,f}\|_{\dot{B}_{p,1}^{2-2\alpha+\frac{n}{p}}}^{1-\frac{1}{\alpha}}\big)\\\leqslant&\widetilde{C}(\delta)\|v\|_{\dot{B}_{p,1}^{2+\frac{n}{p}}}\|u_{\lambda,f}\|_{\dot{B}_{p,1}^{2-2\alpha+\frac{n}{p}}}+\delta\|v\|_{\dot{B}_{p,1}^{2-\alpha+\frac{n}{p}}}\|u_{\lambda,f}\|_{\dot{B}_{p,1}^{2-\alpha+\frac{n}{p}}}.\end{aligned}$$

由 (5.4) 可得

$$\begin{aligned}&\|u_{\lambda,f}\nabla v\|_{L_t^1(\dot{B}_{p,1}^{3-2\alpha+\frac{n}{p}})}\\\leqslant&\widetilde{C}(\delta)\|u_{\lambda,f}\|_{\mathcal{L}_{t,f}^1(\dot{B}_{p,1}^{2-2\alpha+\frac{n}{p}})}+\delta\|v\|_{\mathcal{L}_t^\infty(\dot{B}_{p,1}^{2-\alpha+\frac{n}{p}})}\|u_{\lambda,f}\|_{L_t^1(\dot{B}_{p,1}^{2-\alpha+\frac{n}{p}})}\\\leqslant&\widetilde{C}(\delta)\|u_{\lambda,f}\|_{\mathcal{L}_{t,f}^1(\dot{B}_{p,1}^{2-2\alpha+\frac{n}{p}})}+\delta\Big(\|v_0\|_{\dot{B}_{p,1}^{2-\alpha+\frac{n}{p}}}+\frac{2\sigma}{\kappa}\Big)\|u_{\lambda,f}\|_{L_t^1(\dot{B}_{p,1}^{2-\alpha+\frac{n}{p}})}.\end{aligned}\tag{5.7}$$

将 (5.7) 代入 (5.6), 有

$$\begin{aligned}&\|u_{\lambda,f}\|_{\mathcal{L}_t^\infty(\dot{B}_{p,1}^{2-2\alpha+\frac{n}{p}})}+(\lambda-\widetilde{C}(\delta))\|u_{\lambda,f}\|_{\mathcal{L}_{t,f}^1(\dot{B}_{p,1}^{2-2\alpha+\frac{n}{p}})}+\kappa\|u_{\lambda,f}\|_{L_t^1(\dot{B}_{p,1}^{2-\alpha+\frac{n}{p}})}\\\leqslant&\|u_0\|_{\dot{B}_{p,1}^{2-2\alpha+\frac{n}{p}}}+\delta\Big(\|v_0\|_{\dot{B}_{p,1}^{2-\alpha+\frac{n}{p}}}+\frac{2\sigma}{\kappa}\Big)\|u_{\lambda,f}\|_{L_t^1(\dot{B}_{p,1}^{2-\alpha+\frac{n}{p}})}.\end{aligned}\tag{5.8}$$

我们先取 δ 充分小使得 $\delta\big(\|v_0\|_{\dot{B}_{p,1}^{2-\alpha+\frac{n}{p}}}+\frac{2\sigma}{\kappa}\big)<\frac{\kappa}{2}$, 然后再取 λ 充分大使得 $\lambda>\widetilde{C}(\delta)$(不妨取 $\lambda=2\widetilde{C}(\delta)$), 则

$$\|u_{\lambda,f}\|_{\mathcal{L}_t^\infty(\dot{B}_{p,1}^{2-2\alpha+\frac{n}{p}})}+\widetilde{C}(\delta)\|u_{\lambda,f}\|_{\mathcal{L}_{t,f}^1(\dot{B}_{p,1}^{2-2\alpha+\frac{n}{p}})}+\frac{\kappa}{2}\|u_{\lambda,f}\|_{L_t^1(\dot{B}_{p,1}^{2-\alpha+\frac{n}{p}})}\leqslant\|u_0\|_{\dot{B}_{p,1}^{2-2\alpha+\frac{n}{p}}}.$$

从而

$$\begin{aligned}&\|u\|_{\mathcal{L}_t^\infty(\dot{B}_{p,1}^{2-2\alpha+\frac{n}{p}})}+\frac{\kappa}{2}\|u\|_{L_t^1(\dot{B}_{p,1}^{2-\alpha+\frac{n}{p}})}\\&\leqslant\|u_0\|_{\dot{B}_{p,1}^{2-2\alpha+\frac{n}{p}}}\exp\Big\{2\widetilde{C}(\delta)\int_0^t\|v(\tau)\|_{\dot{B}_{p,1}^{2+\frac{n}{p}}}\mathrm{d}\tau\Big\}\\&\leqslant\|u_0\|_{\dot{B}_{p,1}^{2-2\alpha+\frac{n}{p}}}\exp\Big\{2\widetilde{C}(\delta)\Big(\|v_0\|_{\dot{B}_{p,1}^{2-\alpha+\frac{n}{p}}}+\frac{2\sigma}{\kappa}\Big)\Big\}.\end{aligned}\tag{5.9}$$

最后若在条件 (1.13) 中取 C_0 充分大而 c_0 充分小, 则由 (5.9) 可得对于任意的 $0<t<T_\sigma$,

$$\|u\|_{\mathcal{L}_t^\infty(\dot{B}_{p,1}^{2-2\alpha+\frac{n}{p}})}+\frac{\kappa}{2}\|u\|_{L_t^1(\dot{B}_{p,1}^{2-\alpha+\frac{n}{p}})}\leqslant\frac{\sigma}{2}.\tag{5.10}$$

这个是和 (5.1) 中 T_σ 的极大性是矛盾的, 从而 $T^*=\infty$. 我们完成了定理 1.5 的证明.

致谢 感谢审稿人对论文初稿的细致审阅, 同时作者对编辑老师表示衷心的感谢!

参　考　文　献

[1] Keller E F, Segel L A. Initiation of slime mold aggregation viewed as an instability [J]. *J Theoret Biol*, 1970, 26:399–415.

[2] Biler P, Hilhorst D, Nadzieja, T. Existence and nonexistence of solutions for a model gravitational of particles [J]. *Colloq Math*, 1994, 67:297–308.

[3] Osaki K, Yagi A. Finite dimensional attractors for one-dimensional Keller-Segel equations [J]. *Funkcialaj Ekvac*, 2001, 44:441–469.

[4] Jäger W, Luckhaus S. On explosions of solutions to a system of partial differential equations modelling chemotaxis [J]. *Trans Amer Math Soc*, 1992, 329(2):819–824.

[5] Herrero M A, Velázquez J J L. Singularity patterns in a chemotaxis model [J]. *Math Ann*, 1996, 306(3):583–623.

[6] Herrero M A, Velázquez J J L. Chemotaxis collapse for the Keller-Segel model [J]. *J Math Biol*, 1996, 35:177–194.

[7] Biler P. Local and global solvability of parabolic systems modelling chemotaxis [J]. *Adv Math Sci Appl*, 1998, 8:715–743.

[8] Gajewski H, Zacharias K. Global behaviour of a reaction-diffusion system modelling chemotaxis [J]. *Math Nachr*, 1998, 195:77–114.

[9] Nagai T, Senba T, Yoshida K. Application of the Trudinger-Moser inequality to a parabolic system of chemotaxis [J]. *Funkcial Ekvac*, 1997, 40(3):411–433.

[10] Horstmann D, Wang G F. Blow-up in a chemotaxis model without symmetry assumptions [J]. *European Journal of Applied Mathematics*, 2001, 12:159–177.

[11] Senba T, Suzuki T. Parabolic system of chemotaxis: blowup in a finite and the infinite time [J]. *Methods and Applications of Analysis*, 2001, 8:349–367.

[12] Winkler M. Aggregation vs global diffusive behavior in the higher-dimensional Keller-Segel model [J]. *J Differential Equations*, 2010, 248:2889–2905.

[13] Winkler M. Finite-Time blow-up in the higher-dimensional parabolic-parabolic Keller-Segel system [J]. *J Math Pures Appl*, 2013, 100:748–767.

[14] Karch G. Scaling in nonlinear parabolic equations [J]. *J Math Anal Appl*, 1999, 234:534–558.

[15] Iwabuchi T. Global well-posedness for Keller-Segel system in Besov type spaces [J]. *J Math Anal Appl*, 2011, 379(2):930–948.

[16] Iwabuchi T, Nakamura M. Small solutions for nonlinear heat equations, the Navier-Stokes equation and the Keller-Segel system in Besov and Triebel–Lizorkin spaces [J]. *Adv Differential Equations*, 2013, 18:687–736.

[17] Horstmann D. From 1970 until present: the Keller-Segel model in chemotaxis and its consequences I [J]. *Jahresber DMV*, 2003, 105:103–165.

[18] Horstmann D. From 1970 until present: the Keller-Segel model in chemotaxis and its consequences II [J]. *Jahresber DMV*, 2004, 106: 51–69.

[19] Biler P, Cannone M, Guerra I A, et al. Global regular and singular solutions for a model of gravitating particles [J]. *Math Ann*, 2004, 330:693–708.

[20] Blanchet A, Dolbeault J, Perthame B. Two dimensional Keller-Segel model: optimal critical mass and qualitative properties of the solutions [J]. *Electron J Diff Equ*, 2006, 44:1–33.

[21] Kozono H, Sugiyama Y. Local existence and finite time blow-up of solutions in the 2-D Keller-Segel system [J]. *J Evol Equ*, 2008, 8:353–378.

[22] Ogawa T, Shimizu S. The drift-diffusion system in two-dimensional critical Hardy space [J]. *J Funct Anal*, 2008, 255:1107–1138.

[23] Ogawa T, Shimizu S. End-Point maximal regularity and wellposedness of the two dimensional Keller-Segel system in a critical Besov space [J]. *Math Z*, 2010, 264:601–628.

[24] Zhao J H, Liu Q, Cui S B. Existence of solutions for the Debye–Hückel system with low regularity initial data [J]. *Acta Appl Math*, 2013, 125:1–10.

[25] Deng C, Li C M. Endpoint bilinear estimates and applications to the two-dimensional Poisson-Nernst-Planck system [J]. *Nonlinearity*, 2013, 26:2993–3009.

[26] Biler P, Karch G, Zienkiewicz J. Optimal criteria for blowup of radial and N-symmetric solutions of chemotaxis systems [J]. *Nonlinearity*, 2015, 28(12):4369–4387.

[27] Iwabuchi T, Ogawa T. Ill-Posedness issue for the drift diffusion system in the homogeneous Besov spaces [J]. *Osaka J Math*, 2016, 53:919–939.

[28] Escudero C. The fractional Keller-Segel model [J]. *Nonlinearity*, 2006, 19:2909–2918.

[29] Bournaveas N, Calvez V. The one-dimensional Keller-Segel model with fractional diffusion of cells [J]. *Nonlinearity*, 2010, 23(4):923–935.

[30] Biler P, Karch G. Blowup of solutions to generalized Keller-Segel model [J]. *J Evol Equ*, 2010, 10:247–262.

[31] Biler P, Wu G. Two-Dimensional chemotaxis models with fractional diffusion [J]. *Math Methods Appl Sci*, 2009, 32:112–126.

[32] Zhai Z C. Global well-posedness for nonlocal fractional Keller-Segel systems in critical Besov spaces [J]. *Nonlinear Anal*, 2010, 72:3173–3189.

[33] Sugiyama Y, Yamamoto M, Kato K. Local and global solvability and blow up for the drift-diffusion equation with the fractional dissipation in the critical space [J]. *J Differential Equations*, 2015, 258:2983–3010.

[34] Zhao J H. Well-Posedness and Gevrey analyticity of the generalized Keller-Segel system in critical Besov spaces [J]. *Annali di Matematica*, 2018, 197:521–548.

[35] Wu G, Zheng X X. On the well-posedness for Keller-Segel system with fractional diffusion [J]. *Math Methods Appl Sci*, 2011, 34(14):1739–1750.

[36] 陈化, 吕文斌, 吴少华. 分数阶趋化模型在 Besov 空间中解的存在性 [J]. 中国科学: 数学, 2019, 49(12):1–17.

[37] Miao C X, Yuan B Q, Zhang B. Well-Posedness of the Cauchy problem for the fractional power dissipative equations [J]. *Nonlinear Anal*, 2008, 68:461–484.

[38] Wu G, Yuan J. Well-Posedness of the Cauchy problem for the fractional power dissipative equation in critical Besov spaces [J]. *J Math Anal Appl*, 2008, 340:1326–1335.

[39] Ogawa T, Yamamoto M. Asymptotic behavior of solutions to drift-diffusion system with generalized dissipation [J]. *Math Models Methods Appl Sci*, 2009, 19:939–967.

[40] Zhao J H, Liu Q. On the Cauchy problem for the fractional drift-diffusion system in critical Besov spaces [J]. *Appl Anal*, 2014, 93(7):1431–1450.

[41] Granero-Belinchón R. On a drift-diffusion system for semiconductor devices [J]. *Annales Henri Poincaré*, 2016, 17:3473–3498.

[42] Zhao J H. Global existence of large solutions for the generalized Poisson-Nernst-Planck equations [J]. *J Math Anal Appl*, 2021, 498:124943.

[43] Bahouri H, Chemin J Y, Danchin R. Fourier analysis and nonlinear partial differential equations [M]//Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, vol 343, Berlin: Springer-Verlag, 2011.

[44] Chen Q L, Miao C X, Zhang Z F. A new Bernstein's inequality and the 2D dissipative quasi-geostrophic equation [J]. *Commun Math Phys*, 2007, 271:821–838.

[45] Wu J H. Lower bounds for an integral involving fractional Laplacians and the generalized Navier-Stokes equations in Besov spaces [J]. *Commun Math Phys*, 2005, 263:803–831.

[46] Bony J M. Calcul symbolique et propagation des singularités pour les équations aux dérivées partielles nonlinéaires [J]. *Ann Sci école Norm Sup*, 1981, 14(4):209–246.

[47] Huang C Y, Wang B X. Analyticity for the (generalized) Navier-Stokes equations with rough initail data [J/OL]. arXiv:13102.2141v2, 2013.

[48] Lemarié-Rieusset P G. Recent developments in the Navier-Stokes problem [M]//Research Notes in Mathematics, Chapman & Hall/CRC, 2002.

Global Existence of Solutions for the Fractional Chemotaxis Model in Critical Besov Spaces

ZHAO Jihong[1] LI Xiurong[2]

[1]School of Mathematics and Information Science, Baoji University of Arts and Sciences, Baoji 721013, Shaanxi, China. E-mail: jihzhao@163.com

[2]College of Science, Northwest A&F University, Yangling 712100, Shaanxi, China. E-mail: cherryxr@126.com

Abstract In this paper, the authors are concerned with the Cauchy problem of the following fractional chemotaxis model:

$$\begin{cases} \partial_t u + (-\Delta)^{\frac{\alpha}{2}} u = \nabla \cdot (u \nabla v), & (x,t) \in \mathbb{R}^n \times (0,\infty), \\ \varepsilon \partial_t v + (-\Delta)^{\frac{\beta}{2}} v = u, & (x,t) \in \mathbb{R}^n \times (0,\infty), \\ u(x,0) = u_0(x), \quad v(x,0) = v_0(x), & x \in \mathbb{R}^n, \end{cases}$$

where $\alpha \in [1,2]$, $\beta \in (0,2]$, $\varepsilon \geqslant 0$. Based on the linear estimates of the fractional dissipative equation in Chemin-Lerner mixed time-space spaces and the Fourier localization argument, they give the following results: (1) In the case of $\varepsilon = 0$, the authors establish the local well-posedness and global well-posedness with small initial data for the subcritical chemotaxis model ($1 < \alpha \leqslant 2$), which improves the regularity and integrability indices of the well-posedness results in [Chen, H., Lv, W. B., and Wu. S. H., Existence for a class of chemotaxis model with fractional diffusion in Besov spaces, *Sci. Sin. Math.*, 2019, 49(12):1–17 (in Chinese)] to more extensive range. Moreover, the authors also establish the global existence of solutions with small initial data for the critical chemotaxis model ($\alpha = 1$); (2) In the case of $\varepsilon > 0$, by using a special iteration argument, the authors establish the global well-posedness of this chemotaxis model with small initial data in Besov spaces for the subcritical case ($\alpha \in (1,2]$) and the critical case ($\alpha = 1$), respectively. Furthermore, by using certain algebraical structure of equations, the authors prove the global existence of solutions without smallness assumption imposed on initial data v_0.

Keywords Fractional chemotaxis model, Global solutions, Besov spaces

2000 MR Subject Classification 30H25, 35A01, 35R11, 92C17

The English translation of this paper will be published in

Chinese Journal of Contemporary Mathematics, Vol. 43 No. 4, 2022

by ALLERTON PRESS, INC., USA