数 学 年 刊 A 辑
2022, 43(4):387–398
DOI: 10.16205/j.cnki.cama.2022.0025

加权全能量最小的圆环形变*

张 琴[1] 冯小高[2]

提要 主要考虑如下加权全能量极值问题:

$$\inf_{h\in\mathfrak{H}(\mathbb{A}_1,\mathbb{A}_2)}\alpha\iint_{\mathbb{A}_1}(|h_N|^2+|h_T|^2)\frac{1}{|h(z)|^2}\mathrm{d}z+\beta\iint_{\mathbb{A}_1}\frac{|h_N|^2+|h_T|^2}{J(z,h)}\frac{1}{|z|^2}\mathrm{d}z,$$

其中 $\mathfrak{H}(\mathbb{A}_1,\mathbb{A}_2)$ 代表从圆环 $\mathbb{A}_1$ 到圆环 $\mathbb{A}_2$ 的所有保向同胚映射的集合. 研究得到唯一的极值映射为径向拉伸映射. 这将 [Iwaniec T, Onninen J. Hyperelastic deformations of smallest total energy [J]. *Arch Rational Mech Anal*, 2009, 194:927–986.] 的结果推广至非欧情形. 同时, 也分别研究了圆环上的加权调和能量的极值问题与加权偏差的极值问题.

关键词 加权全能量, 加权调和能量, 加权偏差, ODE
MR (2000) 主题分类 30C75, 30C62
中图法分类 O174.55
文献标志码 A
文章编号 1000-8314(2022)04-0387-12

§1 引 言

给定两个圆环

$$\mathbb{A}_1=\{z:1\leqslant|z|\leqslant r\},\quad \mathbb{A}_1=\{w:1\leqslant|w|\leqslant R\}.$$

假设 $\mathfrak{H}(\mathbb{A}_1,\mathbb{A}_2)$ 为所有保向同胚 $h:\mathbb{A}_1\to\mathbb{A}_2$ 并保持边界对应, 即满足: 当 $|z|=1$ 时, 有 $|h(z)|=r$; 当 $|z|=r$ 时, 有 $|h(z)|=R$.

Grötzsch 极值问题 [2] 考虑的是在 L^∞ 范数的情形下, 矩形间具有最小偏差函数 $\mathbb{K}(z,h)$ 的映射, 其中

$$\mathbb{K}(z,h)=\begin{cases}\dfrac{2(|h_N|^2+|h_T|^2)}{J(z,h)}, & 若J(z,h)>0,\\[2mm] 1, & 否则.\end{cases}\tag{1.1}$$

2005 年, Astala 等人 [3] 研究了 L^1 范数情形下使得偏差函数 $\mathbb{K}(z,h)$ 最小的映射. 圆环间加权的 L^1 范数情形在文 [4] 中被解决. 对于加权的 L^φ 范数 (φ 是严格凸且递增的), 可以参考文 [5] , 同时文 [6] 将其推广到一般情况. 2009 年, Iwaniec 和 Oninnen[1] 研究了欧氏空间中具有最小全能量的弹性形变. 2017 年, 陈少林和 Kalaj[7] 将文 [1] 的结论推广至 $\mathbb{R}^n$ 中. 随后, 冯小高 [8] 考虑了矩形间的全偏差极值问题. 同年, Kalaj[9] 研究了圆环间映射的全组合能量极值问题. 相似的问题见文 [10–11]. 在本文中, 我们主要研究圆环间加权全能量极值问题, 这将 Iwaniec 和 Oninnen[1] 的结果推广至非欧情形.

本文 2021 年 9 月 7 日收到, 2022 年 9 月 24 日收到修改稿.
[1]西华师范大学数学与信息学院, 四川 南充 637009. E-mail:zhangqin0616@163.com
[2]通信作者. 西华师范大学数学与信息学院, 四川 南充 637009. E-mail: fengxiaogao603@163.com
*本文受到自然科学基金 (No. 11701459) 和西华师范大学科研启动项目 (No. 17E088) 的资助.

对于圆环上的映射, 使用极坐标对其进行讨论是最适合的. 设 $z=te^{\mathrm{i}\theta}$, 则映射 h 的径向导数与切向导数分别为

$$h_N=h_t,\quad h_T=\frac{1}{t}h_\theta. \tag{1.2}$$

h_z 与 $h_{\overline{z}}$ 可以表示为

$$h_z=\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}}{2}(h_N-\mathrm{i}h_T),\quad h_{\overline{z}}=\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}}{2}(h_N+\mathrm{i}h_T). \tag{1.3}$$

经计算可以得到

$$2(|h_z|^2+|h_{\overline{z}}|^2)=|h_N|^2+|h_T|^2. \tag{1.4}$$

进一步可得

$$\mathbb{K}(z,h)=\frac{|h_N|^2+|h_T|^2}{J(z,h)}. \tag{1.5}$$

h 的 Jacobian 行列式为

$$J(z,h)=|h_z|^2-|h_{\overline{z}}|^2=\Im(\overline{h_N}h_T). \tag{1.6}$$

对 $\alpha,\beta>0$, $h\in\mathfrak{H}(\mathbb{A}_1,\mathbb{A}_2)$, 定义加权全能量

$$E[h,h^{-1}]=\alpha\iint_{\mathbb{A}_1}(|h_N|^2+|h_T|^2)\frac{1}{|h(z)|^2}\mathrm{d}z+\beta\iint_{\mathbb{A}_1}\frac{|h_N|^2+|h_T|^2}{J(z,h)}\frac{1}{|z|^2}\mathrm{d}z. \tag{1.7}$$

显然

$$\iint_{\mathbb{A}_1}(|h_N|^2+|h_T|^2)\frac{1}{|h(z)|^2}\mathrm{d}z=\iint_{\mathbb{A}_2}\frac{(|f_N|^2+|f_T|^2)}{J(\omega,f)}\frac{1}{|\omega|^2}\mathrm{d}\omega \tag{1.8}$$

成立, 其中 $f=h^{-1}$.

在本文中, 我们将考查如下极值问题的存在性与唯一性

$$\inf_{h\in\mathfrak{H}(\mathbb{A}_1,\mathbb{A}_2)}\alpha\iint_{\mathbb{A}_1}(|h_N|^2+|h_T|^2)\frac{1}{|h(z)|^2}\mathrm{d}z+\beta\iint_{\mathbb{A}_1}\frac{|h_N|^2+|h_T|^2}{J(z,h)}\frac{1}{|z|^2}\mathrm{d}z. \tag{1.9}$$

借助文 [1, 9] 的方法, 我们得到本文的主要结果.

定理 1.1 对任意的 $h\in\mathfrak{H}(\mathbb{A}_1,\mathbb{A}_2)$, 加权全能量 $E[h,h^{-1}]$ 的最小值在径向拉伸映射

$$h_*(te^{\mathrm{i}\theta})=t^{\frac{\log R}{\log r}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} \tag{1.10}$$

处取得, 在相差一个旋转的情况下极值映射唯一.

下面以介绍本文的结构结束本节. 在第二节, 我们考虑加权调和能量. 在第三节, 我们研究加权的偏差函数. 在最后一节, 证明本文的主要结果定理 1.1.

§2 加权调和能量

在本节中, 我们将讨论加权调和能量的极值问题, 即

$$\inf_{h\in\mathfrak{H}(\mathbb{A}_1,\mathbb{A}_2)}\varepsilon[h]=\inf_{h\in\mathfrak{H}(\mathbb{A}_1,\mathbb{A}_2)}\iint_{\mathbb{A}_1}(|h_N|^2+|h_T|^2)\frac{1}{|h(z)|^2}\mathrm{d}z. \tag{2.1}$$

§2.1 径向拉伸映射的加权能量

设 $h(z)=H(t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$, $z=t\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$, 其中 $H(t)$ 是正的实函数. 则可以得到

$$\varepsilon[h]=2\pi\int_1^r\Big[\Big(\frac{\dot H(t)}{H(t)}\Big)^2t+\frac{1}{t}\Big]\mathrm{d}t=2\pi\int_1^r\Lambda(t,H,\dot H)\mathrm{d}t. \tag{2.2}$$

那么

$$\frac{\partial\Lambda}{\partial H}=-\frac{2\dot H^2(t)t}{H^3(t)},\quad \frac{\partial\Lambda}{\partial\dot H}=\frac{2\dot H(t)t}{H^2(t)}$$

且

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big(\frac{\partial\Lambda}{\partial\dot H}\Big)=\frac{2\ddot H(t)H(t)t+2\dot H(t)H(t)-4\dot H^2(t)t}{H^3(t)}.$$

从而 Euler-Lagrange 方程

$$\frac{\partial\Lambda}{\partial H}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big(\frac{\partial\Lambda}{\partial\dot H}\Big) \tag{2.3}$$

可化简为

$$t\Big(\frac{\dot H(t)}{H(t)}\Big)'+\frac{\dot H(t)}{H(t)}=0. \tag{2.4}$$

方程 (2.4) 的通解为 $H(t)=C_1t^{C_2}$, 进而由 $H(1)=1$ 与 $H(r)=R$, 得

$$H(t)=t^{\frac{\log R}{\log r}}. \tag{2.5}$$

因此

$$h(t\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})=t^{\frac{\log R}{\log r}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}. \tag{2.6}$$

§2.2 加权调和能量的极值映射

在本小节中, 我们将证明 (2.6) 式为加权调和能量的极值映射, 即有如下定理成立.

定理 2.1 对任意的 $h\in\mathfrak{H}(\mathbb{A}_1,\mathbb{A}_2)$, 加权调和能量

$$\iint_{\mathbb{A}_1}(|h_N|^2+|h_T|^2)\frac{1}{|h(z)|^2}\mathrm{d}z$$

的最小值在径向拉伸映射 $h_*(t\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})=t^{\frac{\log R}{\log r}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ 处取得. 即

$$\iint_{\mathbb{A}_1}(|h_N|^2+|h_T|^2)\frac{1}{|h(z)|^2}\mathrm{d}z\geqslant\iint_{\mathbb{A}_1}(|h_{*N}|^2+|h_{*T}|^2)\frac{1}{|h_*(z)|^2}\mathrm{d}z. \tag{2.7}$$

在相差一个旋转的情况下最小值映射唯一.

证　令 $1\geqslant p\geqslant0$, $1\geqslant q\geqslant0$, 则得到如下不等式:

$$\frac{|h_N|^2+|h_T|^2}{|h(z)|^2}\geqslant\frac{(1-p^2)|h_N|^2+(1-q^2)|h_T|^2+2pq|h_N||h_T|}{|h(z)|^2}, \tag{2.8}$$

等号成立当且仅当

$$p|h_N|=q|h_T|.$$

我们考虑以下两种情形.

情形一 $\log r \leqslant \log R$. 取 $q=1$, 则 (2.8) 化简为

$$\frac{|h_N|^2+|h_T|^2}{|h(z)|^2} \geqslant \frac{(1-p^2)|h_N|^2+2p|h_N||h_T|}{|h(z)|^2}, \tag{2.9}$$

等号成立当且仅当

$$p|h_N|=|h_T|. \tag{2.10}$$

进一步, 由

$$J(z,h)=\Im(\overline{h_N}h_T) \leqslant |h_N||h_T|, \qquad |h|_N \leqslant |h_N|$$

与 (2.9), 得到

$$\frac{|h_N|^2+|h_T|^2}{|h(z)|^2} \geqslant \frac{(1-p^2)|h|_N^2+2pJ(z,h)}{|h(z)|^2}. \tag{2.11}$$

令 $p=\frac{\log r}{\log R}$, 对上述不等式两边同时在圆环 $\mathbb{A}_1$ 上积分, 得

$$\iint_{\mathbb{A}_1} \frac{|h_N|^2+|h_T|^2}{|h(z)|^2}\mathrm{d}z \geqslant \Big(1-\frac{\log^2 r}{\log^2 R}\Big)\iint_{\mathbb{A}_1}\frac{|h|_N^2}{|h(z)|^2}\mathrm{d}z+2\frac{\log r}{\log R}\iint_{\mathbb{A}_1}\frac{J(z,h)}{|h(z)|^2}\mathrm{d}z. \tag{2.12}$$

根据 Hölder 不等式, 可得

$$\Big(\iint_{\mathbb{A}_1}\frac{|h|_N}{|z||h|}\mathrm{d}z\Big)^2 \leqslant \iint_{\mathbb{A}_1}\frac{|h|_N^2}{|h(z)|^2}\mathrm{d}z\iint_{\mathbb{A}_1}\frac{1}{|z|^2}\mathrm{d}z=2\pi\log r\iint_{\mathbb{A}_1}\frac{|h|_N^2}{|h(z)|^2}\mathrm{d}z. \tag{2.13}$$

因为

$$\iint_{\mathbb{A}_1}\frac{|h|_N}{|z||h|}\mathrm{d}z=2\pi\int_1^r\frac{1}{|h|}\frac{\partial|h|}{\partial t}\mathrm{d}t=2\pi\int_1^R\frac{\mathrm{d}\rho}{\rho}=2\pi\log R, \tag{2.14}$$

利用 (2.13)–(2.14), 可得

$$\iint_{\mathbb{A}_1}\frac{|h|_N^2}{|h(z)|^2}\mathrm{d}z \geqslant 2\pi\frac{\log^2 R}{\log r}. \tag{2.15}$$

又因为

$$\iint_{\mathbb{A}_1}\frac{J(z,h)}{|h(z)|^2}\mathrm{d}z=\iint_{\mathbb{A}_2}\frac{1}{|w|^2}\mathrm{d}w=2\pi\log R, \tag{2.16}$$

结合 (2.12), (2.15)–(2.16), 得到

$$\iint_{\mathbb{A}_1}\frac{|h_N|^2+|h_T|^2}{|h(z)|^2}\mathrm{d}z \geqslant 2\pi\log R\Big(\frac{\log r}{\log R}+\frac{\log R}{\log r}\Big). \tag{2.17}$$

经过验证可知, 当

$$h(t\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})=t^{\frac{\log R}{\log r}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta},$$

以上不等式等号都成立.

情形二 $\log r \geqslant \log R$. 取 $p=1$, 则 (2.8) 化简为

$$\frac{|h_N|^2+|h_T|^2}{|h(z)|^2} \geqslant \frac{(1-q^2)|h_T|^2+2q|h_N||h_T|}{|h(z)|^2} \geqslant \frac{(1-q^2)|h_T|^2+2qJ(z,h)}{|h(z)|^2}. \tag{2.18}$$

取 $q=\frac{\log R}{\log r}$, 对上述不等式在圆环 $\mathbb{A}_1$ 上积分, 得

$$\iint_{\mathbb{A}_1}\frac{|h_N|^2+|h_T|^2}{|h(z)|^2}\mathrm{d}z \geqslant \Big(1-\frac{\log^2 R}{\log^2 r}\Big)\iint_{\mathbb{A}_1}\frac{|h_\theta|^2}{|z|^2|h(z)|^2}\mathrm{d}z + 2\frac{\log R}{\log r}\iint_{\mathbb{A}_1}\frac{J(z,h)}{|h(z)|^2}\mathrm{d}z. \tag{2.19}$$

由 Hölder 不等式得

$$\Big(\iint_{\mathbb{A}_1}\frac{|h_\theta|}{|z|^2|h(z)|}\mathrm{d}z\Big)^2 \leqslant \iint_{\mathbb{A}_1}\frac{|h_\theta|^2}{|z|^2|h(z)|^2}\mathrm{d}z\iint_{\mathbb{A}_1}\frac{1}{|z|^2}\mathrm{d}z = 2\pi\log r\iint_{\mathbb{A}_1}\frac{|h_\theta|^2}{|z|^2|h(z)|^2}\mathrm{d}z. \tag{2.20}$$

因为

$$2\pi\log r = 2\pi\int_1^r\frac{\mathrm{d}t}{t} = \iint_{\mathbb{A}_1}\frac{1}{|z|}\Im\frac{h_T}{h} \leqslant \iint_{\mathbb{A}_1}\frac{|h_\theta|}{|z|^2|h(z)|}\mathrm{d}z, \tag{2.21}$$

结合 (2.20)–(2.21), 可知

$$\iint_{\mathbb{A}_1}\frac{|h_T|^2}{|h(z)|^2}\mathrm{d}z = \iint_{\mathbb{A}_1}\frac{|h_\theta|^2}{|z|^2|h(z)|^2}\mathrm{d}z \geqslant 2\pi\log r. \tag{2.22}$$

因此, 不等式 (2.19) 可化简为

$$\begin{aligned}\iint_{\mathbb{A}_1}\frac{|h_N|^2+|h_T|^2}{|h(z)|^2}\mathrm{d}z &\geqslant \Big(1-\frac{\log^2 R}{\log^2 r}\Big)2\pi\log r + 2\frac{\log R}{\log r}2\pi\log R\\ &= 2\pi\log R\Big(\frac{\log r}{\log R}+\frac{\log R}{\log r}\Big)\\ &= \iint_{\mathbb{A}_1}\frac{|h_{*N}|^2+|h_{*T}|^2}{|h_*(z)|^2}\mathrm{d}z.\end{aligned}$$

定理 2.1 证明完毕.

§3　加权偏差函数的 L^1-理论

考虑加权偏差函数

$$\mathcal{K}[f] = \iint_{\mathbb{A}_2}\frac{|f_N|^2+|f_T|^2}{J(w,f)}\frac{1}{|w|^2}\mathrm{d}w. \tag{3.1}$$

上式的极值问题已经在文 [4, 定理 1] 中被解决, 但在本节中我们将基于文 [9] 的方法给出此极值问题一个新的证明.

§3.1　径向拉伸映射的加权偏差

假设 $f(\rho\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}) = F(\rho)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$, 其中 $F(\rho)$ 为正的实函数并满足 $F(1)=1$, $F(R)=r$. 则

$$\mathcal{K}[f] = 2\pi\int_1^R\frac{\dot F^2(\rho)+F^2(\rho)/\rho^2}{F(\rho)\dot F(\rho)}\mathrm{d}\rho = 2\pi\int_1^{\mathrm{R}}\Upsilon(\rho,\mathrm{F},\dot{\mathrm{F}})\mathrm{d}\rho. \tag{3.2}$$

那么 Euler-Lagrange 方程

$$\frac{\partial\Upsilon}{\partial F} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\rho}\Big(\frac{\partial\Upsilon}{\partial\dot F}\Big) \tag{3.3}$$

可化简为

$$\rho\dot{F}^2(\rho)=F(\rho)\dot{F}(\rho)+\rho F(\rho)\ddot{F}(\rho). \tag{3.4}$$

此方程的通解为 $F(\rho)=C_3\rho^{C_4}$. 由 $F(1)=1$ 与 $F(R)=r$, 那么

$$F(\rho)=\rho^{\frac{\log r}{\log R}}. \tag{3.5}$$

因此

$$f(\rho e^{i\varphi})=\rho^{\frac{\log r}{\log R}}e^{i\varphi}. \tag{3.6}$$

注 3.1 $F(\rho)$ (见 (3.5)) 是 $H(t)$ (见 (2.5)) 的逆映射.

§3.2 加权偏差极值问题

以下关于加权偏差极值问题的定理已经在文 [4] 中证明. 在本小节中, 借助文 [1] 的证明方法, 将给出此定理一个新的证明.

定理 3.1 (见 [4, 定理 1]) 对任意的 $f\in\mathfrak{H}(\mathbb{A}_1,\mathbb{A}_2)$, (3.1) 式的最小值在径向映射

$$f_*(\rho e^{i\varphi})=\rho^{\frac{\log r}{\log R}}e^{i\varphi}$$

处取得. 极值映射在相差一个旋转的情况下是唯一的.

证 令 $1\geqslant a\geqslant 0$, $1\geqslant b\geqslant 0$, 则成立如下不等式,

$$\frac{|f_N|^2+|f_T|^2}{J(w,f)}\frac{1}{|w|^2}\geqslant\frac{(1-a^2)|f_N|^2+(1-b^2)|f_T|^2+2ab|f_N||f_T|}{J(w,f)}\frac{1}{|w|^2}. \tag{3.7}$$

我们分成以下两种情形讨论.

情形一 $\log r\geqslant\log R$. 取 $b=1$, 则 (3.7) 化简为

$$\begin{aligned}\frac{|f_N|^2+|f_T|^2}{J(w,f)}\frac{1}{|w|^2}&\geqslant\frac{(1-a^2)|f_N|^2+2a|f_N||f_T|}{J(w,f)}\frac{1}{|w|^2}\\&\geqslant\frac{(1-a^2)|f_N|^2+2aJ(w,f)}{J(w,f)}\frac{1}{|w|^2}.\end{aligned} \tag{3.8}$$

令 $a=\frac{\log R}{\log r}$, 则有

$$\iint_{\mathbb{A}_2}\frac{|f_N|^2+|f_T|^2}{J(w,f)}\frac{dw}{|w|^2}\geqslant\Big(1-\frac{\log^2 R}{\log^2 r}\Big)\iint_{\mathbb{A}_2}\frac{|f_N|^2}{J(w,f)}\frac{dw}{|w|^2}+2\frac{\log R}{\log r}\iint_{\mathbb{A}_2}\frac{dw}{|w|^2}. \tag{3.9}$$

因为

$$2\pi\log r=2\pi\int_1^r\frac{dt}{t}=2\pi\int_1^R\frac{1}{|f|}\frac{\partial|f|}{\partial\rho}d\rho \tag{3.10}$$

且有

$$\frac{\partial|f|}{\partial\rho}\leqslant\Big|\frac{\partial f}{\partial\rho}\Big|, \tag{3.11}$$

那么

$$2\pi\log r\leqslant 2\pi\int_1^R\frac{1}{|f|}\Big|\frac{\partial f}{\partial\rho}\Big|d\rho=2\pi\int_1^R\frac{|f_N|}{|f|}d\rho=\iint_{\mathbb{A}_2}\frac{|f_N|}{|f|}\frac{dw}{|w|}. \tag{3.12}$$

由 Hölder 不等式, 可得

$$\begin{aligned}\Big(\iint_{\mathbb{A}_2}\frac{|f_N|}{|f|}\frac{\mathrm{d}w}{|w|}\Big)^2&=\Big(\iint_{\mathbb{A}_2}\frac{|f_N|}{\sqrt{J(w,f)}}\frac{1}{|w|}\frac{\sqrt{J(w,f)}}{|f|}\mathrm{d}w\Big)^2\\&\leqslant\iint_{\mathbb{A}_2}\frac{|f_N|^2}{J(w,f)}\frac{1}{|w|^2}\mathrm{d}w\iint_{\mathbb{A}_2}\frac{J(w,f)}{|f|^2}\mathrm{d}w\\&=\iint_{\mathbb{A}_2}\frac{|f_N|^2}{J(w,f)}\frac{1}{|w|^2}\mathrm{d}w\iint_{\mathbb{A}_1}\frac{\mathrm{d}z}{|z|^2}\\&=2\pi\log r\iint_{\mathbb{A}_2}\frac{|f_N|^2}{J(w,f)}\frac{1}{|w|^2}\mathrm{d}w.\end{aligned}\tag{3.13}$$

结合 (3.12) 和 (3.13), 可知

$$2\pi\log r\leqslant\iint_{\mathbb{A}_2}\frac{|f_N|^2}{J(w,f)}\frac{\mathrm{d}w}{|w|^2}.\tag{3.14}$$

根据 (3.14) 与

$$\iint_{\mathbb{A}_2}\frac{1}{|w|^2}\mathrm{d}w=2\pi\log R,\tag{3.15}$$

那么, (3.9) 可化简为

$$\iint_{\mathbb{A}_2}\frac{|f_N|^2+|f_T|^2}{J(w,f)}\frac{1}{|w|^2}\mathrm{d}w\geqslant 2\pi\log R\Big(\frac{\log r}{\log R}+\frac{\log R}{\log r}\Big).\tag{3.16}$$

另一方面, 当 $f_*(\rho e^{i\varphi})=\rho^{\frac{\log r}{\log R}}e^{i\varphi}$ 时, 上述不等式的等号都成立. 即

$$\iint_{\mathbb{A}_2}\frac{|f_N|^2+|f_T|^2}{J(w,f)}\frac{1}{|w|^2}\mathrm{d}w\geqslant\iint_{\mathbb{A}_2}\frac{|f_{*N}|^2+|f_{*T}|^2}{J(w,f_*)}\frac{1}{|w|^2}\mathrm{d}w.\tag{3.17}$$

情形二 $\log r\leqslant\log R$. 取 $a=1$, 则 (3.7) 化简为

$$\frac{|f_N|^2+|f_T|^2}{J(w,f)}\frac{1}{|w|^2}\geqslant\frac{(1-b^2)|f_T|^2+2bJ(w,f)}{J(w,f)}\frac{1}{|w|^2}.\tag{3.18}$$

取 $b=\frac{\log r}{\log R}$, 则 (3.18) 在圆环 $\mathbb{A}_2$ 上积分, 可得

$$\iint_{\mathbb{A}_2}\frac{|f_N|^2+|f_T|^2}{J(w,f)}\frac{\mathrm{d}w}{|w|^2}\geqslant\Big(1-\frac{\log^2 r}{\log^2 R}\Big)\iint_{\mathbb{A}_2}\frac{|f_T|^2}{J(w,f)}\frac{\mathrm{d}w}{|w|^2}+2\frac{\log r}{\log R}\iint_{\mathbb{A}_2}\frac{\mathrm{d}w}{|w|^2}.\tag{3.19}$$

显然

$$2\pi\log R=2\pi\int_1^R\frac{\mathrm{d}\rho}{\rho}=\iint_{\mathbb{A}_2}\frac{1}{|w|}\Im\frac{f_T}{f}\mathrm{d}w\leqslant\iint_{\mathbb{A}_2}\frac{|f_T|}{|f|}\frac{\mathrm{d}w}{|w|}.\tag{3.20}$$

由 Hölder 不等式得

$$\begin{aligned}\Big(\iint_{\mathbb{A}_2}\frac{|f_T|}{|f|}\frac{\mathrm{d}w}{|w|}\Big)^2&\leqslant\iint_{\mathbb{A}_2}\frac{|f_T|^2}{J(w,f)}\frac{1}{|w|^2}\mathrm{d}w\iint_{\mathbb{A}_2}\frac{J(w,f)}{|f|^2}\mathrm{d}w\\&=2\pi\log r\iint_{\mathbb{A}_2}\frac{|f_T|^2}{J(w,f)}\frac{1}{|w|^2}\mathrm{d}w.\end{aligned}\tag{3.21}$$

由 (3.20)–(3.21), 可得

$$2\pi\frac{\log^2 R}{\log r}\leqslant\iint_{\mathbb{A}_2}\frac{|f_T|^2}{J(w,f)}\frac{1}{|w|^2}\mathrm{d}w.\tag{3.22}$$

再由 (3.15) 与 (3.22), 得到

$$\iint_{\mathbb{A}_2} \frac{|f_N|^2+|f_T|^2}{J(w,f)}\frac{1}{|w|^2}\mathrm{d}w \geqslant 2\pi\log R\Big(\frac{\log r}{\log R}+\frac{\log R}{\log r}\Big).$$

因此

$$\iint_{\mathbb{A}_2} \frac{|f_N|^2+|f_T|^2}{J(w,f)}\frac{1}{|w|^2}\mathrm{d}w \geqslant \iint_{\mathbb{A}_2} \frac{|f_{*N}|^2+|f_{*T}|^2}{J(w,f_*)}\frac{1}{|w|^2}\mathrm{d}w.$$

定理 3.1 证明完毕.

§4 加权全能量

在本节中我们将讨论加权全能量 (1.7) 并证明定理 1.1.

§4.1 径向拉伸映射的加权全能量最小值

假设 $h(t\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})=H(t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$, $z=t\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$, 则

$$E[h,h^{-1}]=\alpha\iint_{\mathbb{A}_1}(|h_N|^2+|h_T|^2)\frac{1}{|h(z)|^2}\mathrm{d}z+\beta\iint_{\mathbb{A}_1}\frac{|h_N|^2+|h_T|^2}{J(z,h)}\frac{1}{|z|^2}\mathrm{d}z.$$

化简为

$$E[h,h^{-1}]=2\pi\int_1^r \alpha\Big[\Big(\frac{\dot H(t)}{H(t)}\Big)^2 t+\frac{1}{t}\Big]+\beta\Big[\frac{\dot H(t)}{H(t)}+\frac{H(t)}{\dot H(t)t^2}\Big]\mathrm{d}t. \tag{4.1}$$

(4.1) 的 Euler-Lagrange 方程为

$$\beta\frac{H^2(t)}{t^3\dot H^3(t)}\Big[\frac{\dot H(t)}{H(t)}+t\Big(\frac{\dot H(t)}{H(t)}\Big)'\Big]=-\alpha\frac{1}{H(t)}\Big[\frac{\dot H(t)}{H(t)}+t\Big(\frac{\dot H(t)}{H(t)}\Big)'\Big]. \tag{4.2}$$

当

$$\frac{\dot H(t)}{H(t)}+t\Big(\frac{\dot H(t)}{H(t)}\Big)'=0 \tag{4.3}$$

时, 解得 $H(t)=t^{\frac{\log R}{\log r}}$. 当

$$\frac{\dot H(t)}{H(t)}+t\Big(\frac{\dot H(t)}{H(t)}\Big)'\neq 0 \tag{4.4}$$

时, 则 (4.2) 化简为

$$-\frac{1}{t^3}=\frac{\alpha}{\beta}\Big(\frac{\dot H(t)}{H(t)}\Big)^3, \tag{4.5}$$

也解得 $H(t)=t^{\frac{\log R}{\log r}}$. 因此

$$h(t\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})=t^{\frac{\log R}{\log r}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}. \tag{4.6}$$

§4.2 证明定理 1.1

证 令 $1\geqslant p\geqslant 0$, $1\geqslant q\geqslant 0$, $1\geqslant a\geqslant 0$, $1\geqslant b\geqslant 0$, 因为

$$J(z,h)=\Im(\overline{h_N}h_T)\leqslant |h_N||h_T|. \tag{4.7}$$

则

$$\begin{aligned}
&\alpha\frac{|h_N|^2+|h_T|^2}{|h|^2}+\beta\frac{|h_N|^2+|h_T|^2}{J(z,h)}\frac{1}{|z|^2}\\
\geqslant\ &\alpha\frac{(1-p^2)|h_N|^2+(1-q^2)|h_T|^2+2pq|h_N||h_T|}{|h|^2}\\
&+\beta\frac{(1-a^2)|h_N|^2+(1-b^2)|h_T|^2+2ab|h_N||h_T|}{J(z,h)}\frac{1}{|z|^2}\\
\geqslant\ &\alpha\frac{(1-p^2)|h_N|^2+(1-q^2)|h_T|^2+2pqJ(z,h)}{|h|^2}\\
&+\beta\frac{(1-a^2)|h_N|^2+(1-b^2)|h_T|^2+2abJ(z,h)}{J(z,h)}\frac{1}{|z|^2}.
\end{aligned}\tag{4.8}$$

我们分成两种情况证明.

情形一 $\log R\geqslant\log r$. 取 $q=1$, $b=1$, 由 (4.8) 知

$$\begin{aligned}
&E[h,h^{-1}]\\
=\ &\alpha\iint_{\mathbb{A}_1}\frac{|h_N|^2+|h_T|^2}{|h(z)|^2}\mathrm{d}z+\beta\iint_{\mathbb{A}_1}\frac{|h_N|^2+|h_T|^2}{J(z,h)}\frac{1}{|z|^2}\mathrm{d}z\\
\geqslant\ &\alpha(1-p^2)\iint_{\mathbb{A}_1}\frac{|h_N|^2}{|h|^2}\mathrm{d}z+2p\alpha\iint_{\mathbb{A}_1}\frac{J(z,h)}{|h|^2}\mathrm{d}z\\
&+\beta(1-a^2)\iint_{\mathbb{A}_1}\frac{|h_N|^2}{J(z,h)}\frac{1}{|z|^2}\mathrm{d}z+2\alpha\beta\iint_{\mathbb{A}_1}\frac{1}{|z|^2}\mathrm{d}z,
\end{aligned}\tag{4.9}$$

根据 (2.15) 与 (2.16) 可知

$$\iint_{\mathbb{A}_1}\frac{|h|_N^2}{|h(z)|^2}\mathrm{d}z\geqslant 2\pi\frac{\log^2R}{\log r}\tag{4.10}$$

且

$$\iint_{\mathbb{A}_1}\frac{J(z,h)}{|h(z)|^2}\mathrm{d}z=\iint_{\mathbb{A}_2}\frac{1}{|w|^2}\mathrm{d}w=2\pi\log R.\tag{4.11}$$

因为

$$2\pi\log R=2\pi\int_1^R\frac{\mathrm{d}\rho}{\rho}=2\pi\int_1^r\frac{1}{|h|}\frac{\partial|h|}{\partial t}\mathrm{d}t\tag{4.12}$$

与

$$\frac{\partial|h|}{\partial t}\leqslant\Big|\frac{\partial h}{\partial t}\Big|,\tag{4.13}$$

所以

$$2\pi\log R\leqslant 2\pi\int_1^r\frac{1}{|h|}\Big|\frac{\partial h}{\partial t}\Big|\mathrm{d}t=2\pi\int_1^r\frac{|h_N|}{|h|}\mathrm{d}t=\iint_{\mathbb{A}_1}\frac{|h_N|}{|h|}\frac{\mathrm{d}z}{|z|}.\tag{4.14}$$

由 Hölder 不等式, 可知

$$\begin{aligned}\Big(\iint_{\mathbb{A}_1}\frac{|h_N|}{|h|}\frac{\mathrm{d}z}{|z|}\Big)^2&=\Big(\iint_{\mathbb{A}_1}\frac{|h_N|}{\sqrt{J(z,h)}}\frac{1}{|z|}\frac{\sqrt{J(z,h)}}{|h|}\mathrm{d}z\Big)^2\\&\leqslant\iint_{\mathbb{A}_1}\frac{|h_N|^2}{J(z,h)}\frac{1}{|z|^2}\mathrm{d}z\iint_{\mathbb{A}_1}\frac{J(z,h)}{|h|^2}\mathrm{d}z\\&=\iint_{\mathbb{A}_1}\frac{|h_N|^2}{J(z,h)}\frac{1}{|z|^2}\mathrm{d}z\iint_{\mathbb{A}_2}\frac{\mathrm{d}w}{|w|^2}\\&=2\pi\log R\iint_{\mathbb{A}_1}\frac{|h_N|^2}{J(z,h)}\frac{1}{|z|^2}\mathrm{d}z.\end{aligned}\tag{4.15}$$

根据 (4.14)–(4.15), 可得

$$2\pi\log R\leqslant\iint_{\mathbb{A}_1}\frac{|h_N|^2}{J(z,h)}\frac{1}{|z|^2}\mathrm{d}z.\tag{4.16}$$

由 (4.10)–(4.11) 与 (4.16) 知, 不等式 (4.9) 可化为

$$E[h,h^{-1}]\geqslant 2\pi\alpha(1-p^2)\frac{\log^2 R}{\log r}+4\pi\alpha p\log R+2\pi\beta(1-a^2)\log R+4\pi\beta a\log r.\tag{4.17}$$

取

$$p=a=\frac{\log r}{\log R},\tag{4.18}$$

那么 (4.17) 变为

$$\begin{aligned}E[h,h^{-1}]&\geqslant 2\pi\alpha\log R\Big(\frac{\log r}{\log R}+\frac{\log R}{\log r}\Big)+2\pi\alpha\log r\Big(\frac{\log r}{\log R}+\frac{\log R}{\log r}\Big)\\&=E[h_*,h_*^{-1}].\end{aligned}\tag{4.19}$$

情形二 $\log R\leqslant\log r$. 在 (4.8) 中取 $p=1$, $a=1$, 则

$$\begin{aligned}E[h,h^{-1}]&=\alpha\iint_{\mathbb{A}_1}\frac{|h_N|^2+|h_T|^2}{|h(z)|^2}\mathrm{d}z+\beta\iint_{\mathbb{A}_1}\frac{|h_N|^2+|h_T|^2}{J(z,h)}\frac{1}{|z|^2}\mathrm{d}z\\&\geqslant\alpha(1-q^2)\iint_{\mathbb{A}_1}\frac{|h_T|^2}{|h|^2}\mathrm{d}z+2q\alpha\iint_{\mathbb{A}_1}\frac{J(z,h)}{|h|^2}\mathrm{d}z\\&\quad+\beta(1-b^2)\iint_{\mathbb{A}_1}\frac{|h_T|^2}{J(z,h)}\frac{1}{|z|^2}\mathrm{d}z+2b\beta\iint_{\mathbb{A}_1}\frac{1}{|z|^2}\mathrm{d}z.\end{aligned}\tag{4.20}$$

由 (2.16) 与 (2.22), 知

$$\iint_{\mathbb{A}_1}\frac{J(z,h)}{|h(z)|^2}\mathrm{d}z=\iint_{\mathbb{A}_2}\frac{1}{|w|^2}\mathrm{d}w=2\pi\log R\tag{4.21}$$

和

$$\iint_{\mathbb{A}_1}\frac{|h_T|^2}{|h(z)|^2}\mathrm{d}z=\iint_{\mathbb{A}_1}\frac{|h_\theta|^2}{|z|^2|h(z)|^2}\mathrm{d}z\geqslant 2\pi\log r.\tag{4.22}$$

因为

$$2\pi\log r=2\pi\int_1^r\frac{\mathrm{d}t}{t}=\iint_{\mathbb{A}_1}\frac{1}{|z|}\Im\frac{h_T}{h}\mathrm{d}z\leqslant\iint_{\mathbb{A}_1}\frac{|h_T|}{|h|}\frac{\mathrm{d}z}{|z|},\tag{4.23}$$

由 Hölder 不等式, 得

$$\Big(\iint_{\mathbb{A}_1}\frac{|h_T|}{|h|}\frac{\mathrm{d}z}{|z|}\Big)^2\leqslant\iint_{\mathbb{A}_1}\frac{|h_T|^2}{J(z,h)}\frac{1}{|z|^2}\mathrm{d}z\iint_{\mathbb{A}_1}\frac{J(z,h)}{|h|^2}\mathrm{d}z$$
$$=2\pi\log R\iint_{\mathbb{A}_1}\frac{|h_T|^2}{J(z,h)}\frac{1}{|z|^2}\mathrm{d}z. \tag{4.24}$$

由 (4.23)–(4.24), 可得

$$2\pi\frac{\log^2 r}{\log R}\leqslant\iint_{\mathbb{A}_1}\frac{|h_T|^2}{J(z,h)}\frac{1}{|z|^2}\mathrm{d}z. \tag{4.25}$$

结合 (4.21)–(4.22) 与 (4.25), 不等式 (4.20) 可化简为

$$E[h,h^{-1}]\geqslant 2\pi\alpha(1-q^2)\log r+4\pi\alpha q\log R+2\pi\beta(1-b^2)\log r+4\pi\beta b\log r. \tag{4.26}$$

取

$$q=b=\frac{\log R}{\log r}, \tag{4.27}$$

那么 (4.26) 变为

$$E[h,h^{-1}]\geqslant 2\pi\alpha\log R\Big(\frac{\log r}{\log R}+\frac{\log R}{\log r}\Big)+2\pi\beta\log r\Big(\frac{\log r}{\log R}+\frac{\log R}{\log r}\Big)$$
$$=E[h_*,h_*^{-1}]. \tag{4.28}$$

唯一性的证明与定理 2.1 或文 [4] 中定理 1 的证明相同. 定理 1.1 证明完毕.

致谢 衷心感谢审稿专家对本稿件的仔细审阅.

参 考 文 献

[1] Iwaniec T, Onninen J. Hyperelastic deformations of smallest total energy [J]. *Arch Rational Mech Anal*, 2009, 194:927–986.

[2] Grötzsch H. Über die Verzerrung bei schichten nichtkonformen abbidungen und über eine damit zusammenhängende erweiterung des picardschen states [J]. *Ber Ver Sächs Akad Wiss Leipzig*, 1928, 80:503–507.

[3] Astala K, Iwaniec T, Martin G, et al. Extremal mappings of finite distortion [J]. *Proc London Math Soc*, 2005, 95:655–702.

[4] Astala K, Iwaniec T, Martin G. Deformations of annuli with smallest mean distortion [J]. *Arch Rational Mech Anal*, 2010, 195:899–921.

[5] Martin G, McKubre-Jordens M. Deformation with smallest weighted L^p average distortion and Nitsche-type phenomena [J]. *J London Math Soc*, 2012, 85:282–300.

[6] Feng X G, Tang S A, Wu C, et al. A unified approach to the weighted Grötzsch and Nitsche problems for mappings of finite distortion [J]. *Sci China Math*, 2016, 59:673–686.

[7] Chen S L, Kalaj D. Total energy of radial mappings [J]. *Nonlinear Analysis*, 2017, 167:21–28.

[8] 冯小高. 两矩形上的全偏差 [J]. 数学年刊 A 辑, 2020, 41(2):163–174.

[9] Kalaj D. Hyperelastic deformations and total combined energy of mappings between annuli [J]. *J Differential Equations*, 2020, 268:6103–6136.

[10] Iwaniec T, Koh N-T, Kavalev L V, et al. Existence of energy-minimal diffeomorphisms beween doubly connected domains [J]. *Invent Math*, 2011, 186:667–707.

[11] Iwaniec T, Onninen J. Mapping of least Dirichlet energy and their Hopf differentials [J]. *Arch Rational Mech Anal*, 2013, 209:401–453.

Deformation of Annuli with Smallest Total Weighted Energy

ZHANG Qin[1] FENG Xiaogao[2]

[1]College of Mathematics and Information, China West Normal University, Nanchong 637009, Sichuan, China. E-mail: zhangqin0616@163.com

[2]Corresponding author. College of Mathematics and Information, China West Normal University, Nanchong 637009, Sichuan, China.
E-mail: fengxiaogao603@163.com

Abstract In this paper, the authors mainly study the following extremal problem for total weighted energy

$$\inf_{h\in\mathfrak{H}(\mathbb{A}_1,\mathbb{A}_2)}\alpha\iint_{\mathbb{A}_1}(|h_N|^2+|h_T|^2)\frac{1}{|h(z)|^2}\mathrm{d}z+\beta\iint_{\mathbb{A}_1}\frac{|h_N|^2+|h_T|^2}{J(z,h)}\frac{1}{|z|^2}\mathrm{d}z,$$

where the class $\mathfrak{H}(\mathbb{A}_1,\mathbb{A}_2)$ consists of orientation preserving homeomorphisms between annuli $\mathbb{A}_1$ and $\mathbb{A}_2$. They get that the unique extremal mapping is a certain radial mapping. This extends the result of [Iwaniec, T. and Onninen, J., Hyperelastic deformations of smallest total energy, *Arch. Rational Mech. Anal.*, 2009, vol. 194, pp. 927–986] to non-Euclidean version. Meanwhile, they also consider the extremal problems for weighted harmonic energy and weighted distortion on annuli, respectively.

Keywords Total weighted energy, Weighted harmonic energy, Weighted distortion, ODE

2000 MR Subject Classification 30C75, 30C62

The English translation of this paper will be published in
Chinese Journal of Contemporary Mathematics, Vol. 43 No. 4, 2022
by ALLERTON PRESS, INC., USA