数 学 年 刊 A 辑
2022, 43(4):399–414
DOI: 10.16205/j.cnki.cama.2022.0026

模糊度量空间的强嵌入*

李国强[1] 余淑辉[2]

提要 本文定义了 George 和 Veeramani 意义下的模糊度量空间的强嵌入，证明了可强嵌入的模糊度量空间能够粗嵌入到 Hilbert 空间．另外还证明了强嵌入在模糊度量空间的粗范畴下是不变的，并给出了模糊度量空间强嵌入的一些等价刻画．

关键词 粗几何，模糊度量空间，强嵌入，粗拓扑
MR (2000) 主题分类 03E72, 54F45, 54A40, 51F30
中图法分类 O177.99
文献标志码 A
文章编号 1000-8314(2022)04-0399-16

§1 引 言

在文 [1] 中， Kramosil 和 Michálek 介绍了模糊度量空间，它实际上是一个变形的 Menger 概率度量空间．随后，George 和 Veeramani 在文 [2] 中修正了 Kramosil 和 Michálek 对模糊度量空间的定义，修正后的模糊度量空间诱导的拓扑是 Hausdorff 的．修正版本的模糊度量空间引起了大量学者的关注，并出现了许多关于模糊度量空间的重要结论．除了在本文中的理论价值外，模糊度量在彩色图像滤波等方面也有非常重要的应用 [3–4]．

大尺度几何，又称粗几何，可以简单地说它是一门从远处观察几何物体的学科 [5], 它主要关心的是几何空间在无穷远处的结构以及它在无穷远处的渐近行为．这方面研究已经和群论 [6–7], 指标理论 [8–9], 非交换几何 [10–11], 大数据分析 [12–13] 等领域息息相关．

尽管粗几何的应用非常广泛，但模糊度量意义下的粗几何却鲜有研究．在文 [14] 中，Zarichnyi 给出了一个关于模糊度量空间的大尺度几何的简短注释．在文 [15] 中， Grzegrzolka 介绍了模糊度量空间的渐近维数， Chung[16] 研究了模糊度量空间的性质 A[11]．本文通过研究模糊度量空间的强嵌入 [17], 进一步探索模糊度量空间的大尺度几何．强嵌入是一个粗不变量，它强于粗嵌入 [18] 又弱于 Yu 的性质 A[19]．本文证明了该结果在模糊度量空间中仍然成立，并且模糊度量空间的强嵌入与度量空间中的强嵌入 [20–21] 有许多相似的性质．

本文其余部分的结构如下：在第二部分中，介绍了关于 George 和 Veeramani 意义下的模糊度量空间的一些必要的定义和性质．第三部分给出了模糊度量空间强嵌入的定义，并证明了标准模糊度量空间的强嵌入与其诱导度量下的强嵌入是一致的．在第四部分，证明了模糊度量空间的性质 A 蕴含了它的强嵌入，而强嵌入又蕴含了模糊度量空间的粗嵌入．在第五节，证明了模糊度量空间的强嵌入是粗不变量．第六节给出了模糊度量空间强嵌入的等价刻画．

本文 2021 年 6 月 13 日收到， 2022 年 10 月 10 日收到修改稿．

[1]贵州财经大学数统学院，贵阳 550025．E-mail: guoqiangli@mail.gufe.edu.cn

[2]贵州财经大学大数据统计学院，贵阳 550025．E-mail: ysh503023@163.com

*本文受到 2023 年度贵州省教育厅高校科学研究项目 (青年项目)(No. 黔教技 [2022]172) 和 2022 年度贵州财经大学校级项目 (No. 2022KYQN12) 的资助．

§2 准备知识

这部分回顾了文 [2] 中关于模糊度量空间的一些必要的定义和性质.

定义 2.1[2] 称二元运算

$$*:[0,1]\times[0,1]\to[0,1]$$

为一个连续 t- 模，如果它满足以下条件：

(1) 对任意的 $a,b,c\in[0,1]$, 有 $a*b=b*a$, $a*(b*c)=(a*b)*c$;

(2) $*$ 是连续的;

(3) 对任意 $a\in[0,1]$, 都有 $a*1=a$;

(4) 对任意 $a,b,c,d\in[0,1]$, 若 $a\leqslant c,b\leqslant d$, 则 $a*b\leqslant c*d$.

例如， $a*b=ab$, $a*b=\min\{a,b\}$, 和 $a*b=\max\{0,a+b-1\}$ 都是连续 t- 模. 容易验证连续 t- 模满足下列性质.

命题 2.1[2] 设 $*:[0,1]\times[0,1]\to[0,1]$ 是一个连续 t- 模. 则

(1) 若 $a,b\in(0,1)$ 且 $a>b$, 则存在 $c\in(0,1)$, 使得 $a*c\geqslant b$;

(2) 对任意 $a\in(0,1)$, 存在 $b\in(0,1)$, 使得 $b*b\geqslant a$.

定义 2.2[2] 设 X 是一个集合， $*$ 是一个连续 t- 模. 映射 $M:X\times X\times(0,\infty)\to(0,1]$ 是 X 上的一个模糊度量，如果对任意 $x,y,z\in X$, $s,t>0$, M 满足下列条件：

(1) $M(x,y,t)>0$;

(2) $M(x,y,t)=1\Leftrightarrow x=y$;

(3) $M(x,y,t)=M(y,x,t)$;

(4) $M(x,y,t)*M(y,z,s)\leqslant M(x,z,t+s)$;

(5) $M(x,y,\cdot):(0,\infty)\to(0,1]$ 是连续的.

对任意 $x,y\in X$, $M(x,y,\cdot)$ 是非减的 [2]. 一个具有连续 t- 模且赋予一个模糊度量的集合称为模糊度量空间. 设 $(X,M,*)$ 是一个模糊度量空间， $Y\subseteq X$, 那么 $(Y,M_Y,*)$ 也是一个模糊度量空间, 其中 M_Y 相当于 M 在 $Y\times Y\times(0,\infty)$ 的限制. $(Y,M_Y,*)$ 称为模糊度量的子空间.

例 2.1 设 (X,d) 是一个度量空间. 定义 $a*b=ab$, 其中 $a,b\in[0,1]$. 对任意 $x,y\in X$, $t>0$, 定义下列模糊度量

$$M(x,y,t)=\frac{t}{t+d(x,y)}.$$

则 $(X,M,*)$ 是一个模糊度量空间. $(X,M,*)$ 叫作 (X,d) 的标准模糊度量空间， M 叫作由 d 诱导的标准模糊度量.

设 $(X,M,*)$ 是一个模糊度量空间. 取 $x\in X$, $r\in(0,1)$ 和 $t>0$, 记

$$B(x,r,t)=\{y\in X\mid M(x,y,t)>1-r\}.$$

称 $B(x,r,t)$ 是 $(X,M,*)$ 中以 x 为球心的球. $|(B(x,r,t))|$ 表示球 $B(x,r,t)$ 中点的个数. 模糊度量空间 $(X,M,*)$ 是局部一致有限的，如果对每个 $r\in(0,1)$ 和 $t>0$, 存在正整数 $N(r,t)$, 使得对任意 $x\in X$, 总有 $|(B(x,r,t))|\leqslant N(r,t)$. 设 (X,d) 是一个度量空间. X 具有有界几何，如果对任意 $S>0$, 总存在 $N>0$, 使得对任意 $x\in X$, 有 $|B_d(x,S)|\leqslant N$ 成

立，其中 $B_d(x,S)=\{y\in X\mid d(x,y)\leqslant S\}$. 本文考虑的模糊度量空间都是局部一致有界的，度量空间都具有有界几何.

下面的引理给出了度量空间中的球与它相应的标准模糊度量空间中的球之间的联系.

引理 2.1[16] 设 (X,d) 是一个度量空间，$(X,M,*)$ 是相应的标准模糊度量空间. 对于任意 $x\in X, t>0, r\in(0,1)$ 和 $R>0$, 有

$$B_d(x,R)=B\Big(x,\frac{R}{t+R},t\Big)=B\Big(x,r,\frac{R(1-r)}{r}\Big)$$

成立.

定义 2.3[2] 设 $(X,M,*)$ 是一个模糊度量空间. 称 X 的子集 A 有界, 如果存在 $r\in(0,1)$ 和 $t>0$, 使得对任意 $x,y\in A$, 有下式成立

$$M(x,y,t)>1-r.$$

引理 2.2[15] 设 (X,d) 是一个度量空间，$(X,M,*)$ 是相应的标准模糊度量空间. 则对任意 $x,y\in X$, $r\in(0,1)$ 和 $t>0$, 总有

$$M(x,y,t)>1-r\Leftrightarrow d(x,y)<\frac{rt}{1-r}.$$

上述引理告诉我们，度量空间中的有界集在其相应的标准模糊度量空间中也是有界的，反之亦然. 然而存在一些模糊度量空间，它的两个有界子集的并是无界的 (见 [15, 例 2.7]). 文 [15] 中证明了若模糊度量空间中不存在零因子，则有界子集的并仍然有界. 为了能够合理讨论模糊度量空间的强嵌入, 在本文中总是假定当 $a\neq 0, b\neq 0$ 时, 总有 $a*b\neq 0$.

§3　模糊度量空间的强嵌入

该部分给出了模糊度量空间强嵌入的定义. 为了更好的理解模糊度量空间的粗几何性质和结构，在给出模糊度量范畴下的粗几何的相关定义时，我们总是先介绍度量空间中相应的定义. 注意到引理 2.2 在此过程显得非常重要.

定义 3.1[17] 设 (X,d) 是一个度量空间. 称 X 是可强嵌入的当且仅当对任意 $R,\varepsilon>0$, 存在希尔伯特值映射 $\xi:X\to l^2(X)$, 满足

(1) 对任意 $x\in X$, 有 $\|\xi_x\|=1$;

(2) 当 $d(x,y)<R$ 时，有 $\|\xi_x-\xi_y\|<\varepsilon$;

(3) $\lim\limits_{S\to\infty}\sup\limits_{x\in X}\sum\limits_{z\notin B_d(x,S)}|\xi_x(z)|^2=0$.

定义 3.2 设 $(X,M,*)$ 是一个模糊度量空间. 称 X 是可强嵌入的当且仅当对任意 $\varepsilon>0$, $r\in(0,1)$ 和 $t>0$, 存在希尔伯特值映射 $\xi:X\to l^2(X)$ 满足

(1) 对任意 $x\in X$, 有 $\|\xi_x\|=1$;

(2) 当 $M(x,y,t)>1-r$ 时，有 $\|\xi_x-\xi_y\|<\varepsilon$;

(3) 存在 $T>0$, 使得

$$\lim_{R\to1^-}\sup_{x\in X}\sum_{z\notin B(x,R,T)}|\xi_x(z)|^2=0.$$

命题 3.1 设 (X,d) 是一个度量空间， $(X,M,*)$ 是相应的标准模糊度量空间. 则 (X,d) 是可强嵌入的当且仅当 $(X,M,*)$ 是可强嵌入的.

证 假设 (X,d) 是可强嵌入的. 取定 $\varepsilon>0$, $r\in(0,1)$ 和 $t>0$, 并令 $c=\frac{tr}{1-r}$. 由定义 3.1 知，存在映射 $\xi:X\to l^2(X)$, 满足

(1) 对任意 $x\in X$, 有 $\|\xi_x\|=1$;

(2) 当 $d(x,y)<c$, 则 $\|\xi_x-\xi_y\|<\varepsilon$;

(3) $\lim\limits_{S\to\infty}\sup\limits_{x\in X}\sum\limits_{z\notin B_d(x,S)}|\xi_x(z)|^2=0$.

由引理 2.2, 知，对任意 $x,y\in X$, 有

$$d(x,y)<c=\frac{tr}{1-r}\Leftrightarrow M(x,y,t)>1-r.$$

即当 $M(x,y,t)>1-r$ 时， $\|\xi_x-\xi_y\|<\varepsilon$ 成立. 由引理 2.1, 得到

$$B_d(x,S)=B\Big(x,\frac{S}{t+S},t\Big).$$

固定 $T>0$, 并令 $R=\frac{S}{T+S}$. 注意到当 $S\to+\infty$ 时， $R\to1^-$, 这样就得到

$$\lim_{R\to1^-}\sup_{x\in X}\sum_{z\notin B(x,R,T)}|\xi_x(z)|^2=0.$$

所以， $(X,M,*)$ 是可强嵌入的.

另一方面，假设 $(X,M,*)$ 是可强嵌入的. 取 $R,\varepsilon>0$, 并令 $t=R$, $r=\frac12$. 由定义 3.2 知，存在映射 $\xi:X\to l^2(X)$, 满足

(1) 对任意 $x\in X$, 有 $\|\xi_x\|=1$;

(2) 当 $M(x,y,t)>1-r$, 则 $\|\xi_x-\xi_y\|<\varepsilon$;

(3) 存在 $t'>0$, 使得

$$\lim_{r'\to1^-}\sup_{x\in X}\sum_{z\notin B(x,r',t')}|\xi_x(z)|^2=0.$$

由引理 2.2, 有

$$M(x,y,t)>1-r\Leftrightarrow d(x,y)<\frac{tr}{1-r}=t=R.$$

所以当 $d(x,y)<R$ 时， $\|\xi_x-\xi_y\|<\varepsilon$. 令 $S>0, r'=\frac{S}{t'+S}$. 则当 $S\to+\infty$ 时， $r'\to1^-$. 由引理 2.1, 我们得到

$$B(x,r',t')=B\Big(x,\frac{S}{t'+S},t'\Big)=B_d(x,S).$$

所以

$$\lim_{S\to\infty}\sup_{x\in X}\sum_{z\notin B_d(x,S)}|\xi_x(z)|^2=0.$$

因此， (X,d) 是可强嵌入.

另外，强嵌入有下列遗传性质.

命题 3.2 设 $(X,M,*)$ 一个模糊度量空间， $(Y,M_Y,*)$ 是 X 的子空间. 若 X 是可强嵌入的，则 Y 也是可强嵌入的.

证　取 $t_0>0$. $p_0:X\to Y$ 是一个投影，满足

$$M(x,p_0(x),t_0)\geqslant M(x,Y,t_0),$$

其中 $x\in X$, $M(x,Y,t_0)=\sup\{M(x,y,t_0)\mid y\in Y\}$. 对任意 $x\in X,y\in Y$, 定义 $\gamma:l^2(X)\to l^2(Y\times X)$, 使得

$$\gamma(u)(y,x)=\begin{cases}u(x), & \text{若 } y=p_0(x),\\ 0, & \text{否则},\end{cases}$$

这里 $u\in l^2(X)$. 则可以看出 γ 是等距映射.

任意取 $\varepsilon,t>0$ 和 $r\in(0,1)$. 因为 X 是可强嵌入的，则存在映射 $\eta:X\to l^2(X)$, 满足：

(1) 对任意 $x\in X$, 有 $\|\eta_x\|=1$;

(2) 当 $M(x_1,x_2,t)>1-r$ 时，有 $\|\eta_{x_1}-\eta_{x_2}\|<\varepsilon$;

(3) 存在 $T_0>0$, 使得

$$\lim_{R\to1^-}\sup_{x\in X}\sum_{z\notin B(x,R,T_0)}|\eta_x(z)|^2=0.$$

对 $t\in Y,s\in X$, 定义 $\alpha:Y\to l^2(Y\times X)$, 满足

$$\alpha_y(t,s)=\gamma(\eta_y)(t,s).$$

注意到，对每个 $y\in Y$, 有

$$\begin{aligned}\|\alpha_y\|^2_{l^2(Y\times X)}&=\sum_{(t,s)\in Y\times X}|\alpha_y(t,s)|^2=\sum_{(t,s)\in Y\times X}|\gamma(\eta_y)(t,s)|^2\\&=\sum_{s\in X}|\eta_y(s)|^2=\|\eta_y\|^2_{l^2(X)}=1.\end{aligned}$$

另外，对任意 $y_1,y_2\in Y$, 有

$$\begin{aligned}\|\alpha_{y_1}-\alpha_{y_2}\|^2_{l^2(Y\times X)}&=\sum_{(t,s)\in Y\times X}|\alpha_{y_1}(t,s)-\alpha_{y_2}(t,s)|^2\\&=\sum_{(t,s)\in Y\times X}|\gamma(\eta_{y_1})(t,s)-\gamma(\eta_{y_2})(t,s)|^2\\&=\sum_{s\in X}|\eta_{y_1}(s)-\eta_{y_2}(s)|^2\\&=\|\eta_{y_1}-\eta_{y_2}\|^2_{l^2(X)}.\end{aligned}$$

对每个 $y\in Y$, 定义 $\beta:Y\to l^2(Y)$, 满足

$$\beta_y(t)=\|\alpha_y(t,\cdot)\|_{l^2(X)}.$$

则 β 具有以下两条性质：

(i) 对任意 $y\in Y$, 有

$$\|\beta_y\|^2_{l^2(X)}=\sum_{t\in Y}|\beta_y(t)|^2=\sum_{t\in Y}\|\alpha_y(t,\cdot)\|^2_{l^2(X)}=\|\alpha_y\|^2_{l^2(Y\times X)}=1.$$

(ii) 对任意 $y_1,y_2\in Y$ 且 $M(y_1,y_2,t)>1-r$, 有

$$\|\beta_{y_1}-\beta_{y_2}\|^2_{l^2(Y)}=\sum_{t\in Y}|\beta_{y_1}(t)-\beta_{y_2}(t)|^2$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{t\in Y} \big|\|\alpha_{y_1}(t,\cdot)\|_{l^2(X)} - \|\alpha_{y_2}(t,\cdot)\|_{l^2(X)}\big|^2 \\
&\leqslant \sum_{t\in Y} \|\alpha_{y_1}(t,\cdot) - \alpha_{y_2}(t,\cdot)\|_{l^2(X)}^2 \\
&= \|\beta_{y_1} - \beta_{y_2}\|_{l^2(Y\times X)}^2 \\
&= \|\eta_{y_1} - \eta_{y_2}\|_{l^2(X)}^2 \\
&< \varepsilon^2.
\end{aligned}
$$

这样，可以得到

$$
\begin{aligned}
\lim_{R\to 1^-}\sup_{y\in Y}\sum_{z\notin B(y,R,T_0)} |\beta_y(z)|^2 &= \lim_{R\to 1^-}\sup_{y\in Y}\sum_{z\notin B(y,R,T_0)} \|\alpha_y(z,\cdot)\|_{l^2(X)}^2 \\
&= \lim_{R\to 1^-}\sup_{y\in Y}\sum_{z\notin B(y,R,T_0)}\sum_{x\in X} |\alpha_y(z,x)|^2 \\
&= \lim_{R\to 1^-}\sup_{y\in Y}\sum_{z\notin B(y,R,T_0)}\sum_{x\in X} |\gamma(\eta_y)(z,x)|^2 \\
&= \lim_{R\to 1^-}\sup_{y\in Y}\sum_{x\in X}\sum_{z\notin B(y,R,T_0)} |\gamma(\eta_y)(z,x)|^2 \\
&= \lim_{R\to 1^-}\sup_{y\in Y}\sum_{x\in Y}\sum_{z\notin B(y,R,T_0)} |\gamma(\eta_y)(z,x)|^2 \\
&\quad + \lim_{R\to 1^-}\sup_{y\in Y}\sum_{x\in X\setminus Y}\sum_{z\notin B(y,R,T_0)} |\gamma(\eta_y)(z,x)|^2. \qquad (3.1)
\end{aligned}
$$

考虑上面 (3.1) 的第一项．如果 $x\in Y$, 有 $p_0(x)=x$, 从而

$$
\begin{aligned}
&\lim_{R\to 1^-}\sup_{y\in Y}\sum_{x\in Y}\sum_{z\notin B(y,R,T_0)} |\gamma(\eta_y)(z,x)|^2 \\
= &\lim_{R\to 1^-}\sup_{y\in Y}\sum_{x\notin B(y,R,T_0)} |\eta_y(x)|^2 \\
\leqslant &\lim_{R\to 1^-}\sup_{y\in X}\sum_{x\notin B(y,R,T_0)} |\eta_y(x)|^2 \\
= &\,0.
\end{aligned}
$$

考虑 (3.1) 的第二项，有

$$
\begin{aligned}
\lim_{R\to 1^-}\sup_{y\in Y}\sum_{x\in X\setminus Y}\sum_{z\notin B(y,R,T_0)} |\gamma(\eta_y)(z,x)|^2 &\leqslant \lim_{R\to 1^-}\sup_{y\in Y}\sum_{x\notin X\setminus Y} |\eta_y(x)|^2 \\
&\leqslant \lim_{R\to 1^-}\sup_{y\in Y}\sum_{x\notin B(y,R,T_0)} |\eta_y(x)|^2 \\
&\leqslant \lim_{R\to 1^-}\sup_{y\in X}\sum_{x\notin B(y,R,T_0)} |\eta_y(x)|^2 \\
&= 0.
\end{aligned}
$$

命题得证.

§4 性质 A 和粗嵌入

该部分证明了模糊度量空间的强嵌入是介于性质 A 和粗嵌入之间的一种粗几何性质.

命题 4.1[16] 设 $(X,M,*)$ 是一个模糊度量空间. 则 X 具有性质 A 当且仅当对任意 $\varepsilon>0$, $r\in(0,1)$ 和 $t>0$, 存在一个希尔伯特值映射 $\beta:X\to l^2(X)$, 满足

(1) 对任意 $x\in X$, 有 $\|\beta_x\|=1$;

(2) 当 $M(x,y,t)>1-r$ 时, 有 $\|\beta_x-\beta_y\|<\varepsilon$;

(3) 存在 $R>0$ 和 $T>0$, 使得对任意 $x\in X$, β_x 的支撑集满足 $\mathrm{supp}(\beta_\mathrm{x})\subseteq \mathrm{B(x,R,T)}$.

命题 4.2 具有性质 A 的模糊度量空间是可强嵌入的.

证 利用强嵌入的定义及命题 4.1 很容易得出此结论, 故证明省略.

定义 4.1[22] 设 (X,d) 是一个度量空间. 称 X 是可粗嵌入的当且仅当对任意 $R,\varepsilon>0$, 存在一个希尔伯特值映射 $\beta:X\to\mathcal{H}$, 满足

(1) 对任意的 $x\in X$, $\|\beta_x\|=1$;

(2) 若 $d(x,y)\leqslant R$, 有 $\|\beta_x-\beta_y\|<\varepsilon$;

(3) $\lim\limits_{S\to\infty}\sup\limits_{d(x,y)\geqslant S}|\langle\beta_x,\beta_y\rangle|=0$.

定义 4.2 设 $(X,M,*)$ 是一个模糊度量空间. 称 X 是可粗嵌入的当且仅当对任意 $\varepsilon>0$, $r\in(0,1)$ 和 $t>0$, 存在一个希尔伯特值映射 $\beta:X\to\mathcal{H}$, 满足

(1) 对任意 $x\in X$, $\|\beta_x\|=1$;

(2) 若 $M(x,y,t)>1-r$, 有 $\|\beta_x-\beta_y\|<\varepsilon$;

(3) 存在 $T>0$, 使得

$$\lim_{R\to1^-}\sup_{M(x,y,T)<1-R}|\langle\beta_x,\beta_y\rangle|=0.$$

命题 4.3 设 (X,d) 是一个度量空间, $(X,M,*)$ 是相应的标准模糊度量空间. 则 (X,d) 是可粗嵌入的当且仅当 $(X,M,*)$ 是可粗嵌入的.

证 假设 (X,d) 是可粗嵌入的. 取 $\varepsilon>0$, $r\in(0,1)$ 和 $t>0$, 令 $c=\frac{tr}{1-r}$. 则存在一个希尔伯特值映射 $\beta:X\to\mathcal{H}$, 其中对每个 $x\in X$, 都有 $\|\beta_x\|=1$. 且映射 β 还满足

(1) 若 $d(x,y)<c$, 则 $\|\beta_x-\beta_y\|<\varepsilon$;

(2) $\lim\limits_{S\to\infty}\sup\limits_{d(x,y)>S}|\langle\beta_x,\beta_y\rangle|=0$.

由引理 2.2, 知

$$d(x,y)<c=\frac{tr}{1-r}\Longleftrightarrow M(x,y,t)>1-r.$$

取 $R=\frac{S}{t+S}$, 则 $S=\frac{tR}{1-R}$. 注意到

$$d(x,y)>S=\frac{tR}{1-R}\Longleftrightarrow M(x,y,t)<1-R,$$

且当 $S\to+\infty$ 时, $R\to1^-$, 则有

$$\lim_{R\to1^-}\sup_{M(x,y,t)>1-R}|\langle\beta_x,\beta_y\rangle|=0.$$

因此，$(X, M, *)$ 是可粗嵌入的.

反过来，假设 $(X, M, *)$ 是可粗嵌入的. 取 $R, \varepsilon > 0$, 令 $t = R$, $r = \frac{1}{2}$. 则存在希尔伯特值映射 $\beta : X \to \mathcal{H}$, 其中对每个 $x \in X$, 都有 $\|\beta_x\| = 1$. 且映射 β 还满足

(1) 若 $M(x, y, t) > 1 - r$, 有 $\|\beta_x - \beta_y\| < \varepsilon$;

(2) 存在 $t' > 0$, 使得

$$\lim_{r' \to 1^-} \sup_{M(x,y,t') < 1 - r'} |\langle \beta_x, \beta_y \rangle| = 0.$$

由引理 2.2, 知

$$M(x, y, t) > 1 - r \Longleftrightarrow d(x, y) < \frac{tr}{1 - r} = t = R.$$

所以 $d(x, y) < R$ 时, 有 $\|\beta_x, \beta_y\| < \varepsilon$. 取 $S = \frac{t'r'}{1-r'}$, $r' \in (0, 1)$. 则当 $r' \to 1^-$ 时，$S \to +\infty$. 注意到

$$M(x, y, t') < 1 - r' \Longleftrightarrow d(x, y) > \frac{t'r'}{1 - r'} = S.$$

则有

$$\lim_{S \to \infty} \sup_{d(x,y) > S} |\langle \beta_x, \beta_y \rangle| = 0.$$

所以，(X, d) 是可粗嵌入的.

命题 4.4 可强嵌入的模糊度量空间是可粗嵌入的.

证 假设 $(X, M, *)$ 是可强嵌入的. 取 $\varepsilon > 0$, $r \in (0, 1)$ 和 $t > 0$. 因为 $(X, M, *)$ 是可强嵌入的，所以存在映射 $\beta : X \to l^2(X)$, 满足

(1) 对任意 $x \in X$ ，有 $\|\beta_x\| = 1$;

(2) 当 $M(x, y, t) > 1 - r$ 时，有 $\|\beta_x - \beta_y\| < \varepsilon$;

(3) 存在 $T > 0$, 使得

$$\lim_{R \to 1^-} \sup_{M(x,y,T) > 1 - R} \sum_{z \notin B(x,R,T)} |\beta_x(z)|^2 = 0.$$

取定 $R \in (0, 1)$, 使得 $M(x, y, T) < 1 - R$. 则

$$\begin{aligned}
|\langle \beta_x, \beta_y \rangle| &\leqslant \sum_{z \in X} |\beta_x(z)\beta_y(z)| \\
&= \sum_{z \notin B(x,R,T)} |\beta_x(z)\beta_y(z)| + \sum_{z \in B(x,R,T)} |\beta_x(z)\beta_y(z)| \\
&\leqslant \sum_{z \notin B(x,R,T)} |\beta_x(z)|^2 + \sum_{z \in B(x,R,T)} |\beta_y(z)|^2 \\
&\leqslant \sum_{z \notin B(x,R,T)} |\beta_x(z)|^2 + \sum_{z \in B(y,R,T)} |\beta_y(z)|^2.
\end{aligned}$$

所以

$$\lim_{R \to 1^-} \sup_{M(x,y,T) < 1 - R} |\langle \beta_x, \beta_y \rangle| = 0.$$

因此，$(X, M, *)$ 是可粗嵌入的.

§5 粗不变性

文 [15] 中， Grzegrzolka 介绍了模糊度量空间的粗结构. 下面我们先回顾一些必要的概念，然后证明模糊度量空间的强嵌入是粗不变的.

定义 5.1[5] 设 (X,d) 和 (Y,d) 是度量空间， $f:X\to Y$ 是一个映射.

(1) f 是一致扩张的, 如果对任意 $A>0$, 存在 $B>0$, 使得对任意 $x,y\in X$, $d(x,y)<A$ 时，总有 $d(f(x),f(y))<B$;

(2) f 是恰当的, 如果对每个 $C>0$, 存在 $D>0$, 使得对任意 $x\in X$, $f^{-1}(B_d(f(x),C))\subseteq B_d(x,D)$ 总成立.

(3) f 是粗嵌入映射如果它是一致扩张的且是恰当的；

(4) f 是粗到上映射, 如果存在 $T>0$, 使得对每个 $y\in Y$, 存在 $x\in X$, 满足 $d(f(x),y)<T$;

(5) f 是粗等价映射，如果它是粗嵌入映射且是粗到上映射；

(6) 假设 $g:X\to Y$ 是一个映射. 则 f 和 g 是相近的，记作 $f\sim g$, 如果存在 $c>0$, 使得对任意 $x\in X$, 有 $d(f(x),g(x))<c$ 成立.

定义 5.2[15] 设 $(X,M_1,*_1)$, $(Y,M_2,*_2)$ 是两个模糊度量空间， $f:X\to Y$ 是一个映射.

(1) f 是一致扩张的，如果对任意 $A>0$, $t>0$ 存在 $B\in(0,1)$, $t'>0$, 使得对任意 $x,y\in X$, $M_1(x,y,t)\geqslant A$ 时，有 $M_2(f(x),f(y),t')\geqslant B$ 成立.

(2) f 是恰当的，如果对每个 $C>0$, $t>0$, 存在 $D\in(0,1)$, $t'>0$, 使得对任意 $x,y\in X$, $M_2(f(x),f(y),t)\geqslant C$ 时，总有 $M_1(x,y,t')\geqslant D$.

(3) f 是粗嵌入映射，如果它是一致扩张的且是恰当的；

(4) f 是粗到上映射，如果存在 $r\in(0,1)$ 和 $t>0$, 使得对每个 $y\in Y$, 存在 $x\in X$, 满足 $M_2(f(x),y,t)>1-r$;

(5) f 是粗等价映射，如果它是粗嵌入且是粗到上；

(6) 假设 $g:X\to Y$ 是一个映射. 则 f 和 g 是相近的，记作 $f\sim g$, 如果存在 $r\in(0,1)$ 和 $t>0$, 使得对任意 $x\in X$, 有 $M_2(f(x),f(y),t)>1-r$ 成立.

设 (X,d) 和 (Y,d) 是度量空间. 如果 $f:X\to Y$ 是一致扩张的，且存在另一个一致扩张映射 $g:Y\to X$, 使得 $f\circ g$ 和 $g\circ f$ 分别与 Y 和 X 上的恒等映射是相近的. 在模糊度量空间中粗范畴意义下，我们有以下类似的结论.

命题 5.1[15] 设 $(X,M_1,*_1)$, $(Y,M_2,*_2)$ 是两个模糊度量空间. 则 $f:X\to Y$ 是粗等价当且仅当 $f:X\to Y$ 是一致扩张的，且存在另一个一致扩张映射 $g:Y\to X$, 使得 $f\circ g$ 和 $g\circ f$ 分别与 Y 和 X 上的恒等映射是相近的.

定义 5.3[15] 设 $(X,M,*)$ 是模糊度量空间， $r\in(0,1)$, $t>0$. U 是 X 的子集，则 U 的 (r,t)- 邻域为

$$N_{r,t}(U)=\{x\in X\mid \exists x'\in U\text{ s.t. }M(x,x',t)>1-r\}.$$

如果 $f:(X,M_1,*_1)\to(Y,M_2,*_2)$ 是粗到上映射，则存在 $r\in(0,1)$ 和 $t>0$, 使得

$$Y=N_{r,t}(f(X)).$$

命题 5.2[15] 设 $(X,M,*)$ 是模糊度量空间，$\mathcal{U}$ 是 $X,M,*$ 的一致有界子集族，则对任意 $r\in(0,1)$, $t>0$, $N_{r,t}(\mathcal{U})$ 也是 $X,M,*$ 的一致有界子集族，其中

$$N_{r,t}(\mathcal{U})=\{N_{r,t}(U)\mid U\in\mathcal{U}\}.$$

如果 $\mathcal{U}$ 是 X 的覆盖，则 $N_{r,t}(\mathcal{U})$ 也是.

引理 5.1 设 $(X,M',*')$, $(Y,M,*)$ 是两个模糊度量空间，$f:X\to Y$ 是粗到上映射. 如果 $f(X)$ 是可强嵌入的，则 Y 也是可强嵌入的.

证 记 $Y'=f(X)$. 因为 f 是粗到上映射，所以存在 $r'\in(0,1)$, $t'>0$, 使得 $Y=N_{r',t'}(Y')$, 也就是说,

$$\forall y\in Y,\quad \exists y'\in Y' \text{ s.t. } M(y,y',t')>1-r'.$$

设 $\varepsilon,t>0$ 和 $r\in(0,1)$ 是任意的. 定义映射 $g:Y\to Y'$ 为

$$g(y)=\begin{cases}y, & y\in Y',\\ x, & y\notin Y',\end{cases}$$

其中 $x\in\{y'\in Y'\mid M(y',y,t')>1-r'\}$. 因为 Y' 是可强嵌入的，所以存在希尔伯特值映射 $\xi:Y'\to l^2(Y)$, 满足

(1) 对任意 $y\in Y'$, 有 $\|\xi_y\|=1$;

(2) 若 $M(y_1,y_2,2t'+t)>1-r_0$, 其中 $1-r_0<(1-r')*(1-r)*(1-r')$, 则 $\|\xi_{y_1}-\xi_{y_2}\|<\varepsilon$;

(3) 对任意 $\delta>0$, 存在 $R_0\in(0,1)$, $T_0>0$, 使得

$$\sum_{z\notin B(y,R,T_0)}|\xi_y(z)|^2\leqslant\delta,$$

其中 $R\in[R_0,1)$.

定义 $\alpha:l^2(Y')\to l^2(Y)$ 为

$$w(y)=\begin{cases}v(y), & y\in Y',\\ 0, & y\notin Y',\end{cases}$$

其中 $v\in l^2(Y')$, $w\in l^2(Y)$, $\alpha(v)=w$. 注意到 α 是等距映射. 对任意 $y\in Y$, 定义 $\beta:Y\to l^2(Y)$ 为

$$\beta_y=\alpha\circ\xi\circ g(y),$$

则 $\|\beta_y\|=\|\alpha\circ\xi\circ g(y)\|=\|\xi_{g(y)}\|=1$, 其中 $y\in Y$.

如果对任意 $y_1,y_2\in Y$, $M(y_1,y_2,t)>1-r$, 则有

$$\begin{aligned}M(g(y_1),g(y_2),2t'+t)&\geqslant M(g(y_1),y_1,t')*M(y_1,y_2,t)*M(y_2,g(y_2),t')\\&\geqslant(1-r')*(1-r)*(1-r')\\&>1-r_0.\end{aligned}$$

Y' 是可强嵌入的，由 (2) 知

$$\|\beta_{y_1}-\beta_{y_2}\|=\|\alpha\circ\xi\circ g(y_1)-\alpha\circ\xi\circ g(y_2)\|=\|\xi_{g(y_1)}-\xi_{g(y_2)}\|<\varepsilon.$$

取 $R_1\in[R_0,1)$, $R_2\in(0,1)$, 使得

$$1-R_2\leqslant(1-R_1)*(1-r').$$

令 $T_2 = T_0 + t'$. 对任意 $y \in Y$ 和 $R \in [R_2, 1)$, 有

$$M(y', y, T_2) \geqslant M(y', g(y), T_0) * M(g(y), y, t') > (1 - R_1) * (1 - r') \geqslant 1 - R_2,$$

其中 $y' \in B(g(y), R_1, T_0)$. 由此可得

$$B(g(y), R_1, T_0) \subseteq B(y, R_2, T_2).$$

所以，对任意 $R \in [R_2, 1)$, 我们有下面的估计

$$\begin{aligned}\sum_{z \notin B(y,R,T_2)} |\beta_y(z)|^2 &= \sum_{z \notin B(y,R,T_2)} |\alpha \circ \xi \circ g(y)(z)|^2 \\ &= \sum_{z \notin B(y,R,T_2), z \in Y'} |\xi_{g(y)}(z)|^2 \\ &= \sum_{z \notin B(g(y),R_1,T_0)} |\xi_{g(y)}(z)|^2 \\ &\leqslant \delta.\end{aligned}$$

命题得证.

定理 5.1　设 $(X, M_1, *_2)$, $M(Y, M_2, *_2)$ 是两个模糊度量空间， $f : X \to Y$ 是粗等价映射．则 $M(X, M_1, *_1)$ 是可强嵌入的当且仅当 $(Y, M_2, *_2)$ 是可强嵌入的．

证　假设 X 是可强嵌入的．由于 $f : X \to Y$ 是粗等价，则存在一个一致扩张映射 $g : Y \to X$, 使得 $f \circ g \sim id_Y$, $g \circ f \sim id_X$, 即，存在 $r_1, r_2 \in (0, 1)$ 和 $t_1, t_2 > 0$, 使得对任意 $x \in X, y \in Y$, 有

$$M_1(g \circ f(x), x, t_1) > 1 - r_1, \quad M_2(f \circ g(y), y, t_2) > 1 - r_2.$$

令 $Y' = f(X)$. 注意到 f 是粗到上映射，由引理 5.1, 知，只需要证明 Y' 是可强嵌入的．因为 $g : Y \to X$ 是一致扩张的，所以存在 $r' \in (0, 1)$ 和 $t' > 0$ 使得对任意 $y_1, y_2 \in B(y, r, t)$, 有

$$M_2(g(y_1), g(y_2), t') > 1 - r',$$

其中 $y \in Y$, $r \in (0, 1)$ 和 $t > 0$ 是任意的．对任意 $x_1, x_2 \in g^{-1}(B(y, r, t))$, 有

$$\begin{aligned}&M_1(x_1, x_2, 2t_0 + t') \\ &\geqslant M_1(x_1, g \cdot f(x_1), t_0) *_1 M_1(g \cdot f(x_1), g \cdot f(x_2), t') *_1 M_1(g \cdot f(x_2), x_2, t_0) \\ &\geqslant (1 - r_0) *_1 (1 - r') *_1 (1 - r_0).\end{aligned}$$

显然，存在 $r'' \in (0, 1)$, 满足 $1 - r' < (1 - r_0) *_1 (1 - r') *_1 (1 - r_0)$. 由此得到 $\{f^{-1}(B(y, r, t)) \mid y \in Y'\}$ 是一致有界的．设 $X' \subseteq X$, $f\mid_{X'}$ 是单射．则 $f : X' \to Y'$ 是一对一映射．另外，由命题 3.2, 得 X' 是可强嵌入的．因此，对任意 $\varepsilon > 0$, 存在映射 $\alpha : X' \to l^2(X')$, 使得

(1) 对任意 $x \in X'$, 有 $\|\alpha_x\| = 1$;

(2) 若 $M_1(x_1, x_2, 2t_0 + t') > 1 - r''$, 则 $\|\alpha_{x_1} - \alpha_{x_2}\| < \varepsilon$;

(3) 对任意 $\delta > 0$, $x \in X'$, 存在 $R_0 \in (0, 1)$ 和 $T_0 > 0$, 使得

$$\sum_{z \notin B(y,R,T_0)} |\alpha_x(z)|^2 \leqslant \delta,$$

其中 $R \in (R_0, 1)$. 对任意 $y, z \in Y'$, 定义 $\beta : Y' \to l^2(Y')$ 为

$$\beta_y(z) = \alpha_{f^{-1}(y)}(f^{-1}(z)).$$

则有 $\|\beta_y\| = \|\alpha_{f^{-1}(y)}\| = 1$. 对任意 $y_1, y_2 \in Y'$ 且 $M(y_1, y_2, t) > 1 - r$, 我们有

$$M_1(f^{-1}(y_1), f^{-1}(y_2), 2t_0 + t') > 1 - r''.$$

所以有 $\|\beta_{y_1} - \beta_{y_2}\| = \|\alpha_{f^{-1}(y_1)} - \alpha_{f^{-1}(y_2)}\| < \varepsilon$. 因为 f 是一致扩张的, 所以存在 $R_0' \in (0,1)$ 和 T_0', 使得对任意 $R_1 \in (R_0, 1)$, $x_1, x_2 \in X'$, 有

$$M_1(x_1, x_2, T_0) > 1 - R_1 \Rightarrow M_2(f(x_1), f(x_2), T_0') > 1 - R_0'.$$

对任意 $x \in X'$, 设 $y = f(x)$, 则有

$$f(B(x, R_1, T_0)) \subseteq B(f(x), R_0', T_0'),$$

$$B(x, R_1, T_0) \subseteq f^{-1}(B(f(x), R_0', T_0')),$$

$$B(f^{-1}(y), R_1, T_0) \subseteq f^{-1}(B(y, R_0', T_0')).$$

让 $R' \in (0,1)$ 且充分趋近于 1. 则有

$$\begin{aligned}\sum_{z \notin B(y, R', T_0')} |\beta_y(z)|^2 &= \sum_{z \notin B(y, R', T_0')} |\alpha_{f^{-1}(y)}(f^{-1}(z))|^2 \\ &= \sum_{w \in f^{-1}\{z | z \notin B(y, R', T_0')\}} |\alpha_{f^{-1}(y)}(w)|^2 \\ &\leqslant \sum_{w \notin B(f^{-1}(y), R_1, T_0)} |\alpha_{f^{-1}(y)}(w)|^2 \\ &< \delta.\end{aligned}$$

因此， Y' 是可强嵌入的. 命题得证.

§6 强 嵌 入 的 等 价 刻 画

该部分给出模糊度量空间强嵌入的一些其他等价刻画.

定理 6.1 设 $(X, M, *)$ 是一个模糊度量空间，则下列命题等价.

(i) X 是可强嵌入的.

(ii) 对任意 $\varepsilon > 0$, $r \in (0,1)$ 和 $t > 0$, 存在希尔伯特空间 $\mathcal{H}$ 和映射 $\alpha : X \to l^2(X, \mathcal{H})$, 满足

(a) 对任意 $x \in X$, 有 $\|\alpha_x\| = 1$;

(b) 若 $M(x, y, t) > 1 - r$, 则 $\|\alpha_x - \alpha_y\| < \varepsilon$;

(c) 存在 $T > 0$, 使得

$$\lim_{R \to 1^-} \sup_{x \in X} \sum_{z \notin B(x, R, T)} \|\alpha_x(z)\|^2 = 0.$$

(iii) 对任意 $1 \leqslant p < \infty$ 和任意 $\varepsilon, t > 0$, $r \in (0,1)$, 存在映射 $\eta : X \to l^p(X)$, 满足

(a) 对任意 $x \in X$, 有 $\|\eta_x\|_p = 1$;

(b) 若 $M(x, y, t) > 1 - r$, 有 $\|\eta_x - \eta_y\|_p < \varepsilon$;

(c) 存在 $T > 0$, 使得

$$\lim_{R \to 1^-} \sup_{x \in X} \sum_{z \notin B(x, R, T)} \|\eta_x(z)\|^p = 0.$$

证 (i)⇒(ii): 因为 X 是可强嵌入的，所以存在映射 $\alpha : X \to l^2(X)$ 满足定义 3.2. 令 $\mathcal{H} = \mathbb{C}$, 其中 $\mathbb{C}$ 为复数域. 由 $l^2(X) \cong l^2(X, \mathbb{C})$, 知结论成立.

(ii)⇒(i): 令 $\varepsilon, t > 0$, $r \in (0,1)$, 且 $\alpha : X \to l^2(X, \mathcal{H})$ 是 (ii) 中的映射. 对任意 $x, z \in X$, 定义映射 $\beta : X \to l^2(X)$ 为

$$\beta_x(z) = \|\alpha_x(z)\|.$$

则对任意 $x \in X$, 有

$$\|\beta_x\|^2 = \sum_{z\in X} |\beta_x(z)|^2 = \sum_{z\in X} \|\alpha_x(z)\|^2 = \|\alpha_x\|^2 = 1.$$

另外，对任意满足 $M(x_1, x_2, t) > 1 - r$ 的 $x_1, x_2 \in X$, 有

$$\begin{aligned}\|\beta_{x_1} - \beta_{x_2}\|^2 &= \sum_{z\in X} |\beta_{x_1}(z) - \beta_{x_2}(z)|^2 = \sum_{z\in X} |\|\alpha_{x_1}(z)\| - \|\alpha_{x_2}(z)\||^2 \\ &\leqslant \sum_{z\in X} \|\alpha_{x_1}(z) - \alpha_{x_2}(z)\|^2 = \|\alpha_{x_1} - \alpha_{x_2}\|^2 < \varepsilon^2.\end{aligned}$$

最后，注意到

$$\lim_{R\to 1^-} \sup_{x\in X} \sum_{z\notin B(x,R,T)} |\beta_x(z)|^2 = \lim_{R\to 1^-} \sup_{x\in X} \sum_{z\notin B(x,R,T)} \|\alpha_x(z)\|^2 = 0.$$

由此得， (ii)⇒(i) 成立.

(i)⇒(iii): 令 $\varepsilon, t > 0$, $r \in (0,1)$. 取 $1 \leqslant p < \infty$, 映射 $\gamma : X \to l^2(X)$ 满足下面的条件:

(a) 对任意 $x \in X$, 有 $\|\gamma_x\|_p = 1$;

(b) 若 $M(x_1, x_2, t) > 1 - r$, 则 $\|\gamma_{x_1} - \gamma_{x_2}\|_p < \varepsilon$;

(c) 存在 $T > 0$, 使得

$$\lim_{R\to 1^-} \sup_{x\in X} \sum_{z\notin B(x,R,T)} |\gamma_x(z)|^2 = 0.$$

用 $z \mapsto |\gamma_x(z)|$ 替换 γ_x, 可假设对任意 $x \in X$, γ_x 的每个分量都是正取值的. 定义 $\eta : X \to l^p(X)$ 为

$$\eta_x(z) = (\gamma_z(x))^{\frac{2}{p}}.$$

对任意 $x \in X$, 有

$$\|\eta_x\|_p = \Big(\sum_{z\in X} (\eta_x(z))^p\Big)^{\frac{1}{p}} = \Big(\sum_{z\in X} ((\gamma_x(z))^{\frac{2}{p}})^p\Big)^{\frac{1}{p}} = \|\gamma_x\|_2^{\frac{2}{p}} = 1.$$

对任意 $a, b \geqslant 0$, 不等式 $|a - b|^p \leqslant |a^p - b^p|$ 成立. 则对任意的 $x_1, x_2 \in X$, 且 x_1, x_2 满足 $M(x_1, x_2, t) > 1 - r$, 我们有

$$\begin{aligned}\|\eta_{x_1} - \eta_{x_2}\|_p^p &= \sum_{z\in X} |\eta_{x_1}(z) - \eta_{x_2}(z)|^p \\ &\leqslant \sum_{z\in X} |\eta_{x_1}(z)^p - \eta_{x_2}(z)^p| \\ &= \sum_{z\in X} |\gamma_{x_1}(z)^2 - \gamma_{x_2}(z)^2| \\ &= \sum_{z\in X} |\gamma_{x_1}(z) - \gamma_{x_2}(z)||\gamma_{x_1}(z) + \gamma_{x_2}(z)|\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\leqslant \Big(\sum_{z\in X}|\gamma_{x_1}(z)+\gamma_{x_2}(z)|^2\Big)^{\frac{1}{2}}\Big(\sum_{z\in X}|\gamma_{x_1}(z)-\gamma_{x_2}(z)|^2\Big)^{\frac{1}{2}}\\
&=\|\gamma_{x_1}+\gamma_{x_2}\|_2\|\gamma_{x_1}-\gamma_{x_2}\|_2\\
&\leqslant 2\|\gamma_{x_1}-\gamma_{x_2}\|_2\\
&<\varepsilon^p.
\end{aligned}
$$

最后，有

$$
\begin{aligned}
\lim_{R\to 1^-}\sup_{x\in X}\sum_{z\notin B(x,R,T)}|\eta_x(z)|^p &= \lim_{R\to 1^-}\sup_{x\in X}\sum_{z\notin B(x,R,T)}|(\gamma_x(z))^{\frac{2}{p}}|^p\\
&\leqslant \lim_{R\to 1^-}\sup_{x\in X}\sum_{z\notin B(x,R,T)}|\gamma_x(z)|^2\\
&=0.
\end{aligned}
$$

(iii)⇒(i): 如果 $p=2$, 结论是显然的.

用 $z\mapsto|\eta_x(z)|$ 替换 η_x, 可假设对任意 $x\in X$, η_x 的每个分量都取正值. 定义映射 $\xi: X\to l^2(X)$ 为

$$\xi=M_{p,2}\cdot\eta,$$

其中 $M_{p,2}:\{u\mid u\in l^p(X),\|u\|_p=1\}\to\{v\mid v\in l^2(X),\|v\|_2=1\}$ 是经典 Mazur 映射 [23]. 当 $p<2$ 时，由 Mazur 映射的性质知，对任意 $x_1,x_2\in X$, 存在常数 C, 使得

$$\frac{p}{2}\|\eta_{x_1}-\eta_{x_2}\|_p\leqslant\|\xi_{x_1}-\xi_{x_2}\|_2\leqslant C\|\eta_{x_1}-\eta_{x_2}\|_p^{\frac{p}{2}}. \tag{6.1}$$

当 $M(x_1,x_2,t)>1-r$ 时，有

$$\|\xi_{x_1}-\xi_{x_2}\|_2\leqslant C\|\eta_{x_1}-\eta_{x_2}\|_p^{\frac{p}{2}}<C\varepsilon^{\frac{p}{2}}.$$

当 $p>2$ 时，不等式 (6.1) 的反方向成立. 这样， ξ 就满足了定义 3.2 中的第二个条件.

最后，有

$$
\begin{aligned}
\lim_{R\to 1^-}\sup_{x\in X}\sum_{z\notin B(x,R,T)}|\xi_x(z)|^2 &= \lim_{R\to 1^-}\sup_{x\in X}\sum_{z\notin B(x,R,T)}|(\eta_x(z))^{\frac{p}{2}}|^2\\
&\leqslant \lim_{R\to 1^-}\sup_{x\in X}\sum_{z\notin B(x,R,T)}|\eta_x(z)|^p\\
&=0.
\end{aligned}
$$

因此， X 是可强嵌入的.

致谢 感谢匿名评审专家对改善论文质量所提出的宝贵意见和建议.

参 考 文 献

[1] Kramosil I, Michalek J. Fuzzy metrics and statistical metric spaces [J]. *Kybernetika -Praha-*, 1975, 11(5):336–344.

[2] George A, Veeramani P. On some results in fuzzy metric spaces [J]. *Fuzzy Sets Syst*, 1994, 64(3):395–399.

[3] Gregori V, Morillas S, Sapena A. Examples of fuzzy metrics and applications [J]. *Fuzzy Sets Syst*, 2011, 170(1):95–111.

[4] Lv J R, Luo X G. Image denoising via fast and fuzzy non-local means algorithm [J]. *J Inf Stor Proc Syst*, 2019, 15(5):1108–1118.

[5] Nowark P W, Yu G L. Large scale geometry [M]//EMS Textbooks in Mathematics, Zürich: European Mathematical Society (EMS), 2012.

[6] Milnor J. A note on curvature and fundamental group [J]. *J Differential Geom*, 1968, 2:1–7.

[7] Wolf J A. Growth of finitely generated solvable groups and curvature of Riemannian manifolds [J]. *J Differential Geom*, 1968, 2:421–446.

[8] Roe J. Index theory, coarse geometry, and topology of manifolds [M]//CBMS Regional Conf Ser in Math, 90, Providence, RI: Amer Math Soc, 1996.

[9] Yu G L. The Novikov conjecture for groups with finite asymptotic dimension [J]. *Ann Math*, 1998, 147(2):325–355.

[10] Yu G L. Baum-Connes conjecture and coarse geometry [J]. *K-Theory*, 1995, 9(3):223–231.

[11] Yu G L. The coarse Baum-Connes conjecture for spaces which admit a uniform embedding into Hilbert space [J]. *Invent Math*, 2000, 139(1):201–240.

[12] Carlsson G. Topology and data [J]. *Bull Amer Math Soc*, 2011, 46:255–308.

[13] Weinberger S. What is $\cdots$ persistent homology? [J]. *Notices Amer Math Soc*, 2011, 58(1):36–39.

[14] Zarichnyi M. Coarse structures and fuzzy metrics [J]. *Mat Stud*, 2009, 32(2):180–184.

[15] Grzegrzolka P. Asymptotic dimension of fuzzy metric spaces [EB/OL]. arXiv:2010.09222.

[16] Chung Y C. Property A and coarse embeddability for fuzzy metric spaces [EB/OL]. arXiv:2102.10258.

[17] Ji R, Ogle C, Ramsey B. Strong embeddability and extensions of groups [EB/OL]. arXiv:1307.1935.

[18] Gromov M. Geometric group theory (Sussex, 1991), vol 2: asymptotic invariants of infnite groups [M]//London Math Soc Lecture Note Ser, 182, Cambridge: Cambridge University Press, 1993.

[19] Dranishnikov A N, Zarichnyi M. Asymptotic dimension, decomposition complexity, and Haver's property C [J]. *Topol Appl*, 2013, 169:99–107.

[20] Xia J, Wang X J. On strong embeddability and finite decomposition complexity [J]. *Acta Math Sinica, English Series*, 2017, 33(03):97–112.

[21] Xia J, Wang X J. Strong embeddability for groups acting on metric space [J]. *Chinese Ann Math Ser B*, 2019, 40(2):199–212.

[22] Willett R. Some notes on property A [J]. *Limits of Graphs in Group Theory and Computer Science*, 2009:191–281.

[23] Benyamini Y, Lindenstrauss J. Geometric nonlinear functional analysis, Vol 1 [M]//Amer Math Soc Colloq Publ, 48, Providence, RI: American Mathematical Society, 2000.

Strong Embeddability for Fuzzy Metric Spaces

LI Guoqiang[1] YU Shuhui[2]

[1]School of Mathematics and Statistics, Guizhou University of Finance and Economics, Guiyang 550025, China. E-mail: guoqiangli@mail.gufe.edu.cn

[2]School of Big Data Statistics, Guizhou University of Finance and Economics, Guiyang 550025, China. E-mail: ysh503023@163.com

Abstract In this paper, the authors define strong embeddability of fuzzy metric spaces in the sense of George and Veeramani, and prove that fuzzy metric spaces with strong embeddability are coarsely embeddable into Hilbert space. The authors also show that strong embeddability is an invariant in the coarse category of fuzzy metric spaces. Furthermore, the authors provide equivalent characterizations of strong embeddability for fuzzy metric spaces.

Keywords Coarse geometry, Fuzzy metric spaces, Strong embeddability, Coarse topology

2000 MR Subject Classification 03E72, 54F45, 54A40, 51F30

The English translation of this paper will be published in
Chinese Journal of Contemporary Mathematics, Vol. 43 No. 4, 2022
by ALLERTON PRESS, INC., USA