数 学 年 刊 A 辑
2022, 43(4):431–444
DOI: 10.16205/j.cnki.cama.2022.0028

调和函数类的一些界的估计结果 *

熊 良 鹏 [1] 王 雅 倩 [2]

提要 研究了单位开圆盘内保向复值的调和函数类, 其中函数的解析部分满足一定的从属条件. 完整的给出了该函数类 Bloch 常数的界、系数估计、增长和偏差不等式的界. 进一步，通过指定一些关键参数，证明其 pre-Schwarzian 导数的范数也是有界的.

关键词 Bloch 常数，偏差定理，调和函数， Janowsk 凸函数， pre-Schwarzian 导数

MR (2000) 主题分类 30C45, 30C50

中图法分类 O174.51

文献标志码 A

文章编号 1000-8314(2022)04-0431-14

§1 引 言

设 $\mathcal{A}$ 为定义在单位开圆盘 $\mathbb{U}=\{z\in\mathbb{C}:|z|<1\}$ 内的解析函数族，且其包容的函数满足赋范化条件 $h(0)=0,\ h'(0)=1$. 进一步，用 $\mathcal{S}$ 表示 $\mathcal{A}$ 中满足单叶性条件的子族. 如果 $f,\ g$ 在 $\mathbb{U}$ 内解析，且存在一个 $\mathbb{U}$ 上解析函数 $\omega(z)$: $\omega(0)=0$ 和 $|\omega(z)|<1$, 使得 $f(z)=g(\omega(z))$, 则称 f 从属于 g, 记作 $f(z)\prec g(z)$ (见 [1–2]).

限定参数 $-1\leqslant A<B\leqslant 1$, 则函数

$$\phi(z)=\frac{1+Az}{1+Bz},\quad z\in\mathbb{U}$$

是一个凸函数，显然，它在单位圆盘下的像是关于实轴对称的.

用 $\mathcal{K}(A,B)$ 表示著名的 Janowski 凸函数族，这里

$$\mathcal{K}(A,B)=\Big\{h\in\mathcal{A}:1+\frac{zh''(z)}{h'(z)}\prec\frac{1+Az}{1+Bz},\quad z\in\mathbb{U}\Big\}. \tag{1.1}$$

特别地，当 $A=-1$ 和 $B=1$ 时， $\mathcal{K}(-1,1)$ 为通常的凸函数族. 但当 $A=2\theta-1, B=1$ $(0\leqslant\theta<1)$ 时，其退化为 θ 阶凸族 $\mathcal{K}(\theta)$(见 [3]). 进一步，用 $\mathcal{T}$ 表示 $\mathcal{A}$ 的子集，其包容的函数为

$$\widehat{h}(z)=z-\sum_{k=2}^{\infty}|a_k|z^k,\quad z\in\mathbb{U}.$$

事实上，Silverman[4] 最先研究了 $\mathcal{T}$ 函数族. 为了研究方便, 我们定义 $\mathcal{K}^{\mathcal{T}}(A,B)\equiv\mathcal{K}(A,B)\bigcap\mathcal{T}$.

一个连续函数 $f=u(x,y)+\mathrm{i}v(x,y)$ 为复域 Ω 上的复值调和函数当且仅当 u 和 v 满足拉普拉斯方程

$$\Delta u=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0,\quad \Delta v=\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}=0.$$

本文 2021 年 2 月 24 日收到， 2022 年 10 月 2 日收到修改稿.

[1]通信作者. 江西科技师范大学数学与计算机科学学院，南昌 330038. E-mail: lpxiong2016@whu.edu.cn

[2]江西科技师范大学数学与计算机科学学院，南昌 330038. E-mail: yaqianmath@126.com

*本文受国家自然科学基金 (No. 12061035), 江西省自然科学基金 (No. 20212BAB201012), 江西省教育厅科研项目 (No. GJJ201104) 和江西科技师范大学青年拔尖人才项目 (No. 2021QNBJRC003) 的资助.

在任意单连通域 $\mathfrak{D}\subset\Omega$, 复值调和函数可以唯一的表达为 $f=h+\overline{g}$, 这里 h 和 g 在 $\mathfrak{D}$ 内解析. 我们称 h 为 f 的解析部分, g 为 f 共轭解析部分, 同时, 用 $J_f(z)=|h'(z)|^2-|g'(z)|^2$ 代表 f 的雅可比, $w(z)=\frac{g'(z)}{h'(z)}$ 代表 f 的扩张. Lewy[5] 表明调和函数 f 在 $\mathbb{U}$ 上为局部单叶保向的当且仅当 $J_f(z)>0$, 这暗示了 $|w(z)|<1,\quad z\in\mathbb{U}$.

用 $\mathcal{H}$ 表示定义开单位圆盘 $\mathbb{U}$ 上连续复值调和函数类, $\mathcal{S}_{\mathcal{H}}$ 为 $\mathcal{H}$ 中符合单叶保向条件的子集, 其包含的函数形式为 $f=h+\overline{g}$, 这里 h 和 g 被赋范化且

$$h(z)=z+\sum_{k=2}^{\infty}a_kz^k,\quad g(z)=\sum_{k=1}^{\infty}b_kz^k,\quad z\in\mathbb{U}.\tag{1.2}$$

特别地, 如果 $b_1=g'(0)=0$, 则 $\mathcal{S}_{\mathcal{H}}\equiv\mathcal{S}_{\mathcal{H}_0}$. 很显然, $\mathcal{S}_{\mathcal{H}_0}\subset\mathcal{S}_{\mathcal{H}}$. 先前的研究已证实 $\mathcal{S}_{\mathcal{H}_0}$ 是紧的和正规的, 但是 $\mathcal{S}_{\mathcal{H}}$ 是正规而非紧的 (见 [6]). 有关 $\mathbb{U}$ 上各种不同形式的调和单叶函数子族的有趣结果, 可查阅相关文献, 参见文 [7–16].

解析和共轭解析部分对调和函数的几何性质研究都起到了极其重要的作用 (见 [17]). 文 [18] 的作者研究了 $\mathcal{S}_{\mathcal{H}}$ 的子集 $\overline{\mathcal{S}}_{\mathcal{H}}^{\alpha}$ 的性质, 其中函数满足 $f=h+\overline{g}$, $|b_1|=\alpha$. 文 [19] 的 Klimek-Michalski 研究了族 $\widehat{\mathcal{S}}^{\alpha}$ 的几何性质, 其中函数满足 $f=h+\overline{g}\in\mathcal{S}_{\mathcal{H}}$, 这里 $|b_1|=\alpha$, $h\in\mathcal{K}$. 进一步, Kanas-Klimek-Smęt[20] 考虑了函数族 $\overline{\mathcal{S}}_{\mathcal{H}}^{\alpha}$ 和 $\widehat{\mathcal{S}}^{\alpha}$ 的系数估计、偏差定理和 Bloch 常数的界. 近来, Kanas-Maharana-Prajapat[21] 研究了调和函数族 $\mathcal{G}_{\mathcal{H}}^{\alpha}$, 其包含的函数形式为 $f=h+\overline{g}\in\mathcal{H}$ 且 $|b_1|=\alpha$, $h\in\mathcal{G}$, 这里 $\mathcal{G}$ 在一个方向为凸的.

受 Kanas-Maharana-Prajapat[21] 等研究思路的启发, 我们考虑调和函数族 $\mathcal{K}_{\mathcal{H}}^{\mathcal{T}}(\alpha,A,B)$ 的子类, 其中函数的解析部分是 Janowski 凸的, 也即是

$$\mathcal{K}_{\mathcal{H}}^{\mathcal{T}}(\alpha,A,B)=\{f=h+\overline{g}\in\mathcal{H}:g'(z)=w(z)h'(z),h\in\mathcal{K}^{\mathcal{T}}(A,B)\},\tag{1.3}$$

这里 $-1\leqslant A<B\leqslant 1$, w 是单位开圆盘对应的莫比乌斯自映射, 且

$$w(z)=\frac{z+\alpha}{1+\alpha z},\quad 0\leqslant\alpha<1.$$

注意到 $\mathcal{K}_{\mathcal{H}}^{\mathcal{T}}(\alpha,A,B)\subset\widehat{\mathcal{S}}^{\alpha}\subset\overline{\mathcal{S}}_{\mathcal{H}}^{\alpha}$, 沿着关联函数族 $\mathcal{G}_{\mathcal{H}}^{\alpha}$, $\widehat{\mathcal{S}}^{\alpha}$ 和 $\overline{\mathcal{S}}_{\mathcal{H}}^{\alpha}$ 的一些研究思路 (见 [20–21]), 我们将通过考虑函数族 $\mathcal{K}_{\mathcal{H}}^{\mathcal{T}}(\alpha,A,B)$ 的情况来扩充和提升一些相应的结果, 比如系数估计、 Bloch 常数和 pre-Schwarzian 导数等问题.

此文按照 Kanas-Maharana-Prajapat[21] 方式定义调和函数的 Bloch 常数和 pre-Schwarzian 导数, 这些定义与传统的解析函数情形保持一致. 在第 2 节, 我们给出了一些重要的引理. 在第 3.1 节, 我们证明了函数 $f\in\mathcal{K}_{\mathcal{H}}^{\mathcal{T}}(\alpha,A,B)$ 的 Bloch 常数是有界的. 在第 3.2 节, 我们得到了函数 $f\in\mathcal{K}_{\mathcal{H}}^{\mathcal{T}}(\alpha,A,B)$ 所有的系数边界估计, 并且当 $k=2$ 时, 估计是最优的. 同时, 关联函数族 $\mathcal{K}_{\mathcal{H}}^{\mathcal{T}}(\alpha,A,B)$ 的增长和偏差定理被彻底解决. 最后, 通过使用 Vincent 定理, 我们证明了族 $\mathcal{K}_{\mathcal{H}}^{\mathcal{T}}(\alpha,A,B)$ 的 pre-Schwarzian 导数的范数是有界的. 相比较对象族 $\mathcal{G}_{\mathcal{H}}^{\alpha}$(或 $\widehat{\mathcal{S}}^{\alpha}$) 情形, 这里的界更精确 (见 §3.3).

§2 预备引理

为了讨论主要结果, 我们将需要如下引理.

引理 2.1 如果 $h=z-\sum\limits_{k=2}^{\infty}|a_k|z^k\in\mathcal{K}^{\mathcal{T}}(A,B)$ 和 $|z|=r<1$, 则下列结论成立:

(i) $\left|\frac{zh''(z)}{h'(z)}\right|\leqslant\frac{(B-A)r}{1-Br}$, $z\in\mathbb{U}$.

(ii) $1-\frac{B-A}{1+2B-A}r\leqslant|h'(z)|\leqslant 1+\frac{B-A}{1+2B-A}r$, $z\in\mathbb{U}$.

(iii) $|a_k|\leqslant\frac{B-A}{k[(1+B)k-(1+A)]}$, $k=\{2,3,\cdots\}$.

证　引理 2.1 中 (i)–(iii) 结果是著名的，因此，这里省略详细证明过程.

引理 2.2 [22] (Avkhadiev-Wirths)　假设 $f=g+\overline{h}\in\mathcal{H}$ 且 $g'=wh'$, 这里 w 是 $\mathbb{U}$ 的莫比乌斯自映射

$$w(z)=\frac{z+\alpha}{1+\alpha z}=c_0+c_1z+c_2z^2+\cdots,\quad \alpha\in(0,1),\ c_i\in\mathbb{C},\ i\in\{1,2,\cdots\}.$$

则下列结论成立：

(i)　$c_0=g'(0)=\alpha$ 和 $|c_k|\leqslant 1-|c_0|^2,\quad k\in\{1,2,\cdots\}$.

(ii)　$\frac{|r-\alpha|}{1-\alpha r}\leqslant|w(z)|\leqslant\frac{r+\alpha}{1+\alpha r},\quad |z|=r<1$.

(iii)　$|w'(z)|\leqslant\frac{1-|w(z)|^2}{1-|z|^2},\quad z\in\mathbb{U}$.

§3　主要结果和证明

§3.1　Bloch 常数的界

设 f 为 $\mathbb{U}$ 上的全纯函数，经典的 Bloch semi- 范数被定义为

$$\|f\|_{\mathcal{B}}=\sup\{(1-|z|^2)|f'(z)|:z\in\mathbb{U}\}.$$

如果 $\|f\|_{\mathcal{B}}<\infty$, 则 f 被称为 Bloch 函数 (见 [23]). 相应的概念在高维复空间也被广泛推广使用 (见 [24–25]]).

设函数 $f=h+\overline{g}\in\mathcal{H}$, 则 f 的调和 Bloch 常数为

$$\mathcal{B}_f=\sup_{z,w\in\mathbb{U},z\neq w}\frac{|f(z)-f(w)|}{\mathcal{Q}(z,w)},\tag{3.1}$$

这里

$$\mathcal{Q}(z,w)=\frac{1}{2}\log\Big(\frac{1+|\frac{z-w}{1-\overline{z}w}|}{1-|\frac{z-w}{1-\overline{z}w}|}\Big)=\operatorname{arctan}\Big|\frac{z-w}{1-\overline{z}w}\Big|$$

是介于 z 和 w 之间的双曲距离，这里 $z,w\in\mathbb{U}$. 若 $\mathcal{B}_f<\infty$, 则称 f 为 Bloch 调和函数. 利用 (3.1), Colonna[26] 证明了

$$\mathcal{B}_f=\sup_{z\in\mathbb{U}}(1-|z|^2)(|f_z(z)|+|f_{\overline{z}}(z)|)=\sup_{z\in\mathbb{U}}(1-|z|^2)|h'(z)|(1+|w(z)|).\tag{3.2}$$

事实上，许多作者已经不同程度研究了调和函数的 Bloch 常数 (见 [27]).

在这一节，我们得到函数族 $\mathcal{K}_{\mathcal{H}}^{\mathcal{T}}(\alpha,A,B)$ 的 Bloch 常数的界.

定理 3.1　设 $\alpha\in(0,1)$, $-1\leqslant A<B\leqslant 1$ 及 $|z|=r<1$. 如果函数 $f\in\mathcal{K}_{\mathcal{H}}^{\mathcal{T}}(\alpha,A,B)$, 则 f 的 Bloch 常数 $\mathcal{B}_f$ 是有界的，且

$$\mathcal{B}_f\leqslant(1+\alpha)\frac{(1+r_0-r_0^2-r_0^3)[1+2B-A+(B-A)r_0]}{(1+2B-A)(1+\alpha r_0)},$$

这里 r_0 是方程 $\mathcal{N}(r):=\{(1-2r-3r^2)[1+2B-A+(B-A)r]+(1+r-r^2-r^3)(B-A)\}(1+2B-A)(1+\alpha r)-(1+r-r^2-r^3)[1+2B-A+(B-A)r](1+2B-A)\alpha=0$ 在区间 $(0,1)$ 内唯一的根.

证 假设 $f=h+\overline{g}\in\mathcal{K}_{\mathcal{H}}^{\mathcal{T}}(\alpha,A,B)$, 则其解析部分函数 $h\in\mathcal{K}^{\mathcal{T}}(A,B)$. 利用引理 2.1–2.2 和 (3.2), 有

$$\begin{aligned}\mathcal{B}_f&=\sup_{z\in\mathbb{U}}(1-|z|^2)|h'(z)|(1+|w(z)|)\\&\leqslant\sup_{0<r<1}(1-r^2)\Big(1+\frac{B-A}{1+2B-A}r\Big)\Big(1+\frac{r+\alpha}{1+\alpha r}\Big)\\&=(1+\alpha)\sup_{0<r<1}(1-r^2)\Big(1+\frac{B-A}{1+2B-A}r\Big)\frac{1+r}{1+\alpha r}.\end{aligned}\tag{3.3}$$

为了取得 (3.3) 中 $\mathcal{B}_f$ 的界，我们定义以下函数

$$\begin{aligned}\mathbb{Q}(r)&=(1-r^2)\Big(1+\frac{B-A}{1+2B-A}r\Big)\frac{1+r}{1+\alpha r}\\&=\frac{(1+r-r^2-r^3)[1+2B-A+(B-A)r]}{(1+2B-A)(1+\alpha r)},\quad 0<r<1.\end{aligned}\tag{3.4}$$

简单计算可知，函数 $\mathbb{Q}(r)$ 的导数为

$$\mathbb{Q}'(r)=\frac{\mathcal{N}(r)}{(1+2B-A)^2(1+\alpha r)^2},\quad 0<r<1,\tag{3.5}$$

这里

$$\begin{aligned}\mathcal{N}(r)=&\{(1-2r-3r^2)[1+2B-A+(B-A)r]\\&+(1+r-r^2-r^3)(B-A)\}(1+2B-A)(1+\alpha r)\\&-(1+r-r^2-r^3)[1+2B-A+(B-A)r](1+2B-A)\alpha.\end{aligned}\tag{3.6}$$

由 (3.4) 和 (3.5), 我们注意到：如果 $\mathcal{N}(r)=0$, 则 $\mathbb{Q}'(r)=0$, $r\in(0,1)$. 显然， $\mathcal{N}(r)$ 是 $[0,1]$ 上关于 r 的连续函数．再用 (3.6), 有

$$\begin{aligned}\mathcal{N}(0)&=(1+3B-2A)(1+2B-A)-(1+2B-A)^2\alpha\\&=(1+2B-A)[(1+2B-A)(1+\alpha)+B-A]>0\end{aligned}$$

和

$$\begin{aligned}\mathcal{N}(1)&=-4(1+2B-A+B-A)(1+2B-A)(1+\alpha)\\&=-4(1+3B-2A)(1+2B-A)(1+\alpha)<0.\end{aligned}$$

因此，由零点定理可知：存在一个根 $r_0\in(0,1)$, 使得 $\mathcal{N}(r_0)=0$. 事实上，如果我们能证明 r_0 在区间 $(0,1)$ 是唯一的，则 r_0 是函数 $\mathbb{Q}(r)$ 的最大值点．因此，仅需证明函数 $\mathcal{N}(r)$ 关于 r 是单调的，这里 $r\in(0,1)$, $\alpha\in(0,1)$. 为此，我们注意到

$$\begin{aligned}\mathcal{N}'(r)=&\{(-2-6r)[1+2B-A+(B-A)r]\\&+2(1-2r-3r^2)(B-A)\}(1+2B-A)(1+\alpha r)\\=&-2\{(1+3r)[1+2B-A+(B-A)r]\\&-(B-A)(1-2r-3r^2)\}(1+2B-A)(1+\alpha r)\\=&-2(1+2B-A)(1+\alpha r)[1+B\\&+3(3B-2A+1)r+6(B-A)r^2]<0.\end{aligned}\tag{3.7}$$

因此，由 (3.3)–(3.4) 和 (3.7), 我们有

$$\begin{aligned}\mathcal{B}_f &\leqslant (1+\alpha)\sup_{0<r<1}\mathbb{Q}(r)\\ &\leqslant (1+\alpha)\frac{(1+r_0-r_0^2-r_0^3)[1+2B-A+(B-A)r_0]}{(1+2B-A)(1+\alpha r_0)},\end{aligned}$$

这里 r_0 是方程 $\mathcal{N}(r)=0$ 在区间 $(0,1)$ 内唯一的根，证毕.

§3.2 系数估计，增长定理，偏差定理

这一节，我们将得到函数族 $\mathcal{K}_{\mathcal{H}}^{\mathcal{T}}(\alpha,A,B)$ 的系数边界，并指出当 $k=2$ 时，边界估计是最优的 (见定理 3.2). 同时，我们在定理 3.3 中推导出了函数族 $\mathcal{K}_{\mathcal{H}}^{\mathcal{T}}(\alpha,A,B)$ 的增长和偏差结果.

定理 3.2　如果 $\alpha\in(0,1)$, $-1\leqslant A<B\leqslant 1$ 及

$$f=h+\overline{g}=z-\sum_{k=2}^{\infty}|a_k|z^k+\overline{\sum_{k=2}^{\infty}b_kz^k}\in\mathcal{K}_{\mathcal{H}}^{\mathcal{T}}(\alpha,A,B),\quad z\in\mathbb{U},\tag{3.8}$$

则下列结论成立：

(i)　当 $k=2$ 时，有

$$|b_2|\leqslant\frac{1-\alpha^2}{2}+\frac{(B-A)\alpha}{2(1+2B-A)}.$$

这个估计是最优的且极值函数为

$$f(z)=\begin{cases}z-\dfrac{B-A}{2(1+2B-A)}z^2+\overline{\dfrac{1}{2}z^2-\dfrac{B-A}{3(1+2B-A)}z^3}, & \alpha=0,\\ z-\dfrac{B-A}{2(1+2B-A)}z^2+\overline{G(z)}, & \alpha\neq 0,\end{cases}\tag{3.9}$$

这里

$$\begin{aligned}G(z)=&\Big[\frac{B-A}{1+2B-A}\Big(\frac{1}{\alpha^2}-1\Big)-\frac{1}{\alpha}\Big]z+\frac{B-A}{2\alpha(1+2B-A)}z^2\\ &+\Big[\frac{B-A}{1+2B-A}\Big(\frac{1}{\alpha^3}-\frac{1}{\alpha}\Big)-\frac{1}{\alpha^2}+1\Big]\ln(1-\alpha z),\quad z\in\mathbb{U}.\end{aligned}$$

(ii)　当 $k=\{3,4,\cdots\}$ 时，有

$$|b_k|\leqslant\frac{1-\alpha^2}{k}\Big[1+\sum_{p=1}^{k-2}\frac{B-A}{(1+B)(p+1)-(1+A)}\Big]+\frac{(B-A)\alpha}{k[(1+B)k-(1+A)]},\tag{3.10}$$

(3.10) 对应的估计不是最优的.

证　假设 $f=h+\overline{g}\in\mathcal{K}_{\mathcal{H}}^{\mathcal{T}}(\alpha,A,B)$, 则

$$g'(z)=w(z)h'(z),\quad z\in\mathbb{U}.\tag{3.11}$$

利用 (3.8), (3.11) 和引理 2.2, 我们得到

$$kb_k=-\sum_{p=0}^{k-1}(p+1)|a_{p+1}|c_{k-p-1},\quad k\in\{2,3,\cdots\},\tag{3.12}$$

这里 $c_s \in \mathbb{C}$, $s \in \{0,1,2,\cdots\}$. 在 (3.12) 中取 $k=2$, 则有

$$2b_2 = -|a_1|c_1 - 2|a_2|c_0. \tag{3.13}$$

因为 $|c_1| \leqslant 1-|c_0|^2$, 由引理 2.1 和 (3.13), 有

$$\begin{aligned}2|b_2| &\leqslant |a_1||c_1| + 2|a_2||c_0| \leqslant |c_1| + \frac{B-A}{1+2B-A}|c_0| \\ &\leqslant 1-|c_0|^2 + \frac{B-A}{1+2B-A}|c_0| \leqslant 1-\alpha^2 + \frac{(B-A)\alpha}{1+2B-A}.\end{aligned} \tag{3.14}$$

在 (3.14), 我们用到事实 $|c_0| = |w(0)| = |g'(0)| = |b_1| = \alpha$. 接下来，令函数 $f(z) = h(z) + \overline{g(z)}$, 这里

$$h(z) = z - \frac{B-A}{2(1+2B-A)}z^2 \in \mathcal{K}^{\mathcal{T}}(A,B),$$

且函数 f 的扩张形式为

$$w(z) = \frac{z-\alpha}{1-\alpha z}, \quad 0 \leqslant \alpha < 1, \quad z \in \mathbb{U}. \tag{3.15}$$

通过 (3.11) 和 (3.15), 我们有

$$g'(z) = z\Big(1 - \frac{B-A}{1+2B-A}z\Big), \quad \alpha = 0 \tag{3.16}$$

和

$$\begin{aligned}g'(z) &= \frac{z-\alpha}{1-\alpha z}\Big(1-\frac{B-A}{1+2B-A}z\Big) \\ &= \Big[\frac{B-A}{1+2B-A}\Big(\frac{1}{\alpha^2}-1\Big) - \frac{1}{\alpha}\Big] + \frac{B-A}{\alpha(1+2B-A)}z \\ &\quad + \Big[\frac{B-A}{1+2B-A}\Big(1-\frac{1}{\alpha^2}\Big) + \frac{1}{\alpha} - \alpha\Big]\frac{1}{1-\alpha z}, \quad \alpha \neq 0.\end{aligned} \tag{3.17}$$

对 (3.16) 和 (3.17), 我们各自对 z 进行积分，则

$$g(z) = \frac{1}{2}z^2 - \frac{B-A}{3(1+2B-A)}z^3, \quad \alpha = 0 \tag{3.18}$$

和

$$\begin{aligned}g(z) &= \Big[\frac{B-A}{1+2B-A}\Big(\frac{1}{\alpha^2}-1\Big) - \frac{1}{\alpha}\Big]z + \frac{B-A}{2\alpha(1+2B-A)}z^2 \\ &\quad + \Big[\frac{B-A}{1+2B-A}\Big(\frac{1}{\alpha^3}-\frac{1}{\alpha}\Big) - \frac{1}{\alpha^2} + 1\Big]\ln(1-\alpha z), \quad \alpha \neq 0.\end{aligned} \tag{3.19}$$

我们容易发现 (3.14) 估计是最优的，其极值函数由 (3.18) 和 (3.19) 决定，结论 (i) 证毕.

接下来，我们证明结论 (ii). 由 (3.12), 我们有

$$\begin{aligned}|b_k| &= \frac{1}{k}\sum_{p=0}^{k-1}(p+1)|a_{p+1}||c_{k-p-1}| \\ &= \frac{1}{k}\Big[|a_1||c_{k-1}| + k|a_k||c_0| + \sum_{p=1}^{k-2}(p+1)|a_{p+1}||c_{k-p-1}|\Big], \quad k \in \{3,4,\cdots\}.\end{aligned} \tag{3.20}$$

应用引理 2.1 和 (3.20), 则

$$|b_k| = \frac{1}{k}|a_1||c_{k-1}| + |a_k||c_0| + \frac{1}{k}\sum_{p=1}^{k-2}(p+1)|a_{p+1}||c_{k-p-1}|$$

$$
\begin{aligned}
&\leqslant \frac{1-\alpha^2}{k}+\frac{(B-A)\alpha}{k[(1+B)k-(1+A)]} \\
&\quad +\frac{1-\alpha^2}{k}\sum_{p=1}^{k-2}\frac{B-A}{(1+B)(p+1)-(1+A)} \\
&\leqslant \frac{1-\alpha^2}{k}\Big[1+\sum_{p=1}^{k-2}\frac{B-A}{(1+B)(p+1)-(1+A)}\Big] \\
&\quad +\frac{(B-A)\alpha}{k[(1+B)k-(1+A)]}. \qquad (3.21)
\end{aligned}
$$

在上面 (3.21) 中，我们用到了事实 $|c_{k-p-1}|\leqslant 1-|c_0|^2=1-|b_1|^2=1-\alpha^2$. 这样，结论 (ii) 证毕.

定理 3.3　设 $\alpha\in(0,1)$, $-1\leqslant A<B\leqslant 1$ 和 $|z|=r<1$. 如果函数 $f=h+\overline{g}\in\mathcal{K}_{\mathcal{H}}^{\mathcal{T}}(\alpha,A,B)$, 则下面结论成立：

(i)　$\mathcal{F}_1\leqslant|g'(z)|\leqslant\mathcal{F}_2$, 这里

$$\mathcal{F}_1=\frac{|r-\alpha|}{1-\alpha r}\Big(1-\frac{B-A}{1+2B-A}r\Big),\quad \mathcal{F}_2=\frac{r+\alpha}{1+\alpha r}\Big(1+\frac{B-A}{1+2B-A}r\Big).$$

(ii)　$|\mathcal{F}_3|\leqslant|g(z)|\leqslant\mathcal{F}_4$,

$$\mathcal{F}_3=\begin{cases}\mathbb{S}_2, & \alpha\neq 0,\\ \dfrac{1}{2}r^2-\dfrac{B-A}{3(1+2B-A)}r^3, & \alpha=0,\end{cases}$$

$$\mathcal{F}_4=\begin{cases}\mathbb{S}_1, & \alpha\neq 0,\\ \dfrac{1}{2}r^2+\dfrac{B-A}{3(1+2B-A)}r^3, & \alpha=0,\end{cases}$$

这里

$$
\begin{aligned}
\mathbb{S}_1=&\Big(-\frac{1}{\alpha}-\frac{B-A}{1+2B-A}\Big)r+\Big[1-\frac{1}{\alpha^2}+\frac{B-A}{1+2B-A}\Big(\frac{1}{\alpha^3}-\frac{1}{\alpha}\Big)\Big] \\
&\cdot\ln(1-\alpha r)+\frac{B-A}{\alpha^3(1+2B-A)}\ln(1+\alpha r)
\end{aligned}
$$

及

$$
\begin{aligned}
\mathbb{S}_2=&\frac{B-A}{2\alpha(1+2B-A)}r^2+\Big[\frac{1}{\alpha}+\frac{B-A}{1+2B-A}\Big(1-\frac{1}{\alpha^2}\Big)\Big]r \\
&+\Big[1-\frac{1}{\alpha^2}+\frac{B-A}{\alpha(1+2B-A)}\Big(\frac{1}{\alpha^2}-1\Big)\Big]\ln(1+\alpha r).
\end{aligned}
$$

(iii)

$$\Big|\frac{zg''(z)}{g'(z)}\Big|\leqslant\frac{(1-\alpha^2)r}{(1-\alpha r)|r-\alpha|}+\frac{(B-A)r}{1-Br}.$$

证　因函数 $f=h+\overline{g}\in\mathcal{K}_{\mathcal{H}}^{\mathcal{T}}(\alpha,A,B)$. 则我们有关系式

$$g'(z)=w(z)h'(z),\quad z\in\mathbb{U}. \qquad (3.22)$$

由于引理 2.1–2.2 以及 (3.22), 容易知道

$$\frac{|r-\alpha|}{1-\alpha r}\Big(1-\frac{B-A}{1+2B-A}r\Big)\leqslant|g'(z)|\leqslant\frac{r+\alpha}{1+\alpha r}\Big(1+\frac{B-A}{1+2B-A}r\Big), \qquad (3.23)$$

结论 (i) 证毕.

接下来，我们继续考虑结论 (ii) 和 (iii). 取 (3.22) 式的对数求导可得：

$$\frac{zg''(z)}{g'(z)}=\frac{zw'(z)}{w(z)}+\frac{zh''(z)}{h'(z)},\quad z\in\mathbb{U}\tag{3.24}$$

及

$$1+\frac{zg''(z)}{g'(z)}=\frac{zw'(z)}{w(z)}+1+\frac{zh''(z)}{h'(z)},\quad z\in\mathbb{U}.\tag{3.25}$$

因为 $h\in\mathcal{K}^{\mathcal{T}}(A,B)$, 这暗示了

$$\Re\Big(1+\frac{zh''(z)}{h'(z)}\Big)>\frac{1+A}{1+B},\quad z\in\mathbb{U}.\tag{3.26}$$

因此，用引理 2.2, (3.25) 和 (3.26), 我们有

$$\Re\Big(1+\frac{zg''(z)}{g'(z)}\Big)>\frac{1-\alpha}{1+\alpha}+\frac{1+A}{1+B}>0>-\frac{1}{2},$$

这表明函数 g 是单叶的 (见 [21]).

在文 [28] 中，我们注意到：如果函数 ψ 是单叶的，且

$$m'(r)\leqslant|\psi'(z)|\leqslant M'(r),\quad 0\leqslant|z|=r<1,$$

则

$$\int_0^r m'(t)\mathrm{d}t\leqslant|\psi(z)|\leqslant\int_0^r M'(t)\mathrm{d}t.$$

应用 (3.23), 得到

$$\begin{aligned}|g(z)|&\leqslant\int_0^r\frac{t+\alpha}{1+\alpha t}\mathrm{d}t+\frac{B-A}{1+2B-A}\int_0^r\frac{t^2+\alpha t}{1+\alpha t}\mathrm{d}t\\&=\begin{cases}\mathbb{S}_1, & \alpha\neq 0,\\ \dfrac{1}{2}r^2+\dfrac{B-A}{3(1+2B-A)}r^3, & \alpha=0,\end{cases}\end{aligned}$$

这里

$$\begin{aligned}\mathbb{S}_1=&\frac{B-A}{2\alpha(1+2B-A)}r^2+\Big[\frac{1}{\alpha}+\frac{B-A}{1+2B-A}\Big(1-\frac{1}{\alpha^2}\Big)\Big]r\\&+\Big[1-\frac{1}{\alpha^2}+\frac{B-A}{\alpha(1+2B-A)}\Big(\frac{1}{\alpha^2}-1\Big)\Big]\ln(1+\alpha r).\end{aligned}$$

同时,

$$\begin{aligned}|g(z)|&\geqslant\Big|\int_0^r\frac{t-\alpha}{1-\alpha t}\mathrm{d}t-\frac{B-A}{1+2B-A}\int_0^r\frac{t^2-\alpha t}{1-\alpha t}\mathrm{d}t\Big|\\&=\begin{cases}|\mathbb{S}_2|, & \alpha\neq 0,\\ \Big|\dfrac{1}{2}r^2-\dfrac{B-A}{3(1+2B-A)}r^3\Big|, & \alpha=0,\end{cases}\end{aligned}$$

这里

$$\begin{aligned}\mathbb{S}_2=&\Big(-\frac{1}{\alpha}-\frac{B-A}{1+2B-A}\Big)r+\Big[1-\frac{1}{\alpha^2}+\frac{B-A}{1+2B-A}\Big(\frac{1}{\alpha^3}-\frac{1}{\alpha}\Big)\Big]\\&\cdot\ln(1-\alpha r)+\frac{B-A}{\alpha^3(1+2B-A)}\ln(1+\alpha r),\end{aligned}$$

结论 (ii) 证毕.

最后，用引理 2.2, 我们能得到下面不等式

$$|w'(z)| \leqslant \frac{1-\alpha^2}{(1-\alpha r)^2}, \quad |z|=r<1. \tag{3.27}$$

在 (3.24) 和 (3.27) 中，使用引理 2.1 和 2.2, 则有

$$\begin{aligned}\Big|\frac{zg''(z)}{g'(z)}\Big| &= \Big|\frac{zw'(z)}{w(z)}+\frac{zh''(z)}{h'(z)}\Big| \\ &\leqslant \Big|\frac{zw'(z)}{w(z)}\Big|+\Big|\frac{zh''(z)}{h'(z)}\Big| \\ &\leqslant \frac{(1-\alpha^2)r}{(1-\alpha r)|r-\alpha|}+\frac{(B-A)r}{1-Br},\end{aligned}$$

结论 (iii) 证毕.

§3.3 Pre-Schwarzian 导数

设 f 为 $\mathbb{U}$ 内解析且局部单叶函数，它的 Schwarzian 导数是 $S_f=(T_f)'-\frac{(T_f)^2}{2}$, 这里

$$T_f(z)=\frac{f''(z)}{f'(z)} \tag{3.28}$$

是 f 的 pre-Schwarzian 导数．同时， T_f 的范数定义为

$$\|T_f\|=\sup_{z\in\mathbb{U}}(1-|z|^2)|T_f|. \tag{3.29}$$

不同于解析函数的情形 (见 (3.28)–(3.29)), 调和函数的 pre-Schwarzian 导数 (或 Schwarzian 导数) 允许有各种不同的定义形式 (见 [29–30]).

在文 [31], Chuaqui-Duren-Osgood 给出如下调和 pre-Schwarzian 导数定义：

$$T_f=\frac{2\partial(\log\lambda)}{\partial z}, \tag{3.30}$$

这里 $\lambda=|h'|+|g'|$(见 [28]). 事实上，容易看出以上定义与经典的解析函数 pre-Schwarzian 导数相吻合．而且，利用文 [32] 和 (3.30), 我们可以重新改写 pre-Schwarzian 导数如下：

$$T_f=\frac{2\partial(\log\lambda)}{\partial z}=\frac{h''}{h'}+\frac{2w'\overline{w}}{1+|w|^2}=T_h+\frac{2w'\overline{w}}{1+|w|^2}. \tag{3.31}$$

因此，我们也可以按照 (3.29) 使用调和 pre-Schwarzian 导数的范数的定义．本节，我们将给出函数族 $\mathcal{K}_{\mathcal{H}}^{\mathcal{T}}(\alpha,A,B)$ 关联 pre-Schwarzian 导数的一个不等式 (见定理 3.4(i)). 特别地， $\mathcal{K}_{\mathcal{H}}^{\mathcal{T}}\big(\alpha,\frac{1}{2},1\big)$ 族内函数的 pre-Schwarzian 导数的范数的界也被决定 (见定理 3.4(ii)).

定理 3.4 设 $\alpha\in[0,1)$, $-1\leqslant A<B$, $0\leqslant B\leqslant 1$ 和 $|z|=r<1$. 假设 $f\in\mathcal{K}_{\mathcal{H}}^{\mathcal{T}}(\alpha,A,B)$, 则如下结论成立：

(i) 若 $f\in\mathcal{K}_{\mathcal{H}}^{\mathcal{T}}(\alpha,A,B)$, 则 $|T_f|\leqslant\mathbb{J}(r)$, 这里

$$\mathbb{J}(r)=\frac{B-A}{1-Br}+\frac{2(1-\alpha^2)(r+\alpha)}{(1+\alpha r)[(1+r^2)(1+\alpha^2)-4\alpha r]}.$$

进一步，如果 $\mathbb{M}(r)=(1-r^2)\mathbb{J}(r)$, 则至少存在一个根 $r_0\in(0,1)$, 使得 $\mathbb{M}'(r)=0$.

(ii) 若 $f\in\mathcal{K}_{\mathcal{H}}^{\mathcal{T}}\big(\alpha,\frac{1}{2},1\big)$, 则 f 的 pre-Schwarzian 导数的范数是有界的，并且

$$\|T_f\|\leqslant\frac{1}{2}(1+r_0)+2(1-\alpha^2)\frac{(1-r_0^2)(r_0+\alpha)}{(1+\alpha r_0)[(1+r_0^2)(1+\alpha^2)-4\alpha r_0]},$$

这里 r_0 是方程 $\mathbb{T}(r)=[\alpha(1+\alpha^2)r^3+(1-3\alpha^2)r^2+\alpha(\alpha^2-3)r+1+\alpha^2]^2+2(1-\alpha^2)[(\alpha^4+4\alpha^2-1)r^4+4\alpha(1-\alpha^2)r^3-4(1+\alpha^4)r^2+4\alpha(\alpha^2-1)r+1+4\alpha^2-\alpha^4]=0$ 在区间 $(0,1)$ 内唯一的根.

证 (i) 假设 $f=h+\overline{g}\in\mathcal{K}_{\mathcal{H}}^{\mathcal{T}}(\alpha,A,B)$, 则 $h\in\mathcal{K}^{\mathcal{T}}(A,B)$. 应用引理 2.1, 我们有

$$|T_h|=\Big|\frac{h''}{h'}\Big|\leqslant\frac{B-A}{1-Br},\quad |z|=r<1. \tag{3.32}$$

由 (3.31) 和上面的 (3.32), 容易得到

$$|T_f|=\Big|\frac{h''}{h'}+\frac{2w'\overline{w}}{1+|w|^2}\Big|\leqslant|T_h|+\frac{2|w'||\overline{w}|}{1+|w|^2}\leqslant\frac{B-A}{1-Br}+\frac{2|w'||\overline{w}|}{1+|w|^2}. \tag{3.33}$$

利用引理 2.2 和 (3.33), 则

$$|T_f|\leqslant\mathbb{J}(r):=\frac{B-A}{1-Br}+\frac{2(1-\alpha^2)(r+\alpha)}{(1+\alpha r)[(1+r^2)(1+\alpha^2)-4\alpha r]}. \tag{3.34}$$

现在，我们定义函数 $\mathbb{M}(r)=(1-r^2)\mathbb{J}(r)$, $0<r<1$, 则

$$\begin{aligned}\mathbb{M}'(r)=&(B-A)\frac{Br^2-2r+B}{(1-Br)^2}+2(1-\alpha^2)\\&\cdot\frac{\mathcal{V}(\alpha,r)}{[\alpha(1+\alpha^2)r^3+(1-3\alpha^2)r^2+(\alpha^3-3\alpha)r+1+\alpha^2]^2},\end{aligned} \tag{3.35}$$

这里 $\mathcal{V}(\alpha,r)=(\alpha^4+4\alpha^2-1)r^4+4\alpha(1-\alpha^2)r^3-4(1+\alpha^4)r^2+4\alpha(\alpha^2-1)r+1+4\alpha^2-\alpha^4$.

通过使用 (3.35), 我们注意到 $\mathbb{M}'(r)=0$ 当且仅当 $\mathbb{H}(r)=0$, 这里

$$\begin{aligned}\mathbb{H}(r)=&(B-A)[\alpha(1+\alpha^2)r^3+(1-3\alpha^2)r^2+(\alpha^3-3\alpha)r+1+\alpha^2]^2\\&\cdot(Br^2-2r+B)+2(1-\alpha^2)[(\alpha^4+4\alpha^2-1)r^4+4\alpha(1-\alpha^2)r^3\\&-4(1+\alpha^4)r^2+4\alpha(\alpha^2-1)r+1+4\alpha^2-\alpha^4](1-Br)^2.\end{aligned}$$

因为 $\mathbb{H}(r)$ 在 $r\in[0,1]$ 连续，且

$$\begin{aligned}&\mathbb{H}(0)=(B-A)B(1+\alpha^2)^2+2(1-\alpha^2)(1+4\alpha^2-\alpha^4)>0,\\&\mathbb{H}(1)=(B-A)(2B-2)[\alpha(1+\alpha^2)r^3+(1-3\alpha^2)r^2+(\alpha^3-3\alpha)r\\&\qquad+1+\alpha^2]^2+8(\alpha^2-1)(1-B)^2(\alpha^2-1)^2<0,\end{aligned}$$

因此，至少存在一个 $r_0\in(0,1)$, 使得 $\mathbb{H}(r_0)=0$.

(ii) 令 $f\in\mathcal{K}_{\mathcal{H}}^{\mathcal{T}}(\frac{1}{2},1,\alpha)$. 应用 (3.29) 和 (3.34), 则我们得到

$$\begin{aligned}\|T_f\|&=\sup_{0<r<1}(1-r^2)|T_f|\\&\leqslant\sup_{0<r<1}(1-r^2)\Big[\frac{1}{2(1-r)}+\frac{2(1-\alpha^2)(r+\alpha)}{(1+\alpha r)[(1+r^2)(1+\alpha^2)-4\alpha r]}\Big]\\&=\sup_{0<r<1}\Big[\frac{1}{2}(1+r)+\frac{2(1-\alpha^2)(1-r^2)(r+\alpha)}{(1+\alpha r)[(1+r^2)(1+\alpha^2)-4\alpha r]}\Big].\end{aligned} \tag{3.36}$$

取

$$\mathbb{F}(r)=\frac{1}{2}(1+r)+\frac{2(1-\alpha^2)(1-r^2)(r+\alpha)}{(1+\alpha r)[(1+r^2)(1+\alpha^2)-4\alpha r]},\quad 0<r<1. \tag{3.37}$$

上面 (3.37) 暗示 $\mathbb{F}'(r)=0$ 当且仅当 $\mathbb{T}(r)=0$, 这里为

$$\begin{aligned}\mathbb{T}(r)=&\frac{1}{2}[\alpha(1+\alpha^2)r^3+(1-3\alpha^2)r^2+(\alpha^3-3\alpha)r+1+\alpha^2]^2\\&+2(1-\alpha^2)[(\alpha^4+4\alpha^2-1)r^4+4\alpha(1-\alpha^2)r^3-4(1+\alpha^4)r^2\\&+4\alpha(\alpha^2-1)r+1+4\alpha^2-\alpha^4]\\=&\frac{1}{2}[\alpha^2(1+\alpha^2)^2r^6+2\alpha(1+\alpha^2)(1-3\alpha^2)r^5\\&+(2\alpha^2(1+\alpha^2)(\alpha^2-3)+(1-3\alpha^2)^2)r^4\\&+(2\alpha(1+\alpha^2)^2+2\alpha(\alpha^2-3)(1-3\alpha^2))r^3\\&+(2(1+\alpha^2)(1-3\alpha^2)+\alpha^2(\alpha^2-3)^2)r^2\\&+2\alpha(\alpha^2-3)(1+\alpha^2)r+(1+\alpha^2)^2]+2(1-\alpha^2)[(\alpha^4+4\alpha^2-1)r^4\\&+4\alpha(1-\alpha^2)r^3-4(1+\alpha^4)r^2+4\alpha(\alpha^2-1)r+1+4\alpha^2-\alpha^4].\end{aligned}$$

同时，利用结论 (i), 则这里至少存在一个根 $r_0\in(0,1)$, 使得 $\mathbb{F}'(r_0)=\mathbb{T}(r_0)=0$. 下一步，我们需要去证明 $\mathbb{T}$ 在 $(0,1)$ 内零点是唯一的. 为了这一点，我们只需保证在区间 $(0,1)$ 内 $\mathbb{T}'(r)<0$. 固定 $r\in(0,1)$, 用 $\mathfrak{M}(\alpha)$ 表示 $\mathbb{T}(r)$ 的导数，因此，

$$\begin{aligned}\mathfrak{M}(\alpha)=&(3r^5-4r^3+17r)\alpha^6+(18r^2-15r^4-7)\alpha^5\\&+(6r^5-14r^3-28r)\alpha^4+(-12r^2+14-10r^4)\alpha^3\\&+(3r^5+16r^3+21r)\alpha^2+(5r^4+18r^2-11)\alpha-(6r^3+14r).\end{aligned}\tag{3.38}$$

对 $0<r<1$, 利用 (3.38), 我们有 $\mathfrak{M}(0)=-(6r^3+14r)<0$ 和 $\mathfrak{M}(1)=4(r-1)^2(3r+1)(r^2-1)<0$. 现在, 我们使用 Vincent 定理去证明 $\mathfrak{M}(\alpha)$ 在区间 $(0,1)$ 内无零点 (见 [33]). 对 $0<x<1$, 定义函数

$$V(x)=(1+x)^6\mathfrak{M}\Big(\frac{x}{1+x}\Big)=d_0+d_1x+d_2x^2+d_3x^3+d_4x^4+d_5x^5+d_6x^6.$$

因此， $V(x)$ 有如下系数：

$$\begin{aligned}&x^0:d_0=-(6r^3+14r)<0,\\&x^1:d_1=(5r^4-36r^3)+(18r^2-84r)-11<0,\\&x^2:d_2=(3r^5-55)+(25r^4-74r^3)+(90r^2-189r)<0,\\&x^3:d_3=(12r^5-96)+(40r^4-56r^3)+(168r^2-196r)<0,\\&x^4:d_4=(r-1)(24r^4+44r^3+36r^2+180r+68)<0,\\&x^5:d_5=(r-1)(24r^4+4r^3+4r^2+76r+20)<0,\\&x^6:d_6=4(r-1)^2(3r+1)(r^2-1)<0.\end{aligned}\tag{3.39}$$

在 (3.39), 我们能看到：序列 $(-,-,-,-,-,-,-)$ 显示没有符号变化. 因此，由 Vincent 定理 (见 [33]), 对任意 $r\in(0,1)$, $\mathfrak{M}(\alpha)$ 没有零点，而且 (3.39) 也表明：当 $\alpha\in(0,1)$ 和 $r\in(0,1)$, 有 $\mathfrak{M}(\alpha)<0$, 因此在区间 $(0,1)$ 内 $\mathbb{T}'(r)<0$. 再由 (3.36), 定理证毕.

注 3.1 (i) 在定理 3.1–3.4 选择合适的参数 A,B 和 α, 容易间接得到关联调和族 $\mathcal{K}_{\mathcal{H}}^{\mathcal{T}}(\alpha,A,B)$ 的各类不同子族的相应性质.

(ii) 通过限定一个调和函数解析部分在一个方向是凸或解析部分本身为凸函数, Kanas- Klimek-Smęt[20] 和 Kanas-Maharana-Prajapat[21] 分别研究了调和函数族 $\widehat{\mathcal{S}}^{\alpha}$ 和 $\mathcal{G}_{\mathcal{H}}^{\alpha}$. 事实上, 我们能观察部分系数的情况:

$$
\begin{aligned}
&|b_2(f)_{f\in\mathcal{G}_{\mathcal{H}}^{\alpha}}|\leqslant\frac{1+\alpha-\alpha^2}{2},\quad |b_3(f)_{f\in\mathcal{G}_{\mathcal{H}}^{\alpha}}|\leqslant\frac{2(1-\alpha^2)}{3}+\frac{\alpha}{6},\\
&|b_2(f)_{f\in\mathcal{G}_{\mathcal{H}}^{\alpha}}|\leqslant\alpha+\frac{1-\alpha^2}{2},\quad |b_3(f)_{f\in\mathcal{G}_{\mathcal{H}}^{\alpha}}|\leqslant\alpha+1-\alpha^2
\end{aligned}
\tag{3.40}
$$

和

$$
\begin{aligned}
&|b_2(f)_{f\in\mathcal{K}_{\mathcal{H}}^{\mathcal{T}}(\alpha,-1,1)}|\leqslant\frac{\alpha}{4}+\frac{1-\alpha^2}{2}\leqslant\min\Big\{\frac{1+\alpha-\alpha^2}{2},\alpha+\frac{1-\alpha^2}{2}\Big\},\\
&|b_3(f)_{f\in\mathcal{K}_{\mathcal{H}}^{\mathcal{T}}(\alpha,-1,1)}|\leqslant\frac{\alpha}{9}+\frac{1-\alpha^2}{2}\leqslant\min\Big\{\frac{2(1-\alpha^2)}{3}+\frac{\alpha}{6},\alpha+1-\alpha^2\Big\}.
\end{aligned}
\tag{3.41}
$$

因此, (3.40) 和 (3.41) 表明：本文的系数边界比先前文 [20–21] 得到结果有所提升. 通过指定一些特殊参数, 也可以发现：与早先 $\widehat{\mathcal{S}}^{\alpha}$ 和 $\mathcal{G}_{\mathcal{H}}^{\alpha}$ 情形相比较, 本文 $\mathcal{K}_{\mathcal{H}}^{\mathcal{T}}(\alpha,A,B)$ 的 Bloch 常数和 pre-Schwarzian 导数的范数的界更精确.

致谢 对匿名专家辛苦评审此文表示感谢.

参 考 文 献

[1] Hallenbeck D J, MacGregor T H. Linear problems and convexity techniques in geometric function theory [M]. Boston, Pitman: Pitman Advanced Publishing Program, 1984.

[2] 汤获, Zayed H M, Mostafa A O, 等. 一致星象和凸象超几何函数的一些性质 [J]. 数学年刊 A 辑, 2020, 41(1):53–68.

[3] Janowski W. Some extremal problems for certain families of analytic functions I [J]. *Ann Polon Math*, 1973, 28:297–326.

[4] Silverman H. Univalent functions with negative coefficients [J]. *Proc Amer Math Soc*, 1975, 51:109–116.

[5] Lewy H. On the nonvanishing of the Jacobian in certain one-to-one mappings [J]. *Bull Amer Math Soc*, 1936, 42:689–692.

[6] Clunie J, Sheil-Small T. Harmonic univalent functions [J]. *Ann Acad Sci Fenn Ser A I Math*, 1984, 9:3–25.

[7] Chen S H, Ponnusamy S, Rasila A. Coefficient estimates Landaus theorem and Lipschitz-type spaces on planar harmonic mappings [J]. *J Aust Math Soc*, 2014, 96(2):198–215.

[8] Dziok J, Darus M, Sokól J, et al. Generalizations of starlike harmonic functions [J]. *C R Math Acad Sci Paris*, 2016 , 354:13–18.

[9] Jahangiri J M. Harmonic functions starlike in the unit disk [J]. *J Math Anal Appl*, 1999, 235:470–477.

[10] Liu M S, Luo L F. Precise values of the Bloch constants of certain log-p-harmonic mappings [J]. *Acta Mathematica Scientia*, 2021, 41(1):297–310.

[11] Liu G, Ponnusamy S. Harmonic pre-Schwarzian and its applications [J]. *Bull Sci Math*, 2019, 152:150–168.

[12] Nagpal S, Ravichandran V. A subclass of close-to-convex harmonic mappings [J]. *Complex Var Elliptic Equ*, 2014, 59:204–216.

[13] Ponnusamy S, Kaliraj A. On the coefficient conjecture of Clunie and Sheil-Small on univalent harmonic mappings [J]. *Proc Indian Acad Sci* (*Math Sci*), 2015, 125:277–290.

[14] Ponnusamy S, Yamamoto H, Yanagihara H. Variability regions for certain families of harmonic univalent mappings [J]. *Complex Var Elliptic Equ*, 2013, 58(1):23–34.

[15] Sun Y, Jiang Y P, Rasila A. On a subclass of close-to-convex harmonic mappings [J]. *Complex Var Elliptic Equ*, 2016, 61:1627–1643.

[16] 王智刚，黄心中，刘志宏，等. 与星象函数有关的拟共形近于凸调和映射 [J].数学学报 (中文版), 2020, 63(6):565–576.

[17] Chinhara B K, Gochhayat P, Maharana S. On certain harmonic mappings with some fixed coefficients [J]. *Monatsh Math*, 2019, 190:261–280.

[18] Klimek D, Michalski A. Univalent anti-analytic perturbations of the identity in the unit disc [J]. *Sci Bull Che lm*, 2006,1:67–76.

[19] Klimek D, Michalski A. Univalent anti-analytic perturbations of convex analytic mappings in the unit disc [J]. *Ann Univ Mariae Curie-Skodowska Sect A*, 2007, LXI:39–49.

[20] Kanas S, Klimek-Smęt D. Coefficient estimates and Bloch's constant in some class of harmonic mappings [J]. *Bull Malays Math Sci Soc*, 2016, 39:741–750.

[21] Kanas S, Maharana S, Prajapat J K. Norm of the pre-Schwarzian derivative, Bloch's constant and coefficient bounds in some classes of harmonic mappings [J]. *J Math Anal Appl*, 2019, 474:931–943.

[22] Avkhadiev F G, Wirths K J. Schwarz-Pick type inequalities [M]. Basel, Boston, Berlin: Birkhauser Verlag AG, 2009.

[23] Anderson J M, Clunie J G, Pommerenke Ch. On Bloch functions and normal functions [J]. *J Reine Angew Math*, 1974, 270:12–37.

[24] Timoney R M. Bloch functions in several complex variables [J]. *I Bull Lond Math Soc*, 1980, 12:241–267.

[25] Tu Z H, Xiong L P. Weighted space and Bloch-type space on the unit ball of an infinite dimensional complex Banach space [J]. *Bull Iran Math Soc*, 2019, 45:1389–1406.

[26] Colonna F. The Bloch constant of bounded harmonic mappings [J]. *Indiana Univ Math J*, 1989, 38:829–840.

[27] Sheil-Small T. Constants for planar harmonic mappings [J]. *J London Math Soc*, 1990, 42:237–248.

[28] Kanas S, Klimek-Smęt D. Harmonic mappings related to functions with bounded boundary rotation and norm of the pre-Schwarzian derivative [J]. *Bull Korean Math Soc*, 2014, 51(3):803–812.

[29] Chuaqui M, Duren P, Osgood B. Univalence criteria for lift harmonic mappings to minimal surface [J]. *J Geom Anal*, 2007, 17(1):49–74.

[30] Kim Y C, Ponnusamy S, Sugawa T. Mapping properties of nonlinear integral operators and pre-Schwarzian derivatives [J]. *J Math Anal Appl*, 2004, 299:433–447.

[31] Chuaqui M, Duren P, Osgood B. The Schwarzian derivative for harmonic mappings [J]. *J Anal Math*, 2003, 91:329–351.

[32] Duren P. Harmonic mappings in the plane, cambridge tracts in mathematics [M]. Cambridge: Cambridge Univ Press, 2004.

[33] Vincent A J H. Sur la ŕesolution des équations numériques [J]. *J Math Pures Appl*, 1836, 1:341–372.

Some Bounds for a Family of Harmonic Mappings

XIONG Liangpeng[1] WANG Yaqian[2]

[1]Corresponding author. School of Mathematics and Computer Science, Jiangxi Science and Technology Normal University, Nanchang 330038, China. E-mail: lpxiong2016@whu.edu.cn

[2]School of Mathematics and Computer Science, Jiangxi Science and Technology Normal University, Nanchang 330038, China. E-mail: yaqianmath@126.com

Abstract In this paper, the authors introduce a class of the sense-preserving complex-valued harmonic functions f in open unit disk, and the analytic parts of f are restricted to subordinate a fractional function whose image is symmetric with respect to the real axis. With this class, the authors obtain the bounds on Bloch constant, coefficients estimates, growth and distortion theorems. By specifying some crucial parameters, the authors also prove that the norm of pre-Schwarzian derivative for the class is bounded.

Keywords Bloch constant, Distortion theorem, Harmonic functions, Janowsk convex functions, Pre-Schwarzian derivative

2000 MR Subject Classification 30C45, 30C50

The English translation of this paper will be published in
Chinese Journal of Contemporary Mathematics, Vol. 43 No. 4, 2022
by ALLERTON PRESS, INC., USA