数 学 年 刊 A 辑
2022, 43(4):445–454
DOI: 10.16205/j.cnki.cama.2022.0029

关于齐次四元 Monge-Ampère 方程的一些注记*

王冠翔[1] 张教根[2]

提要 本文考虑了四元数空间 $\mathbb{H}^n$ 中齐次四元 Monge-Ampère 方程的狄利克雷问题解的正则性. 首先, 当区域是边界为 $C^{1,1}$ 的强拟凸域时, 作者给出了解的 Lipschitz 估计. 其次, 考虑了四元 Monge-Ampère 算子的收敛性. 最后, 讨论了齐次四元 Monge-Ampère 方程的粘性次解与 F-次调和函数之间的关系.

关键词 齐次四元 Monge-Ampère 方程, 极大性, 多重次调和
MR (2000) 主题分类 35J96, 42B25, 31C10
中图法分类 O174.4
文献标志码 A
文章编号 1000-8314(2022)04-0445-10

§1 引 言

假设 $\Omega \subset \mathbb{H}^n$ 是一个有界开子集. 在本文中我们考虑下面的齐次四元 Monge-Ampère 方程的狄利克雷问题 (简记为 HQMA)

$$\begin{cases} u \in \mathrm{QPSH}(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega}), \\ \det\left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial \overline{q}_i \partial q_j}\right) = 0, & \text{在 } \Omega \text{ 内}, \\ u = \varphi, & \text{在 } \partial\Omega \text{ 上}, \end{cases} \tag{1.1}$$

这里 φ 是定义在 $\partial\Omega$ 上的一个给定的连续函数.

在叙述主要结果之前, 我们先回顾以下几个定义.

定义 1.1 假设 $\Omega \subset \mathbb{H}^n$ 是一个有界开子集. 如果存在一个负的 $C^{1,1}$ 严格四元多重次调和的穷竭函数 ρ, 即 ρ 是严格四元多重次调和函数, $\Omega = \{\rho < 0\}$ 且在 Ω 内 $\nabla\rho \neq 0$, 则称 Ω 是一个 $C^{1,1}$ 类的严格拟凸域 (参考定义 2.2).

定义 1.2 设函数 $u \in \mathrm{QPSH}(\Omega)$(参考定义 2.2), 如果对任何 $v \in \mathrm{QPSH}(\Omega)$ 满足 $v \leqslant u$ 在 Ω 的某个紧子集外成立, 都可以推出 $v \leqslant u$ 在 $\overline{\Omega}$ 上成立, 则称 u 是极大的.

在文 [1] 中, Wan 和 Zhang 证明了下面一个有趣的定理, 该定理给出了 HQMA 方程解的一个非常有用的刻画.

定理 1.1 [1, 定理 1.3] 假设 $\Omega \subset \mathbb{H}^n$ 是一个有界开子集并且 $u \in \mathrm{QPSH}(\Omega)$ 是局部有界的. 那么, u 是极大的当且仅当在流的意义下满足 $\det\left(\frac{\partial^2 u}{\partial \overline{q}_i \partial q_j}\right) = 0$.

本文 2020 年 12 月 7 日收到, 2022 年 10 月 24 日收到修改稿.

[1]中国科学技术大学数学科学学院, 合肥 230026. E-mail: wgx0511@mail.ustc.edu.cn

[2]通信作者. 中国科学技术大学数学科学学院, 合肥 230026. E-mail: zjgmath@ustc.edu.cn

*本文受到中国博士后面上项目 (No. 2022M713057) 和中国科学技术大学青年创新基金 (No. WK0010000072) 的资助.

利用定理 1.1, 我们首先可以证明下面的估计.

定理 1.2 假设 $\Omega \subset \mathbb{H}^n$ 是一个 $C^{1,1}$ 的四元严格拟凸域, $\varphi \in C^{1,1}(\partial\Omega)$. 那么方程 (1.1) 存在唯一的解 $u \in C^{0,1}(\overline{\Omega})$ 并且 u 满足

$$\|u\|_{C^{0,1}(\overline{\Omega})} \leqslant C = C(\|\rho\|_{C^{0,1}(\overline{\Omega})}, \|\rho\|_{C^{1,1}(\Omega)}, \|\varphi\|_{C^{1,1}(\partial\Omega)}). \tag{1.2}$$

此外, 如果仅假设 $\varphi \in C^0(\partial\Omega)$, 那么 u 在 $\overline{\Omega}$ 上是连续的.

类似于 Aleksandrov[2], Bremermann[3] 以及 Bedford-Taylor[4] 研究过的实与复的情形, Alesker[5], Harvey-Lawson[6] 等人对四元数背景下的狄利克雷问题 (1.1) 也做了很好的研究. 因为 $u \in \mathrm{QPSH}(\Omega)$, 所以如果设 $0 \leqslant \lambda_1[u] \leqslant \cdots \leqslant \lambda_n[u]$ 是 u 的四元数 Hessian 的特征值, 那么 Monge-Ampère 方程

$$\det\Big(\frac{\partial^2 u}{\partial \overline{q}_i \partial q_j}\Big) = 0$$

等价于

$$\lambda_1[u] = 0,$$

即 Monge-Ampère 方程的主分支. 文 [6–8] 断言如果 φ 是连续的, 那么原方程解唯一并且也是连续的, 在定理 1.2 中我们推广了该结果.

值得注意的是, 正如下面 3.1 节所述, 利用扰动的方法似乎很难得到方程的高阶正则性. 然而, 当假设 Ω 是 $\mathbb{H}^n$ 中的单位球 $\mathbb{B}$ 时, 我们可以得到一个弱的 $C^{1,1}_{\mathrm{loc}}$ 的估计. Bedford-Taylor 在文 [4] 中给出了复的情形 (也可以参见文 [9–10] 中给出的更简单的版本).

非齐次四元 Monge-Ampère 方程的狄利克雷问题

$$\begin{cases} \det\Big(\dfrac{\partial^2 u}{\partial \overline{q}_i \partial q_j}\Big) = f \geqslant 0, & \text{在 } \Omega \text{ 内}, \\ u = \varphi, & \text{在 } \partial\Omega \text{ 上} \end{cases} \tag{1.3}$$

解的正则性也有大量的结果. 假设 $\Omega \subset \mathbb{H}^n$ 是有界的严格拟凸域, 如果 $f \in C^0(\overline{\Omega})$ 以及 $\varphi \in C^0(\partial\Omega)$, 那么 Alesker[7] 得到了方程 (1.3) 解的存在唯一性. 更进一步, 如果假设 $\Omega = \mathbb{B}$ 是 $\mathbb{H}^n$ 中的单位球, 并且 $0 < f \in C^\infty(\overline{\Omega})$, $\varphi \in C^\infty(\partial\Omega)$, Alesker 也得到了唯一光滑的四元多重次调和解. 在文 [11] 中, Zhu 推广了文 [12] 的结果, 对于一般的光滑严格拟凸域, 他得到了唯一的光滑四元多重次调和解. 关于方程 (1.3) 弱解的最新进展, 可参考文 [6, 8, 13–17].

狄利克雷对偶最早是由 Harvey-Lawson[6–8]引入的. 下面我们简单回顾一下狄利克雷对偶的定义. 给定一个由超埃米尔特度量构成的集合 $S_{\mathbb{H}}\Omega$ 的闭子集 F(详细定义参考下一节). 对任何 C^2 函数 u, 称 u 在 Ω 上是 F-次调和的如果 $\mathrm{Hess}\, u(q) > 0$ 对任何 $q \in \Omega$ 都成立. 我们将这个概念推广到 Ω 里任意的上半连续 (简记为 USC) 函数上. 回忆一下 USC 函数的测试函数是很有必要的.

定义 1.3 设 $u : \Omega \to \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ $(u \not\equiv -\infty)$ 为 USC 函数. 我们称 $\phi \in C^\infty(\overline{\Omega})$ 是 u 在 q 点处的上测试 (下测试) 函数, 如果在 q 点的某个领域内有 $u \leqslant \phi$ $(\phi \leqslant u)$ 且 $u(q) = \phi(q)$.

定义 1.4 称 USC 函数 u 是 F-次调和的, 如果对任一 $q \in \Omega$ 以及 q 点处的上测试函数 ϕ, 我们有

$$J_q^2\phi := (\phi(q), \phi(q), \mathrm{Hess}^{\mathbb{H}}\phi(q)) \in F_q,$$

这里 F_q 是 F 在 q 点处的芽.

对上述 F, 定义 F 的狄利克雷对偶为

$$\widetilde{F} :=\sim (-\mathrm{Int}F) = -(\sim \mathrm{Int}F). \tag{1.4}$$

类似的, 可以定义 $\widetilde{F}$-次调和的概念.

定义 1.5　函数 $u \in C^0(\Omega)$ 被称为是 F-调和的如果 u 是 F-次调和的, 并且 $-u$ 是 $\widetilde{F}$-次调和的.

我们还要证明下述的 F-次调和的收敛性.

定理 1.3　设 $\Omega \subset \mathbb{H}^n$ 是一个有界开子集, $u_k \in C^2(\Omega)$ 是 F-次调和函数并且满足

$$\det\Big(\frac{\partial^2 u_k}{\partial \overline{q}_i \partial q_j}\Big) = \varepsilon_k, \tag{1.5}$$

这里, 当 $k \to \infty$ 时, ε_k 是递减到 0 的正数. 则如果在 C^0 范数下 $u_k \to u_\infty$, 那么 u_∞ 是 F-调和的.

定义 1.6　(1) 设 $u : \Omega \to \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ $(u \not\equiv -\infty)$ 为 USC 函数. 如果对任意 $q \in \Omega$ 以及任意 u 在 q 点处的上测试函数 ϕ, 都有

$$\det\Big(\frac{\partial^2 \phi}{\partial \overline{q}_i \partial q_j}\Big) \geqslant 0,$$

则称 u 是 $\mathrm{HQMA}(\mathrm{Hess}\, u)^n = 0$ 的粘性次解.

(2) 设 $u : \Omega \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ 为下半连续函数. 如果对任意 $q \in \Omega$ 以及任意 u 在 q 点处的下测试函数 ψ, 都有

$$\det\Big(\frac{\partial^2 \psi}{\partial \overline{q}_i \partial q_j}(q)\Big)_+ \leqslant 0,$$

则称 u 是 $\mathrm{HQMA}(\mathrm{Hess}\, u)^n = 0$ 的粘性上解. 这里, 对任何超埃米尔特矩阵 A, 如果 A 是半正定的, 则记 $A_+ = A$, 否则 $A_+ = 0$.

(3) 称函数 u 是方程 $\mathrm{HQMA}(\mathrm{Hess}\, u)^n = 0$ 的一个粘性解, 如果 u 即是粘性上解, 又是粘性次解. 特别的, 粘性解总是连续的.

最后, 我们研究了 HQMA 的粘性次解和 F-次调和函数之间的关系, 可以证明下面的定理.

定理 1.4　设 Ω 是 $\mathbb{H}^n$ 的有界开子集, 则 $\det\big(\frac{\partial^2 u}{\partial \overline{q}_i \partial q_j}\big) = 0$ 的粘性次解一定是 Ω 上的 F-次调和函数. 更进一步, $\det\big(\frac{\partial^2 u}{\partial \overline{q}_i \partial q_j}\big) = 0$ 的粘性解一定是 Ω 上的 F-调和函数.

§2　预备知识

Verbitsky[18] 最早引进了 ∂_J 算子. 对每个四元数 $q \in \mathbb{H}$, 我们将其记作如下的形式:

$$q = x_0 \cdot \mathbf{1} + x_1 \cdot \mathbf{i} + x_2 \cdot \mathbf{j} + x_3 \cdot \mathbf{k},$$

这里 $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\} \subset \mathbb{H}$ 满足四元数关系并且 $x_\alpha \in \mathbb{R}$. 在平坦空间 $\mathbb{H}^n$ 中, 记 I, J, K 是由 **i, j, k** 诱导出的可积的复结构.

设 $\{q_i\}_{i=0}^{n-1}$ 是 $\mathbb{H}^n$ 中的坐标. 在实的对应下, 我们可以将 q_i 写作

$$q_i = x_{4i} \cdot \mathbf{1} + x_{4i+1} \cdot \mathbf{i} + x_{4i+2} \cdot \mathbf{j} + x_{4i+3} \cdot \mathbf{k},$$

这里 $x_\alpha \in \mathbb{R}$. 若定义

$$z_j = x_{2j} + (-1)^j x_{2j+1} \mathbf{i}, \quad j = 0, \cdots, 2n-1,$$

那么可以得到一个 $\mathbb{H}^n$ 上关于复结构 I 的新的全纯坐标 $q_i = z_{2i} + z_{2i+1}\mathbf{j}$.

对任一 C^2 的 $\mathbb{H}$- 值的函数 v, 定义 Dirac-Cauchy-Riemann 算子 $\frac{\partial}{\partial \overline{q}_\alpha}$ 为

$$\frac{\partial v}{\partial \overline{q}_\alpha} = \frac{\partial v}{\partial x_{4\alpha}} + \mathbf{i}\frac{\partial v}{\partial x_{4\alpha+1}} + \mathbf{j}\frac{\partial v}{\partial x_{4\alpha+2}} + \mathbf{k}\frac{\partial v}{\partial x_{4\alpha+3}}.$$

定义它的四元数共轭 $\frac{\partial}{\partial q_\beta}$ 为

$$\frac{\partial v}{\partial q_\beta} = \frac{\partial v}{\partial x_{4\beta}} - \frac{\partial v}{\partial x_{4\beta+1}}\mathbf{i} - \frac{\partial v}{\partial x_{4\beta+2}}\mathbf{j} - \frac{\partial v}{\partial x_{4\beta+3}}\mathbf{k}.$$

容易验证有如下的对易关系

$$\Big[\frac{\partial}{\partial q_\beta}, \frac{\partial}{\partial \overline{q}_\alpha}\Big] = 0.$$

设 $\Omega \subset \mathbb{H}^n$ 为有界区域, 记 $\Lambda_I^{p,q}(\Omega)$ 是 (Ω, I) 上的 (p,q) 形式的向量丛. 我们也用相同的记号来表示该丛的光滑截面所构成的空间.

记 ∂ 和 $\overline{\partial}$ 是关于复结构 I 的典范微分算子. 令

$$\partial_J = J^{-1} \circ \overline{\partial} \circ J. \tag{2.1}$$

因为 $J : \Lambda_I^{p,q}(\Omega) \to \Lambda_I^{q,p}(\Omega)$, 所以

$$\partial_J : \Lambda_I^{p,q}(\Omega) \to \Lambda_I^{p+1,q}(\Omega). \tag{2.2}$$

可以证明

$$\partial\partial_J = -\partial_J\partial, \quad \partial_J^2 = 0.$$

对任一 C^2 函数 $u : \Omega \to \mathbb{R}$, 有

$$\partial u = \sum_{i=0}^{2n-1}(\partial_{z_i}u)\mathrm{d}z_i, \quad \overline{\partial}u = \sum_{i=0}^{2n-1}(\partial_{\overline{z}_i}u)\mathrm{d}\overline{z}_i,$$

$$\partial_J u = \sum_{i=0}^{2n-1}(-1)^{i+1}(\partial_{\overline{z}_{i+(-1)^i}}u)\mathrm{d}z_i, \quad \partial\overline{\partial}u = \sum_{i,j=0}^{2n-1}(\partial_{z_i}\partial_{\overline{z}_j}u)\mathrm{d}z_i \wedge \mathrm{d}\overline{z}_j$$

以及

$$\partial\partial_J u = \sum_{i,j=0}^{2n-1}(-1)^{j+1}(\partial_{z_i}\partial_{\overline{z}_{j+(-1)^j}}u)\mathrm{d}z_i \wedge \mathrm{d}z_j.$$

称形式 $\omega \in \Lambda_I^{2p,0}(\Omega)$ 是实的, 如果

$$\overline{J \circ \omega} = \omega.$$

记 $\Lambda_{I,\mathbb{R}}^{2p,0}(\Omega)$ 是 (Ω, I) 上的光滑实 $(2p,0)$ 形式的向量丛. 我们有下面的引理.

引理 2.1 [19, 引理 0.5] 设 $\Omega \subset \mathbb{H}^n$ 是一个有界开子集, 那么对任一 $v \in C^\infty(\Omega, \mathbb{R})$, 有 $\partial\partial_J v \in \Lambda_{I,\mathbb{R}}^{2,0}(\Omega)$. 称 $\partial\partial_J v$ 是 v 的四元数 Hessian.

记 $S_{\mathbb{H}}\Omega$ 为 Ω 上的向量丛, 使得其在任一点 $q \in \Omega$ 处的纤维为切空间 $T_q\Omega$ 上的超埃米尔特形式构成的集合. 注意到一个四元方阵 $A = (a_{ij})$ 称为超埃米尔特, 如果在四元共轭的意义下有 $\overline{a_{ij}} = a_{ji}$.

定义一个态射

$$\tau : \Lambda_{I,\mathbb{R}}^{2,0}(\Omega) \to S_{\mathbb{H}}\Omega, \tag{2.3}$$

具体来说, 对任何 Ω 上的实向量场 V, 定义

$$\tau(\eta)(V,V)=\eta(V,V\circ J).$$

更进一步, 可以证明 τ 是上面两个向量丛之间的同构 (见 [18–19]).

现在我们来回顾 $\mathbb{H}^n$ 上实值函数 Hessian 矩阵的另外一个定义. 对任何 $v\in C^\infty(\Omega,\mathbb{R})$, 矩阵 $\left(\frac{\partial^2 v}{\partial\overline{q}_i\partial q_j}\right)\in S_{\mathbb{H}}\Omega$ 是超埃米尔特. 更进一步, 利用 (2.3) 定义的 τ-同构, 我们有

$$\tau(\partial\partial_J v)=\kappa\cdot\left(\frac{\partial^2 v}{\partial\overline{q}_i\partial q_j}\right)\tag{2.4}$$

对某个规范化常数 $\kappa>0$ 成立. 方便起见, 我们通常选取 $\kappa=1$. 在之后的讨论中, 在不引起混淆的情况下, 我们将矩阵 $\left(\frac{\partial^2 v}{\partial\overline{q}_i\partial q_j}\right)\in S_{\mathbb{H}}\Omega$ 记为 $\operatorname{Hess} v$.

利用 (2.4), 可以定义向量丛 $\Lambda^{2,0}_{I,\mathbb{R}}(\Omega)$ (和 $\Lambda^{2n,0}_{I,\mathbb{R}}(\Omega)$) 的正性.

定义 2.1　设形式 $\eta\in\Lambda^{2,0}_{I,\mathbb{R}}(\Omega)$, 若 $\tau(\eta)>0$ ($\tau(\eta)\geqslant 0$), 则称 η 是严格正 (正) 的. 更进一步, 我们称形式 $\Theta\in\Lambda^{2n,0}_{I,\mathbb{R}}(\Omega)$ 是严格正的, 如果

$$\Theta=\mathrm{e}^{\phi}\mathrm{d}z_0\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}z_{2n-1}$$

对某个 $\phi\in C^\infty(\Omega,\mathbb{R})$ 成立.

类似于复的情形, 我们可以定义四元次调和函数.

定义 2.2　设函数 $v\in C^2(\Omega,\mathbb{R})$, 若 $\partial\partial_J v\in\Lambda^{2,0}_{I,\mathbb{R}}(\Omega)$ 是严格正 (正) 的, 则称 v 是严格四元次调和函数 (四元次调和函数). 我们记严格四元次调和函数的全体所构成的集合为 $\mathrm{QPSH}(\Omega)$.

注意到对一般的实值连续函数, 我们同样可以考虑这个概念 (见 [20, 定义7.1]).

给定一个超埃米尔特矩阵, Moore[21] 给出了Moore 行列式的明确表达式, 我们将其记作 $\det(\cdot)$ (见 [22–24]). 下述引理在很多情况下都是很重要的.

引理 2.2[20, 推论 4.6]　设 $v:\Omega\to\mathbb{R}$ 是一个光滑的实值函数, 则存在一个只依赖于维数的常数 $c_n>0$, 使得

$$(\partial\partial_J v)^n=c_n\det\left(\frac{\partial^2 v}{\partial\overline{q}_i\partial q_j}\right)\mathrm{d}z_0\wedge\mathrm{d}z_1\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}z_{2n-1}.\tag{2.5}$$

文 [25, Lemma 1.4] 中给出了下述引理在 Hermitian 情形下的证明. 在超埃米尔特的情形下, 我们同样也有相似的结果.

引理 2.3　设 Q 是一个超埃米尔特矩阵, 使得对每一个半正定的超埃米尔特矩阵 H, 我们有 $\det(Q+H)\geqslant 0$. 那么 Q 也是半正定的.

证　对角化 Q, 我们不妨假设 $Q=\operatorname{diag}\{t_1,\cdots,t_n\}$, $t_i\in\mathbb{R}$. 由文 [5, 命题1.1.11], 我们有

$$0\leqslant\det(Q+H)=\sum_{I\subset\{1,2,\cdots,n\}}\left(\prod_{i\in I}t_i\right)\cdot\det M_I(H),\tag{2.6}$$

这里 H 的余子式 $M_I(H)$ 是由删掉行号和列号在集合 I 中的行和列构成的. 注意到 $\det M_I(H)\geqslant 0$. 由半正定超埃米尔特矩阵 H 的任意性, 我们有 $t_i\geqslant 0$, $i=1,2,\cdots,n$. 所以, Q 是半正定的.

下面这个的比较原理是由 Alesker 证明的, 它在研究四元 Monge-Ampère 方程解的唯一性时有着重要的作用.

定理 2.1 [5, 定理 2.2.1] 设 $\Omega \subset \mathbb{H}^n$ 是一个有界区域. 如果 $u, v \in C^0(\overline{\Omega}) \cap \mathrm{QPSH}(\Omega)$ 使得

$$\det\Big(\frac{\partial^2 u}{\partial \overline{q}_i \partial q_j}\Big) \geqslant \det\Big(\frac{\partial^2 v}{\partial \overline{q}_i \partial q_j}\Big),$$

那么 $u - v$ 在边界 $\partial\Omega$ 上取到最大值.

Harvey-Lawson [8] 证明了下面的 F-次调和函数的基本性质.

定理 2.2 [8, 定理 2.6(C)] 设 F 是 $S_{\mathbb{H}}\Omega$ 的闭子集, 如果 $\{u_j\}$ 是递减序列且所有 u_j 都是 F-次调和函数, 那么极限函数 $u_\infty = \lim\limits_{j\to\infty} u_j$ 也是 F-次调和函数.

§3 主要结果的证明

§3.1 定理 1.2 的证明

证 不失一般性, 假设 $\varphi \in C^{1,1}(\overline{\Omega})$. 否则, 对于 $\varphi \in C^{1,1}(\partial\Omega)$, 令 $\overline{\varphi}$ 是 φ 在 $\overline{\Omega}$ 上的调和延拓, 即

$$\begin{cases} \Delta\overline{\varphi} = 0, & \text{在 } \Omega \text{ 内}, \\ \overline{\varphi} = \varphi, & \text{在 } \partial\Omega \text{ 上}. \end{cases}$$

那么, 我们有 $\overline{\varphi} \in C^{1,1}(\overline{\Omega})$, 并且在不引起混淆的情况下, 仍将 $\overline{\varphi}$ 记作 φ. 证明分为以下几步:

第一步 首先假设 Ω 是光滑的. 取一个光滑的递增序列 $\varphi^{(k)}$, 使得在 $C^{1,1}$ 范数下, $\varphi^{(k)} \to \varphi$. 利用 Zhu [11] 的主要结果, 我们可以找到如下狄利克雷问题的唯一光滑解的序列 $u^{(k)}$,

$$\begin{cases} u^{(k)} \in \mathrm{QPSH}(\Omega) \cap C^\infty(\overline{\Omega}), \\ \det\Big(\dfrac{\partial^2 u^{(k)}}{\partial q_i \partial \overline{q}_j}\Big) = \dfrac{1}{k}\det\Big(\dfrac{\partial^2 \rho}{\partial \overline{q}_i \partial q_j}\Big), & \text{在 } \Omega \text{ 内}, \\ u^{(k)} = \varphi^{(k)}, & \text{在 } \partial\Omega \text{ 上}, \end{cases}$$

且有

$$\|u^{(k)}\|_{C^{0,1}(\overline{\Omega})} \leqslant C = C(\|\rho\|_{C^{0,1}(\overline{\Omega})}, \|\rho\|_{C^{1,1}(\Omega)}, \|\varphi^{(k)}\|_{C^{1,1}(\partial\Omega)}). \tag{3.1}$$

更进一步, 因为

$$\det\Big(\frac{\partial^2 u^{(k+1)}}{\partial \overline{q}_i \partial q_j}\Big) \leqslant \det\Big(\frac{\partial^2 u^{(k)}}{\partial \overline{q}_i \partial q_j}\Big)$$

在边界 $\partial\Omega$ 上, 我们有

$$u^{(k+1)} = \varphi^{(k+1)} \geqslant \varphi^{(k)} = u^{(k)}.$$

利用比较原理, 我们知道 $u^{(k)}$ 是递增 (有界) 的序列. 所以, 可以令

$$u := \lim_{k\to\infty} u^{(k)}.$$

根据 (3.1), 我们得到了 u 的正则性.

第二步 我们断言 u 是极大的. 再根据定理 1.1, 可知 u 是 (1.1) 的弱解.

设 $v \in \mathrm{QPSH}(\Omega)$, 对某个 Ω 的紧子集 K, 在 $\Omega \setminus K$ 上有 $v \leqslant u$. 令

$$v^{(k)} := v + \frac{\rho}{k^{\frac{1}{n}}} - \sup_{\partial\Omega}(\varphi - \varphi^{(k)}).$$

注意到

$$\det\Big(\frac{\partial^2 v^{(k)}}{\partial \overline{q}_i \partial q_j}\Big) \geqslant \frac{1}{k}\det\Big(\frac{\partial^2 \rho}{\partial \overline{q}_i \partial q_j}\Big) = \det\Big(\frac{\partial^2 u^{(k)}}{\partial \overline{q}_i \partial q_j}\Big),$$

并且在边界 $\partial\Omega$ 上, 因为 $v \leqslant u = \varphi$, 则有

$$v^{(k)} = v - \sup_{\partial\Omega}(\varphi - \varphi^{(k)}) = \varphi - \sup_{\partial\Omega}(\varphi - \varphi^{(k)}) \leqslant \varphi^{(k)} = u^{(k)}.$$

由比较定理, 在 $\overline{\Omega}$ 内, 有

$$v^{(k)} \leqslant u^{(k)} \leqslant u^{(k+j)}.$$

令 $j \to \infty$, 则在 $\overline{\Omega}$ 内, 有

$$v^{(k)} = v + \frac{\rho}{k^{\frac{1}{n}}} - \sup_{\partial\Omega}(\varphi - \varphi^{(k)}) \leqslant u.$$

因为 ρ 是负的且 $\varphi^{(k)}$ 是递增的函数序列, 所以 $v^{(k)}$ 也是递增的函数序列. 令 $k \to \infty$, 我们有 $v \leqslant u$ 在 $\overline{\Omega}$ 内成立. 由 v 的任意性可知 u 是极大的.

第三步　一般情形. 令 $\widetilde{\varphi} := \varphi + A\rho$, 这里 $A > 0$ 是一个足够大的常数 (依赖于 $\mathrm{Hess}\,\rho$ 和 $\mathrm{Hess}\,\varphi$), 使得 $\varphi + A\rho \in \mathrm{QPSH}(\Omega)$. 取递增的光滑严格拟凸域 Ω_j, 使得 $\Omega = \cup_j \Omega_j$. 由之前的讨论, 对任一 j, 下述的狄利克雷问题都存在连续解 u_j

$$\begin{cases} u_j \in \mathrm{QPSH}(\Omega_j) \cap C^0(\overline{\Omega}_j), & \\ \det\Big(\dfrac{\partial^2 u^{(j)}}{\partial \overline{q}_i \partial q_j}\Big) = 0, & \text{在 } \Omega_j \text{ 内}, \\ u_j = \widetilde{\varphi}, & \text{在 } \partial\Omega_j \text{ 上}. \end{cases}$$

则有 $u_j \geqslant \widetilde{\varphi}$, 因此

$$\det\Big(\frac{\partial^2 u^{(j)}}{\partial \overline{q}_i \partial q_j}\Big) = \det\Big(\frac{\partial^2 u^{(j+1)}}{\partial \overline{q}_i \partial q_j}\Big)$$

且

$$u_{j+1} \geqslant \widetilde{\varphi} = u_j \qquad \text{在 } \partial\Omega_j \text{ 上}.$$

再次由比较原理, 我们知道 u_j 同样也是递增序列. 在不引起混淆的情况下, 我们仍记

$$u := \lim_{j\to\infty} u_j.$$

证明 u 是极大的方法同第二步类似. 令 $v \in \mathrm{QPSH}(\Omega_j)$ 且 $v \leqslant u$ 在 Ω_j 的某个紧子集外成立. 对任一 $\varepsilon > 0$, 都存在足够大的正整数 $j_\varepsilon \in \mathbb{N}$ (仅依赖于 ε), 使得在 Ω_j 的某个紧子集外, $v - \varepsilon \leqslant u_j$ 对所有的 $j \geqslant j_\varepsilon$ 都成立. 由第二步, 我们有 $v - \varepsilon \leqslant u_j$ 在 Ω_j 上成立. 令 $j \to \infty$, $\varepsilon \to 0$, 我们有 $v \leqslant u$. 因此, u 在 Ω 上是极大的.

§3.2　定理 1.3 的证明

证　**第一步**　我们断言 $-u_\infty$ 是 $\widetilde{F}$-次调和函数. 如果不是, 那么存在点 $q_0 \in \Omega$ 以及 $-u_\infty$ 在 $q_0 \in \Omega$ 处的测试函数 ϕ, 使得 ϕ 满足 $-\mathrm{Hess}\,\mathbb{H}\phi(q_0) > 0$. 所以, 我们假设存在正数 $\delta > 0$, 使得

$$\mathrm{Hess}\,\mathbb{H}\phi \leqslant -\delta \mathrm{I}.$$

这里 I 是 $\mathbb{H}^n$ 上的单位矩阵.

令 U 是包含 q_0 的一个小邻域. 给定一个小的正数 ε, 存在常数 $\delta_\varepsilon > 0$, 使得在边界 ∂U 上,

$$-u_\infty - \phi - \varepsilon|q|^2 \leqslant -\delta_\varepsilon. \tag{3.2}$$

取 $k \in \mathbb{N}$ 充分大, 使得

$$(-u_k - \phi - \varepsilon|q|^2)(q_0) \geqslant -\frac{\delta_\varepsilon}{4}, \tag{3.3}$$

且在 ∂U 上

$$-u_k - \phi - \varepsilon|q|^2 \leqslant \frac{3\delta_\varepsilon}{4}. \tag{3.4}$$

所以, 函数 $-u_k - \phi - \varepsilon|q|^2$ 至少有一个严格内部极大值点 $q_k \in U$. 在 q_k 处, 我们有

$$\operatorname{Hess}\mathbb{H}u_k \geqslant -\operatorname{Hess}\mathbb{H}(\phi + \varepsilon|q|^2) \geqslant (\delta - \varepsilon)\mathrm{I}. \tag{3.5}$$

令 $\varepsilon > 0$ 充分小, 使得 $\delta - \varepsilon > \frac{\delta}{2} > 0$, 这和 (1.5) 给出的 $\varepsilon_k \to 0$ 矛盾. 因此, $-u_\infty$ 是 Ω 上的 $\widetilde{F}$-次调和函数.

第二步 根据定理 2.2, 我们知道 u_∞ 一定是 F-次调和函数. 因此, u_∞ 是 F-调和函数.

§3.3 定理 1.4 的证明

证 第一步 令 u 是 HQMA 的粘性次解, 固定任一点 $\widehat{q} \in \Omega$. 设 ϕ 是 u 在 $\widehat{q}$ 点处的测试函数, 则超埃米尔特矩阵 $\operatorname{Hess}\mathbb{H}\phi(\widehat{q})$ 满足 $\det\big(\frac{\partial^2\phi}{\partial\overline{q}_i\partial q_j}\big)(\widehat{q}) \geqslant 0$.

对任一半正定超埃米尔特矩阵 Q, 我们定义一个 u 的新测试函数 $\phi + \sum(q_{\overline{i}} - \widehat{q}_{\overline{i}})Q_{i\overline{j}}(q_j - \widehat{q}_j)$, 则有

$$\det\Big(\frac{\partial^2\phi}{\partial\overline{q}_i\partial q_j} + Q_{i\overline{j}}\Big)(\widehat{q}) \geqslant 0.$$

由引理 2.3, 我们知道 $\operatorname{Hess}\mathbb{H}\phi(\widehat{q})$ 是半正定的. 因为 ϕ 和 $\widehat{q}$ 的任意性, 所以 u 是 F-次调和函数.

第二步 反之, 假设 u 是 F-次调和函数. 固定 $\widehat{q} \in \Omega$ 以及 u 在 $\widehat{q}$ 点处的测试函数 ψ, 我们有 $\operatorname{Hess}\mathbb{H}\psi(\widehat{q}) \geqslant 0$. 所以, 在粘性解的意义下, $\det\big(\frac{\partial^2\psi}{\partial\overline{q}_i\partial q_j}\big)(\widehat{q}) \geqslant 0$ 且 $\operatorname{Hess}\mathbb{H}u \geqslant 0$.

第二个断言可以由狄利克雷对偶的定义直接得到.

参 考 文 献

[1] Wan D, Zhang W. Quasicontinuity and maximality of quaternionic plurisubharmonic functions [J]. *J Math Anal Appl*, 2015, 424(1):86–103.

[2] Aleksandrov A D. Dirichlet's problem for the equation $\mathrm{Det}\|Z_{ij}\| = \varphi(Z_1, \cdots, Z_n, Z, x_1, \cdots, x_n)$, I [J]. *Vestnik Leningrad Univ Ser Mat Meh Astr*, 1958, 13(1), 5–24.

[3] Bremermann H J. On a generalized Dirichlet problem for plurisubharmonic functions and pseudo-convex domains [J]. *Characterization of Šilov boundaries Trans Amer Math Soc*, 1959, 91:246–276.

[4] Bedford E, Taylor B A. The Dirichlet problem for a complex Monge-Ampère equation [J]. *Invent Math*, 1976, 37:1–44.

[5] Alesker S. Non-Commutative linear algebra and plurisubharmonic functions of quaternionic variables [J]. *Bull Sci Math*, 2003, 127(1):1–35.

[6] Harvey F R, Lawson H B. Dirichlet duality and the nonlinear Dirichlet problem [J]. *Comm Pure Appl Math*, 2009, 62(3):396–443.

[7] Alesker S. Quaternionic Monge-Ampère equations [J]. *J Geom Anal*, 2003, 13(2):205–238.

[8] Harvey F R, Lawson H B. Dirichlet duality and the nonlinear Dirichlet problem on Riemannian manifolds [J]. *J Differential Geom*, 2011, 88(3):395–482.

[9] Demailly J P. Potential theory in several complex variables [J]. *Personal page*, 2016.

[10] Guedj V, Zeriahi A. Degenerate complex Monge-Ampère equations [M]//EMS Tracts in Mathematics, 26, Zürich: European Mathematical Society, 2017.

[11] Zhu J. Dirichlet problem of quaternionic Monge-Ampère equations [J]. *Israel J Math*, 2016, 214(2):597–619.

[12] Caffarelli L, Kohn J J, Nirenberg L and et al. The Dirichlet problem for nonlinear second-order elliptic equations, II: complex Monge-Ampère, and uniformly elliptic equations [J]. *Comm Pure Appl Math*, 1985, 38(2):209–252.

[13] Boukhari F. Hölder continuous solutions to quaternionic Monge-Ampère equations [J]. *J Math Anal Appl*, 2019, 477(1):747–768.

[14] Kołodziej S, Sroka M. Regularity of solutions to the quaternionic Monge-Ampère equation [J]. *J Geom Anal*, 2020, 30(3):2852–2864.

[15] Sroka M. Weak solutions to the quaternionic Monge-Ampère equation [J]. *Anal PDE*, 2020, 13(6):1755–1776.

[16] Wan D. A variational approach to the quaternionic Monge-Ampère equation [J]. *Ann Mat Pura Appl*, 2020, 199(6):2125–2150.

[17] Wan D, Kang Q. Potential theory for quaternionic plurisubharmonic functions [J]. *Michigan Math J*, 2017, 66(1):3–20.

[18] Verbitsky M. HyperKähler manifolds with torsion, supersymmetry and Hodge theory [J]. *Asian J Math*, 2002, 6(4):679–712.

[19] Alesker S. Solvability of the quaternionic Monge-Ampère equation on compact manifolds with a flat hyperKähler metric [J]. *Adv Math*, 2013, 241:192–219.

[20] Alesker S, Verbitsky M. Plurisubharmonic functions on hypercomplex manifolds and HKT-geometry [J]. *J Geom Anal*, 2006, 16(3):375–399.

[21] Moore E H. On the determinant of an hermitian matrix of quaternionic elements [J]. *Bull Amer Math Soc*, 1922, 28:161–162.

[22] Alesker S, Shelukhin E. On a uniform estimate for the quaternionic Calabi problem [J]. *Israel J Math*, 2013, 197:309–327.

[23] Aslaksen H. Quaternionic determinants [J]. *Math Intelligencer*, 1996, 18(3):57–65.

[24] Gelfand I, Retakh V, Wilson R L. Quatemionic quasideterminants and determinants, Lie groups and symmetric spaces [M]//Amer Math Soc Transl Ser 2, 111–123, Providence, RI: Amer Math Soc, 2003.

[25] Eyssidieux P, Guedj V, Zeriahi A. Viscosity solutions to degenerate complex Monge-Ampère equations [J]. *Comm Pure Appl Math*, 2011, 64(8):1059–1094.

Some Remarks on the Homogeneous Quaternionic Monge-Ampère Equations

WANG Guanxiang[1] ZHANG Jiaogen[2]

[1]School of Mathematical Sciences, University of Science and Technology of China, Hefei 230026, China. E-mail: wgx0511@mail.ustc.edu.cn

[2]Corresponding author. School of Mathematical Sciences, University of Science and Technology of China, Hefei 230026, China. E-mail: zjgmath@ustc.edu.cn

Abstract In this paper, the authors consider the regularity of Dirichlet problem for homogeneous quaternionic Monge-Ampère equations in the quaternionic space $\mathbb{H}^n$. The authors firstly derive a priori Lipschitz estimates when the strictly pseudoconvex domain and the boundary condition satisfy the $C^{1,1}$ regularity. Secondly, the authors consider a convergence result of the quaternionic Monge-Ampère operators. Finally, the authors study the relations between the viscosity subsolutions of homogeneous quaternionic Monge-Ampère equations and F-subharmonic functions.

Keywords Homogeneous quaternionic Monge-Ampère equations, Maximality, Plurisubharmonic

2000 MR Subject Classification 35J96, 42B25, 31C10

The English translation of this paper will be published in
Chinese Journal of Contemporary Mathematics, Vol. 43 No. 4, 2022
by ALLERTON PRESS, INC., USA