数 学 年 刊 A 辑
2023, 44(2):113–120
DOI: 10.16205/j.cnki.cama.2023.0009

含参数拟线性薛定谔方程的特征值问题*

程永宽[1] 沈尧天[2]

提要 本文考虑如下拟线性薛定谔方程:

$$-\triangle u+\frac{\kappa u}{2}\triangle u^2=\lambda|u|^{p-2}u,\quad x\in\Omega,$$

这里 $u\in H_0^1(\Omega)$, $2<p<2^*,\kappa>0,N\geqslant 3$ 且 Ω 是有界区域. 结合变分方法和摄动讨论, 作者证明了存在常数 $\kappa_0>0$, 使得对任何的 $\kappa\in(0,\kappa_0)$, 这类特征值问题有解 (λ,u). 特别地, 如果限制 $|u|_p^p=\alpha$, 作者发现对任何的 $\kappa>0$, 存在 $\alpha_0>0$, 使得在 $\alpha<\alpha_0$ 时, 该特征值问题的解总是存在的. 此外, 作者采用不同于 Morse 迭代的方法构造出了常数 κ_0 和 α_0 的精确表达式.

关键词 薛定谔方程, L^∞ 估计, 特征值问题
MR (2000) 主题分类 35J20, 35J60, 35Q55
中图法分类 O177.92
文献标志码 A
文章编号 1000-8314(2023)02-0113-08

§1 引 言

非线性薛定谔方程

$$\mathrm{i}z_t=-\triangle z+W(x)z-\rho(|z|^2)z+\frac{\kappa}{2}[\triangle|z|^2]z,\quad x\in\mathbb{R}^N,\tag{1.1}$$

其中 $W:\mathbb{R}^N\to\mathbb{R}$ 是一个给定的位势, $\rho:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 是一个在物理各领域中扮演重要角色的实值函数. 当 $\rho(s)=as^q$ 时, 方程 (1.1) 出现在等离子物理和非线性光学的各种问题中[1–2]. 此外, 当 $\rho(s)=-\alpha-\frac{\beta}{(a+s)^3}$ 时, 方程 (1.1) 也是研究超流体薄膜振动时的基本方程[3]. 更多的细节请参见文 [4–6].

本文我们考虑驻波解的存在性, 所谓驻波解是形如 $\varphi(x,t)=\exp(-\mathrm{i}Et)u(x)$ 的解, 其中 $E\in\mathbb{R}$ 且 $u>0$ 是一个实值函数. 易见 φ 满足 (1.1) 当且仅当 u 是如下椭圆方程的解:

$$-\triangle u+V(x)u+\frac{\kappa u}{2}\triangle u^2=\rho(u^2)u,\quad x\in\mathbb{R}^N,\tag{1.2}$$

这里 $V(x)=W(x)-E$ 是一个新的位势. 再令 $\rho(s)=s^{\frac{p-2}{2}}$, 我们得到

$$-\triangle u+V(x)u+\frac{\kappa u}{2}\triangle u^2=|u|^{p-2}u,\quad x\in\mathbb{R}^N.\tag{1.3}$$

而且 (1.3) 是能量泛函

$$I_0(u)=\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N}(1-\kappa u^2)|\nabla u|^2\mathrm{d}x+\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N}V(x)u^2\mathrm{d}x-\frac{1}{p}\int_{\mathbb{R}^N}|u|^p\mathrm{d}x\tag{1.4}$$

本文 2022 年 9 月 6 日收到, 2023 年 3 月 21 日收到修改稿.
[1]华南理工大学数学学院, 广州 510641. E-mail: chengyk@scut.edu.cn
[2]通信作者. 华南理工大学数学学院, 广州 510641. E-mail: maytshen@scut.edu.cn
*本文受到广东省基础与应用基础研究基金 (No. 2020A1515010338) 的资助.

的 Euler-Lagrange 方程. 最近 Alves 等在文 [7] 中指出, 如果 $\kappa > 0$, 泛函 I_0 在变分的范畴下存在两个困难. 由于 $N \geqslant 3$ 时, 泛函 (1.4) 在空间 $H^1(\mathbb{R}^N)$ 中不光滑甚至是没有定义的, 所以第一个困难是寻找一个合适的 Sobolev 空间. 第二个困难是如何保证泛函中的项 $1-\kappa u^2 > 0$. 通过截断方法限定 $\sqrt{1-\kappa t^2} \leqslant \frac{2}{\sqrt{6}}$, 他们证明了方程 (1.3) 非平凡解的存在性. 具体地, 他们证明了方程

$$-\operatorname{div}(g^2(u)\nabla u) + g(u)g'(u)|\nabla u|^2 + V(x)u = l(u), \quad x \in \mathbb{R}^N \tag{1.5}$$

非平凡解的存在性, 其中 $\kappa > 0$ 且 $g(t) = \sqrt{1-\kappa t^2}$, $|t| < \frac{1}{\sqrt{3\kappa}}$. 显然, 当 $g(t) = \sqrt{1-\kappa t^2}$ 且 $l(t) = t^{p-1}$, $2 < p < 2^*$ 时, 方程 (1.5) 即为方程 (1.3). 接下来, 利用 Morse L^∞ 估计, 他们证明了存在一个常数 $\kappa_0 > 0$, 使得对任何 $\kappa \in [0, \kappa_0)$, 所求的解满足 $\max\limits_{x\in\mathbb{R}^N}|u| < \frac{1}{\sqrt{3\kappa}}$. 但他们没有给出 κ_0 的具体表达式. 更多关于方程 (1.3) 的结果请参见文 [8–11].

本文的主要目标是研究如下拟线性薛定谔方程的特征值问题:

$$\begin{cases} -\triangle u + \dfrac{\kappa}{2}u\triangle u^2 = \lambda|u|^{p-2}u, & x \in \Omega, \\ u = 0, & x \in \partial\Omega, \end{cases} \tag{1.6}$$

其中 Ω 是 $\mathbb{R}^N$ 中的有界区域. 我们发现泛函

$$I_1(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega \sqrt{1-\kappa u^2}\mathrm{d}x \tag{1.7}$$

限制在流形 $\sum\limits_{\alpha} = \{u \in H_0^1(\Omega) : \int_\Omega |u|^p\mathrm{d}x = \alpha\}$ 上的极小是 Euler-Lagrange 方程 (1.6) 的解. 需要指出的是这里的 $I_1(u)$ 同样面临着 $I_0(u)$ 的两个困难.

启发于文 [12–13], 作变换

$$v = G(u) = \int_0^u g(s)\mathrm{d}s, \tag{1.8}$$

这里 $g(t) = \sqrt{1-\kappa t^2}$, $|t| \leqslant \frac{1}{\sqrt{3\kappa}}$ 且 $g(t)$ 在 $|t| > \frac{1}{\sqrt{3\kappa}}$ 时采用其它的方式给出. 利用变换 (1.8) 以后, 泛函 $I_1(u)$ 变为 $J_1(v) = \int_\Omega |\nabla v|^2\mathrm{d}x$. 而且泛函 $J_1(v)$ 限制在

$$\Big\{v \in H_0^1(\Omega) : \int_\Omega |G^{-1}(v)|^p\mathrm{d}x = \alpha\Big\}$$

上的极小是半线性方程

$$\begin{cases} -\triangle v = \dfrac{\lambda|G^{-1}(v)|^{p-2}G^{-1}(v)}{g(G^{-1}(v))}, & x \in \Omega, \\ v = 0, & x \in \partial\Omega \end{cases} \tag{1.9}$$

的解. 接下来, 利用文 [14] 中第二章引理 5.1 给出的化积分不等式为微分不等式的方法, 我们构造解 v 的 L^∞ 估计, 且我们估计式中所有常数都是已知的. 然后, 基于 $u = G^{-1}(v)$ 是方程 (1.6) 的解以及不等式 $|u|_\infty \leqslant \sqrt{6}|v|_\infty < \frac{1}{\sqrt{3\kappa}}$, 我们给出了常数 κ_0, α_0 的表达式.

本文采用如下符号: $|u|_p$ 表示 $L^p(\Omega)$ $(1 \leqslant p < +\infty)$ 的范数, $|\Omega|$ 表示区域 Ω 的测度, 而 C 表示正常数.

主要结果表述如下.

定理 1.1　设

$$\alpha_{0,1} = (120\lambda_1 C_N|\Omega|^{2a})^{-1}|\phi_1|_p^2;$$

$$\alpha_{0,2} = (1.1^{p(1+2a)}2^{p(a+2)}3^{p(1+2a)}(\lambda_1 C_N)^p|\Omega|^{2a(p-1)})^{-\frac{1}{2a+p}}|\phi_1|_p^{\frac{2p}{2a+p}}\kappa^{-\frac{ap}{2a+p}},$$

这里 $2<p<2^*$, $a=\frac{1}{p}-\frac{1}{2^*}$, C_N 是Sobolev 最佳常数, 且 λ_1 和 ϕ_1 分别是算子 $-\triangle$ 的第一特征值和第一特征函数. 则对任何的 $\kappa>0$, 特征值问题(1.6) 在 $\alpha<\alpha_0:=\min\{\alpha_{0,1},\alpha_{0,2}\}$ 时有满足 $\max\limits_{x\in\Omega}|u(x)|<\sqrt{\frac{1}{3\kappa}}$ 的解 (λ,u).

定理 1.2　设 $\alpha=1$. 那么如果

$$\kappa<\kappa_0:=18^{-1}(1+12\lambda_1|\phi_1|_p^{-2}|\Omega|^{2a}C_N)^{-\left(2+\frac{1}{a}\right)}(12\lambda_1|\phi|_p^{-2}C_N)^{-\frac{1}{a}}|\Omega|^{-\frac{2}{p'}},$$

其中 $p'=\frac{p}{p-1}$, 则特征值问题(1.6) 有满足 $\max\limits_{x\in\Omega}|u(x)|<\sqrt{\frac{1}{3\kappa}}$ 的解 (λ,u).

§2　修正问题

为了保证泛函 (1.7) 主项的恒正性, 我们先对函数 $\sqrt{1-\kappa t^2}$ 进行修正.

设函数 $g:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$ 定义为

$$g(t)=\begin{cases}\sqrt{1-\kappa t^2}, & 若\ 0\leqslant t<\sqrt{\dfrac{1}{3\kappa}};\\ \dfrac{1}{3\sqrt{2\kappa}t}+\sqrt{\dfrac{1}{6}}, & 若\ \sqrt{\dfrac{1}{3\kappa}}\leqslant t.\end{cases}$$

在 $t\leqslant 0$ 时令 $g(t)=g(-t)$, 则 $g\in C^1\big(\mathbb{R},\big(\sqrt{\frac{1}{6}},1\big]\big)$ 且 $g(t)$ 是在 $(-\infty,0)$ 上单调增而在 $[0,+\infty)$ 上单调减的偶函数.

这样泛函

$$I(u)=\frac{1}{2}\int_\Omega g^2(u)|\nabla u|^2\mathrm{d}x \tag{2.1}$$

限制在 $\sum\limits_\alpha$ 上的极小是 Euler-Lagrange 方程

$$\begin{cases}-\mathrm{div}(g^2(u)\nabla u)+g'(u)g(u)|\nabla u|^2=\lambda|u|^{p-2}u, & x\in\Omega,\\ u=0, & x\in\partial\Omega\end{cases} \tag{2.2}$$

的解. 此外, 由于前面定义的函数 $g(t)$ 是有界的, 我们就可以在空间 $H_0^1(\Omega)$ 中讨论该限制极小问题. 如果能够证明泛函 (2.1) 限制在 $\sum\limits_\alpha$ 上的极小 u 满足 $|u|_\infty\leqslant\sqrt{\frac{1}{3\kappa}}$, 那么 $g(u)=\sqrt{1-\kappa u^2}$, 从而这个极小函数 u 恰好就是我们要找的解. 也就是说, 在此情形下泛函 (2.1) 恰好是泛函 (1.7) 并且 u 就是方程 (1.6) 的解.

为了得到限制极小问题解的存在性和 L^∞ 估计, 我们用变换

$$v=G(u)=\int_0^u g(s)\mathrm{d}x \tag{2.3}$$

把非光滑泛函 (2.1) 化为一个光滑泛函. 相应的 Euler-Lagrange 方程 (2.2) 同时变成了一个半线性方程. 这里需要明确指出的是本文得到的 L^∞ 估计是比较精确的.

经由简单的计算可知逆变换 $G^{-1}(t)$ 存在并且是一个奇函数. 此外, 需要强调的是 $G, G^{-1} \in C^2(\mathbb{R})$.

下面的引理[7] 给出了 $g(t)$ 和 $G^{-1}(t)$ 的一些重要性质.

引理 2.1 (1) $\lim\limits_{t\to 0}\frac{G^{-1}(t)}{t} = 1$;

(2) $\lim\limits_{t\to\infty}\frac{G^{-1}(t)}{t} = \sqrt{6}$;

(3) $\forall\, t \geqslant 0$, 对 $t \leqslant G^{-1}(t) \leqslant \sqrt{6}t$;

(4) $\forall\, t \geqslant 0$, 对 $-\frac{1}{2} \leqslant \frac{t}{g(t)}g'(t) \leqslant 0$.

利用变换 (2.3), 求泛函 (2.1) 在 $\sum\limits_{\alpha}$ 上限制的极小问题可以化为求泛函

$$J(v) = \int_\Omega |\nabla v|^2 \mathrm{d}x \tag{2.4}$$

限制在 $\sum\limits_{\alpha,g} = \{v \in H_0^1(\Omega) : \int_\Omega |G^{-1}(v)|^p \mathrm{d}x = \alpha\}$ 上的极小问题. 由文 [15], 泛函 $J(v)$ 限制在 $\sum\limits_{\alpha,g}$ 上的极小可以在一个非负函数上取到, 即, 存在 $v \in \sum\limits_{\alpha,g}$, $v(x) \geqslant 0$ a.e. 在 Ω 上, 使得

$$J(v) = \min\Big\{J(v) \mid v \in \sum_{\alpha,g}\Big\},$$

并且函数 v 满足

$$\int_\Omega \Big[\nabla v \nabla \psi - \frac{\lambda |G^{-1}(v)|^{p-2} G^{-1}(v)\psi}{g(G^{-1}(v))}\Big]\mathrm{d}x = 0, \quad \forall \psi \in H_0^1(\Omega). \tag{2.5}$$

§3 L^∞ 估计

由第 2 部分可知存在一个半线性方程

$$\begin{cases} -\triangle v = \lambda \dfrac{|G^{-1}(v)|^{p-2}G^{-1}(v)}{g(G^{-1}(v))}, & x \in \Omega, \\ v = 0, & x \in \partial\Omega \end{cases} \tag{3.1}$$

的一个非平凡解 v. 下面我们要给出 v 的 L^∞ 估计.

对 $l > 0$, 设 $\psi = (v-l)^+$ 是 (2.5) 的一个检验函数, 注意到 $\frac{1}{g(t)} \leqslant \sqrt{6}$, 可得

$$\int_{A_l} |\nabla v|^2 \mathrm{d}x = \lambda \int_{A_l} \frac{|G^{-1}(v)|^{p-2}G^{-1}(v)(v-l)^+}{g(G^{-1}(v))}\mathrm{d}x \leqslant \sqrt{6}\lambda \int_{A_l} |G^{-1}(v)|^{p-1}(v-l)\mathrm{d}x, \tag{3.2}$$

其中 $A_l = \{x \in \Omega \mid v(x) > l\}$. 用 $|A_l|$ 表示集合 A_l 的 Lebesgue 测度, 则

$$l|A_l| \leqslant \int_{A_l} |v| \mathrm{d}x \leqslant |v|_1.$$

再结合引理 2.1 的 (3), 可得

$$|A_l| \leqslant l^{-1}|v|_1 \leqslant l^{-1}\Big(\int_\Omega |v|^p \mathrm{d}x\Big)^{\frac{1}{p}} |\Omega|^{\frac{1}{p'}} \leqslant l^{-1}\alpha^{\frac{1}{p}}|\Omega|^{\frac{1}{p'}}. \tag{3.3}$$

此外, 由 Hölder 不等式、引理 2.1 以及 (3.2) 可得

$$\begin{aligned}\int_{A_l}|\nabla v|^2\mathrm{d}x &\leqslant \sqrt{6}\lambda\Big(\int_{A_l}|v-l|^p\mathrm{d}x\Big)^{\frac{1}{p}}\Big(\int_{A_l}|G^{-1}(v)|^p\mathrm{d}x\Big)^{\frac{1}{p'}}\\ &\leqslant 6\lambda\alpha^{1-\frac{2}{p}}\Big(\int_{A_l}|v-l|^p\mathrm{d}x\Big)^{\frac{1}{p}}\Big(\int_{A_l}|v|^p\mathrm{d}x\Big)^{\frac{1}{p}}\\ &\leqslant 6\lambda\alpha^{1-\frac{2}{p}}\Big(\int_{A_l}|v-l|^p\mathrm{d}x\Big)^{\frac{1}{p}}\Big(\Big(\int_{A_l}|v-l|^p\mathrm{d}x\Big)^{\frac{1}{p}}+l|A_l|^{\frac{1}{p}}\Big)\\ &\leqslant 6\lambda\alpha^{1-\frac{2}{p}}\Big(\int_{A_l}|v-l|^p\mathrm{d}x\Big)^{\frac{2}{p}}+6\lambda\alpha^{1-\frac{2}{p}}l|A_l|^{\frac{1}{p}}\Big(\int_{A_l}|v-l|^p\mathrm{d}x\Big)^{\frac{1}{p}}. \end{aligned}\tag{3.4}$$

又由 Sobolev 不等式 $|v-l|_{2^*}^2\leqslant C_N|\nabla v|_2^2$ 并再次利用 Hölder 不等式, 可得

$$\begin{aligned}\Big(\int_{A_l}|v-l|^p\mathrm{d}x\Big)^{\frac{2}{p}} &\leqslant \Big(\int_{A_l}|v-l|^{2^*}\mathrm{d}x\Big)^{\frac{p}{2^*}\cdot\frac{2}{p}}|A_l|^{\left(1-\frac{p}{2^*}\right)\frac{2}{p}}\\ &\leqslant C_N|A_l|^{2a}\int_{A_l}|\nabla v|^2\mathrm{d}x,\end{aligned}\tag{3.5}$$

这里 $a:=\frac{1}{p}-\frac{1}{2^*}$. 这样, 结合 (3.4)–(3.5), 我们有

$$\begin{aligned}&\Big(\int_{A_l}|v-l|^p\mathrm{d}x\Big)^{\frac{2}{p}}\\ &\leqslant 6\lambda\alpha^{1-\frac{2}{p}}C_N|A_l|^{2a}\Big[\Big(\int_{A_l}|v-l|^p\mathrm{d}x\Big)^{\frac{2}{p}}+l|A_l|^{\frac{1}{p}}\Big(\int_{A_l}|v-l|^p\mathrm{d}x\Big)^{\frac{1}{p}}\Big].\end{aligned}\tag{3.6}$$

若令 $l_0=(12\lambda C_N)^{\frac{1}{2a}}\alpha^{\left(1-\frac{2}{p}\right)\frac{1}{2a}+\frac{1}{p}}|\Omega|^{\frac{1}{p'}}$, 可得

$$6\lambda\alpha^{1-\frac{2}{p}}C_N\Big(\frac{\alpha^{\frac{1}{p}}|\Omega|^{\frac{1}{p'}}}{l_0}\Big)^{2a}=\frac{1}{2}.\tag{3.7}$$

因此, 若 $l>l_0$, 由 (3.3) 和 (3.6)–(3.7) 可得

$$\Big(\int_{A_l}|v-l|^p\mathrm{d}x\Big)^{\frac{1}{p}}\leqslant 12\lambda\alpha^{1-\frac{2}{p}}C_N|A_l|^{2a+\frac{1}{p}}l.$$

从而

$$\begin{aligned}\int_{A_l}|v-l|\mathrm{d}x &\leqslant \Big(\int_{A_l}|v-l|^p\mathrm{d}x\Big)^{\frac{1}{p}}|A_l|^{\frac{1}{p'}}\\ &\leqslant 12\lambda\alpha^{1-\frac{2}{p}}C_N|A_l|^{2a+1}l.\end{aligned}\tag{3.8}$$

下面我们通过两个引理给出 $|v|_\infty$ 的估计式. 第一个引理启发于文 [14] 中第二章的引理 5.1.

引理 3.1　假设(3.8) 成立并且 $l\geqslant l_0>0$, 则半线性方程(3.1) 的解 v 满足

$$|v|_\infty\leqslant(1+12\lambda C_N\alpha^{1-\frac{2}{p}}|\Omega|^{2a})^{1+\frac{1}{2a}}(12\lambda C_N)^{\frac{1}{2a}}\alpha^{\frac{1}{p}+(1-\frac{2}{p})\frac{1}{2a}}|\Omega|^{\frac{1}{p'}}.$$

证　考虑函数 $f(l)=\int_{A_l}|v-l|\mathrm{d}x$. 则 $-f'(l)=|A_l|$. 所以 (3.8) 可以改写为 $f(l)\leqslant 12\lambda\alpha^{1-\frac{2}{p}}C_Nl(-f'(l))^{2a+1}$, 即

$$l^{-\frac{1}{1+2a}}\leqslant(12\lambda\alpha^{1-\frac{2}{p}}C_N)^{\frac{1}{1+2a}}f(l)^{-\frac{1}{1+2a}}(-f'(l)).$$

上式关于 l 从 l_0 到 $l_{\max}:=|v|_\infty$ 积分, 可得

$$\begin{aligned} l_{\max}^{1-\frac{1}{1+2a}}-l_0^{1-\frac{1}{1+2a}} &\leqslant (12\lambda\alpha^{1-\frac{2}{p}}C_N)^{\frac{1}{1+2a}}((f(l_0))^{1-\frac{1}{1+2a}}-(f(l_{\max}))^{1-\frac{1}{1+2a}}) \\ &\leqslant (12\lambda\alpha^{1-\frac{2}{p}}C_N)^{\frac{1}{1+2a}}(f(l_0))^{1-\frac{1}{1+2a}}. \end{aligned} \tag{3.9}$$

此外, 注意到

$$f(l_0)=\int_{A_{l_0}}|v-l_0|\mathrm{d}x\leqslant 12\lambda\alpha^{1-\frac{2}{p}}C_N|\Omega|^{1+2a}l_0. \tag{3.10}$$

结合 (3.9)–(3.10), 可得

$$l_{\max}^{\frac{2a}{1+2a}}\leqslant l_0^{\frac{2a}{1+2a}}+(12\lambda\alpha^{1-\frac{2}{p}}C_N)^{\frac{1}{1+2a}}(12\lambda\alpha^{1-\frac{2}{p}}C_N|\Omega|^{1+2a}l_0)^{\frac{2a}{1+2a}}.$$

整理得到不等式

$$\begin{aligned} |v|_\infty=l_{\max} &\leqslant (l_0^{\frac{2a}{1+2a}}+(12\lambda\alpha^{1-\frac{2}{p}}C_N)^{\frac{1}{1+2a}}(12\lambda\alpha^{1-\frac{2}{p}}C_N|\Omega|^{1+2a}l_0)^{\frac{2a}{1+2a}})^{\frac{1+2a}{2a}} \\ &=(1+12\lambda C_N\alpha^{1-\frac{2}{p}}|\Omega|^{2a})^{1+\frac{1}{2a}}(12\lambda C_N)^{\frac{1}{2a}}\alpha^{\frac{1}{p}+\left(1-\frac{2}{p}\right)\frac{1}{2a}}|\Omega|^{\frac{1}{p'}}. \end{aligned}$$

引理 3.2 半线性方程(3.1) 的特征值 λ 具有估计

$$\lambda\leqslant\lambda_1\alpha^{\frac{2}{p}}|\phi_1|_p^{-2},$$

这里 λ_1 和 ϕ_1 分别是算子 $-\triangle$ 的第一特征值和第一特征函数.

证 假设 λ_1 和 ϕ_1 分别是算子 $-\triangle$ 的第一特征值和第一特征函数. 也就是说 λ_1 和 ϕ_1 满足 $-\triangle\phi_1=\lambda_1\phi_1$, $|\phi_1|_2=1$ 和 $|\nabla\phi_1|_2=\lambda_1$. 注意到 $\int_\Omega|G^{-1}(0\cdot\phi_1)|^p\mathrm{d}x=0$ 以及

$$\int_\Omega|G^{-1}(\eta\phi_1)|^p\mathrm{d}x\geqslant\eta^p\int_\Omega|\phi_1|^p\mathrm{d}x=\eta^p\alpha\to\infty,\quad 当\ \eta\to\infty 时.$$

则 $\int_\Omega|G^{-1}(\eta\phi_1)|^p\mathrm{d}x$ 关于 η 在 $[0,+\infty)$ 上的连续性蕴含了存在一个 $\eta_1\in(0,+\infty)$, 使得对于给定的 $\alpha\in\mathbb{R}^+$, 有 $\int_\Omega|G^{-1}(\eta_1\phi_1)|^p\mathrm{d}x=\alpha$. 由于 $\lambda=\min\big\{J(v)\mid v\in\sum\limits_{\alpha,g}\big\}$, 可得

$$\lambda\leqslant\int_\Omega|\nabla\eta_1\phi_1|^2\mathrm{d}x\leqslant\eta_1^2\int_\Omega|\nabla\phi_1|^2\mathrm{d}x\leqslant\eta_1^2\lambda_1. \tag{3.11}$$

这样, 接下来我们仅需估计 η_1^2. 注意到 $\eta_1^p\int_\Omega|\phi_1|^p\mathrm{d}x\leqslant\int_\Omega|G^{-1}(\eta_1\phi_1)|^p\mathrm{d}x=\alpha$, 我们有 $\eta_1^p\leqslant\alpha(\int_\Omega|\phi|_1^p\mathrm{d}x)^{-1}$, 进而

$$\eta_1\leqslant\alpha^{\frac{1}{p}}|\phi_1|_p^{-1}. \tag{3.12}$$

所以, 结合 (3.11)–(3.12), 我们给出了期望的不等式 $\lambda\leqslant\lambda_1\alpha^{\frac{2}{p}}|\phi_1|_p^{-2}$.

最后, 我们要结合引理 3.1–3.2 的结果给出 L^∞ 估计:

$$|v|_\infty\leqslant\left(1+12\lambda_1|\phi_1|_p^{-2}C_N\alpha|\Omega|^{2a}\right)^{1+\frac{1}{2a}}(12\lambda_1|\phi_1|_p^{-2}C_N)^{\frac{1}{2a}}\alpha^{\frac{1}{p}+\frac{1}{2a}}|\Omega|^{\frac{1}{p'}}. \tag{3.13}$$

§4 两个定理的证明

定理 1.1 的证明 注意到 $\int_\Omega|u|^p\mathrm{d}x=\alpha$, 令 $\alpha_{0,1}$ 满足

$$12\lambda_1|\phi_1|_p^{-2}C_N\alpha_{0,1}|\Omega|^{2a}\leqslant 0.1.$$

结合估计 (3.13) 和不等式 $|u|_\infty \leqslant \sqrt{6}|v|_\infty$, 当 $0 < \alpha \leqslant \alpha_{0,1} := (120\lambda_1 C_N|\Omega|^{2a})^{-1}|\phi_1|_p^2$ 时, 有 $1 + 12\lambda_1|\phi_1|_p^{-2}C_N\alpha|\Omega|^{2a} \leqslant 1.1$ 以及

$$|u|_\infty \leqslant \sqrt{6}|v|_\infty \leqslant \sqrt{6}(1.1)^{1+\frac{1}{2a}}(12\lambda_1|\phi_1|_p^{-2}C_N)^{\frac{1}{2a}}\alpha^{\frac{1}{p}+\frac{1}{2a}}|\Omega|^{\frac{1}{p'}}.$$

现在选取 $\alpha_{0,2}$, 满足

$$\sqrt{6}(1.1)^{1+\frac{1}{2a}}(12\lambda_1|\phi_1|_p^{-2}C_N)^{\frac{1}{2a}}\alpha^{\frac{1}{p}+\frac{1}{2a}}|\Omega|^{\frac{1}{p'}} \leqslant \sqrt{\frac{1}{3\kappa}}. \tag{4.1}$$

即, 如果 $\alpha_{0,2} := ((1.1)^{p(1+2a)}2^{p(a+2)}3^{p(2a+1)}(\lambda_1 C_N)^p|\Omega|^{2a(p-1)})^{-\frac{1}{2a+p}}|\phi_1|_p^{\frac{2p}{p+2a}}\kappa^{-\frac{ap}{p+2a}}$ 且 $\alpha < \alpha_0 := \min\{\alpha_{0,1}, \alpha_{0,2}\}$, 则不等式 (4.1) 成立.

定理 1.2 的证明　由于 $\alpha = 1$, 经由估计 (3.13) 和不等式 $|u|_\infty \leqslant \sqrt{6}|v|_\infty$, 我们可以利用不等式

$$|u|_\infty \leqslant \sqrt{6}(1 + 12\lambda_1|\phi_1|_p^{-2}C_N|\Omega|^{2a})^{1+\frac{1}{2a}}(12\lambda_1|\phi_1|_p^{-2}C_N)^{\frac{1}{2a}}|\Omega|^{\frac{1}{p'}} \leqslant \sqrt{\frac{1}{3\kappa}}$$

构建满足 $\max\limits_{x\in\Omega}|u(x)| < \sqrt{\frac{1}{3\kappa}}$ 的 κ 的上界.

参　考　文　献

[1] Goldman M V. Strong turbulence of plasma waves [J]. *Rev Modern Phys,* 1984, 56:709–735.

[2] Porkolab M, Goldman M V. Upper-Hybrid solitons and oscillating-two-stream instabilities [J]. *Phys Fluids,* 1978, 19:872–881.

[3] Kurihura S. Large-Amplitude quasi-solitons in superfluid films [J]. *J Phys Soc Japan,* 1981, 50:3262–3267.

[4] Brüll L, Lange H, de Jager E. Stationary, oscillatory and solitary waves type solutions of singular nonlinear Schödinger equations [J]. *Math Methods Appl Sci,* 1986, 8:559–575.

[5] de Bouard A, Hayashi N, Saut J C. Global existence of small solutions to a relativistic nonlinear Schrödinger equation [J]. *Commun Math Phys,* 1997, 189:73–105.

[6] Hasse R W. A general method for the solution of nonlinear soliton and kink Schrödinger equations [J]. *Z Phys,* 1980, 37:83–87.

[7] Alves C O, Wang Y J, Shen Y T. Soliton solutions for a calss of quasilinear Schrödinger equations with a parameter [J]. *J Differential Equations,* 2015, 259:318–343.

[8] Aires José F L, Souto Marco A S. Equation with positive coefficient in the quasilinear term and vanishing potential [J]. *Topol Methods Nonlinear Anal,* 2015, 46:813–833.

[9] Severo U B, Gloss E, da Silva E D. On a class of quasilinear Schrödinger equations with superlinear or asymptotically linear terms [J]. *J Differential Equations,* 2017, 263:3550–3580.

[10] Wang Y J, Li Q. Existence and asymptotic profiles of positive solutions of quasilinear Schrödinger equations in $\mathbb{R}^3$ [J]. *J Math Phys,* 2017, 58:111502.

[11] Wang Y J, Shen Y T. Existence and asymptotic behavior of positive solutions for a class of qusilinear Schrödinger equations [J]. *Adv Nonlinear Stud,* 2018, 18:131–150.

[12] Shen Y T, Wang Y J. Soliton solutions for generalized quasilinear Schrödinger equations [J]. *Nonlinear Analysis TMA,* 2013, 80:194–201.

[13] Shen Y T, Guo X K. The positive solution of degenerate variational problems and degenerate elliptic equations [J]. *J of Chinese Contemporary Mathematics,* 1993, 14:157–166.

[14] Ladyzhenskaya O A, Ural'tseva N N. Linear and quasilinaer elliptic equations [M]. New York: Academic Press, 1968.

[15] Evans L C, Partial differential equations [M]. Providence RI: Amer Math Soc, 1998.

The Eigenvalue Problem for a Class of Quasilinear Schrödinger Equations with a Parameter

CHENG Yongkuan[1] SHEN Yaotian[2]

[1]School of Mathematics, South China University of Technology, Guangzhou 510640, China. E-mail: chengyk@scut.edu.cn

[2]Corresponding author. School of Mathematics, South China University of Technology, Guangzhou 510640, China. E-mail: maytshen@scut.edu.cn

Abstract This paper considers a class of quasilinear Schrödinger equations of the form

$$-\triangle u + \frac{\kappa u}{2}\triangle u^2 = \lambda |u|^{p-2}u, \quad x \in \Omega,$$

where $u \in H_0^1(\Omega)$, $2 < p < 2^*, \kappa > 0, N \geqslant 3$ and Ω is a bounded domain. Combining variational approaches with perturbation arguments, the authors prove that there exists $\kappa_0 > 0$ such that for any $\kappa \in (0, \kappa_0)$ this eigenvalue problem admits a solution (λ, u). More interestingly, if the eigenvalue problem is restricted to $|u|_p^p = \alpha$, the authors observe that for any $\kappa > 0$, there exists $\alpha_0 > 0$ such that the solution of the eigenvalue problem exists under the situation of $\alpha < \alpha_0$. Particularly, the authors construct the accurate expressions of κ_0 and α_0 and, different from the Morse estimate, the authors use another method to show the L^∞ estimate.

Keywords Schrödinger equations, L^∞ estimate, Eigenvalue problem

2000 MR Subject Classification 35J20, 35J60, 35Q55

The English translation of this paper will be published in
Chinese Journal of Contemporary Mathematics, Vol. 44 No. 2, 2023
by ALLERTON PRESS, INC., USA