数 学 年 刊 A 辑
2023, 44(2):121–132
DOI: 10.16205/j.cnki.cama.2023.0010

H_α^∞ 到 H_β^∞ 复合算子的线性组合*

张 利[1]

提要 设 $\mathbb{B}$ 是 N 维复空间 $\mathbb{C}^N$ 中的开单位球, φ_i 为 $\mathbb{B}$ 上的解析自映射, H_α^∞ 表示定义在单位球上的加权解析函数空间. 本文主要研究的是从空间 H_α^∞ 到 H_β^∞ 上的复合算子线性组合 $\sum\limits_{i=1}^{M}\lambda_i C_{\varphi_i}$ 的紧致性, 其中 $\lambda_i(i=1,2,\cdots,M)$ 是非零常数. 另外, 根据紧致性等价条件, 得出算子差分对 $(C_{\varphi_1}-C_{\varphi_2})-(C_{\varphi_3}-C_{\varphi_1})$ 是紧致的当且仅当 $C_{\varphi_1}-C_{\varphi_2}$ 与 $C_{\varphi_3}-C_{\varphi_1}$ 都是紧致的算子.

关键词 复合算子, 线性组合, 抵消性
MR (2000) 主题分类 47B38, 32A37
中图法分类 O177.2
文献标志码 A
文章编号 1000-8314(2023)02-0121-12

§1 引 言

设 $\mathbb{C}^N(N\geqslant 1)$ 为 N 维复空间, 其上可以定义内积

$$\langle z,w\rangle=\sum_{k=1}^{N}z_k\overline{w}_k,$$

其中 $z=(z_1,\cdots,z_N)\in\mathbb{C}^N$, $w=(w_1,\cdots,w_N)\in\mathbb{C}^N$, z 的模长为 $|z|=\sqrt{\langle z,z\rangle}$.

$\mathbb{B}=\{z=(z_1,\cdots,z_N):|z|<1\}$ 为 $\mathbb{C}^N$ 中的开单位球. 特别的, 当 $N=1$ 时, 用 $\mathbb{D}$ 代替 $\mathbb{B}$. $H(\mathbb{B})$ 表示定义在 $\mathbb{B}$ 上的全体解析函数构成的空间.

加权的解析函数空间 $H_\alpha^\infty(\alpha>0)$ 是由满足

$$\|f\|_\alpha=\sup_{z\in\mathbb{B}}(1-|z|^2)^\alpha|f(z)|<\infty$$

的所有解析函数构成的空间. H_α^∞ 在范数 $\|f\|_\alpha$ 下是一个 Banach 空间.

设 $\varphi=(\varphi_1,\cdots,\varphi_N)$ 为单位球 $\mathbb{B}$ 上的解析自映射, 由 φ 诱导的复合算子定义为

$$(C_\varphi f)(z)=f(\varphi(z)),\ \ f\in H(\mathbb{B}),\ z\in\mathbb{B}.$$

设 $\lambda_i\in\mathbb{C}$ $(i=1,2,\cdots,M)$ 为 M 个非零常数, 复合算子线性组合定义为

$$T=\sum_{i=1}^{M}\lambda_i C_{\varphi_i}.$$

过去的几十年, 众多函数空间上复合算子的性质被广泛研究, 参见文 [1–9].

本文 2022 年 9 月 6 日收到, 2023 年 3 月 21 日收到修改稿.
[1]南阳师范学院, 河南 南阳 473061. E-mail: zhangli0977@126.com
*本文受到南阳师范学院自然科学基金 (No. QN2017047) 的资助.

Izuchi 和 Ohno[10]给出了定义在 $H^\infty(\mathbb{D})$ 空间上复合算子线性组合紧致性的完备描述. Hosokawa, Nieminen 和 Ohno[11]研究了 Bloch 空间 $\mathcal{B}(\mathbb{D})$ 上复合算子线性组合紧致性的等价条件. Shi 和 Li[12]则给出了 $\mathcal{B}(\mathbb{D})$ 与 $H^\infty(\mathbb{D})$ 空间上复合算子线性组合紧致性一个新的判别准则. 江和欧阳[13]得出在 Hardy 空间 $H^2(\mathbb{B})$ 以及 Bergman 空间 $A_s^2(\mathbb{B})(s>-1)$ 上复合算子线性组合紧致的必要条件. 本文中, 我们将在 $C_{\varphi_i}(i=1,\cdots,M)$ 是 H_α^∞ 到 H_β^∞ 有界算子的情形下, 讨论算子 $T: H_\alpha^\infty \to H_\beta^\infty$ 紧致性的等价条件.

另外, 在文 [14] 中, 作者提出如下差分对紧致抵消性问题: 当 $C_{\varphi_1}-C_{\varphi_2}$ 和 $C_{\varphi_3}-C_{\varphi_1}$ 都不是紧致算子时, $(C_{\varphi_1}-C_{\varphi_2})-(C_{\varphi_3}-C_{\varphi_1})$ 能否是紧致的算子? 并证明了在加权 Bergman 空间上非紧致性不能经过差分后抵消. 而根据文 [10] 中的推论 2.4, 也可以得出在 $H^\infty(\mathbb{D})$ 空间中复合算子差分的非紧致性也不能通过差分抵消, 这些相关的研究促使我们讨论定义在 H_α^∞ 到 H_β^∞ 空间的相关算子会出现什么情况?

根据文 [15] 中结论, 可得 C_φ 是 H_α^∞ 到 H_β^∞ 上的有界算子当且仅当

$$\sup_{z\in\mathbb{B}} \frac{(1-|z|^2)^\beta}{(1-|\varphi(z)|^2)^\alpha} < \infty, \tag{1.1}$$

C_φ 是紧致的算子当且仅当

$$\frac{(1-|z|^2)^\beta}{(1-|\varphi(z_n)|^2)^\alpha} \to 0, \quad |\varphi(z)| \to 1. \tag{1.2}$$

如果 C_φ 是非紧算子, 则可以找到一个点列 $\{z_n\}\subset\mathbb{B}$, 满足 $|\varphi(z_n)|\to 1$ 且

$$\frac{(1-|z|^2)^\beta}{(1-|\varphi(z)|^2)^\alpha} \nrightarrow 0, \qquad n\to\infty.$$

当 $\sup\limits_{z\in\mathbb{B}}|\varphi(z)|<1$ 时, C_φ 总是紧算子, 另外由文 [15] 中推论 4.4 可得, 当 $\beta>\alpha$ 时, C_φ 也总是紧算子. 因此本文中总是假设 $\beta\leqslant\alpha$, $\sup\limits_{z\in\mathbb{B}}|\varphi(z)|=1$.

另外, 做出如下约定: C 表示一个正常数, 且其数值在不同位置出现时可以是不同的.

§2 预备知识

首先介绍单位球 $\mathbb{B}$ 上的解析自同构映射, 类似于圆盘自同构 $(a-z)/(1-\overline{a}z)$, 其中 $a\in\mathbb{D}$. 设 $a\neq 0$ 是 $\mathbb{B}$ 中一点, $[a]$ 是由 a 生成的子空间, 则 $\mathbb{B}$ 到 $[a]$ 的投影映射为

$$P_a(z)=\frac{\langle z,a\rangle}{\langle a,a\rangle}a,$$

而 $Q_a=I-P_a$ 是 $\mathbb{B}$ 到 $[a]$ 正交补空间的投影映射. 定义解析自同构映射

$$\phi_a(z)=\frac{a-P_a(z)-s_aQ_a(z)}{1-\langle z,a\rangle}, \quad z\in\mathbb{B},$$

其中 $s_a=\sqrt{1-|a|^2}$. 当 $a=0$ 时, 定义 $\phi_a(z)=-z$. 显然 $\phi_a(z)$ 也是闭单位球 $\overline{\mathbb{B}}$ 上的自同构映射, 另外有 $\phi_a(0)=a, \phi_a(a)=0$.

取 $\mathbb{B}$ 中两点 z 和 w, 定义 z 和 w 之间的伪双曲距离为

$$\rho(z,w)=|\phi_z(w)|.$$

容易验证

$$1-\rho^2(z,w)=\frac{(1-|z|^2)(1-|w|^2)}{|1-\langle z,w\rangle|^2}.$$

对于 $\mathbb{B}$ 的解析自映射 φ, 用 $\varphi^\sharp$ 表示

$$\varphi^\sharp(z)=\frac{(1-|z|^2)^\beta}{(1-|\varphi(z)|^2)^\alpha}.$$

由式子 (1.1) 可得 C_φ 有界等价于 $\sup\limits_{z\in\mathbb{B}}\varphi^\sharp(z)<\infty$.

设 $\varphi_1,\cdots,\varphi_M(M\geqslant 2)$ 是 $\mathbb{B}$ 的 M 个不同解析自映射, 用 $\triangle$ 表示满足条件 (i)–(iv) 的点列 $\{z_n\}\subset\mathbb{B}$ 构成的集合, 其中条件为

(i) 当 $n\to\infty$ 时, $z_n\to\zeta$, 其中 $|\zeta|=1$;

(ii) 对任意的 $i\in\{1,2,\cdots,M\}$, $\{\varphi_i(z_n)\}$ 都是收敛的点列;

(iii) 对任意的 $i\in\{1,2,\cdots,M\}$, $\{\varphi_i^\sharp(z_n)\}$ 都是收敛的点列;

(iv) 对任意的 i,j, $\{\rho_{i,j}(z_n)\}$ 是收敛的数列, 其中 $\rho_{i,j}(z_n)=\rho(\varphi_i(z_n),\varphi_j(z_n))$.

给定一个点列 $\{z_n\}\in\triangle$ 以及参数 $j=1,2,\cdots,M$, 定义如下集合

$$I\{z_n\}=\{i:|\varphi_i(z_n)|\to 1\},$$
$$I_j\{z_n\}=\{i:\rho_{i,j}(z_n)\to 0\},$$

这里所有的极限都是 $n\to\infty$.

当 $n\to\infty$ 时, 若 $|z_n|\to 1$, 则一定存在子列 $\{z_{n_k}\}$, 满足 $\{z_{n_k}\}\in\triangle$. 若 $s,t\in I\{z_n\}$, 由距离的三角不等式可以推出 $I_s\{z_n\}$ 与 $I_t\{z_n\}$ 要么相同要么无交. 如果 $j\in I\{z_n\}$, 则 $j\in I_j\{z_n\}\subset I\{z_n\}$, 因此 $I\{z_n\}$ 有如下表示形式:

$$I\{z_n\}=I_{j1}\{z_n\}+\cdots+I_{jp}\{z_n\},$$

其中 “+” 表示无交并运算.

设 $\Gamma(\varphi_i)$ 表示 $\triangle$ 的子集, 且满足

$$\Gamma(\varphi_i)=\{\{z_n\}\in\triangle:\lim_{n\to\infty}\varphi_i^\sharp(z_n)\neq 0\}.$$

由式子 (1.2) 易知 C_{φ_i} 是紧致算子等价于 $\Gamma(\varphi_i)=\emptyset$.

下面的引理是证明算子紧致性的重要准则, 其证明思想类似于文 [1] 中的命题 3.11.

引理 2.1　线性算子 $T:H_\alpha^\infty\to H_\beta^\infty$ 是紧致的当且仅当 T 是有界的, 且对 H_α^∞ 中的任意在 $\mathbb{B}$ 上内闭一致收敛到 0 的有界函数列 $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, 都有 $\|Tf_n\|_\beta\to 0\quad(n\to\infty)$.

根据文 [15] 中引理 3.1, 可得如下引理.

引理 2.2　当 $\rho(z,w)\to 0$ 时, $\frac{(1-|z|^2)^\alpha}{(1-|w|^2)^\alpha}\to 1$.

引理 2.3 [15, 引理3.2] 设 $f\in H_\alpha^\infty$, $z,w\in\mathbb{B}$, 则

$$|(1-|z|^2)^\alpha f(z)-(1-|w|^2)^\alpha f(w)|\leqslant C\|f\|_\alpha\rho(z,w).$$

§3 复合算子线性组合

本节中, 我们将讨论复合算子线性组合的紧致性问题. 首先假定 C_{φ_i} $(i=1,\cdots,M)$ 是有界的, 则

$$T=\sum_{i=1}^M\lambda_iC_{\varphi_i}$$

也是有界的.

定理 3.1 下述条件是等价的:

(i) $T:H_\alpha^\infty\to H_\beta^\infty$ 是紧致的.

(ii) 点列 $\{z_n\}\in\triangle$ 且满足 $I\{z_n\}\neq\emptyset$, $j\in I\{z_n\}$, 则当 $n\to\infty$ 时, 有

$$\sum_{i\in I_j\{z_n\}}\lambda_i\varphi_i^\sharp(z_n)\to 0.$$

(iii) 对任意 $j\in\{1,2,\cdots,M\}$ 满足 $\Gamma(\varphi_j)\neq\emptyset$ 以及 $\{z_n\}\in\Gamma(\varphi_j)$, 有

$$\sum_{i\in I_j\{z_n\}}\lambda_i=0.$$

证 (i) $\Rightarrow$ (ii) : 设 $\{z_n\}\in\triangle$, $j\in I\{z_n\}$, 则

$$|\varphi_j(z_n)|\to 1.$$

为了证明的方便, 记

$$I=I\{z_n\},\quad J=I_j\{z_n\},$$

接下来证明

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i\in J}\lambda_i\varphi_i^\sharp(z_n)=0.$$

假设

$$f_n(z)=\frac{1-|\varphi_j(z_n)|^2}{(1-\langle z,\varphi_j(z_n)\rangle)^{\alpha+1}}\cdot\prod_{i\in I\setminus J}\frac{\langle\phi_{\varphi_i(z_n)}(z),\phi_{\varphi_i(z_n)}(\varphi_j(z_n))\rangle}{|\phi_{\varphi_i(z_n)}(\varphi_j(z_n))|}.$$

显然有

$$\|f_n\|_\alpha\leqslant C,$$

且 f_n 在 $\mathbb{B}$ 上内闭一致收敛于零. 因此根据引理 2.1 可得

$$\lim_{n\to\infty}\|Tf_n\|_\beta=0.$$

因此

$$\begin{aligned}
\|Tf_n\|_\beta &= \sup_{z\in\mathbb{B}}(1-|z|^2)^\beta|Tf_n(z)| \\
&\geqslant (1-|z_n|^2)^\beta|Tf_n(z_n)| \\
&= (1-|z_n|^2)^\beta\Big|\sum_{i=1}^{M}\lambda_i f_n(\varphi_i(z_n))\Big| \\
&= (1-|z_n|^2)^\beta\Big|\sum_{i\in J}\lambda_i f_n(\varphi_i(z_n)) \\
&\quad + \sum_{i\in I\setminus J}\lambda_i f_n(\varphi_i(z_n)) + \sum_{i\notin I}\lambda_i f_n(\varphi_i(z_n))\Big| \\
&\geqslant (1-|z_n|^2)^\beta\Big|\sum_{i\in J}\lambda_i f_n(\varphi_i(z_n))\Big| \\
&\quad - (1-|z_n|^2)^\beta\Big|\sum_{i\in I\setminus J}\lambda_i f_n(\varphi_i(z_n))\Big| \\
&\quad - (1-|z_n|^2)^\beta\Big|\sum_{i\notin I}\lambda_i f_n(\varphi_i(z_n))\Big|.
\end{aligned}$$

当 $i\notin I$ 时, 存在常数 $\delta<1$, 满足 $|\varphi_i(z_n)|<\delta$, 因此当 $n\to\infty$ 时, $f_n(\varphi_i(z_n))\to 0$, 从而

$$\lim_{n\to\infty}\Big|\sum_{i\notin I}\lambda_i f_n(\varphi_i(z_n))\Big| = 0.$$

当 $i\in I\setminus J$ 时, 有

$$f_n(\varphi_i(z_n)) = 0,$$

则

$$\lim_{n\to\infty}(1-|z_n|^2)^\beta\Big|\sum_{i\in I\setminus J}\lambda_i f_n(\varphi_i(z_n))\Big| = 0.$$

综上我们有如下等式:

$$\lim_{n\to\infty}(1-|z_n|^2)^\beta\Big|\sum_{i\in J}\lambda_i f_n(\varphi_i(z_n))\Big| = \lim_{n\to\infty}\|Tf_n\|_\beta = 0.$$

若 $i\in J$, 则 $\rho_{i,j}(z_n)\to 0$, 根据引理 2.2, 可知

$$\lim_{n\to\infty}|(1-|\varphi_i(z_n)|^2)^\alpha f_n(\varphi_i(z_n)) - (1-|\varphi_j(z_n)|^2)^\alpha f_n(\varphi_j(z_n))| = 0.$$

另外

$$\begin{aligned}
f_n(\varphi_j(z_n)) &= \frac{1-|\varphi_j(z_n)|^2}{(1-\langle\varphi_j(z_n),\varphi_j(z_n)\rangle)^{\alpha+1}}\cdot\prod_{i\in I\setminus J}\frac{\langle\phi_{\varphi_i(z_n)}(\varphi_j(z_n)),\phi_{\varphi_i(z_n)}(\varphi_j(z_n))\rangle}{|\phi_{\varphi_i(z_n)}(\varphi_j(z_n))|} \\
&= \frac{1-|\varphi_j(z_n)|^2}{(1-|\varphi_j(z_n)|^2)^{\alpha+1}}\cdot\prod_{i\in I\setminus J}\rho_{i,j}(z_n).
\end{aligned}$$

故有

$$\begin{aligned}
0 &= \lim_{n\to\infty}(1-|z_n|^2)^\beta\Big|\sum_{i\in J}\lambda_i f_n(\varphi_i(z_n))\Big| \\
&= \lim_{n\to\infty}\Big|\sum_{i\in J}\lambda_i\varphi_i^\sharp(z_n)(1-|\varphi_i(z_n)|^2)^\alpha f_n(\varphi_i(z_n))\Big| \\
&= \lim_{n\to\infty}\Big|\sum_{i\in J}\lambda_i\varphi_i^\sharp(z_n)\Big|(1-|\varphi_j(z_n)|^2)^\alpha|f_n(\varphi_j(z_n))| \\
&= \lim_{n\to\infty}\Big|\sum_{i\in J}\lambda_i\varphi_i^\sharp(z_n)\Big|\prod_{i\in I\setminus J}\rho_{i,j}(z_n).
\end{aligned}$$

由集合 I,J 的定义可推出 $\lim\limits_{n\to\infty}\prod\limits_{i\in I\setminus J}\rho_{i,j}(z_n)\neq 0$. 从而

$$\lim_{n\to\infty}\Big|\sum_{i\in J}\lambda_i\varphi_i^\sharp(z_n)\Big| = 0.$$

(ii) $\Rightarrow$ (iii): 设 $j\in\{1,2,\cdots,M\}$ 且满足 $\Gamma(\varphi_j)\neq\emptyset$, 假设点列 $\{z_n\}$ 属于 $\Gamma(\varphi_j)$, 则 $\{z_n\}\in\triangle$, $j\in I\{z_n\}$ 且 $\lim\limits_{n\to\infty}\varphi_j^\#(z_n)\neq 0$. 当 $i\in I_j\{z_n\}$ 时, 有 $\lim\limits_{n\to\infty}\rho_{i,j}(z_n)=0$. 由引理 2.2 可知

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(1-|\varphi_i(z_n)|^2)^\alpha}{(1-|\varphi_j(z_n)|^2)^\alpha}=1.$$

因此 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\varphi_i^\#(z_n)}{\varphi_j^\#(z_n)}=1$. 根据条件 (ii), 得

$$\lim_{n\to\infty}\Big|\sum_{i\in I_j\{z_n\}}\lambda_i\varphi_i^\sharp(z_n)\Big| = \lim_{n\to\infty}|\varphi_j^\sharp(z_n)|\Big|\sum_{i\in I_j\{z_n\}}\lambda_i\frac{\varphi_i^\sharp(z_n)}{\varphi_j^\sharp(z_n)}\Big| = 0.$$

又 $\lim\limits_{n\to\infty}\varphi_j^\#(z_n)\neq 0$, 所以 $\sum\limits_{i\in I_j\{z_n\}}\lambda_i=0$.

(iii) $\Rightarrow$ (i): 假设 T 是非紧致的. 由引理 2.1 得, 存在函数列 $\{f_n\}\subset H_\alpha^\infty$, 满足 $\|f_n\|_\alpha < C$ 且 f_n 在 $\mathbb{B}$ 上内闭一致收敛到 0, 但对每个 n, 总有 $\|Tf_n\|_\beta > C$, 即

$$\sup_{z\in\mathbb{B}}(1-|z|^2)^\beta|Tf_n(z)| > C.$$

因此, 对每个 n 总可以找到一个点 $z_n\in\mathbb{B}$, 满足

$$\begin{aligned}
C &< (1-|z_n|^2)^\beta|Tf_n(z_n)| \\
&= (1-|z_n|^2)^\beta\Big|\sum_{i=1}^M\lambda_i f_n(\varphi_i(z_n))\Big| \\
&= \Big|\sum_{i=1}^M\lambda_i\varphi_i^\#(z_n)(1-|\varphi_i(z_n)|^2)^\alpha f_n(\varphi_i(z_n))\Big|.
\end{aligned}$$

由于 C_{φ_i} 有界, f_n 在 $\mathbb{B}$ 上内闭一致收敛到 0, 则存在某个 $j\in\{1,2,\cdots,M\}$ 及子点列 $\{z_{n_k}\}$ 满足对所有的 k, 有 $|\varphi_j(z_{n_k})|\to 1(k\to\infty)$, 因此

$$\Big|\sum_{i\in I\{z_{n_k}\}}\lambda_i\varphi_i^\#(z_{n_k})(1-|\varphi_i(z_{n_k})|^2)^\alpha f_{n_k}(\varphi_i(z_{n_k}))\Big| > C.$$

不妨假设 $\{z_{n_k}\}\in\triangle$, 则 $j\in I\{z_{n_k}\}\neq\emptyset$.

又 $I\{z_{n_k}\}$ 可以表示成

$$I\{z_{n_k}\}=I_{j_1}\{z_{n_k}\}+\cdots+I_{j_p}\{z_{n_k}\},$$

从而

$$\Big|\sum_{l=1}^{p}\sum_{i\in I_{j_l}\{z_{n_k}\}}\lambda_i\varphi_i^{\#}(z_{n_k})(1-|\varphi_i(z_{n_k})|^2)^\alpha f_{n_k}(\varphi_i(z_{n_k}))\Big|>C.$$

当 $i\in I_{j_l}\{z_{n_k}\}$ 时, 对于充分大的 k, 由引理 2.2–2.3 得

$$\Big|\sum_{l=1}^{p}\Big(\sum_{i\in I_{j_l}\{z_{n_k}\}}\lambda_i\Big)\varphi_{j_l}^{\#}(z_{n_k})(1-|\varphi_{j_l}(z_{n_k})|^2)^\alpha f_{n_k}(\varphi_{j_l}(z_{n_k}))\Big|>C.$$

又因为 $\|f_n\|_\alpha<C$, 则

$$\sum_{l=1}^{p}\Big|\Big(\sum_{i\in I_{j_l}\{z_{n_k}\}}\lambda_i\Big)\varphi_{j_l}^{\#}(z_{n_k})\Big|>C. \tag{3.1}$$

另一方面, 对于 $l=1,2,\cdots,p$, 若 $\{z_{n_k}\}\in\Gamma(\varphi_{j_l})$, 根据条件 (iii) 可推出

$$\sum_{i\in I_{j_l}\{z_{n_k}\}}\lambda_i=0.$$

若 $\{z_{n_k}\}\notin\Gamma(\varphi_{j_l})$, 则 $\varphi_{j_l}^{\#}(z_{n_k})\to 0$. 因此有

$$\sum_{l=1}^{p}\Big|\Big(\sum_{i\in I_{j_l}\{z_{n_k}\}}\lambda_i\Big)\varphi_{j_l}^{\#}(z_{n_k})\Big|\to 0,\quad k\to\infty,$$

这与式子 (3.1) 矛盾, 从而条件 (i) 成立.

根据上述定理, 可以得出两个复合算子差分紧致性的等价条件.

推论 3.1 $C_{\varphi_1}-C_{\varphi_2}$ 是 H_α^∞ 到 H_β^∞ 上的有界算子当且仅当对所有的 $\{z_n\}\in\triangle$, 下述条件成立:

(i) 当 $\lim\limits_{n\to\infty}|\varphi_1(z_n)|=1$ 时, 有 $\lim\limits_{n\to\infty}\varphi_1^{\#}(z_n)\rho_{1,2}(z_n)=0$;

(ii) 当 $\lim\limits_{n\to\infty}|\varphi_2(z_n)|=1$ 时, 有 $\lim\limits_{n\to\infty}\varphi_2^{\#}(z_n)\rho_{1,2}(z_n)=0$.

证 假设 $C_{\varphi_1}-C_{\varphi_2}$ 是紧致的, 仅需要证明 (i) 成立. 设 $\{z_n\}\in\triangle$ 且 $\lim\limits_{n\to\infty}|\varphi_1(z_n)|=1$. 若 $\rho_{1,2}(z_n)\to 0$, 则由 C_{φ_1} 的有界性可得, $\lim\limits_{n\to\infty}\varphi_1^{\#}(z_n)\rho_{1,2}(z_n)=0$. 若 $\rho_{1,2}(z_n)\not\to 0$, 则 $I_1\{z_n\}=\{1\}$, 根据定理 3.1 的条件 (ii) 可得 $\lim\limits_{n\to\infty}\varphi_1^{\#}(z_n)=0$, 因此 $\lim\limits_{n\to\infty}\varphi_1^{\#}(z_n)\rho_{1,2}(z_n)=0$.

假设条件 (i) 和 (ii) 成立. 设 $\{z_n\}\in\triangle$ 且满足 $I\{z_n\}\neq\emptyset$. 若 $\rho_{1,2}(z_n)\to 0$, 则 $I_1\{z_n\}=I_2\{z_n\}=\{1,2\}$. 由定理 2.2 可知 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\varphi_1^{\#}(z_n)}{\varphi_2^{\#}(z_n)}=1$, 因此 $\lim\limits_{n\to\infty}(\varphi_1^{\#}(z_n)-\varphi_2^{\#}(z_n))=0$. 若 $\rho_{1,2}(z_n)\not\to 0$, 则 $I_1\{z_n\}=\{1\}$ 且 $I_2\{z_n\}=\{2\}$. 此时 (i) 和 (ii) 意味着

$$\lim_{n\to\infty}\varphi_1^{\#}(z_n)=\lim_{n\to\infty}\varphi_2^{\#}(z_n)=0.$$

从而定理 3.1 条件 (ii) 成立, 故有 $C_{\varphi_1}-C_{\varphi_2}$ 为紧算子.

接下来, 我们探讨差分对紧致抵消性问题.

定理 3.2 假设 $\sum\limits_{i=1}^{M}\lambda_i=0$, 并且对 $\{1,2,\cdots,M\}$ 的任何非空真子集 J, 有 $\sum\limits_{i\in J}\lambda_i\neq 0$, 则 $T=\sum\limits_{i=1}^{M}\lambda_i C_{\varphi_i}$ 是 H_α^∞ 到 H_β^∞ 紧算子的充要条件为对任意的 i,j $(i\neq j)$, 都有 $C_{\varphi_i}-C_{\varphi_j}$ 是紧致的.

证 假设 T 是紧算子. 对任意的 $i,j\in\{1,\cdots,M\}$ 且 $i\neq j$, 设 $\{z_n\}\in\triangle$, 当 $|\varphi_i(z_n)|\to 1$ 时, 有 $\varphi_i^{\#}(z_n)\to 0$ 或 $\varphi_i^{\#}(z_n)\to a\neq 0$. 若 $\varphi_i^{\#}(z_n)\to 0$, 显然 $\varphi_i^{\#}(z_n)\rho_{i,j}(z_n)\to 0$. 若 $\varphi_i^{\#}(z_n)\to a\neq 0$, 则 $\{z_n\}\in\Gamma(\varphi_i)\neq\emptyset$, 根据定理 3.1 条件 (iii), 可得 $\sum\limits_{k\in I_i\{z_n\}}\lambda_k=0$. 由定理假设条件可知 $I_i\{z_n\}=\{1,2,\cdots,M\}$. 从而 $\rho_{i,j}(z_n)\to 0$, 同样可以得出

$$\varphi_i^{\#}(z_n)\rho_{i,j}(z_n)\to 0.$$

因此推论 3.1 的条件 (i) 成立. 类似可证推论 3.1 的条件 (ii) 成立, 故有 $C_{\varphi_i}-C_{\varphi_j}$ 是紧致的.

假设对任意的 i,j 且 $i\neq j$, 有 $C_{\varphi_i}-C_{\varphi_j}$ 是紧致的算子. 因为 $\sum\limits_{i=1}^{M}\lambda_i=0$, 所以 $\lambda_1=-\sum\limits_{i=2}^{M}\lambda_i$. 因此

$$T=\sum_{i=1}^{M}\lambda_i C_{\varphi_i}=\sum_{i=2}^{M}\lambda_i(C_{\varphi_i}-C_{\varphi_1})$$

是紧致的.

推论 3.2 算子 $T=(C_{\varphi_1}-C_{\varphi_2})-(C_{\varphi_3}-C_{\varphi_1})$ 是 H_α^∞ 到 H_β^∞ 的紧致算子当且仅当 $C_{\varphi_2}-C_{\varphi_1}$ 与 $C_{\varphi_3}-C_{\varphi_1}$ 都是紧致算子.

当 $C_{\varphi_i}(i=1,2,3)$ 都是有界算子时, 上述推论意味着: 若算子 $C_{\varphi_1}-C_{\varphi_2}$ 与 $C_{\varphi_3}-C_{\varphi_1}$ 是 H_α^∞ 到 H_β^∞ 的非紧算子, 则 $(C_{\varphi_1}-C_{\varphi_2})-(C_{\varphi_3}-C_{\varphi_1})$ 也是非紧的算子.

根据文 [15] 中的推论 4.4, 可知复合算子 C_φ 在 H_α^∞ 上总是有界的, 则在 H_α^∞ 空间上非紧的差分对再做差分, 非紧性是无法抵消的.

若 λ_i $(i=1,2,\cdots,M)$ 满足定理 3.2 的假设, 且 T 是紧致的, 则 C_{φ_i} 同时紧或非紧.

定理 3.3 算子 $T=C_{\varphi_1}-C_{\varphi_2}-C_{\varphi_3}-\cdots-C_{\varphi_M}$ 是 H_α^∞ 到 H_β^∞ 的紧算子当且仅当

$$\Gamma(\varphi_1)=\Gamma(\varphi_2)+\cdots+\Gamma(\varphi_M),$$

且对任意的点列 $\{z_n\}\in\Gamma(\varphi_i)$ 及每个 $i\in\{2,3,\cdots,M\}$, 有

$$\lim_{n\to\infty}\rho_{1,i}(z_n)=0.$$

证 分两种情形证明.

情形 I: C_{φ_i} 都是非紧的.

必要性: 首先, 证明

$$\Gamma(\varphi_i)\bigcap\Gamma(\varphi_j)=\emptyset,$$

其中 i,j 属于 $\{2,3,\cdots,M\}$ 且 $i\neq j$. 由于 C_{φ_i} 非紧, 则 $\Gamma(\varphi_i)$ 不是空集. 设

$$\{z_n\}\in\Gamma(\varphi_i)\bigcap\Gamma(\varphi_j).$$

则由定理 3.1 条件 (iii) 推出 $I_i\{z_n\}$ 为 $\{1,i\}$, $I_j\{z_n\}$ 为 $\{1,j\}$. 然而当 $I_i\{z_n\}\bigcap I_j\{z_n\}\neq\emptyset$ 时, 这两个集合应该相同, 这与 $i\neq j$ 矛盾, 因此

$$\Gamma(\varphi_i)\bigcap\Gamma(\varphi_j)=\emptyset.$$

其次, 证明

$$\Gamma(\varphi_1)\subset\Gamma(\varphi_2)+\cdots+\Gamma(\varphi_M).$$

对任意点列 $\{z_n\}\in\Gamma(\varphi_1)$, 由定理 3.1 条件 (iii) 推出存在一个固定的 $i\in\{2,3,\cdots,M\}$, 满足

$$I_1\{z_n\}=\{1,i\}.$$

则

$$\rho_{1,i}(z_n)\to 0,$$

再根据引理 2.2, 有

$$\varphi_i^{\#}(z_n)\not\to 0,$$

因此

$$\{z_n\}\in\Gamma(\varphi_i).$$

再次, 证明

$$\Gamma(\varphi_2)+\cdots+\Gamma(\varphi_M)\subset\Gamma(\varphi_1).$$

在此仅需要证明对每个 $i\in\{2,3,\cdots,M\}$, 有 $\Gamma(\varphi_i)\subset\Gamma(\varphi_1)$. 对点列 $\{z_n\}\in\Gamma(\varphi_i)$, 由于 $I_i\{z_n\}$ 只能是 $\{1,i\}$, 所以 $\rho_{1,i}(z_n)\to 0$ 且 $\varphi_1^{\sharp}(z_n)\nrightarrow 0$. 因此

$$\{z_n\}\in\Gamma(\varphi_1).$$

故对 $i=2,3,\cdots,M$ 及任意点列 $\{z_n\}\in\Gamma(\varphi_i)$, 有

$$\Gamma(\varphi_1)=\Gamma(\varphi_2)+\cdots+\Gamma(\varphi_M),$$

以及

$$\lim_{n\to\infty}\rho_{1,i}(z_n)=0.$$

充分性: 由于

$$\Gamma(\varphi_1)=\Gamma(\varphi_2)+\cdots+\Gamma(\varphi_M),$$

则当 $\{z_n\}\in\Gamma(\varphi_1)$ 时, 存在唯一的 $i\in\{2,3,\cdots,M\}$ 满足

$$\{z_n\}\in\Gamma(\varphi_i)\subset\Gamma(\varphi_1).$$

因此

$$\rho_{1,i}(z_n)\to 0,$$

故

$$I_1\{z_n\}=\{1,i\},$$

再根据定理 3.1, T 是紧致. 当 $\{z_n\}\in\Gamma(\varphi_i)$ 时, 其中 $i\neq 1$, 有

$$\{z_n\}\in\Gamma(\varphi_i)\subset\Gamma(\varphi_1),$$

也可得出 T 是紧致的.

情形 II: C_{φ_i} 中有紧算子. 用 A 表示集合 $\{2,3,\cdots,M\}$.

必要性: 若 C_{φ_1} 是紧的, 则 $\Gamma(\varphi_1)=\emptyset$, 考虑算子

$$T'=T-C_{\varphi_1}=-\sum_{i\in A}C_{\varphi_i},$$

其仍是紧算子. 定理 3.1 中的条件 (iii) 意味着所有的 $C_{\varphi_i}, i\in A$, 都是紧的. 因此当 $i\in A$ 时, $\Gamma(\varphi_i)=\emptyset$, 从而结论成立.

若 C_{φ_1} 非紧, 但是存在 A 的子集 J 满足 $C_{\varphi_j}(j\in J)$ 是紧的, $C_{\varphi_i}(i\in A\backslash J)$ 是非紧的. 则

$$\Gamma(\varphi_j)=\emptyset,\quad j\in J.$$

考虑算子

$$T'=T+\sum_{j\in J}C_{\varphi_j}=C_{\varphi_1}-\sum_{i\in A\backslash J}C_{\varphi_i}.$$

显然有 T' 是紧的, 因此根据情形 I, 有

$$\Gamma(\varphi_1)=\sum_{i\in A\backslash J}\Gamma(\varphi_i)=\Gamma(\varphi_2)+\cdots+\Gamma(\varphi_M),$$

且对 $i\in A\backslash J$ 及任意点列 $\{z_n\}\in\Gamma(\varphi_i)$, 有

$$\lim_{n\to\infty}\rho_{1,i}(z_n)=0.$$

充分性: 若 $\Gamma(\varphi_1)=\emptyset$, 则 $\Gamma(\varphi_i), i\in A$, 都是空集, 因此 C_{φ_i} 都是紧致的. 从而 T 也是紧的.

若 $\Gamma(\varphi_1)\neq\emptyset$, 则存在 A 的子集 I, 满足对任意的 $i\in I$, $\Gamma(\varphi_i)\neq\emptyset$, $\Gamma(\varphi_1)=\sum\limits_{i\in I}\Gamma(\varphi_i)$ 且 $\lim\limits_{n\to\infty}\rho_{1,i}(z_n)=0$ 对任意点列 $\{z_n\}\in\Gamma(\varphi_i)$ 都成立. 因此根据情形 I, 可以得到算子

$$T'=C_{\varphi_1}-\sum_{i\in I}C_{\varphi_i}$$

是紧致的. 从而

$$T = T' - \sum_{i \in A \setminus I} C_{\varphi_i}$$

是紧致的.

注 3.1　当 $M = 2$ 时, 定理 3.3 与推论 3.1 是等价的.

致谢 感谢审稿人对论文初稿的仔细审阅, 同时, 作者对编辑老师表示由衷的感谢.

参　考　文　献

[1] Cowen C C, MacCluer B D. Composition operators on spaces of analytic functions [M]. Boca Raton: CRC Press, 1995.

[2] Schwartz H J. Composition operators on H^p [D]. American: University of Toledo, 1969.

[3] Shapiro J H. Composition operators and classical function theory [M]. New York: Spriger-Verlag, 1993.

[4] Zhu K H. Operator theory in function spaces [M]. New York: Marcel Dekker Inc, 1990.

[5] Bonet J, Lindstöm M, Wolf E. Differences of composition operators between weighted Banach spaces of holomorphic functions [J]. *J Austral Math Soc*, 2008, 84(1):9–20.

[6] Hosokawa T, Izuchi K. Essential norms of differences of composition operators on H^∞ [J]. *J Math Soc Japan*, 2005, 57(3):669–690.

[7] Kellay K, Lefèvre P. Compact composition operators on weighted Hilbert spaces of analytic functions [J]. *J Math Anal Appl*, 2012, 386:718–727.

[8] Park I. Compact differences of composition operators on large weighted Bergman spaces [J]. *J Math Anal Appl*, 2019, 479:1715–1737.

[9] Qian R, Li S. Composition operators and closures of Dirichlet type spaces D_μ in Bloch type spaces [J]. *Analysis Math*, 2019, 45(1):121–132.

[10] Izuchi K, Ohno S. Linear combinations of composition operators on H^∞ [J]. *J Math Anal Appl*, 2008, 338:820–839.

[11] Hosokawa T, Nieminen P J, Ohno S. Linear combinations of composition operators on the Bloch spaces [J]. *Canad J Math*, 2011, 63(4):862–877.

[12] Shi Y, Li S. Linear combination of composition operators on H^∞ and the Bloch space [J]. *Arch Math*, 2019, 112:511–519.

[13] Jiang L, Ouyang C. Compact differences of composition operators on holomorphic function spaces in the unit ball [J]. *Acta Math Sci Ser B*, 2011, 31:1679–1693.

[14] Koo H, Wang M. Cancellation properties of composition operators on Bergman spaces [J]. *J Math Anal Appl*, 2015, 432:1174–1182.

[15] Dai J, Ouyang C. Differences of weighted composition operators on $H_\alpha^\infty(B_N)$ [J]. *J Inequalities and Applications*, 2009, 2009, Art.ID 127431, 1–19.

Linear Combinations of Composition Operators from H_α^∞ to H_β^∞

ZHANG Li[1]

[1]School of Mathematics and Statistics, Nanyang Normal University, Nanyang 473061, Henan, China. E-mail: zhangli0977@126.com

Abstract For $i = 1, 2, \cdots, M$, let λ_i be nonzero numbers, $\mathbb{B}$ be the unit ball of the complex space $\mathbb{C}^N$, φ_i be self-maps of $\mathbb{B}$, and H_α^∞ be the weighted holomorphic function space on $\mathbb{B}$. The compactness of linear combinations of composition operators $\sum\limits_{i=1}^{M} \lambda_i C_{\varphi_i}$ from H_α^∞ to H_β^∞ is discussed in this paper. Moreover, using an equivalent condition of compactness, the author shows that the double difference cancellation $(C_{\varphi_1} - C_{\varphi_2}) - (C_{\varphi_3} - C_{\varphi_1})$ is compact if and only if both $C_{\varphi_1} - C_{\varphi_2}$ and $C_{\varphi_3} - C_{\varphi_1}$ are compact.

Keywords Composition operators, Linear combinations, Cancellation property

2000 MR Subject Classification 47B38, 32A37

The English translation of this paper will be published in

Chinese Journal of Contemporary Mathematics, Vol. 44 No. 2, 2023

by ALLERTON PRESS, INC., USA