数 学 年 刊 A 辑
2023, 44(2):133–146
DOI: 10.16205/j.cnki.cama.2023.0011

对称群 S_5 的表示环*

戴莉兰[1] 黎允楠[1]

提要 本文利用有限群特征标理论计算了对称群 S_5 的所有不可约复表示的幂公式. 根据求解幂公式过程中得到的 S_5 任意两个不可约表示张量积的分解情况, 作者刻画了 S_5 上表示环 $r(S_5)$ 及其若干结构性质, 如极小生成元关系式表达、单位群、本原幂等元、行列式与 Casimir 数.

关键词 群特征标, 对称群, Kronecker 积, 表示环
MR (2000) 主题分类 20C15, 20C30
中图法分类 O187.2
文献标志码 A
文章编号 1000-8314(2023)02-0133-14

§1 引 言

已知有限群的全体不可约表示同构类后, 考虑任意两个不可约表示的张量积的合成因子情况是群表示理论的一个核心问题. 特别地, 对称群 S_n 的任意两个不可约复表示的张量积 (又称 Kronecker 积) 是完全可约的, 其不可约分支出现的重数称为 Kronecker 系数. 它们也可以解释为两个 Schur 函数的内积关于 Schur 函数自身这一整基的展开系数. Kronecker 系数的概念可追溯到 1927 年, 在 Redfield 研究对称函数内积的工作中出现[1]. 1938 年 Murnaghan 系统研究 Kronecker 系数, 继而引起广泛关注[2]. 在对称群表示理论中, 一个尚未解决的公开问题是给出 Kronecker 系数的组合描述, 虽然一般情况下的刻画是非常困难的, 但针对一些特殊情形的 Kronecker 系数, 其组合描述已有相当多研究成果[3–8], 大多数结果都局限于非常具体形状的划分 (钩子, 两行等). Bürgisser 等人在 2008 年表明, Kronecker 系数是难以计算的[9]. 而关于 Kronecker 积最为经典的研究成果是由 Murnaghan 获得的, 他在一系列的论文[10–14]中提出了可适用于任意对称群 S_n 的 Kronecker 积和对称 Kronecker 积的相关公式.

在掌握了群乃至 Hopf 代数的任意两个不可约表示张量积的分解情况后, 自然可以考虑它的表示环结构. 表示环最早是在 1962 年 Green 在文 [15] 中提出, 因此表示环也称 Green 环, 特别地, 当我们考虑的 Hopf 代数是半单的, 表示环也是 fusion 环[16, Chapter 3]. 对各类表示环的研究有很多成果, 例如在文 [17, Chapter 14] 中介绍了很多经典群的表示环, 如酉群的表示环等. Minami 明确地给出了正交群的表示环[18]; 董井成等人研究了二面体群量子偶的表示环[19]; 陈惠香研究了 Sweedler 的四维 Hopf 代数 H_4 中的 Drinfeld 量子

本文 2022 年 8 月 31 日收到, 2022 年 12 月 25 日收到修改稿.
[1]广州大学数学与信息科学学院, 广州 510006. E-mail: 2112015048@e.gzhu.edu.cn; ynli@gzhu.edu.cn
*本文受到国家自然科学基金 (No. 12071094, No. 12171155) 的资助.

偶 $D(H_4)$ 的表示环[20]; 陈惠香等人计算了 Taft 代数的表示环[21]; Hamraoui 等人描述了特殊线性群 SL_d 的表示环[22]; 曹刘峰等人刻画了二面体群 D_5 的表示环[23]等等.

对称群表示环 $r(S_n)$ 的研究也有一些结果, 比如 Marin 指出对称群的表示环是由其 hook 型不可约表示, 即 $(n-1)$-维自然表示的外积所生成的[24]. 当 $n \geqslant 5$ 时, 表示环 $r(S_n)$ 的无多重性不再成立. 特别地, $r(S_5)$ 的重数为 2, 我们将对其结构性质展开讨论.

本文主要由以下三个部分组成: 第 2 节, 我们首先介绍了本文所需的基本定义和引理. 第 3 节, 我们从 S_5 的特征标表出发, 计算出 S_5 的所有不可约表示的张量积分解公式, 从而得到 S_5 的这些不可约表示的幂公式. 第 4 节, 利用第 3 节的 S_5 所有不可约表示的张量积分解律, 我们进一步探讨 S_5 上的表示环 $r(S_5)$ 及其若干结构性质, 这依赖于其背后的表示论含义, 对于一般的 fusion 环其实并不容易考虑. 首先, 我们得到 $r(S_5)$ 的一个极小生成元关系式表达. 其次, 我们证明其单位群为 Klein 四元数群. 对于 S_5 在有理数域 $\mathbb{Q}$ 上的表示代数 $r_{\mathbb{Q}}(S_5)$, 我们计算其全体互不等价的一维表示, 从而推导出 $r_{\mathbb{Q}}(S_5)$ 的七个中心本原幂等元. 最后, 表示环 $r(S_5)$ 的行列式与 Casimir 数也自然可得.

§2 预备知识

定义 2.1 群 G 的表示环 $r(G)$ 是具有 $\mathbb{Z}$-基 $\{[V_i] \mid 1 \leqslant i \leqslant s\}$, 加法和乘法由下式所确定的含幺交换环: 对 G 的任意两个复表示 $[M]$ 和 $[N]$,

$$[M]+[N]=[M \oplus N], \quad [M][N]=[M \otimes N],$$

这里 $\{V_i \mid 1 \leqslant i \leqslant s\}$ 是群 G 的互不等价的不可约复表示完备集, 而 $[M]$ 代表 G 的任意有限维复表示 M 对应的同构类. 下面也用相应的不可约复特征标 χ_i 代表 $r(G)$ 的基元 $[V_i], 1 \leqslant i \leqslant s$.

引理 2.1 设 $\{(\rho_i, V_i) | i=1,\cdots,s\}$ 为有限群 G 的一个互不等价的不可约复表示完备集, 且 $V_i \otimes V_j \cong \bigoplus\limits_{k=1}^{s} n_{ij}^k V_k, \forall 1 \leqslant i,j \leqslant s$, 是 G 的不可约复表示的张量积直和分解, 则

$$n_{ij}^k = \frac{1}{|G|}\sum_{t=1}^{s} |\mathscr{C}_t| \chi_{it}\chi_{jt}\overline{\chi_{kt}}, \quad \forall 1 \leqslant i,j,k \leqslant s, \tag{2.1}$$

其中 $\mathscr{C}_t$ 表示群 G 的共轭类, 而 χ_{ij} 是它的复特征标表在位置 (i,j) 的值.

关于有限群表示的特征标理论, 可详见文 [25].

§3 S_5 的不可约表示幂公式

对称群 S_5 的互不等价不可约复表示完备集包括: 平凡表示 (ρ_1, V_1) 和符号表示 (ρ_2, V_2), 自然表示 (ρ_3, V_3) 和其转置 (ρ_4, V_4), 对应划分 $(2^2, 1)$ 的不可约表示 (ρ_5, V_5) 和其转置 (ρ_6, V_6), 以及唯一的六维 hook 表示 (ρ_7, V_7). 因此, S_5 有如下复特征标表.

表 1　S_5 的复特征标表

$\mathscr{C}$ / $\mathrm{Irr}_{\mathbb{C}}S_5$	(1) 1	(12) 10	(123) 20	(12)(34) 15	(123)(45) 20	(1234) 30	(12345) 24
χ_1	1	1	1	1	1	1	1
χ_2	1	-1	1	1	-1	-1	1
χ_3	4	2	1	0	-1	0	-1
χ_4	4	-2	1	0	1	0	-1
χ_5	5	1	-1	1	1	-1	0
χ_6	5	-1	-1	1	-1	1	0
χ_7	6	0	0	-2	0	0	1

两个一维不可约表示 V_1,V_2 的幂是显然可知的. 下面首先考虑四维不可约表示 V_3,V_4 的幂.

定理 3.1　S_5 的两个四维不可约表示 V_3,V_4 的幂公式如下:

$$
\begin{aligned}
V_3^{\otimes n} = {} & \frac{(-1)^n\cdot 5+5+5\cdot 2^{n-1}+(-1)^n\cdot 6+4^{n-1}}{30}V_1 \\
& \oplus \frac{(-1)^{n-1}\cdot 5+5-5\cdot 2^{n-1}+(-1)^n\cdot 6+4^{n-1}}{30}V_2 \\
& \oplus \frac{(-1)^{n-1}\cdot 5+5+5\cdot 2^{n}+(-1)^{n+1}\cdot 6+4^{n}}{30}V_3 \\
& \oplus \frac{(-1)^{n}\cdot 5+5-5\cdot 2^{n}+(-1)^{n+1}\cdot 6+4^{n}}{30}V_4 \\
& \oplus \frac{(-1)^n-1+2^{n-1}+4^{n-1}}{6}V_5 \oplus \frac{(-1)^{n-1}-1-2^{n-1}+4^{n-1}}{6}V_6 \\
& \oplus \frac{(-1)^n+4^{n-1}}{5}V_7, \\
V_4^{\otimes n} = {} & \frac{(-5)\cdot(-2)^{n-1}+10+(-1)^n\cdot 6+4^{n-1}}{30}V_1 \oplus \frac{5\cdot(-2)^{n-1}+(-1)^n\cdot 6+4^{n-1}}{30}V_2 \\
& \oplus \frac{5\cdot(-2)^{n}+(-1)^{n+1}\cdot 6+4^{n}}{30}V_3 \oplus \frac{10\cdot(-2)^{n-1}+10+(-1)^{n+1}\cdot 6+4^{n}}{30}V_4 \\
& \oplus \frac{4^{n-1}-(-2)^{n-1}}{6}V_5 \oplus \frac{(-2)^{n-1}-2+4^{n-1}}{6}V_6 \oplus \frac{(-1)^n+4^{n-1}}{5}V_7.
\end{aligned}
$$

证　将 S_5 的特征标表信息代入公式 (2.1) 进行计算, 可得

$$
\begin{cases}
V_1\otimes V_i\cong V_i\otimes V_1\cong V_i,\ i=1,\cdots,7,\\
V_2\otimes V_2\cong V_1,\\
V_2\otimes V_3\cong V_3\otimes V_2\cong V_4,\\
V_2\otimes V_4\cong V_4\otimes V_2\cong V_3,\\
V_2\otimes V_5\cong V_5\otimes V_2\cong V_6,\\
V_2\otimes V_6\cong V_6\otimes V_2\cong V_5,\\
V_2\otimes V_7\cong V_7\otimes V_2\cong V_7.
\end{cases}
$$

设 $V_3\otimes V_3\cong n_{33}^1V_1\oplus n_{33}^2V_2\oplus n_{33}^3V_3\oplus n_{33}^4V_4\oplus n_{33}^5V_5\oplus n_{33}^6V_6\oplus n_{33}^7V_7$, 则有 $n_{33}^1=n_{33}^3=n_{33}^5=n_{33}^7=1, n_{33}^2=n_{33}^4=n_{33}^6=0$. 即得 $V_3\otimes V_3\cong V_1\oplus V_3\oplus V_5\oplus V_7$, 同理可得

$$\begin{cases}V_3\otimes V_4\cong V_2\oplus V_4\oplus V_6\oplus V_7,\\ V_3\otimes V_5\cong V_3\oplus V_5\oplus V_6\oplus V_7,\\ V_3\otimes V_6\cong V_4\oplus V_5\oplus V_6\oplus V_7,\\ V_3\otimes V_7\cong V_3\oplus V_4\oplus V_5\oplus V_6\oplus V_7.\end{cases}$$

下面计算 S_5 的二维不可约表示 V_3 的幂公式. 设

$$V_3^{\otimes n}\cong a_nV_1\oplus b_nV_2\oplus c_nV_3\oplus d_nV_4\oplus e_nV_5\oplus f_nV_6\oplus g_nV_7.$$

因为

$$\begin{aligned}V_3^{\otimes n}&\cong V_3^{\otimes(n-1)}\otimes V_3\\ &\cong a_{n-1}(V_1\otimes V_3)\oplus b_{n-1}(V_2\otimes V_3)\oplus c_{n-1}(V_3\otimes V_3)\oplus d_{n-1}(V_4\otimes V_3)\\ &\quad\oplus e_{n-1}(V_5\otimes V_3)\oplus f_{n-1}(V_6\otimes V_3)\oplus g_{n-1}(V_7\otimes V_3)\\ &\cong a_{n-1}V_3\oplus b_{n-1}V_4\oplus c_{n-1}(V_1\oplus V_3\oplus V_5\oplus V_7)\oplus d_{n-1}(V_2\oplus V_4\oplus V_6\oplus V_7)\\ &\quad\oplus e_{n-1}(V_3\oplus V_5\oplus V_6\oplus V_7)\oplus f_{n-1}(V_4\oplus V_5\oplus V_6\oplus V_7)\oplus g_{n-1}(V_3\oplus V_4\oplus V_5\oplus V_6\oplus V_7),\end{aligned}$$

则有

$$\begin{cases}a_n=c_{n-1},\\ b_n=d_{n-1},\\ c_n=a_{n-1}+c_{n-1}+e_{n-1}+g_{n-1},\\ d_n=b_{n-1}+d_{n-1}+f_{n-1}+g_{n-1},\\ e_n=c_{n-1}+e_{n-1}+f_{n-1}+g_{n-1},\\ f_n=d_{n-1}+e_{n-1}+f_{n-1}+g_{n-1},\\ g_n=c_{n-1}+d_{n-1}+e_{n-1}+f_{n-1}+g_{n-1}.\end{cases}\tag{3.1}$$

而 (3.1) 式等价于

$$\begin{pmatrix}a_n\\ b_n\\ c_n\\ d_n\\ e_n\\ f_n\\ g_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&1&0&0&0&0\\ 0&0&0&1&0&0&0\\ 1&0&1&0&1&0&1\\ 0&1&0&1&0&1&1\\ 0&0&1&0&1&1&1\\ 0&0&0&1&1&1&1\\ 0&0&1&1&1&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_{n-1}\\ b_{n-1}\\ c_{n-1}\\ d_{n-1}\\ e_{n-1}\\ f_{n-1}\\ g_{n-1}\end{pmatrix},$$

记 $T_n=AT_{n-1}$. 通过迭代得 $T_n=A^{n-1}T_1$, 则求 $a_n,b_n,c_n,d_n,e_n,f_n,g_n$ 的通项公式 (即向量 T_n) 仅需求 A 的 $n-1$ 次幂.

注意到矩阵 A 为表示环 $r(S_5)$ 中 $[V_3]$ 在标准基下的左乘作用矩阵, 它是对称矩阵且特征多项式为 $\lambda^2(\lambda+1)^2(\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-4)$, 即七个特征值分别为 $0,0,-1,-1,1,2,4$.

(i) 对于 $\lambda_1=\lambda_2=0$, 相应的特征向量为

$$\begin{pmatrix}0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1\end{pmatrix}^{\mathrm{T}},\quad \begin{pmatrix}1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0\end{pmatrix}^{\mathrm{T}},$$

(ii) 对于 $\lambda_3=\lambda_4=-1$, 相应的特征向量为

$$\begin{pmatrix}-1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0\end{pmatrix}^{\mathrm{T}},\quad \begin{pmatrix}1 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}^{\mathrm{T}},$$

(iii) 对于 $\lambda_5=1$, 相应的特征向量为 $\begin{pmatrix}-1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 0\end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$,

(iv) 对于 $\lambda_6=2$, 相应的特征向量为 $\begin{pmatrix}-1 & 1 & -2 & 2 & -1 & 1 & 0\end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$,

(v) 对于 $\lambda_7=4$, 相应的特征向量为 $\begin{pmatrix}1 & 1 & 4 & 4 & 5 & 5 & 6\end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$,

则存在可逆矩阵 P, 使得 $P^{-1}AP=\Lambda$ 为对角矩阵, 其中

$$P=\begin{pmatrix}0 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1\\ -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & -2 & 4\\ 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & 2 & 4\\ -1 & -1 & -1 & 0 & 1 & -1 & 5\\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 5\\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 6\end{pmatrix},\quad \Lambda=\begin{pmatrix}0 &&&&&&\\ & 0 &&&&&\\ && -1 &&&&\\ &&& -1 &&&\\ &&&& 1 &&\\ &&&&& 2 &\\ &&&&&& 4\end{pmatrix}.$$

通过计算, 可得到,

$$P^{-1}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & 0 & 0 & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{2}\\ \frac{3}{8} & -\frac{1}{8} & 0 & 0 & -\frac{1}{8} & \frac{3}{8} & -\frac{1}{4}\\ -\frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & -\frac{1}{6} & -\frac{1}{6} & \frac{1}{6} & 0\\ \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & -\frac{1}{5} & -\frac{1}{5} & 0 & 0 & \frac{1}{5}\\ -\frac{1}{6} & -\frac{1}{6} & -\frac{1}{6} & -\frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & 0\\ -\frac{1}{12} & \frac{1}{12} & -\frac{1}{6} & \frac{1}{6} & -\frac{1}{12} & \frac{1}{12} & 0\\ \frac{1}{120} & \frac{1}{120} & \frac{1}{30} & \frac{1}{30} & \frac{1}{24} & \frac{1}{24} & \frac{1}{20}\end{pmatrix},$$

设 $A^{n-1}=(a_{ij})_{n\times n}$, 则有 $A^{n-1}=P\Lambda^{n-1}P^{-1}$. 为计算向量 T_n, 注意到

$$T_1=\begin{pmatrix}0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}^{\mathrm{T}},$$

故只需给出 $a_{13},a_{23},a_{33},a_{43},a_{53},a_{63},a_{73}$ 的值即可:

$$a_{13}=\frac{(-1)^n\cdot 5+5+5\cdot 2^{n-1}+(-1)^n\cdot 6+4^{n-1}}{30},$$

$$a_{23}=\frac{(-1)^{n-1}\cdot 5+5-5\cdot 2^{n-1}+(-1)^n\cdot 6+4^{n-1}}{30},$$

$$a_{33}=\frac{(-1)^{n-1}\cdot 5+5+5\cdot 2^{n}+(-1)^{n+1}\cdot 6+4^{n}}{30},$$

$$a_{43}=\frac{(-1)^n\cdot 5+5-5\cdot 2^n+(-1)^{n+1}\cdot 6+4^n}{30},$$

$$a_{53}=\frac{(-1)^n-1+2^{n-1}+4^{n-1}}{6},$$

$$a_{63}=\frac{(-1)^{n-1}-1-2^{n-1}+4^{n-1}}{6},$$

$$a_{73}=\frac{(-1)^n+4^{n-1}}{5}.$$

由此可得如定理所述的 V_3 的幂公式.

对于 V_4 的幂公式, 因为

$$V_2\otimes V_3\cong V_4,$$

故

$$V_4^{\otimes n}\cong V_3^{\otimes n}\otimes V_2^{\otimes n}.$$

即当 n 为偶数时,

$$V_4^{\otimes n}\cong V_3^{\otimes n};$$

当 n 为奇数时,

$$V_4^{\otimes n}\cong V_3^{\otimes n}\otimes V_2,$$

从而通过 V_3 的幂公式可相应得到 V_4 的幂公式.

同理, 我们可以继续考虑剩下的五维不可约表示 V_5, V_6 和六维不可约表示 V_7.

定理 3.2 S_5 的两个五维不可约表示 V_5, V_6, 以及六维不可约表示 V_7 的幂公式如下:

$$\begin{aligned}V_5^{\otimes n}=&\frac{(-1)^n\cdot 10+9+5^{n-1}}{24}V_1\oplus\frac{(-1)^{n+1}\cdot 2-3+5^{n-1}}{24}V_2\oplus\frac{(-1)^n+5^{n-1}}{6}V_3\\&\oplus\frac{(-1)^n+5^{n-1}}{6}V_4\oplus\frac{(-1)^{n-1}\cdot 10+9+5^n}{24}V_5\\&\oplus\frac{(-1)^n\cdot 2-3+5^n}{24}V_6\oplus\frac{5^{n-1}-1}{4}V_7,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}V_6^{\otimes n}=&\frac{(-1)^n\cdot 10+9+5^{n-1}}{24}V_1\oplus\frac{(-1)^{n+1}\cdot 2-3+5^{n-1}}{24}V_2\oplus\frac{(-1)^n+5^{n-1}}{6}V_3\\&\oplus\frac{(-1)^n+5^{n-1}}{6}V_4\oplus\frac{(-1)^n\cdot 2-3+5^n}{24}V_5\\&\oplus\frac{(-1)^{n-1}\cdot 10+9+5^n}{24}V_6\oplus\frac{5^{n-1}-1}{4}V_7,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}V_7^{\otimes n}=&\frac{4-5\cdot(-2)^{n-1}+6^{n-1}}{20}V_1\oplus\frac{4-5\cdot(-2)^{n-1}+6^{n-1}}{20}V_2\\&\oplus\frac{6^{n-1}-1}{5}V_3\oplus\frac{6^{n-1}-1}{5}V_4\\&\oplus\frac{6^{n-1}-(-2)^{n-1}}{4}V_5\oplus\frac{6^{n-1}-(-2)^{n-1}}{4}V_6\oplus\frac{4-5\cdot(-2)^n+6^n}{20}V_7.\end{aligned}$$

证　由引理 2.1 可计算出如下结果:

$$\begin{cases} V_4\otimes V_5\cong V_3\otimes V_6, \\ V_4\otimes V_6\cong V_3\otimes V_5, \\ V_4\otimes V_7\cong V_3\otimes V_7, \\ V_5\otimes V_5\cong V_1\oplus V_3\oplus V_4\oplus V_5\oplus V_6\oplus V_7, \\ V_5\otimes V_6\cong V_2\oplus V_3\oplus V_4\oplus V_5\oplus V_6\oplus V_7, \\ V_5\otimes V_7\cong V_3\oplus V_4\oplus V_5\oplus V_6\oplus 2V_7, \\ V_6\otimes V_6\cong V_5\otimes V_5, \\ V_6\otimes V_7\cong V_5\otimes V_7, \\ V_7\otimes V_7\cong V_1\oplus V_2\oplus V_3\oplus V_4\oplus 2V_5\oplus 2V_6\oplus V_7. \end{cases}$$

接下来的证明与定理 3.1 的证明方法类似.

§4　S_5 的表示环及其性质

命题 4.1　对称群 S_5 的表示环 $r(S_5)$ 有以下生成元关系式表达:

$$\begin{aligned} r(S_5)\cong&\mathbb{Z}[x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6,x_7]/(y_0,y_1,y_2,y_3,y_4y_5,y_6,y_7,y_8,y_9,y_{10},y_{11},y_{12}, \\ &y_{13},y_{14},y_{15},y_{16},y_{17},y_{18},y_{19},y_{20},y_{21}), \end{aligned}$$

其中 $y_0=x_1-1$, $y_1=x_2^2-1$, $y_2=x_2x_3-x_4$, $y_3=x_2x_4-x_3$, $y_4=x_2x_5-x_6$, $y_5=x_2x_6-x_5$, $y_6=x_2x_7-x_7$, $y_7=x_3^2-x_3-x_5-x_7-1$, $y_8=x_3x_4-x_2-x_4-x_6-x_7$, $y_9=x_3x_5-x_3-x_5-x_6-x_7$, $y_{10}=x_3x_6-x_4-x_5-x_6-x_7$, $y_{11}=x_3x_7-x_3-x_4-x_5-x_6-x_7$, $y_{12}=x_4^2-x_3^2$, $y_{13}=x_4x_5-x_3x_6$, $y_{14}=x_4x_6-x_3x_5$, $y_{15}=x_4x_7-x_3x_7$, $y_{16}=x_5^2-x_3-x_4-x_5-x_6-x_7-1$, $y_{17}=x_5x_6-x_2-x_3-x_4-x_5-x_6-x_7$, $y_{18}=x_5x_7-x_3-x_4-x_5-x_6-2x_7$, $y_{19}=x_6^2-x_5^2$, $y_{20}=x_6x_7-x_5x_7$, $y_{21}=x_7^2-x_2-x_3-x_4-2x_5-2x_6-x_7-1$.

证　由定理 3.1–3.2 证明过程知, 不可约表示张量积 $V_i\otimes V_j$, $i,j=1,\cdots,7$ 的直和分解为:

$$\begin{cases} V_2\otimes V_2\cong V_1, V_2\otimes V_3\cong V_4, V_2\otimes V_4\cong V_3, \\ V_2\otimes V_5\cong V_6, V_2\otimes V_6\cong V_5, V_2\otimes V_7\cong V_7, \\ V_3\otimes V_3\cong V_4\otimes V_4\cong V_1\oplus V_3\oplus V_5\oplus V_7, \\ V_3\otimes V_4\cong V_2\oplus V_4\oplus V_6\oplus V_7, \\ V_3\otimes V_5\cong V_4\otimes V_6\cong V_3\oplus V_5\oplus V_6\oplus V_7, \\ V_3\otimes V_6\cong V_4\otimes V_5\cong V_4\oplus V_5\oplus V_6\oplus V_7, \\ V_3\otimes V_7\cong V_4\otimes V_7\cong V_3\oplus V_4\oplus V_5\oplus V_6\oplus V_7, \\ V_5\otimes V_5\cong V_6\otimes V_6\cong V_1\oplus V_3\oplus V_4\oplus V_5\oplus V_6\oplus V_7, \\ V_5\otimes V_6\cong V_2\oplus V_3\oplus V_4\oplus V_5\oplus V_6\oplus V_7, \\ V_5\otimes V_7\cong V_6\otimes V_7\cong V_3\oplus V_4\oplus V_5\oplus V_6\oplus 2V_7, \\ V_7\otimes V_7\cong V_1\oplus V_2\oplus V_3\oplus V_4\oplus 2V_5\oplus 2V_6\oplus V_7. \end{cases}$$

将多项式生成元 x_i 对应到基元 $[V_i]$, $i=1,\cdots,7$, 自然可知如定理所述的 $y_i\,(1\leqslant i\leqslant 21)$ 生成相应的定义理想.

命题 4.1 所给对称群 S_5 的表示环 $r(S_5)$ 的生成元关系式表达是冗繁的. 事实上, 文 [24] 表明对称群的表示环可以由其 $(n-1)$-维自然表示的外积生成, 因此我们考虑对表示环 $r(S_5)$ 的表达进行约化. 一般地, 刻画对称群表示环 $r(S_n)$ 的极小生成元关系式表达是一个有趣的问题.

定理 4.1 沿用命题 4.1 的记号, 对称群 S_5 的表示环 $r(S_5)$ 有以下极小生成元关系式表达,

$$r(S_5)\cong\mathbb{Z}[x_3,x_7]/(z_1,z_2,z_3,z_4).$$

其中 $z_1=x_3x_7^2-x_7^2-4x_3x_7-2x_7$, $z_2=x_7^3-x_7^2-6x_3x_7-6x_7$, $z_3=x_3^2x_7-2x_3x_7-x_7^2-2x_7$, $z_4=x_3^4-2x_3^3-x_3^2-3x_3x_7-x_7^2-2x_7+2x_3$.

证 记 R 为定理所述的交换环 $\mathbb{Z}[x_3,x_7]/(z_1,z_2,z_3,z_4)$. 首先, 易验证命题 4.1 中由 $y_i\,(0\leqslant i\leqslant 21)$ 生成的定义理想包含 R 的定义理想. 例如,

$$\begin{aligned}
z_1&=x_3x_7^2-x_7^2-4x_3x_7-2x_7\\
&=(x_3-1)(y_{21}+x_2+x_3+x_4+2x_5+2x_6+x_7+1)\\
&\quad-4(y_{11}+x_3+x_4+x_5+x_6+x_7)-2x_7\\
&=(x_3-1)y_{21}-4y_{11}+y_2+y_7+y_8+2y_9+2y_{10}+y_{11}\\
&=(x_3-1)y_{21}-3y_{11}+2y_{10}+2y_9+y_8+y_7+y_2.
\end{aligned}$$

这表明 $r(S_5)$ 的基元 χ_3,χ_7 也满足定理所述的定义关系 $z_i=0$, $i=1,2,3,4$. 因此, 存在从 R 到 $r(S_5)$ 的环同态, 将生成元 x_i 对应到 χ_i, $\forall i=3,7$.

其次, 通过定义关系 $z_i=0\,(i=1,2,3,4)$ 约化多项式, 可知 $1,x_3,x_7,x_3^2,x_3x_7,x_7^2,x_3^3$ 为 R 的一组 $\mathbb{Z}$-基. 另一方面, $r(S_5)$ 的标准 $\mathbb{Z}$-基 $\chi_i\,(1\leqslant i\leqslant 7)$ 满足如下关系:

$$(\chi_1,\chi_3,\chi_7,\chi_3^2,\chi_3\chi_7,\chi_7^2,\chi_3^3)=(\chi_1,\chi_2,\chi_3,\chi_4,\chi_5,\chi_6,\chi_7)\begin{pmatrix}1&0&0&1&0&1&1\\0&0&0&0&0&1&0\\0&1&0&1&1&1&4\\0&0&0&0&1&1&1\\0&0&0&1&1&2&3\\0&0&0&0&1&2&2\\0&0&1&1&1&1&3\end{pmatrix},$$

即 $\chi_1,\chi_3,\chi_7,\chi_3^2,\chi_3\chi_7,\chi_7^2,\chi_3^3$ 也为 $r(S_5)$ 的 $\mathbb{Z}$-基, 故上述从 R 到 $r(S_5)$ 的环同态为环同构.

最后, 由 V_3 的幂公式可知

$$(\chi_3,\chi_3^2,\chi_3^3,\chi_3^4,\chi_3^5)=(\chi_1,\chi_2,\chi_3,\chi_4,\chi_5,\chi_6,\chi_7)\begin{pmatrix}0&1&1&4&11\\0&0&0&1&6\\1&1&4&11&40\\0&0&1&6&29\\0&1&3&12&45\\0&0&2&9&40\\0&1&3&13&51\end{pmatrix},$$

算得 $-8\chi_3+6\chi_3^2+7\chi_3^3-6\chi_3^4+\chi_3^5=0$. 另外, 由 V_7 的幂公式可知

$$(\chi_7,\chi_7^2,\chi_7^3,\chi_7^4)=(\chi_1,\chi_2,\chi_3,\chi_4,\chi_5,\chi_6,\chi_7)\begin{pmatrix}0&1&1&13\\0&1&1&13\\0&1&7&43\\0&1&7&43\\0&2&8&56\\0&2&8&56\\1&1&13&61\end{pmatrix},$$

故 $12\chi_7-8\chi_7^2-5\chi_7^3+\chi_7^4=0$. 因此, 子环 $\mathbb{Z}[\chi_3]$ 和 $\mathbb{Z}[\chi_7]$ 的秩都小于 7, 所以 $r(S_5)$ 不能由 χ_3,χ_7 其中之一生成.

注 4.1 通过计算可知, $\chi_1,\cdots,\chi_7$ 的任意一个整线性组合 χ 的幂次项 $1,\chi,\cdots,\chi^6$ 只能 $\mathbb{Z}$-张成子环 $\mathbb{Z}[\chi]$, 但不能构成 $r(S_5)$ 的 $\mathbb{Z}$-基, 从而 $r(S_5)$ 无法由一个生成元生成.

命题 4.2 $r(S_5)$ 的单位群 $\mathcal{U}(r(S_5))$ 同构于 Klein 四元群.

证 事实上, 对任意有限群 G, 记其复表示环为 $r(G)$. 给定 G 的共轭类 $\mathscr{C}$ 和任意 $g\in\mathscr{C}$, 定义 $\mathbb{Z}$-模同态

$$\varphi_{\mathscr{C}}:r(G)\to\mathcal{O}_{\mathbb{C}},[V]\mapsto\chi_V(g).$$

易知 $\varphi_{\mathscr{C}}$ 为表示环 $r(G)$ 到代数整数环 $\mathcal{O}_{\mathbb{C}}$ 的一个环同态, 它必将 $r(G)$ 中任一单位映为 $\mathcal{O}_{\mathbb{C}}$ 的单位. 特别地, 由于对称群的特征标表值 χ_{ij} 均为整数, 我们有环同态

$$\varphi_i:r(S_5)\to\mathbb{Z},[V_j]\mapsto\chi_{ji},\quad\forall 1\leqslant i\leqslant 7.$$

对于 $r(S_5)$ 的任一单位 u, 向量 $(\varphi_1(u),\cdots,\varphi_7(u))^{\mathrm{T}}$ 也是 $\mathbb{Z}^7$ 的单位, 故只能形如

$$(\pm1\quad\pm1\quad\pm1\quad\pm1\quad\pm1\quad\pm1\quad\pm1)^{\mathrm{T}}.$$

借助特征标表验算得知, $r(S_5)$ 的单位群为 $\mathcal{U}(r(S_5))=\{\pm\chi_1,\pm\chi_2\}$, 同构于 Klein 四元群.

注 4.2 借助对称群的特征标表与命题 4.2 的证明方法, 我们可以得知 $r(S_n)$ 的单位群在 n 较小的情形均同构于 Klein 四元群. 但此结论对于任意正整数 n 是否成立, 需要更一般的方法证明.

接下来, 我们讨论表示代数 $r_{\mathbb{Q}}(S_5)$ 作为半单交换环的结构. 对于任意有限群 G, 设其共轭类为 $\mathscr{C}_i\,(1\leqslant i\leqslant s)$, 可定义共轭类的特征函数 $e_i\,(1\leqslant i\leqslant s)$, 满足

$$e_i(g)=\begin{cases}1, & g\in\mathscr{C}_i,\\ 0, & g\notin\mathscr{C}_i.\end{cases}$$

然后将它们线性扩充为表示代数 $r_F(G)$ 的元素, 其中 F 为 G 的分裂域. 由 $e_ie_j=\delta_{ij}e_i$ 可知, $\chi_i=\sum\limits_{j=1}^{s}\chi_{ij}e_j$, 从而 $\chi_ie_j=\chi_{ij}e_j$, 即它们是在表示代数 $r_F(G)$ 的正则表示下的公共特征向量.

由特征标的第二正交关系 $\frac{|\mathscr{C}_i|}{|G|}\sum\limits_{j=1}^{s}\overline{\chi_{ji}}\chi_{jk}=\delta_{ki}$, 即得

$$e_i=\frac{|\mathscr{C}_i|}{|G|}\sum_{j,k=1}^{s}\overline{\chi_{ji}}\chi_{jk}e_k=\frac{|\mathscr{C}_i|}{|G|}\sum_{j=1}^{s}\overline{\chi_{ji}}\chi_j,\quad \forall 1\leqslant i\leqslant s. \tag{4.1}$$

因此, 特征函数 $e_i\,(1\leqslant i\leqslant s)$ 给出表示代数 $r_F(G)$ 的全体中心本原幂等元.

将公式 (4.1) 应用到 S_5 的特征标表, 我们得到如下结果.

命题 4.3 表示代数 $r_{\mathbb{Q}}(S_5)$ 的正则表示分解为七个一维表示的直和, 它们分别由以下元素张成:

$$\begin{aligned}
&\alpha_1=1+\chi_2-\chi_3-\chi_4+\chi_7,\\
&\alpha_2=1-\chi_2-\chi_5+\chi_6,\\
&\alpha_3=1-\chi_2-\chi_3+\chi_4+\chi_5-\chi_6,\\
&\alpha_4=1+\chi_2+\chi_5+\chi_6-2\chi_7,\\
&\alpha_5=1+\chi_2+\chi_3+\chi_4-\chi_5-\chi_6,\\
&\alpha_6=1-\chi_2+2\chi_3-2\chi_4+\chi_5-\chi_6,\\
&\alpha_7=1+\chi_2+4\chi_3+4\chi_4+5\chi_5+5\chi_6+6\chi_7.
\end{aligned}$$

从而表示代数 $r_{\mathbb{Q}}(S_5)$ 有以下中心本原幂等元:

$$\begin{aligned}
&e_1=\frac{1}{5}(1+\chi_2-\chi_3-\chi_4+\chi_7),\\
&e_2=\frac{1}{4}(1-\chi_2-\chi_5+\chi_6),\\
&e_3=\frac{1}{6}(1-\chi_2-\chi_3+\chi_4+\chi_5-\chi_6),\\
&e_4=\frac{1}{8}(1+\chi_2+\chi_5+\chi_6-2\chi_7),\\
&e_5=\frac{1}{6}(1+\chi_2+\chi_3+\chi_4-\chi_5-\chi_6),\\
&e_6=\frac{1}{12}(1-\chi_2+2\chi_3-2\chi_4+\chi_5-\chi_6),\\
&e_7=\frac{1}{120}(1+\chi_2+4\chi_3+4\chi_4+5\chi_5+5\chi_6+6\chi_7).
\end{aligned}$$

对于表示代数 $r_{\mathbb{Q}}(S_5)$ 的正则表示, 设

$$\chi_i \cdot (\chi_1,\chi_2,\chi_3,\chi_4,\chi_5,\chi_6,\chi_7) = (\chi_1,\chi_2,\chi_3,\chi_4,\chi_5,\chi_6,\chi_7)X_i, \quad 1 \leqslant i \leqslant 7,$$

那么 X_1 为单位矩阵 I_7, 而

$$X_2 = \begin{pmatrix} 0&1&0&0&0&0&0\\ 1&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&1&0&0&0\\ 0&0&1&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&1&0\\ 0&0&0&0&1&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&1 \end{pmatrix}, \quad X_3 = \begin{pmatrix} 0&0&1&0&0&0&0\\ 0&0&0&1&0&0&0\\ 1&0&1&0&1&0&1\\ 0&1&0&1&0&1&1\\ 0&0&1&0&1&1&1\\ 0&0&0&1&1&1&1\\ 0&0&1&1&1&1&1 \end{pmatrix},$$

$$X_4 = \begin{pmatrix} 0&0&0&1&0&0&0\\ 0&0&1&0&0&0&0\\ 0&1&0&1&0&1&1\\ 1&0&1&0&1&0&1\\ 0&0&0&1&1&1&1\\ 0&0&1&0&1&1&1\\ 0&0&1&1&1&1&1 \end{pmatrix}, \quad X_5 = \begin{pmatrix} 0&0&0&0&1&0&0\\ 0&0&0&0&0&1&0\\ 0&0&1&0&1&1&1\\ 0&0&0&1&1&1&1\\ 1&0&1&1&1&1&1\\ 0&1&1&1&1&1&1\\ 0&0&1&1&1&1&2 \end{pmatrix},$$

$$X_6 = \begin{pmatrix} 0&0&0&0&0&1&0\\ 0&0&0&0&1&0&0\\ 0&0&0&1&1&1&1\\ 0&0&1&0&1&1&1\\ 0&1&1&1&1&1&1\\ 1&0&1&1&1&1&1\\ 0&0&1&1&1&1&2 \end{pmatrix}, \quad X_7 = \begin{pmatrix} 0&0&0&0&0&0&1\\ 0&0&0&0&0&0&1\\ 0&0&1&1&1&1&1\\ 0&0&1&1&1&1&1\\ 0&0&1&1&1&1&2\\ 0&0&1&1&1&1&2\\ 1&1&1&1&2&2&1 \end{pmatrix}.$$

由对称群不可约表示的自对偶性, Kronecker 系数 n_{ij}^k 关于三个指标对称, 从而 $r(S_5)$ 的上述七个左乘矩阵 X_i 均为对称矩阵. 将它们作平方和, 所得矩阵记为 X, 其行列式 $\det X$ 称为表示环 $r(S_5)$ 的行列式. 求矩阵 X 在有理数域 $\mathbb{Q}$ 上的逆矩阵 X^{-1}, 并取 X^{-1} 各分量分母的最小公倍数 n. 由表示环 $r(S_5)$ 交换, 我们可知 n 就是 $r(S_5)$ 的 Casimir 数. 而根据文 [26] 的命题 2.2 可知, $r(S_5)$ 的行列式和 Casimir 数在任意域 F 上是否非零均决定了其表示代数 $r_F(S_5)$ 的半单性.

例 4.1 计算 $r(S_5)$ 的 Casimir 数和行列式. 它的七个左乘矩阵作平方和后得到的矩阵为:

$$X=X_1^2+X_2^2+X_3^2+X_4^2+X_5^2+X_6^2+X_7^2=\begin{pmatrix}7&1&5&3&6&4&5\\1&7&3&5&4&6&5\\5&3&23&13&20&18&23\\3&5&13&23&18&20&23\\6&4&20&18&30&24&28\\4&6&18&20&24&30&28\\5&5&23&23&28&28&41\end{pmatrix},$$

从而在有理数域 $\mathbb{Q}$ 上,

$$X^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{1301}{7200}&-\frac{11}{800}&-\frac{31}{1200}&\frac{7}{3600}&-\frac{19}{480}&\frac{23}{1440}&\frac{11}{1200}\\-\frac{11}{800}&\frac{1301}{7200}&\frac{7}{3600}&-\frac{31}{1200}&\frac{23}{1440}&-\frac{19}{480}&\frac{11}{1200}\\-\frac{31}{1200}&\frac{7}{3600}&\frac{28}{225}&\frac{1}{75}&-\frac{29}{720}&-\frac{1}{80}&-\frac{23}{600}\\\frac{7}{3600}&-\frac{31}{1200}&\frac{1}{75}&\frac{28}{225}&-\frac{1}{80}&-\frac{29}{720}&-\frac{23}{600}\\-\frac{19}{480}&\frac{23}{1440}&-\frac{29}{720}&-\frac{1}{80}&\frac{41}{288}&-\frac{5}{96}&-\frac{7}{240}\\\frac{23}{1440}&-\frac{19}{480}&-\frac{1}{80}&-\frac{29}{720}&-\frac{5}{96}&\frac{41}{288}&-\frac{7}{240}\\\frac{11}{1200}&\frac{11}{1200}&-\frac{23}{600}&-\frac{23}{600}&-\frac{7}{240}&-\frac{7}{240}&\frac{21}{200}\end{pmatrix}.$$

由此可知, $r(S_5)$ 的 Casimir 数为 $7200=2^5\cdot3^2\cdot5^2$.

另一方面, $r(S_5)$ 的行列式 $\det X=8294400=2^{12}\cdot3^4\cdot5^2$, 故这两个非负整数有相同的素因子 (更一般的结论见文 [26] 中命题 3.3). 事实上根据文 [27] 的结果, 任意有限群在一域上的表示代数半单, 当且仅当其表示环的行列式或 Casimir 数在此域上非零.

参 考 文 献

[1] Redfield J H. The theory of group reduced distribution [J]. *Amer J Math*, 1927, 49(3):433–455.

[2] Murnaghan F D. On the direct product of irreducible representations of the symmetric group [J]. *Proc Nat Acad Sci USA*, 1937, 23:488–490.

[3] Ballantine C M, Orellana R C. A combinatorial interpretation for the coefficients in the Kronecker product $s_{(n-p,p)}*s_\lambda$ [J]. *Sém Lothar Combin*, 54A(2005/07).

[4] Blasiak J. Kronecker coefficients for one hook shape [J]. *Sém Lothar Combin*, 77(2016–2017) B77c, 40.

[5] Remmel J B. A formula for the Kronecker products of Schur functions of hook shapes [J]. *J Algebra*, 1989, 120(1):100–118.

[6] Remmel J B. Formulas for the expansion of the Kronecker products $S_{(m,n)} \otimes S_{(1^{p-r},r)}$ and $S_{(1^k 2^l)} \otimes S_{(1^{p-r},r)}$ [J]. *Discrete Math*, 1992, 99(1–3):265–287.

[7] Remmel J B. On the Kronecker product of Schur functions of two row shapes [J]. *Bull Belg Math Soc Simon Stevin*, 1994, 1(5):649–683.

[8] Rosas M H. The Kronecker product of Schur functions indexed by two-row shapes or hook shapes [J]. *J Algebraic Combin*, 2001, 14(2):153–173.

[9] Bürgisser P, Ikenmeyer C. The complexity of computing Kronecker coefficients [C]. 20th Annual International Conference on Formal Power Series and Algebraic Combinatorics (FPSAC 2008), 357–368, Discrete Math Theor Comput Sci Proc, AJ, Assoc Discrete Math Theor Comput Sci, Nancy, 2008.

[10] Murnaghan F D. The characters of the symmetric group [J]. *Proc Nat Acad Sci USA*, 1951, 37:55–58.

[11] Murnaghan F D. On the characters of the symmetric group [J]. *Proc Nat Acad Sci USA*, 1995, 41:396–398.

[12] Murnaghan F D. On the analysis of the Kronecker product of irreducible representations of S_n [J]. *Proc Nat Acad Sci USA*, 1955, 41:515–518.

[13] Murnaghan F D. On the irreducible representations of the symmetric group [J]. *Proc Nat Acad Sci USA*, 1955, 41:1096–1103.

[14] Murnaghan F D. On the Kronecker product of irreducible representations of the symmetric group [J]. *Proc Nat Acad Sci USA*, 1956, 42:95–98.

[15] Green J A. The modular representation algebra of a finite group [J]. *Illinois Journal of Mathematics*, 1962, 6:607–619.

[16] Etingof P, Gelaki S, Nikshych D, et al. Tensor categories [M]. Providence, Rhode Island: Amer Math Soc, 2016.

[17] Husemoller D. Fibre bundles, Third Edition [M]//Graduate Texts in Mathematics, vol 20, New York: Springer-Verlag, 1994.

[18] Minami H. The representation rings of orthogonal groups [J]. *Osaka Journal of Mathematics*, 1971, 8:243–250.

[19] 董井成, 陈惠香. 二面体群量子偶的表示环 [J]. 数学学报, 2013, 56(3):331–342.

[20] Chen H X. The Green ring of Drinfeld double $D(H_4)$ [J]. *Algebr Represent Th*, 2004, 17(5):1457–1483.

[21] Chen H X, Oystaeyen F V, Zhang Y H. The Green rings of Taft algebras [J]. *Proc Amer Math Soc*, 2014, 142(3):765–775.

[22] Hamraoui H, Khadija A. The representation ring of SL_d [J]. *Gulf Journal of Mathematics*, 2016, 4(4):48–53.

[23] 曹刘峰, 周灵睿, 李立斌. 二面体群 D_5 上表示环 [J]. 扬州大学学报, 2020, 23(6):13–17.

[24] Marin I. Hooks generate the representation ring of the symmetric group [J]. *Expo Math*, 2012, 30(3):268–276.

[25] 曹锡华, 时俭益. 有限群表示论 (第二版) [M]. 北京: 高等教育出版社, 2009.

[26] Wang Z H, Liu G X, Li L B. The Casimir number and the determinant of a fusion category [J]. *Glasg Math J*, 2021, 63(2):438–450.

[27] Wang Z H, Li L B, Zhang Y H. A criterion for the Jacobson semisimplicity of the Green ring of a finite tensor category [J]. *Glasgow Math J*, 2018, 60(1):253–272.

On the Representative Ring of the Symmetric Group S_5

DAI Lilan[1] LI Yunnan[1]

[1]School of Mathematics and Information Science, Guangzhou University, Guangzhou 510006, China.
E-mail: 2112015048@e.gzhu.edu.cn; ynli@gzhu.edu.cn

Abstract In this paper, the power formulas of all irreducible complex representations of symmetric group S_5 are calculated by using the character theory of finite groups. According to the irreducible decomposition of tensor products of any two irreducible representations of S_5 obtained in the process of solving the power formulas, the authors describe the complex representation ring $r(S_5)$ of S_5 and several of its properties, such as an expression of minimal generators and defining relations, its unit group, primitive idempotents and its determinant and Casimir number.

Keywords Group character, Symmetric group, Kronecker product, Representation ring

2000 MR Subject Classification 20C15, 20C30

The English translation of this paper will be published in
Chinese Journal of Contemporary Mathematics, Vol. 44 No. 2, 2023
by ALLERTON PRESS, INC., USA