数 学 年 刊 A 辑
2023, 44(2):163–198
DOI: 10.16205/j.cnki.cama.2023.0013

具有结构阻尼的 Kirchhoff 型波方程的时间依赖全局吸引子 *

汪 璇 [1] 田凯鸿 [2]

提要 本文讨论了具有结构阻尼的 Kirchhoff 型波方程:

$$\varepsilon(t)\partial_t^2 u - M(\|\nabla u\|^2)\Delta u + (-\Delta)^\gamma \partial_t u + f(u) = g(x), \quad \gamma \in \Big(\frac{1}{2}, 1\Big)$$

解的适定性和长时间行为. 当非线性项 f 的增长指数满足 $2 \leqslant p \leqslant 3+2\gamma$ 时, 借助 Faedo-Galerkin 逼近方法和渐近正则估计, 得到了解的适定性和正则性. 继而利用收缩函数方法验证解过程的渐近紧性. 最终证明了时间依赖全局吸引子在自然能量空间 $H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$ 中的的存在性.

关键词 Kirchhoff 型波方程, 时间依赖吸引子, 结构阻尼, 正则性
MR (2000) 主题分类 47J07, 47J15, 47J25
中图法分类 O175.29
文献标志码 A
文章编号 1000-8314(2023)02-0163-36

§1 引 言

设 Ω 是 $\mathbb{R}^3$ 中具有光滑边界 $\partial\Omega$ 的开集. 本文考虑了如下 Kirchhoff 型波方程:

$$\varepsilon(t)\partial_t^2 u - M(\|\nabla u\|^2)\Delta u + (-\Delta)^\gamma \partial_t u + f(u) = g(x), \quad (x,t) \in \Omega \times [\tau, +\infty), \tag{1.1}$$

$$u|_{\partial\Omega} = 0, \quad u(x,\tau) = u_0(x), \quad \partial_t u(x,\tau) = u_1(x), \quad x \in \Omega, \tag{1.2}$$

其中未知函数 $u = u(x,t) : \Omega \times [\tau, +\infty) \to \mathbb{R}$, $u_0(x), u_1(x) : \Omega \to \mathbb{R}$ 为方程对应初值.

时间依赖系数 $\varepsilon(t)$ 和非线性函数 M, f 满足如下假设:

(A_1) $\varepsilon(t) \in C^1(\mathbb{R})$ 为单调递减有界函数并且满足

$$\lim_{t\to+\infty} \varepsilon(t) = 0. \tag{1.3}$$

特别地, 存在常数 $L > 0$, 使得

$$\sup_{t\in\mathbb{R}}(|\varepsilon(t)| + |\varepsilon'(t)|) \leqslant L. \tag{1.4}$$

(A_2) $M \in C^1(\mathbb{R}^+)$,

$$M(s) \geqslant M_0 > 0, \quad \forall s \in \mathbb{R}^+ \tag{1.5}$$

本文 2022 年 4 月 29 日收到, 2022 年 12 月 28 日收到修改稿.

[1]通信作者. 西北师范大学, 数学与统计学院, 兰州 730070. E-mail: wangxuan@nwnu.edu.cn
[2]西北师范大学, 数学与统计学院, 兰州 730070. E-mail: 3071263024@qq.com

*本文受到国家自然科学基金 (No. 111961060, No. 11961059, No. 12061062) 的资助.

并且

$$\nu_M := \liminf_{s\to+\infty} M(s) > 0. \tag{1.6}$$

(A_3) $f \in C^2(\mathbb{R})$, $f(0)=0$. 对于任意的 $s\in\mathbb{R}$, f 满足耗散型条件

$$\mu_f := \liminf_{|s|\to+\infty} \frac{f(s)}{s} > -\lambda_1\nu_M, \tag{1.7}$$

以及增长型条件

$$|f''(s)| \leqslant C_0(1+|s|^{p-2}), \quad 2\leqslant p\leqslant p_\gamma = 3+2\gamma, \tag{1.8}$$

其中常数 $C_0>0$, 并且 λ_1 为算子 $-\Delta$ 在 Dirchlet 边界条件下的第一特征值.

(A_4) $g\in L^2(\Omega)$.

(A_5) $(u_0,u_1)\in\mathcal{H}_\tau^1$ 满足 $\|(u_0,u_1)\|_{\mathcal{H}_\tau^1}\leqslant R$.

注 1.1 根据假设 (A_2) 中的 (1.6) 和 (A_3) 中的 (1.7) 可知，存在一个常数 β_0, 满足 $0<\beta_0<\min\left\{\frac{\nu_M}{3},1\right\}$, 使得

$$\begin{aligned}
&\int_0^s M(r)\mathrm{d}r \geqslant (\nu_M-\beta_0)s - C(\beta_0), \quad M(s)s\geqslant(\nu_M-\beta_0)s-C(\beta_0), \quad s\in\mathbb{R}^+,\\
&\langle F(s),1\rangle \geqslant -\frac{(\nu_M-3\beta_0)\lambda_1}{2}\|s\|^2 - C(\beta_0),\\
&\langle f(s),s\rangle \geqslant -(\nu_M-3\beta_0)\lambda_1\|s\|^2 - C(\beta_0), \quad s\in\mathbb{R}
\end{aligned}$$

成立，其中 $F(s)=\int_0^s f(r)\mathrm{d}r$.

注 1.2 根据假设 (A_3) 中的 (1.8) 可知, 存在一个正常数 C_1, 使得当 $2\leqslant p\leqslant p_\gamma=3+2\gamma$ 时，有

$$\begin{aligned}
|f'(s)| &\leqslant C_1(|s|+|s|^{p-1})\\
&\leqslant \begin{cases} C_1|s|^{p-1}, & 若 \quad |s|>1,\\ C_1(1+|s|^{p-1}), & 若 \quad |s|\leqslant 1\end{cases}\\
&\leqslant C_1(1+|s|^{p-1})
\end{aligned}$$

成立.

方程 (1.1) 来源于可拉伸弦振动系统, 它具有深刻的数学物理背景. 1883 年 Kirchhoff 在文 [1] 中研究了可拉伸弦的振动行为，并建立了如下模型:

$$\rho h\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \Big(p_0+\frac{Eh}{2L}\int_0^L\Big(\frac{\partial u}{\partial x}\Big)^2\mathrm{d}x\Big)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f, \tag{1.9}$$

其中 $0<x<L$, $t\geqslant 0$. 未知函数 $u=u(x,t)$ 表示关于空间 x 和时间 t 的横向位移. 并且, E 表示杨氏模量, ρ 表示质量密度, h 表示横截面积, L 表示长度, p_0 表示初始轴向拉力, f 表示外力项. 相对于经典的波方程，此类方程更清楚准确地描述了可拉伸弦的振动问题. 在振动过程中，由于振动系统本身固有的原因或者与外界相互作用的因

素引起振动逐渐下降的现象，称之为阻尼．为此， Ono 在文 [2] 中建立了描述具有弱阻尼的可拉伸弦非线性振动的模型：

$$\rho h\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+\delta\frac{\partial u}{\partial t}=\Big(p_0+\frac{Eh}{2L}\int_0^L\Big(\frac{\partial u}{\partial x}\Big)^2\mathrm{d}x\Big)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+f, \tag{1.10}$$

其中 δ 是阻尼系数．如果弦和杆由依赖于速度的黏弹性材料构成，那么在振动过程中会出现强阻尼，即 $-\Delta u_t$ (见 [3])．需要强调的是强阻尼的强弱不仅依赖张力而且还依赖于张力的变化率．除了强阻尼和弱阻尼之外，还有一种阻尼称为结构阻尼，或者称为分数阻尼，即 $(-\Delta)^\gamma u_t, 0<\gamma<1$．结构阻尼主要由材料的内摩擦力与介质的相互作用引起的，其耗散性介于弱阻尼和强阻尼之间．由于具有结构阻尼的方程拥有实际应用背景和应用前景，从而引起了许多学者的研究兴趣，由此涌现出大量关于该模型的研究成果 (见 [4–10] 及其相关文献)．

如果时间依赖系数 $\varepsilon(t)\equiv C$, 非局部项系数函数 $M\equiv 1$, 阻尼耗散指数 $\gamma=0$ 或者 $\gamma=1$, 则方程 (1.1) 为弱阻尼或者强阻尼波方程．关于此模型，当非线性项满足次临界增长或者临界增长时，Pata 等人在文 [11–12] 中讨论了解的适定性和长时间动力学行为．而对于带有结构阻尼的波方程，当 $0<\gamma<\frac{1}{2}$ 时， Savostianov 在文 [6] 中探讨了方程 (1.1) 在非线性项次临界增长时吸引子及指数吸引子的存在性；当 $\frac{1}{2}\leqslant\gamma<1$ 时， Chueshov 在文 [4] 中研究了具有临界非线性项的 Kirchhoff 波方程解的渐近性态，并得到了全局指数吸引子的存在性；当 $\frac{1}{2}<\gamma<1$ 时，杨志坚等人在文 [5] 中讨论了具有超临界非线性项的 Kirchhoff 波方程解的适定性和渐近性．

值得注意的是，如果方程 (1.1) 中包含时间依赖系数 $\varepsilon(t)$, 并且 $\varepsilon(t)$ 为在无穷远处趋于零时的有界单调递减函数，那么问题 (1.1)–(1.2) 将变得更加有趣与复杂．因为此时能量泛函

$$E(t)=\varepsilon(t)\int_\Omega|\partial_t u(x,t)|^2\mathrm{d}x+\int_\Omega|\nabla u(x,t)|^2\mathrm{d}x,$$

其中 $\varepsilon(\cdot)$ 的耗散性限制了通常意义上的吸收集的存在性，即相空间的有界集吸收了一定时间段后的所有轨道．为了解决此问题，在文 [13–14] 中， Conti 等人在拉回吸引性及最小性的基础上提出了时间依赖吸引子的概念，并且建立了时间依赖吸引子理论．在此理论基础上，在文 [15–17] 中，作者讨论了耗散型发展方程的解在时间依赖空间中的渐近性态．尤其关于带有结构阻尼和次临界增长源项的波方程，当 $0<\gamma<\frac{1}{2}$ 时，在文 [7] 中，马巧珍等人证明了时间依赖吸引子的存在性与正则性．

据我们所知，关于 $\frac{1}{2}<\gamma<1$ 时的带有结构阻尼的 Kirchhoff 型波方程的解在时间依赖空间中的长时间动力学行为还尚未有人研究. 与此同时, 方程中所包含的结构阻尼项, 非线性项和 Kirchhoff 型非局部项给解的耗散性估计、有界吸收集的存在性以及解过程的渐近紧性验证带来了本质性困难．对于这些困难，通过运用渐近正则估计技术、收缩函数的方法和时间依赖吸引子理论，我们攻克了这些技术性难题，并且证明了问题 (1.1)–(1.2) 解的适定性与正则性以及在空间 $H_0^1(\Omega)\times L^2(\Omega)$ 中的 Lipschitz 连续性、进而验证了过程

的渐近紧性. 最后证明了问题 (1.1)–(1.2) 的时间依赖全局吸引子在空间 $H_0^1(\Omega)\times L^2(\Omega)$ 中的存在性.

§2 记号及预备结果

本节主要介绍将用到的记号, 函数空间和一些预备结果. 下面将使用文 [18] 中的记号, 并设

$$A=-\Delta,\ \text{定义域为}\ D(A)=H_0^1(\Omega)\cap H^2(\Omega).$$

考虑 Hilbert 空间族 $D(A^{\frac{s}{2}}), s\in\mathbb{R}$, 并且赋予它们相应的内积和范数:

$$\langle\cdot,\cdot\rangle_{D(A^{\frac{s}{2}})}=\langle A^{\frac{s}{2}}\cdot,A^{\frac{s}{2}}\cdot\rangle,\quad \|u\|^2_{D(A^{\frac{s}{2}})}=\|A^{\frac{s}{2}}\cdot\|^2,$$

其中 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 和 $\|\cdot\|$ 分别表示 $L^2(\Omega)$ 中的内积和范数.

为了使用方便, 我们引入记号, 记 $V_s=D(A^{\frac{s}{2}}),\ s\in\mathbb{R}$, 内积和范数分别表示为:

$$\langle u,v\rangle_s=\int_\Omega A^{\frac{s}{2}}u(x)A^{\frac{s}{2}}v(x)\mathrm{d}x,\quad \|u\|_s^2=\int_\Omega|A^{\frac{s}{2}}u(x)|^2\mathrm{d}x,\quad \forall\, u,\, v\in V_s.$$

则 $V_0=L^2(\Omega)$, $D(A^{\frac{s}{2}})=V_s$, $D(A^{-\frac{s}{2}})=V_{-s}$.

应用 Sobolev 嵌入定理, 可得紧嵌入:

$$V_{s_1}\hookrightarrow\hookrightarrow V_{s_2},\quad \text{当}\ s_1>s_2\ \text{时}, \tag{2.1}$$

以及连续嵌入

$$V_s\hookrightarrow L^{\frac{2n}{n-2s}}. \tag{2.2}$$

同时, Poincaré 不等式

$$\lambda_1^s\int_\Omega|v|^2\mathrm{d}x\leqslant\int_\Omega|A^{\frac{s}{2}}v|^2\mathrm{d}x \tag{2.3}$$

亦成立.

因此, 问题 (1.1)–(1.2) 可以写成以下形式:

$$\varepsilon(t)\partial_t^2u+M(\|u\|_1^2)Au+A^\gamma\partial_tu+f(u)=g(x),\quad (x,t)\in\Omega\times[\tau,+\infty), \tag{2.4}$$

$$u|_{\partial\Omega}=0,\ u(x,\tau)=u_0(x),\ \partial_tu(x,\tau)=u_1(x),\quad x\in\Omega, \tag{2.5}$$

其中 $\gamma\in\left(\frac{1}{2},1\right)$.

定义希尔伯特空间族

$$\mathcal{H}_t^{1+\vartheta}=V_{1+\vartheta}\times V_\vartheta,$$

并且赋予相应的的内积和范数

$$\|z(t)\|^2_{\mathcal{H}_t^{1+\vartheta}}=\|(u(t),\partial_tu(t))\|^2_{\mathcal{H}_t^{1+\vartheta}}=\|u(t)\|^2_{1+\vartheta}+\varepsilon(t)\|\partial_tu(t)\|^2_\vartheta. \tag{2.6}$$

特别地, 当 $\vartheta=0$ 时, 希尔伯特空间族 $\mathcal{H}_t^1$ 定义如下:

$$\mathcal{H}_t^1=V_1\times L^2(\Omega), \tag{2.7}$$

其内积和范数如下：

$$\|z(t)\|^2_{\mathcal{H}^1_t} = \|(u(t), \partial_t u(t))\|^2_{\mathcal{H}^1_t} = \|u(t)\|^2_1 + \varepsilon(t)\|\partial_t u(t)\|^2; \tag{2.8}$$

当 $\vartheta = 1$ 时，希尔伯特空间族 $\mathcal{H}^2_t$ 定义如下：

$$\mathcal{H}^2_t = V_2 \times V_1, \tag{2.9}$$

其内积和范数为：

$$\|z(t)\|^2_{\mathcal{H}^2_t} = \|(u(t), \partial_t u(t))\|^2_{\mathcal{H}^2_t} = \|u(t)\|^2_2 + \varepsilon(t)\|\partial_t u(t)\|^2_1. \tag{2.10}$$

此外，当 $\vartheta > 0$ 时，

$$\mathcal{H}^{1+\vartheta}_t \hookrightarrow\hookrightarrow \mathcal{H}^1_t.$$

为了做解的渐近正则估计，我们将使用以下抽象结果.

引理 2.1 [5]　如果 x_n 为有界序列并且 $\psi \in \mathrm{C}(\mathbb{R})$ 为单调函数，那么

$$\psi\Big(\liminf_{n\to\infty} x_n\Big) \leqslant \liminf_{n\to\infty} \psi(x_n).$$

引理 2.2 [19−20]　设 X, B 和 Y 为三个 Banach 空间. 对于 $\forall T > 0$, 如果 $X \hookrightarrow\hookrightarrow B \hookrightarrow Y$, 并且

$$\begin{aligned} W &= \{u \in L^p([0,T];X) | \partial_t u \in L^r([0,T];Y)\}, \quad r > 1, 1 \leqslant p < \infty, \\ W_1 &= \{u \in L^\infty([0,T];X) | \partial_t u \in L^r([0,T];Y)\}, \quad r > 1, \end{aligned}$$

那么

$$W \hookrightarrow\hookrightarrow L^p([0,T];B), \quad W_1 \hookrightarrow\hookrightarrow C([0,T];B).$$

我们将回顾以下概念和一些抽象结果，它们将用于解在时间依赖空间的长时间动力学行为研究.

定义 2.1 [13]　设 X_t 是一族赋范空间, 称双参数算子族 $\{U(t,\tau) : X_\tau \to X_t, t \geqslant \tau, \tau \in \mathbb{R}\}$ 是一个过程，如果对任意的 $\tau \in \mathbb{R}$,

(i) $U(\tau,\tau) = \mathrm{Id}$ 是 X_τ 上的恒等算子;

(ii) 对任意的 $\sigma \in \mathbb{R}$ 和任意的 $t \geqslant \tau \geqslant \sigma, U(t,\tau)U(\tau,\sigma) = U(t,\sigma)$.

设 X_t 是一族赋范空间. 对每一个 $t \in \mathbb{R}$, 定义 X_t 的 R- 球为

$$\mathbb{B}_t(R) = \{z \in X_t | \|z\|_{X_t} \leqslant R\}.$$

$\mathrm{dist}_{X_t}(A,B)$ 表示为从集合 $A \subset X_t$ 到集合 $B \subset X_t$ 的 Hausdorff 半距离，即

$$\mathrm{dist}_{X_t}(A,B) = \sup_{x\in A} \mathrm{dist}_{X_t}(x,B) = \sup_{x\in A}\inf_{y\in B} \|x-y\|_{X_t}.$$

定义 2.2 [13]　如果存在常数 $R > 0$, 使得 $C_t \subset \mathbb{B}_t(R), \forall t \in \mathbb{R}$, 则称有界集 $C_t \subset X_t$ 的集合族 $\mathfrak{C} = \{C_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ 是一致有界的.

定义 2.3[13] 如果对任意的 $R_0>0$, 存在常数 $t_0=t_0(R)\leqslant t$, 使得

$$\tau\leqslant t-t_0\Rightarrow U(t,\tau)B_\tau(R)\subset B_t(R_0),$$

则称一致有界集族 $\mathfrak{B}_t=\{B_t(R_0)\}_{t\in\mathbb{R}}$ 是过程 $U(t,\tau)$ 的时间依赖吸收集.

如果过程拥有一个时间依赖吸收集，那么称过程是耗散的.

定义 2.4[13] 最小族 $\mathfrak{A}=\{A_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ 称为过程 $U(t,\tau)$ 的时间依赖吸引子，如果 $\mathfrak{A}$ 满足：

(i) 每个 A_t 在 X_t 中是紧的；

(ii) $\mathfrak{A}$ 是拉回吸引的，即它是一致有界的，并且对于每个一致有界族 $\mathfrak{C}=\{C_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ 和每个 $t\in\mathbb{R}$, 极限

$$\lim_{\tau\to-\infty}\operatorname{dist}_{X_t}(U(t,\tau)C_\tau,A_t)=0$$

成立.

定理 2.1[13] 如果过程 $U(t,\tau)$ 是渐近紧的，即集合

$$\mathbb{K}=\{\mathfrak{K}=\{K_t\}_{t\in\mathbb{R}}|\text{每个}K_t\text{在}X_t\text{ 中紧},\mathfrak{K}\text{拉回吸引}\}$$

是非空的，那么时间依赖吸引子 $\mathfrak{A}$ 存在且唯一，并且它与 $\mathfrak{A}=\{A_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ 一致.

引理 2.3[15] 如果过程 $U(\cdot,\cdot)$ 是渐近紧的，那么它是拉回渐近紧的.

定义 2.5[21−22] 设 $\{X_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ 是一族 Banach 空间，并且 $\mathfrak{C}=\{C_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ 是 $\{X_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ 的一族一致有界子集. 我们称定义在 $X_t\times X_t$ 上的函数 $\Phi_\tau^t(\cdot,\cdot)$ 为 $C_\tau\times C_\tau$ 上的收缩函数，如果对任意固定的 $t\in\mathbb{R}$ 和任意的序列 $\{x_n\}_{n=1}^\infty\subset C_\tau$, 存在子序列 $\{x_{n_k}\}_{k=1}^\infty\subset\{x_n\}_{n=1}^\infty$, 使得

$$\lim_{k\to\infty}\lim_{l\to\infty}\Phi_\tau^t(x_{n_k},x_{n_l})=0,\quad\forall\tau\leqslant t.$$

我们用 $\mathfrak{C}(C_t)$ 表示 $C_t\times C_t$ 上收缩函数的集合.

定理 2.2[15] 设 $U(\cdot,\cdot)$ 是 $\{X_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ 上的过程，并且设它拥有一个拉回吸收集 $\mathfrak{B}=\{\mathbb{B}_t(R_0)\}_{t\in\mathbb{R}}$. 如果对任意的 $\varepsilon>0$, 存在子序列 $T(\varepsilon)\leqslant t,\Phi_T^t\in\mathfrak{C}(\mathbb{B}_T(R))$, 使得对任意固定的 $t\in\mathbb{R}$,

$$\|U(t,T)x-U(t,T)y\|\leqslant\varepsilon+\Phi_T^t(x,y),\quad\forall x,y\in\mathbb{B}_T(R),$$

那么 $U(\cdot,\cdot)$ 是拉回渐近紧的.

定理 2.3[15] 设 $U(\cdot,\cdot)$ 为作用于 Banach 空间族 $\{X_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ 的过程. 则 $U(\cdot,\cdot)$ 拥有时间依赖全局吸引子 $\mathfrak{A}^*=\{A_t^*\}_{t\in\mathbb{R}}$, 满足 $A_t=\bigcap\limits_{s\leqslant t}\overline{\bigcup\limits_{\tau\leqslant s}U(t,\tau)B_\tau(R)}$, 当且仅当

(i) $U(\cdot,\cdot)$ 拥有拉回吸收集族 $\mathfrak{B}=\{\mathbb{B}_t(R_0)\}_{t\in\mathbb{R}}$;

(ii) $U(\cdot,\cdot)$ 是拉回渐近紧的.

定义 2.6 [13, 23–24] 函数 $t \to Z(t)$ 并且 $Z(t) \in X_t$ 称为过程 $U(t,\tau)$ 的一个完全有界轨道 (CBT), 当且仅当

(i) $\sup\limits_{t\in\mathbb{R}} \|Z(t)\|_{X_t} < \infty$;

(ii) $Z(t) = U(t,\tau)Z(\tau), \forall\, \tau \leqslant t,\ \tau \in \mathbb{R}$.

定义 2.7 [13, 23–24] 如果对所有的 $\tau \leqslant t$, 有

$$U(t,\tau)A_\tau = A_t.$$

则称时间依赖吸引子 $\mathfrak{A} = \{A_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ 是不变的.

定理 2.4 [13, 23–24] 如果过程 $U(t,\tau)$ 的时间依赖吸引子 $\mathfrak{A} = \{A_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ 是不变的，那么它与过程 $U(t,\tau)$ 的所有 CBT 集合一致，即

$$\mathfrak{A} = \{Z \mid t \to Z(t) \in X_t,\ Z(t) \text{ 是过程 } U(t,\tau) \text{ 的 CBT}\}.$$

§3 解的适定性与正则性

首先，我们对问题 (2.4)–(2.5) 的解作出如下定义.

定义 3.1 对于 $\tau \in \mathbb{R}$, 如果

$$u \in L^\infty([\tau,T];V_1), \quad \partial_t u \in L^\infty([\tau,T];L^2(\Omega)) \cap L^2([\tau,T];V_\gamma),$$

并满足

$$\langle \varepsilon(t)\partial_t^2 u,\omega\rangle + M(\|u\|_1^2)\langle u,\omega\rangle_1 + \langle \partial_t u,\omega\rangle_\gamma + \langle f(u),\omega\rangle = \langle g(x),\omega\rangle, \quad \forall \tau \leqslant t \text{ 且 } \forall \omega \in V_1,$$

则称二元组 $y = (u,\partial_t u)$ 是问题 (2.4)–(2.5) 在区间 $[\tau,T]$ 上的一个弱解.

定理 3.1 如果 (A_1)–(A_5) 成立，那么对每一个 $T > \tau$ 且 $\gamma \in (\frac{1}{2},1)$, 问题 (2.4)–(2.5) 存在弱解 $y = (u,\partial_t u) \in C([\tau,T];\mathcal{H}_t^1) \cap L^2([\tau,T];V_{2-\gamma}\times V_\gamma)$, 并且 $\partial_t^2 u \in L^\infty([\tau,T];V_{-2\gamma}) \cap L^2([\tau,T];V_{-\gamma})$, 满足

$$\begin{aligned}
&\|u(t)\|_1^2 + \varepsilon(t)\|\partial_t u(t)\|^2 + \varepsilon^2(t)\|\partial_t^2 u(t)\|_{-2\gamma}^2 \\
&\quad + \int_t^{t+1}(\|u(s)\|_{2-\gamma}^2 + \varepsilon^2(t)\|\partial_t^2 u(s)\|_{-\gamma}^2)\mathrm{d}s + \int_\tau^t \|\partial_t u(s)\|_\gamma^2 \mathrm{d}s \\
&\leqslant C(R,\beta_0,\|g\|,\lambda_1,C_1,C_2,M_0,L), \quad t \geqslant \tau.
\end{aligned} \tag{3.1}$$

进一步，解还满足下列性质:

(i) (耗散性) 存在一个独立于 $\gamma \in (\frac{1}{2},1)$ 的正常数 R, 使得

$$\|(u,\partial_t u)\|_{\mathcal{H}_t^1} \leqslant R_0, \quad \forall t \geqslant t_0(R), \tag{3.2}$$

其中 $\tau \leqslant t - t_0(R)$, 并且 $t_0(R)$ 为依赖于正常数 R 的时刻.

(ii) (能量等式) 对每一个 $\tau \leqslant s \leqslant t$, 下列能量等式

$$E(u(t),\partial_t u(t)) + 2\int_s^t \|\partial_t u(r)\|_\gamma^2 \mathrm{d}r = E(u(s),\partial_t u(s)) + \int_s^t \varepsilon'(r)\|\partial_t u(r)\|^2 \mathrm{d}r \tag{3.3}$$

成立，其中

$$E(u(t),\partial_t u(t))=\varepsilon(t)\|\partial_t u(t)\|^2+\int_0^{\|u\|_1^2}M(r)\mathrm{d}r+2\langle F(u(t)),1\rangle-2\langle g,u(t)\rangle. \tag{3.4}$$

(iii) (在弱拓扑空间中的 Lipschitz 稳定性) 解 $y=(u,\partial_t u)$ 在空间 $V_\gamma\times V_{-\gamma}$ 中是 Lipschitz 连续的，即

$$\begin{aligned}&\|\widetilde{u}(t)\|_\gamma^2+\varepsilon(t)\|\partial_t\widetilde{u}(t)\|_{-\gamma}^2+\int_\tau^t(\|\widetilde{u}(s)\|_1^2+\|\partial_t\widetilde{u}(s)\|^2)\mathrm{d}s\\&\leqslant\Big(\frac{\mu_3}{\mu_2}\mathrm{e}^{(\widetilde{C}_0+\widetilde{C}_0\widetilde{C}_1)(t-\tau)+\widetilde{C}_0\widetilde{C}_1}\\&\quad+\frac{\mu_3}{k}\mathrm{e}^{2(\widetilde{C}_0+\widetilde{C}_0\widetilde{C}_1)(t-\tau)+2\widetilde{C}_0\widetilde{C}_1}\Big)(\|\widetilde{u}(\tau)\|_\gamma^2+\varepsilon(\tau)\|\partial_t\widetilde{u}(\tau)\|_{-\gamma}^2),\end{aligned} \tag{3.5}$$

其中 $\widetilde{y}=(\widetilde{u},\partial_t\widetilde{u})=y_1-y_2$, 并且 $y_i=(u_i,\partial_t u_i)$ $(i=1,2)$ 是问题 (2.4)–(2.5) 分别对应于初值 (u_{i_0},u_{i_1}) $(i=1,2)$ 的两个弱解. 并且

$$\begin{aligned}\widetilde{C}_0&=C(R,\beta_0,\|g\|,\lambda_1,C_1,C_2,M_0,\delta),\\\widetilde{C}_1&=C(R,\beta_0,\|g\|,\lambda_1,C_1,C_2,M_0,L).\end{aligned}$$

(iv) ($t>\tau$ 时的全局正则性) 对任意的 $\tau<qa<a\leqslant t\leqslant T$ (当 $a>0$ 时 $0<q<1$, 或当 $a<0$ 时 $q>1$),

$$(\partial_t u,\partial_t^2 u)\in L^\infty([a,T];V_\gamma\times V_{-\gamma})\cap L^2([a,T];V_1\times L^2(\Omega))$$

满足

$$\begin{aligned}&\|\partial_t u\|_\gamma^2+\varepsilon(t)\|\partial_t^2 u\|_{-\gamma}^2+\int_t^{t+1}(\|\partial_t^2 u(s)\|^2+\|\partial_t u(s)\|_1^2)\mathrm{d}s\\&\leqslant\Big(\frac{1}{\mu_6}+\frac{1}{k_1}\mathrm{e}^{2\widetilde{C}_0\widetilde{C}_1+\widetilde{C}_0}\Big)\frac{\widetilde{C}_3}{\widetilde{C}_2(1+\widetilde{C}_1)}\mathrm{e}^{\widetilde{C}_2\widetilde{C}_1}\frac{\mathrm{e}^{\widetilde{C}_2(1+\widetilde{C}_1)(t-\tau)}}{(t-\tau)^2},\quad\forall t>\tau,\end{aligned} \tag{3.6}$$

与此同时,

$$u\in L^\infty([a,T];V_{1+\gamma})\cap L^2([a,T];V_2)$$

满足

$$\begin{aligned}&\|u\|_{1+\gamma}^2+\int_t^{t+1}\|u(s)\|_2^2\mathrm{d}s\\&\leqslant\widetilde{C}_5\mathrm{e}^{\widetilde{C}_4(t-qa)}(t-qa)+\frac{\widetilde{C}_6}{M_0\gamma(1-\gamma)}\mathrm{e}^{\widetilde{C}_4(t-qa)}(t-qa)^{-1}\\&\quad+\widetilde{C}_5\mathrm{e}^{\widetilde{C}_4(t-qa)}\frac{\widetilde{C}_3}{k_1\widetilde{C}_2(1+\widetilde{C}_1)}\mathrm{e}^{(\widetilde{C}_0+\widetilde{C}_2)\widetilde{C}_1}\frac{\mathrm{e}^{\widetilde{C}_2(1+\widetilde{C}_1)(qa-\tau)}\mathrm{e}^{\widetilde{C}_0(1+\widetilde{C}_1)(t-qa)}}{(qa-\tau)^2}\\&\quad+\frac{4}{5M_0}\mathrm{e}^{-\widetilde{C}_4}\Big(\widetilde{C}_5\mathrm{e}^{\widetilde{C}_4(t-qa)}(t-qa)+\frac{\widetilde{C}_6}{M_0\gamma(1-\gamma)}\mathrm{e}^{\widetilde{C}_4(t-qa)}(t-qa)^{-1}\\&\quad+\widetilde{C}_5\mathrm{e}^{\widetilde{C}_4(t-qa)}\frac{\widetilde{C}_3}{k_1\widetilde{C}_2(1+\widetilde{C}_1)}\mathrm{e}^{(\widetilde{C}_0+\widetilde{C}_2)\widetilde{C}_1}\frac{\mathrm{e}^{\widetilde{C}_2(1+\widetilde{C}_1)(qa-\tau)}\mathrm{e}^{\widetilde{C}_0(1+\widetilde{C}_1)(t-qa)}}{(qa-\tau)^2}\end{aligned}$$

$$+\widetilde{C}_5+\widetilde{C}_5\Big(\frac{1}{k_1}\frac{\widetilde{C}_3}{\widetilde{C}_2(1+\widetilde{C}_1)}\mathrm{e}^{(2\widetilde{C}_0+\widetilde{C}_2)\widetilde{C}_1+\widetilde{C}_0}\frac{\mathrm{e}^{\widetilde{C}_2(1+\widetilde{C}_1)(t-\tau)}}{(t-\tau)^2}\Big)\Big), \tag{3.7}$$

其中

$$\begin{aligned}
&\widetilde{C}_2=C(R,\beta_0,\|g\|,\lambda_1,C_2,C_2,M_0,L,\delta),\\
&\widetilde{C}_3=C(R,\beta_0,\|g\|,\lambda_1,C_2,M_0,L,\delta),\\
&\widetilde{C}_4=C(R,\beta_0,\|g\|,\lambda_1,C_1,C_2,M_0),\\
&\widetilde{C}_5=C(\|g\|,M_0,L),\\
&\widetilde{C}_6=C(R,\beta_0,\|g\|,\lambda_1,C_2).
\end{aligned}$$

证　我们将分五步证明定理 3.1.

第一步　证明能量等式 (3.3).

将 (2.4) 与 $\partial_t u$ 取内积，得到

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\varepsilon(t)\|\partial_t u\|^2+\int_0^{\|u\|_1^2}M(r)\mathrm{d}r+2\langle F(u),1\rangle-2\langle g,u\rangle)+2\|\partial_t u\|_\gamma^2=\varepsilon'(t)\|\partial_t u\|^2.$$

对上式在 $[s,t]$ 上积分，可得 (3.3) 成立.

第二步　证明 (3.1) 成立.

由于 $\varepsilon'(t)<0$, 可知

$$\begin{aligned}
&E(u(t),\partial_t u(t))+2\int_\tau^t\|\partial_t u(s)\|_\gamma^2\mathrm{d}s\\
&\leqslant E(u_0,u_1)\\
&\leqslant C(R,\beta_0,\|g\|,\lambda_1,C_2),\quad t\geqslant\tau.
\end{aligned}\tag{3.8}$$

事实上，根据积分中值定理和 (A_2), 可得

$$\int_0^{\|u\|_1^2}M(s)\mathrm{d}s=M(\varsigma)\|u\|_1^2\leqslant\max_{s\in[0,\|u\|_1^2]}M(s)\|u\|_1^2, \tag{3.9}$$

其中 $0\leqslant\varsigma\leqslant\|u\|_1^2$. 由 (A_3) 中的 (1.8) 和紧嵌入 $V_1\hookrightarrow\hookrightarrow L^{p+1}(\Omega)$, 可得

$$2\langle F(u),1\rangle\leqslant 2C_1(\|u\|^2+\|u\|_{L^{p+1}(\Omega)}^{p+1})\leqslant C_2(\|u\|_1^2+\|u\|_1^{p+1}). \tag{3.10}$$

由 (A_4), 可知

$$2|\langle g,u\rangle|\leqslant\frac{\beta_0}{4}\|u\|_1^2+\frac{4}{\beta_0\lambda_1}\|g\|^2. \tag{3.11}$$

因此

$$\begin{aligned}
&E(u_0,u_1)\\
&=\varepsilon(\tau)\|u_1\|^2+\int_0^{\|u_0\|_1^2}M(s)\mathrm{d}s+2\langle F(u_0),1\rangle-2\langle g(x),u_0\rangle\\
&\leqslant\varepsilon(\tau)\|u_1\|^2+\max_{s\in[0,\|u_0\|_1^2]}M(s)\|u_0\|_1^2+C_2(\|u_0\|_1^2+\|u_0\|_1^{p+1})+\frac{\beta_0}{4}\|u_0\|_1^2+\frac{4}{\beta_0\lambda_1}\|g\|^2
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\leqslant \mu_0(\varepsilon(\tau)\|u_1\|^2+\|u_0\|_1^2+\|u_0\|_1^{p+1})+C\\
&\leqslant C(R,\beta_0,\|g\|,\lambda_1,C_2),
\end{aligned}
$$

其中 $\mu_0=\max\big\{1,C_2+\max\limits_{s\in[0,\|u_0\|_1^2]}M(s)+\frac{\beta_0}{4}\big\}$, $C=\frac{4}{\beta_0\lambda_1}\|g\|^2$. 故 (3.8) 成立.

由注 1.1, 可知

$$
\begin{aligned}
&\int_0^{\|u(t)\|_1^2}M(s)\mathrm{d}s+2\int_\Omega F(u)\mathrm{d}x\\
&\geqslant(\nu_M-\beta_0)\|u(t)\|_1^2-C(\beta_0)-(\nu_M-3\beta_0)\|u(t)\|_1^2-2C(\beta_0)\\
&\geqslant 2\beta_0\|u(t)\|_1^2-3C(\beta_0).
\end{aligned}\tag{3.12}
$$

由估计 (3.11)–(3.12), 可知

$$
\mu_1\|(u(t),\partial_tu(t))\|_{\mathcal{H}_t^1}^2-C\leqslant E(u(t),\partial_tu(t))\leqslant C(R,\beta_0,\|g\|,\lambda_1,C_2),\tag{3.13}
$$

其中 $\mu_1=\min\big\{1,\frac{7\beta_0}{4}\big\}$, $C=\frac{4}{\beta_0\lambda_1}\|g\|^2+3C(\beta_0)$.

根据 (3.8) 和 (3.13), 可得

$$
\int_\tau^t\|\partial_tu(s)\|_\gamma^2\mathrm{d}s\leqslant C(R,\beta_0,\|g\|,\lambda_1,C_2),\quad t\geqslant\tau.\tag{3.14}
$$

运用嵌入 $L^{1+\frac{1}{p}}(\Omega)\hookrightarrow\hookrightarrow V_{-1}\hookrightarrow\hookrightarrow V_{-2\gamma}$ 和方程 (2.4), 可得

$$
\begin{aligned}
&\varepsilon^2(t)\|\partial_t^2u(t)\|_{-2\gamma}^2\\
&\leqslant M^2(\|u(t)\|_1^2)\|u(t)\|_{2-2\gamma}^2+\|\partial_tu(t)\|^2+\|f(u)\|_{-2\gamma}^2+\|g\|_{-2\gamma}^2\\
&\leqslant C(R,\beta_0,\|g\|,\lambda_1,C_2)(\|u(t)\|_{2-2\gamma}^2+\|\partial_tu(t)\|^2+\|f(u)\|_{L^{1+\frac{1}{p}}}^2+\|g\|^2)\\
&\leqslant C(R,\beta_0,\|g\|,\lambda_1,C_2)(\|u(t)\|_1^2+\|u(t)\|_1^{2p}+\|\partial_tu(t)\|^2+\|g\|^2)\\
&\leqslant C(R,\beta_0,\|g\|,\lambda_1,C_2).
\end{aligned}\tag{3.15}
$$

将 (2.4) 式与 $A^{1-\gamma}u$ 作内积，可得

$$
\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\varepsilon(t)\langle\partial_tu,A^{1-\gamma}u\rangle)+M(\|u\|_1^2)\|u\|_{2-\gamma}^2+\langle A^\gamma\partial_tu,A^{1-\gamma}u\rangle+\langle f(u),A^{1-\gamma}u\rangle\\
&=\varepsilon(t)\|\partial_tu\|_{1-\gamma}^2+\varepsilon'(t)\langle\partial_tu,A^{1-\gamma}u\rangle+\langle g,A^{1-\gamma}u\rangle.
\end{aligned}\tag{3.16}
$$

利用假设 (A_2) 可知

$$
M(\|u\|_1^2)\|u\|_{2-\gamma}^2\geqslant M_0\|u\|_{2-\gamma}^2.
$$

下面，分别处理 (3.16) 式的每一项.

$$
\begin{aligned}
|\langle A^\gamma\partial_tu,A^{1-\gamma}u\rangle|&\leqslant\|\partial_tu\|_\gamma\|u\|_{2-\gamma}\leqslant\frac{M_0}{4}\|u\|_{2-\gamma}^2+\frac{1}{M_0}\|\partial_tu\|_\gamma^2,\\
|\varepsilon(t)\langle\partial_tu,A^{1-\gamma}u\rangle|&\leqslant L\|u\|_{2-2\gamma}\|\partial_tu\|\leqslant C(\lambda_1)L\|u\|_1\|\partial_tu\|\leqslant C(R,\beta_0,\|g\|,\lambda_1,C_2,L),\\
|\varepsilon'(t)\langle\partial_tu,A^{1-\gamma}u\rangle|&\leqslant L\|u\|_{2-2\gamma}\|\partial_tu\|\leqslant C(\lambda_1)L\|u\|_1\|\partial_tu\|\leqslant C(R,\beta_0,\|g\|,\lambda_1,C_2,L),\\
|\langle g,A^{1-\gamma}u\rangle|&\leqslant\|g\|_{-\gamma}\|u\|_{2-\gamma}\leqslant\frac{M_0}{4}\|u\|_{2-\gamma}^2+C(\|g\|,M_0,\lambda_1),
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}|\langle f(u), A^{1-\gamma}u\rangle| &\leqslant C_1\int_\Omega(|u|+|u|^p)|A^{1-\gamma}u|\mathrm{d}x\\ &\leqslant C_1\int_\Omega|A^{\frac{1-\gamma}{2}}u||A^{\frac{1-\gamma}{2}}u|+|u|^p|A^{1-\gamma}u|\mathrm{d}x\\ &\leqslant C(\lambda_1,C_1)\|u\|_1^2+C_1\|A^{1-\gamma}u\|_{L^{\frac{6}{3-2\gamma}}}\|u\|^p_{L^{\frac{6p}{3+2\gamma}}}\\ &\leqslant C(R,\beta_0,\|g\|,\lambda_1,C_1,C_2)+C_2\|u\|_{2-\gamma}\|u\|^p_{L^{\frac{6p}{3+2\gamma}}}\\ &\leqslant C(R,\beta_0,\|g\|,\lambda_1,C_1,C_2)+C_2\|u\|_{2-\gamma}\|u\|^p_{L^6}\\ &\leqslant C(R,\beta_0,\|g\|,\lambda_1,C_1,C_2)+C_2\|u\|_{2-\gamma}\|u\|^p_1\\ &\leqslant \frac{M_0}{4}\|u\|^2_{2-\gamma}+C(R,\beta_0,\|g\|,\lambda_1,C_1,C_2,M_0),\end{aligned}\tag{3.17}$$

其中 $2\leqslant p\leqslant p_\gamma=3+2\gamma$.

将上述估计代入 (3.16), 得到

$$\begin{aligned}&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\varepsilon(t)\langle\partial_t u, A^{1-\gamma}u\rangle)+\frac{M_0}{4}\|u\|^2_{2-\gamma}\\ \leqslant&\frac{1}{M_0}\|\partial_t u\|^2_\gamma+C(R,\beta_0,\|g\|,\lambda_1,C_1,C_2,M_0,L).\end{aligned}$$

因此,

$$\begin{aligned}&\int_t^{t+1}\|u(s)\|^2_{2-\gamma}\mathrm{d}s\\ \leqslant& C(R,\beta_0,\|g\|,\lambda_1,C_1,C_2,M_0,L)+\frac{1}{M_0}\int_t^{t+1}\|\partial_t u(s)\|^2_\gamma\mathrm{d}s\\ \leqslant& C(R,\beta_0,\|g\|,\lambda_1,C_1,C_2,M_0,L).\end{aligned}\tag{3.18}$$

利用嵌入 $L^{\frac{6}{3+2\gamma}}\hookrightarrow V_{-\gamma}$ 和 (3.18), 可得

$$\begin{aligned}\|f(u)\|^2_{-\gamma}&\leqslant C\|f(u)\|^2_{L^{\frac{6}{3+2\gamma}}}\\ &\leqslant C(\|u\|^2_{L^{\frac{6}{3+2\gamma}}}+\|u\|^{2p}_{L^{\frac{6p}{3+2\gamma}}})\\ &\leqslant C(\|u\|_1^2+\|u\|_1^{2p})\\ &\leqslant C(R,\beta_0,\|g\|,\lambda_1,C_2),\end{aligned}$$

因此,　$f(u)\in L^2([\tau,T];V_{-\gamma})$, 并且

$$\begin{aligned}\varepsilon^2(t)\|\partial_t^2u(t)\|^2_{-\gamma}&\leqslant M^2(\|u(t)\|_1^2)\|u(t)\|^2_{2-\gamma}+\|\partial_t u(t)\|^2_\gamma+\|f(u)\|^2_{-\gamma}+\|g\|^2_{-\gamma}\\ &\leqslant C(R,\beta_0,\|g\|,\lambda_1,C_2)(\|u(t)\|^2_{2-\gamma}+\|\partial_t u(t)\|^2_\gamma+\|g\|^2)\\ &\leqslant C(R,\beta_0,\|g\|,\lambda_1,C_2)(\|u(t)\|^2_{2-\gamma}+\|\partial_t u(t)\|^2_\gamma).\end{aligned}$$

再根据 (3.14) 和 (3.18), 可得

$$\partial_t^2u\in L^2([\tau,T];V_{-\gamma}).\tag{3.19}$$

由 (3.8), (3.13)–(3.15), (3.18)–(3.19), 可得估计 (3.1).

第三步 证明问题 (2.4)–(2.5) 的解在空间 $C([\tau,T];\mathcal{H}_t^1)\cap L^2([\tau,T];V_{2-\gamma}\times V_\gamma)$ 中的存在性.

设 $y_n=(u_n,\partial_t u_n)$ 是问题 (2.4)–(2.5) 的解. 易知估计 (3.1) 对 Galerkin 逼近序列 $\{y_n\}$ 成立. 因此, 存在二元组 $y=(u,\partial_t u)\in L^\infty([\tau,T];\mathcal{H}_t^1)\cap L^2([\tau,T];V_{2-\gamma}\times V_\gamma)$ 和 $\partial_t^2 u\in L^\infty([\tau,T];V_{-2\gamma})\cap L^2([\tau,T];V_{-\gamma})$, 使得

$$
\begin{aligned}
&(u_n,\partial_t u_n)\ 在\ L^\infty([\tau,T];\mathcal{H}_t^1)\ 中弱^*收敛于\ (u,\partial_t u),\\
&(u_n,\partial_t u_n)\ 在\ L^2([\tau,T];V_{2-\gamma}\times V_\gamma)\ 中弱收敛于\ (u,\partial_t u),\\
&\partial_t^2 u_n\ 在\ L^\infty([\tau,T];V_{-2\gamma})\ 中弱^*收敛于\ \partial_t^2 u,\\
&\partial_t^2 u_n\ 在\ L^2([\tau,T];V_{-\gamma})\ 中弱收敛于\ \partial_t^2 u.
\end{aligned}
$$

应用引理 2.2, 可得:

$$
\begin{aligned}
&当\ \eta:0<\eta\ll 1\ 时,\ (u_n,\partial_t u_n)\ 在\ C([\tau,T];V_{1-\eta}\times V_{-\eta})\ 中收敛于\ (u,\partial_t u),\\
&u_n\ 在\ L^2([\tau,T];V_1)\ 上收敛于\ u,\\
&且\ u_n(x,t)\ 在\ \Omega\times[\tau,T]\ 中几乎处处收敛于\ u(x,t),\\
&\partial_t u_n\ \ 在\ L^2([\tau,T];L^2(\Omega))\ 中收敛于\ \partial_t u,\\
&f(u_n)\ 在\ L^{1+\frac{1}{p}}([\tau,T];L^{1+\frac{1}{p}}(\Omega))\ 中收敛于\ f(u).
\end{aligned}
\tag{3.20}
$$

因此,

$$
\begin{aligned}
&\int_\tau^T |M(\|u_n(t)\|_1^2)-M(\|u(t)\|_1^2)|^2\mathrm{d}t\\
\leqslant&\int_\tau^T\Big(\int_0^1 |M'(\lambda\|u_n(t)\|_1^2+(1-\lambda)\|u(t)\|_1^2)|^2\mathrm{d}\lambda\mid\|u_n(t)\|_1^2-\|u(t)\|_1^2\mid\Big)^2\mathrm{d}t\\
\leqslant&\, C(R,\beta_0,\|g\|,\lambda_1,C_2)\int_\tau^T(\|u_n(t)\|_1+\|u(t)\|_1)^2\|u_n(t)-u(t)\|_1^2\mathrm{d}t\\
\leqslant&\, C(R,\beta_0,\|g\|,\lambda_1,C_2)\int_\tau^T\|u_n(t)-u(t)\|_1^2\mathrm{d}t\to 0.
\end{aligned}
$$

对于任意的 $\xi\in C_0^\infty(\Omega)$,

$$
\begin{aligned}
&\int_\tau^T\langle M(\|u_n(t)\|_1^2)Au_n-M(\|u(t)\|_1^2)Au,\xi\rangle\mathrm{d}t,\\
=&\int_\tau^T(M(\|u_n(t)\|_1^2)-M(\|u(t)\|_1^2))\langle Au_n,\xi\rangle\mathrm{d}t+\int_\tau^T M(\|u(t)\|_1^2)\langle Au_n-Au,\xi\rangle\mathrm{d}t\\
\leqslant&\, C(R,\beta_0,\|g\|,\lambda_1,C_2)(\|M(\|u_n(t)\|_1^2)-M(\|u(t)\|_1^2)\|_{L^2([0,T])}+\|u_n(t)-u(t)\|_{L^2([0,T];V_1)})\\
\to&\, 0.
\end{aligned}
$$

此外, 对于任意的 $\xi\in C_0^\infty(\Omega)$, 可得

$$\int_\tau^T\langle f(u_n)-f(u),\xi\rangle\mathrm{d}t,$$

$$
\begin{aligned}
&\leqslant C_2\int_\tau^T(1+\|u_n\|_1^{p-1}+\|u\|_1^{p-1})\|u_n-u\|_1\|\xi\|_1\\
&\leqslant C(R,\beta_0,\|g\|,\lambda_1,C_2)\|u_n-u\|_{L^2([\tau,T],V_1)}\to 0.
\end{aligned}
$$

综上所述，可得函数 $y=(u,\partial_t u)$ 是问题 (2.4)–(2.5) 的弱解并且满足估计 (3.1).

下面我们将证明问题 (2.4)–(2.5) 的解 $y=(u,\partial_t u)\in C([\tau,T];\mathcal{H}_t^1)$.

由于 $(u,\partial_t u)\in C([\tau,T];V_{1-\eta}\times V_{-\eta})\cap L^\infty(\tau,T;\mathcal{H}_t^1)$, 可知 $(u,\partial_t u)\in C_w([\tau,T];\mathcal{H}_t^1)$ 且

$$
\|(u,\partial_t u)\|_{\mathcal{H}_t^1}\leqslant\liminf_{s\to t}\|(u(s),\partial_t u(s))\|_{\mathcal{H}_s^1}.
$$

对于任意的 $t\in[\tau,T]$, 根据 (3.3) 可知

$$
\lim_{s\to t}E(u(s),\partial_t u(s))=E(u(t),\partial_t u(t)). \tag{3.21}
$$

根据 (3.21), 当 $s\to t$ 时，可得 $u(x,s)\to u(x,t)$ a.e. $x\in\Omega$. 应用引理 2.1, 注 1.1 和 Fatou 引理，可得

$$
\begin{aligned}
&\lim_{s\to t}2\langle g,u(s)\rangle=2\langle g,u(t)\rangle,\\
&\|(u(t),\partial_t u(t))\|_{\mathcal{H}_t^1}^2\leqslant\liminf_{s\to t}\|(u(s),\partial_t u(s))\|_{\mathcal{H}_s^1}^2,\\
&\int_0^{\|u(t)\|_1^2}M(r)\mathrm{d}r\leqslant\int_0^{\liminf\limits_{s\to t}\|u(s)\|_1^2}M(r)\mathrm{d}r\leqslant\liminf_{s\to t}\int_0^{\|u(s)\|_1^2}M(r)\mathrm{d}r,\\
&\int_\Omega(2F(u(t))+(\nu_M-3\beta_0)\lambda_1|u(t)|^2+2C(\beta_0))\mathrm{d}x\\
&\leqslant\liminf_{s\to t}\int_\Omega(2F(u(s))+(\nu_M-3\beta_0)\lambda_1|u(s)|^2+2C(\beta_0))\mathrm{d}x\\
&\leqslant\liminf_{s\to t}\int_\Omega 2F(u(s))\mathrm{d}x+(\nu_M-3\beta_0)\lambda_1\|u\|^2+2C(\beta_0)|\Omega|,
\end{aligned}
$$

即

$$
\int_\Omega 2F(u(t))\mathrm{d}x\leqslant\liminf_{s\to t}\int_\Omega 2F(u(s))\mathrm{d}x.
$$

由上述估计和 (3.21), 有

$$
\begin{aligned}
&\liminf_{s\to t}(\varepsilon(s)\|\partial_t u(s)\|^2)+\liminf_{s\to t}\Big(\int_0^{\|u(s)\|_1^2}M(r)\mathrm{d}r+2\langle F(u(s)),1\rangle\Big)\\
&\leqslant\lim_{s\to t}(\varepsilon(s)\|\partial_t u(s)\|^2+\int_0^{\|u(s)\|_1^2}M(r)\mathrm{d}r+2\langle F(u(s)),1\rangle)\\
&=\varepsilon(t)\|\partial_t u(t)\|^2+\int_0^{\|u(t)\|_1^2}M(r)\mathrm{d}r+2\langle F(u(t)),1\rangle\\
&\leqslant\varepsilon(t)\|\partial_t u(t)\|^2+\liminf_{s\to t}\int_0^{\|u(s)\|_1^2}M(r)\mathrm{d}r+\liminf_{s\to t}2\langle F(u(s)),1\rangle\\
&\leqslant\liminf_{s\to t}(\varepsilon(s)\|\partial_t u(s)\|^2)+\liminf_{s\to t}\Big(\int_0^{\|u(s)\|_1^2}M(r)\mathrm{d}r+2\langle F(u(s)),1\rangle\Big).
\end{aligned}
$$

因此

$$\varepsilon(t)\|\partial_t u(t)\|^2=\lim_{s\to t}\varepsilon(s)\|\partial_t u(s)\|^2. \tag{3.22}$$

同理可得

$$\int_0^{\|u(t)\|_1^2}M(r)\mathrm{d}r=\lim_{s\to t}\int_0^{\|u(s)\|_1^2}M(r)\mathrm{d}r.$$

进一步，根据 $M(\|u\|_1^2)\geqslant M_0$, 当 $s\to t$ 时，可得

$$0\leqslant M_0\mid \|u(t)\|_1^2-\|u(s)\|_1^2\mid\leqslant\Big|\int_{\|u(s)\|_1^2}^{\|u(t)\|_1^2}M(r)\mathrm{d}r\Big|\to 0,$$

即

$$\|u(t)\|_1^2=\lim_{s\to t}\|u(s)\|_1^2. \tag{3.23}$$

根据空间 $\mathcal{H}_t^1$ 是一致凸的, 联合 (3.22)–(3.23) 以及 $(u,\partial_t u)\in C_w([\tau,T];\mathcal{H}_t^1)$, 可得 $(u,\partial_t u)\in C([\tau,T];\mathcal{H}_t^1)$.

下面证明解在空间 $V_\gamma\times V_{-\gamma}$ 中的 Lipschitz 稳定性.

设 $y_i(t)$ $(i=1,2)$ 是问题 (2.4)–(2.5) 满足 $\|y_i(\tau)\|_{\mathcal{H}_\tau^1}\leqslant R$ $(i=1,2)$ 的解. 则 $\widetilde{y}=(\widetilde{u},\partial_t\widetilde{u})=y_1-y_2$ 满足

$$\varepsilon(t)\partial_t^2\widetilde{u}+\frac12 M_{12}A\widetilde{u}+\frac12(M_1-M_2)A(u_1+u_2)+A^\gamma\partial_t\widetilde{u}+f_1-f_2=0,$$
$$(x,t)\in\Omega\times[\tau,\infty), \tag{3.24}$$

$$\widetilde{u}|_{\partial\Omega}=0,\quad \widetilde{u}(x,\tau)=u_{1_0}(x)-u_{2_0}(x),\quad \partial_t\widetilde{u}(x,\tau)=u_{1_1}(x)-u_{2_1}(x),\quad x\in\Omega, \tag{3.25}$$

其中 $M_{12}=M_1+M_2$,$M_i=M(\|u_i\|_1^2)$, 且 $f_i=f(u_i)$, $i=1,2$.

在下面的估计中，我们选择 δ 为任意小的正数.

将 (3.24) 式与 $2A^{-\gamma}\partial_t\widetilde{u}+2\delta\widetilde{u}$ 作内积，可得

$$\begin{aligned}&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}K(\widetilde{u},\partial_t\widetilde{u})+\delta M_{12}\|\widetilde{u}\|_1^2+(2-2\delta\varepsilon(t))\|\partial_t\widetilde{u}\|^2+\delta(M_1-M_2)\langle A(u_1+u_2),\widetilde{u}\rangle\\&=\sum_{j=1}^4\Pi_j+2\delta\varepsilon'(t)\langle\partial_t\widetilde{u},\widetilde{u}\rangle+\varepsilon'(t)\|\partial_t\widetilde{u}\|_{-\gamma}^2,\end{aligned} \tag{3.26}$$

其中

$$K(\widetilde{u},\partial_t\widetilde{u})=2\delta\varepsilon(t)\langle\widetilde{u},\partial_t\widetilde{u}\rangle+\varepsilon(t)\|\partial_t\widetilde{u}\|_{-\gamma}^2+\frac12 M_{12}\|\widetilde{u}\|_{1-\gamma}^2+\delta\|\widetilde{u}\|_\gamma^2,$$

$$\Pi_1=(M'(\|u_1\|_1^2)\langle Au_1,\partial_t u_1\rangle+M'(\|u_2\|_1^2)\langle Au_2,\partial_t u_2\rangle)\|\widetilde{u}\|_{1-\gamma}^2,$$

$$\Pi_2=(M_1-M_2)\langle A(u_1+u_2),A^{-\gamma}\partial_t\widetilde{u}\rangle,$$

$$\Pi_3=-2\langle f(u_1)-f(u_2),A^{-\gamma}\partial_t\widetilde{u}\rangle,$$

$$\Pi_4=-2\langle f(u_1)-f(u_2),\delta\widetilde{u}\rangle.$$

由估计 (3.1) 和假设 (A_2), 有

$$\sum_{i=1}^{2}(M_i+|M_i'|)\leqslant C(R,\beta_0,\|g\|,\lambda_1,C_2), \tag{3.27}$$

$$|M_1-M_2|\leqslant C(R,\beta_0,\|g\|,\lambda_1,C_2)\|\widetilde{u}\|_1. \tag{3.28}$$

根据假设 (A_1) 中的 (1.4) 可知

$$2|\delta\varepsilon(t)\langle\widetilde{u},\partial_t\widetilde{u}\rangle|\leqslant 2\delta^2L\|\widetilde{u}\|_\gamma^2+\frac{\varepsilon(t)}{2}\|\partial_t\widetilde{u}\|_{-\gamma}^2.$$

则存在常数 μ_2,μ_3, 使得

$$\mu_2(\|\widetilde{u}(t)\|_\gamma^2+\varepsilon(t)\|\partial_t\widetilde{u}(t)\|_{-\gamma}^2)\leqslant K(\widetilde{u},\partial_t\widetilde{u})\leqslant\mu_3(\|\widetilde{u}(t)\|_\gamma^2+\varepsilon(t)\|\partial_t\widetilde{u}(t)\|_{-\gamma}^2), \tag{3.29}$$

其中 $\mu_2=\min\left\{\frac{1}{2},\delta-2\delta^2L\right\},\mu_3=\max\left\{\frac{3}{2},\delta+2\delta^2L+\frac{C(R,\beta_0,\|g\|,\lambda_1,C_2)}{2\lambda_1^{2\gamma-1}}\right\}$.

设

$$\psi_1(t)=\sum_{i=1}^{2}\|\partial_tu_i\|_\gamma^2,\quad \psi_2(t)=\sum_{i=1}^{2}\|u_i\|_{2-\gamma}^2. \tag{3.30}$$

根据 (3.1) 和内插不等式可知

$$\begin{aligned}
|2\delta\varepsilon'(t)\langle\widetilde{u},\partial_t\widetilde{u}\rangle|&\leqslant\frac{L}{2}\|\partial_t\widetilde{u}\|_{-\gamma}^2+2\delta^2L\|\widetilde{u}\|_\gamma^2,\\
&|\delta(M_1-M_2)\langle A(u_1+u_2),\widetilde{u}\rangle|\\
&\leqslant\delta\int_0^1|M'(\lambda\|u_1\|_1^2+(1-\lambda)\|u_2\|_1^2)|\mathrm{d}\lambda|\langle A(u_1+u_2),\widetilde{u}\rangle|^2\\
&\leqslant C(R,\beta_0,\|g\|,\lambda_1,C_2,\delta)(\|u_1\|_{2-\gamma}^2+\|u_2\|_{2-\gamma}^2)\|\widetilde{u}\|_\gamma^2\\
&=C(R,\beta_0,\|g\|,\lambda_1,C_2,\delta)\psi_2(t)\|\widetilde{u}\|_\gamma^2,\\
|\Pi_1|&\leqslant C(R,\beta_0,\|g\|,\lambda_1,C_2)(\|u_1\|_{2-\gamma}\|\partial_tu_1\|_\gamma+\|u_1\|_{2-\gamma}\|\partial_tu_2\|_\gamma)\|\widetilde{u}\|_{1-\gamma}^2\\
&\leqslant C(R,\beta_0,\|g\|,\lambda_1,C_2)(\|u_1\|_{2-\gamma}\|\partial_tu_1\|_\gamma+\|u_2\|_{2-\gamma}\|\partial_tu_2\|_\gamma)\|\widetilde{u}\|_{1-\gamma}^2\\
&\leqslant C(R,\beta_0,\|g\|,\lambda_1,C_2)(\psi_1(t)+\psi_2(t))\|\widetilde{u}\|_\gamma^2,\\
|\Pi_2|&\leqslant C(R,\beta_0,\|g\|,\lambda_1,C_2)\|\widetilde{u}\|_1((\|u_1\|_{2-\gamma}+\|u_2\|_{2-\gamma})\|\partial_t\widetilde{u}\|_{-\gamma})\\
&\leqslant\frac{\delta M_0}{4}\|\widetilde{u}\|_1^2+C(R,\beta_0,\|g\|,\lambda_1,C_2,M_0,\delta)\psi_2(t)\|\partial_t\widetilde{u}\|_{-\gamma}^2,\\
|\Pi_3|&\leqslant 2\int_\Omega|f(u_1)-f(u_2)|\cdot|A^{-\gamma}\partial_t\widetilde{u}|\mathrm{d}x\\
&\leqslant 2C_1\int_\Omega(1+|u_1|^{p-1}+|u_2|^{p-1})|\widetilde{u}||A^{-\gamma}\partial_t\widetilde{u}|\mathrm{d}x\\
&\leqslant 2C_1\Big(\int_\Omega(1+|u_1|^{p-1}+|u_2|^{p-1})^{\frac{p+1}{p-1}}\mathrm{d}x\Big)^{\frac{p-1}{p+1}}\Big(\int_\Omega|\widetilde{u}|^{p+1}\mathrm{d}x\Big)^{\frac{1}{p+1}}\\
&\quad\cdot\Big(\int_\Omega|A^{-\gamma}\partial_t\widetilde{u}|^{p+1}\mathrm{d}x\Big)^{\frac{1}{p+1}}\\
&\leqslant C_1(1+\|u_1\|_{L^{p+1}(\Omega)}^{p-1}+\|u_2\|_{L^{p+1}(\Omega)}^{p-1})(\|\widetilde{u}\|_{L^{p+1}(\Omega)}^2+\|A^{-\gamma}\partial_t\widetilde{u}\|_{L^{p+1}(\Omega)}^2)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\leqslant C(R,\beta_0,\|g\|,\lambda_1,C_1,C_2)(\|\widetilde{u}\|_{1-\eta}^2+\|\partial_t\widetilde{u}\|_{1-2\gamma-\eta}^2)\\
&\leqslant \delta\Big(\frac{M_0}{4}\|\widetilde{u}\|_1^2+\|\partial_t\widetilde{u}\|^2\Big)+C(R,\beta_0,\|g\|,\lambda_1,C_1,C_2,M_0,\delta)(\|\widetilde{u}\|_\gamma^2+\|\partial_t\widetilde{u}\|_{-\gamma}^2),\\
|\Pi_4|&\leqslant 2\int_\Omega |f(u_1)-f(u_2)|\cdot|\delta\widetilde{u}|\mathrm{d}x\\
&\leqslant 2C_1\delta\int_\Omega(1+|u_1|^{p-1}+|u_2|^{p-1})|\widetilde{u}|^2\mathrm{d}x\\
&\leqslant 2C_1\delta\Big(\int_\Omega(1+|u_1|^{p-1}+|u_2|^{p-1})^{\frac{p+1}{p-1}}\mathrm{d}x\Big)^{\frac{p-1}{p+1}}\Big(\int_\Omega|\widetilde{u}|^{p+1}\mathrm{d}x\Big)^{\frac{2}{p+1}}\\
&\leqslant 2C_1\delta(1+\|u_1\|_{L^{p+1}(\Omega)}^{p-1}+\|u_2\|_{L^{p+1}(\Omega)}^{p-1})(\|\widetilde{u}\|_{L^{p+1}(\Omega)}^2)\\
&\leqslant C(R,\beta_0,\|g\|,\lambda_1,C_1,C_2,\delta)\|\widetilde{u}\|_{1-\eta}^2\\
&\leqslant \frac{\delta M_0}{4}\|\widetilde{u}\|_1^2+C(R,\beta_0,\|g\|,\lambda_1,C_1,C_2,M_0,\delta)\|\widetilde{u}\|_\gamma^2,
\end{aligned}
$$

其中，当 $0<\eta\ll 1$ 时，我们使用了 Sobolev 嵌入： $V_{1-\eta}\hookrightarrow L^{p+1}(\Omega)$.

将以上估计代入 (3.26) 式，可得

$$
\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}K(\widetilde{u},\partial_t\widetilde{u})+k(\|\widetilde{u}\|_1^2+\|\partial_t\widetilde{u}\|^2)\\
&\leqslant C(R,\beta_0,\|g\|,\lambda_1,C_1,C_2,M_0,\delta)(1+\psi_1(t)+\psi_2(t))K(\widetilde{u},\partial_t\widetilde{u})\\
&=\widetilde{C}_0(1+\psi_1(t)+\psi_2(t))K(\widetilde{u},\partial_t\widetilde{u}),
\end{aligned}
\tag{3.31}
$$

其中 $k=\min\big\{\frac{5\delta M_0}{4},2-2\delta L-\delta\big\}$ 并且 $\widetilde{C}_0=C(R,\beta_0,\|g\|,\lambda_1,C_1,C_2,M_0,\delta)$.

将 (3.31) 式乘以 $\mathrm{e}^{-\widetilde{C}_0\int_\tau^t(1+\psi_1(r)+\psi_2(r))\mathrm{d}r}$ 并且在 $[\tau,T]$ 上积分，可得

$$
\begin{aligned}
&\mu_2(\|\widetilde{u}(t)\|_\gamma^2+\varepsilon(t)\|\partial_t\widetilde{u}(t)\|_{-\gamma}^2)+k\int_\tau^t \mathrm{e}^{-\widetilde{C}_0\int_\tau^s(1+\psi_1(r)+\psi_2(r))\mathrm{d}r}(\|\widetilde{u}(s)\|_1^2+\|\partial_t\widetilde{u}(s)\|^2)\mathrm{d}s\\
&\leqslant \mathrm{e}^{\widetilde{C}_0\int_\tau^t(1+\psi_1(r)+\psi_2(r))\mathrm{d}r}\mu_3(\|\widetilde{u}(\tau)\|_\gamma^2+\varepsilon(\tau)\|\partial_t\widetilde{u}(\tau)\|_{-\gamma}^2)\\
&\leqslant \mathrm{e}^{(\widetilde{C}_0+\widetilde{C}_0\widetilde{C}_1)(t-\tau)+\widetilde{C}_0\widetilde{C}_1}\mu_3(\|\widetilde{u}(\tau)\|_\gamma^2+\varepsilon(\tau)\|\partial_t\widetilde{u}(\tau)\|_{-\gamma}^2),
\end{aligned}
$$

其中

$$
\begin{aligned}
\int_\tau^t\|\partial_t u_i(s)\|_\gamma^2\mathrm{d}s&\leqslant C(R,\beta_0,\|g\|,\lambda_1,C_1,C_2,M_0,L)=\widetilde{C}_1,\\
\int_t^{t+1}\|u_i(s)\|_{2-\gamma}^2\mathrm{d}s&\leqslant C(R,\beta_0,\|g\|,\lambda_1,C_1,C_2,M_0,L)=\widetilde{C}_1.
\end{aligned}
$$

进一步，我们可以得到 (3.5) 式.

第四步 我们将证明问题 (2.4)–(2.5) 的解的耗散性.

设 $K_1(u,\partial_t u)=E(u,\partial_t u)+2\delta\varepsilon(t)\langle\partial_t u,u\rangle$.

根据估计

$$
2|\delta\varepsilon(t)\langle u,\partial_t u\rangle|\leqslant\frac{2\delta^2L}{\lambda_1}\|u\|_1^2+\frac{\varepsilon(t)}{2}\|\partial_t u\|^2
$$

和估计 (3.1) 式，则存在常数 μ_4,μ_5, 使得

$$
\mu_4\|(u,\partial_t u)\|_{\mathcal{H}_t^1}^2-C_3\leqslant K_1(u,\partial_t u)\leqslant\mu_5\|(u,\partial_t u)\|_{\mathcal{H}_t^1}^2+C(R,\beta_0,\|g\|,\lambda_1,C_2),\tag{3.32}
$$

其中 $\mu_4=\min\left\{\frac{1}{2},\frac{7\beta_0}{4}-\frac{2\delta^2L}{\lambda_1}\right\}$, $\mu_5=\max\left\{\frac{1}{2},\frac{2\delta^2L}{\lambda_1}\right\}$, $C_3=\frac{4}{\beta_0\lambda_1}\|g\|^2+3C(\beta_0)$.

将 (2.4) 式乘以 $2\partial_tu+2\delta u$ 并在 Ω 上积分，可得

$$\begin{aligned}&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(K_1(u,\partial_tu)+C_3)+\delta(K_1(u,\partial_tu)+C_3)+2\delta(M(\|u\|_1^2)\|u\|_1^2+\langle f(u),u\rangle)+2\delta\langle A^\gamma\partial_tu,u\rangle\\&+2\|\partial_tu\|_\gamma^2-(3\delta\varepsilon(t)\|\partial_tu\|^2+2(\delta\varepsilon'(t)+\delta^2\varepsilon(t))\langle u,\partial_tu\rangle+\varepsilon'(t)\|\partial_tu\|^2)\\=&\ \delta\int_0^{\|u\|_1^2}M(s)\mathrm{d}s+2\delta\langle F(u),1\rangle+\delta C_3.\end{aligned}\tag{3.33}$$

显然

$$2|\delta^2\varepsilon(t)\langle u,\partial_tu\rangle|\leqslant\frac{2\delta^3L}{\lambda_1}\|u\|_1^2+\frac{\delta L}{2}\|\partial_tu\|^2,\tag{3.34}$$

$$2|\delta\varepsilon'(t)\langle u,\partial_tu\rangle|\leqslant\frac{2\delta^{\frac{3}{2}}L}{\lambda_1}\|u\|_1^2+\frac{\delta^{\frac{1}{2}}L}{2}\|\partial_tu\|^2.\tag{3.35}$$

由估计 (3.1) 和 (3.9)–(3.10), 可得

$$\delta\int_0^{\|u\|_1^2}M(s)\mathrm{d}s+2\delta\langle F(u),1\rangle+\delta C_3\leqslant C(R,\beta_0,\|g\|,\lambda_1,C_2,C_3,\delta).$$

易知

$$|2\delta\langle A^\gamma\partial_tu,u\rangle|\leqslant\|\partial_tu\|_\gamma^2+\frac{\delta^2}{\lambda_1^{1-\gamma}}\|u\|_1^2,$$

$$\|\partial_tu\|_\gamma^2\geqslant\lambda_1^\gamma\|\partial_tu\|^2,$$

$$\begin{aligned}&2\delta M(\|u\|_1^2)\|u\|_1^2+2\delta\langle f(u),u\rangle\\\geqslant&\ 2\delta(\nu_M-\beta_0)\|u\|_1^2-2\delta C(\beta_0)+2\delta(-(\nu_M-3\beta_0))\|u\|_1^2-2\delta C(\beta_0)\\\geqslant&\ 4\delta\beta_0\|u\|_1^2-4\delta C(\beta_0).\end{aligned}$$

将上述估计代入 (3.33), 得到

$$\begin{aligned}&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(K_1(u,\partial_tu)+C_3)+\delta(K_1(u,\partial_tu)+C_3)+\Upsilon(u,\partial_tu)\\\leqslant&\ C(R,\beta_0,\|g\|,\lambda_1,C_2,C_3,\delta),\end{aligned}\tag{3.36}$$

其中

$$\begin{aligned}\Upsilon(u,\partial_tu)=&\left(4\delta\beta_0-\frac{2\delta^3L}{\lambda_1}-\frac{2\delta^{\frac{3}{2}}L}{\lambda_1}-\frac{\delta^2}{\lambda_1^{1-\gamma}}\right)\|u\|_1^2\\&+\left(\lambda_1^\gamma-\frac{\delta L}{2}-\frac{\delta^{\frac{1}{2}}L}{2}-4\delta L\right)\|\partial_tu\|^2\geqslant0.\end{aligned}$$

根据 (3.32) 和 (3.36), 可证得问题 (2.4)–(2.5) 解的耗散性.

第五步 证明问题 (2.4)–(2.5) 的解的全局正则性.

将 (2.4) 式关于 t 求导数，并且令 $v=\partial_tu$, 可得

$$\begin{aligned}&\varepsilon(t)\partial_t^2v+\varepsilon'(t)\partial_tv+M(\|u\|_1^2)Av+2M'(\|u\|_1^2)\langle A^{\frac{1}{2}}u,A^{\frac{1}{2}}\partial_tu\rangle Au\\&+A^\gamma\partial_tv+f'(u)v=0.\end{aligned}\tag{3.37}$$

将 (3.37) 式乘以 $A^{-\gamma}\partial_t v+\delta v$ 并且在 Ω 上积分，可得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}K_2(v(t),\partial_t v(t))+2\delta M_0\|v\|_1^2+2(1-\delta\varepsilon(t))\|\partial_t v\|^2\leqslant\sum_{i=1}^{5}\Gamma_i,\tag{3.38}$$

其中

$$\begin{aligned}K_2(v,\partial_t v)&=2\delta\varepsilon(t)\langle\partial_t v,v\rangle+\varepsilon(t)\|\partial_t v\|_{-\gamma}^2+M(\|u\|_1^2)\|v\|_{1-\gamma}^2+\delta\|v\|_\gamma^2,\\ \Gamma_1&=2\delta\varepsilon'(t)\langle\partial_t v,v\rangle,\\ \Gamma_2&=-2\langle\varepsilon'(t)\partial_t v,A^{-\gamma}\partial_t v+\delta v\rangle,\\ \Gamma_3&=2M'(\|u\|_1^2)\langle A^{\frac12}u,A^{\frac12}\partial_t u\rangle\|v\|_{1-\gamma}^2,\\ \Gamma_4&=-4M'(\|u\|_1^2)\langle A^{\frac12}u,A^{\frac12}\partial_t u\rangle\langle Au,A^{-\gamma}\partial_t v+\delta v\rangle,\\ \Gamma_5&=-2\langle f'(u)v,A^{-\gamma}\partial_t v+\delta v\rangle.\end{aligned}$$

根据 Hölder 不等式，可得

$$2|\delta\varepsilon(t)\langle\partial_t v,v\rangle|\leqslant2\delta^2L\|v\|_\gamma^2+\frac12\varepsilon(t)\|\partial_t v\|_{-\gamma}^2.$$

因此，存在常数 μ_6 和 μ_7, 使得

$$\mu_6(\|v\|_\gamma^2+\varepsilon(t)\|\partial_t v\|_{-\gamma}^2)\leqslant K_2(v,\partial_t v)\leqslant\mu_7(\|v\|_\gamma^2+\varepsilon(t)\|\partial_t v\|_{-\gamma}^2),\tag{3.39}$$

其中 $\mu_6=\min\left\{\frac12,\delta-2\delta^2L\right\}$, $\mu_7=\max\left\{\frac32,\delta+2\delta^2L+\frac{C(R,\beta_0,\|g\|,\lambda_1,C_2)}{\lambda_1^{2\gamma-1}}\right\}$.

记 $\psi_3(t)=\|\partial_t u\|_\gamma^2,\psi_4(t)=\|u\|_{2-\gamma}^2$. 利用估计 (3.1) 和 Poincaré 不等式，可得

$$\begin{aligned}|\Gamma_1|&\leqslant2\delta^{\frac32}L\|v\|_1^2+\frac{1}{2\lambda_1}\delta^{\frac12}L\|\partial_t v\|^2,\\ |\Gamma_2|&\leqslant2L\|\partial_t v\|_{-\gamma}^2+2\delta^{\frac32}L\|v\|_1^2+\frac{1}{2\lambda_1}\delta^{\frac12}L\|\partial_t v\|^2,\\ |\Gamma_3|&\leqslant C(R,\beta_0,\|g\|,\lambda_1,C_2,\delta)\|u\|_{2-\gamma}\|v\|_\gamma\|v\|_{1-\gamma}^2\\ &\leqslant C(R,\beta_0,\|g\|,\lambda_1,C_2,\delta)(\psi_3(t)+\psi_4(t))\|v\|_\gamma^2,\\ |\Gamma_4|&\leqslant C(R,\beta_0,\|g\|,\lambda_1,C_2)\|v\|_1\langle Au,A^{-\gamma}\partial_t v+\delta v\rangle\\ &\leqslant\frac{\delta M_0}{2}\|v\|_1^2+C(R,\beta_0,\|g\|,\lambda_1,C_2,M_0,\delta)\psi_4(t)(\|v\|_\gamma^2+\|\partial_t v\|_{-\gamma}^2).\end{aligned}\tag{3.40}$$

由于非线性项 f 的增长指数 $2\leqslant p\leqslant3+2\gamma$, 可知

$$\begin{aligned}|\Gamma_5|&\leqslant2C_1\int_\Omega(|1+|u|^{p-1})|v||\delta v+A^{-\gamma}\partial_t v|\mathrm{d}x\\ &\leqslant2C_1(1+\|u\|_{L^{p+1}}^{p-1})\|v\|_{L^{p+1}}(\delta\|v\|_{L^{p+1}}+\|A^{-\gamma}\partial_t v\|_{L^{p+1}})\\ &\leqslant C(R,\beta_0,\|g\|,\lambda_1,C_1,C_2,\delta)(\|v\|_{1-\delta}^2+\|\partial_t v\|_{1-2\gamma-\eta}^2)\\ &\leqslant\delta\|\partial_t v\|^2+\frac{\delta M_0}{2}\|v\|_1^2+C(R,\beta_0,\|g\|,\lambda_1,C_1,C_2,M_0,\delta)(\|v\|_\gamma^2+\|\partial_t v\|_{-\gamma}^2),\end{aligned}\tag{3.41}$$

其中，我们用到了假设 (A_3) 中的 (1.8) 和嵌入 $V_{1-\eta}\hookrightarrow L^{p+1}(\Omega)$ $(0<\eta\ll1)$.

将上述估计代入 (3.37), 可得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}K_2(v(t),\partial_t v(t))+k_1(\|v\|_1^2+\|\partial_t v\|^2)$$

$$\leqslant C(R,\beta_0,\|g\|,\lambda_1,C_1,C_2,M_0,\delta)(1+\psi_3(t)+\psi_4(t))K_2(v(t),\partial_t v(t)), \tag{3.42}$$

其中 $k_1=\min\left\{\delta M_0-4\delta^{\frac{3}{2}}L, 2-2\delta L-\frac{1}{\lambda_1}\delta^{\frac{1}{2}}L-\delta\right\}$.

对任意的 $t>\tau$, 将 (3.42) 式乘以 $(t-\tau)^2$, 可得

$$\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}((t-\tau)^2K_2(v(t),\partial_t v(t)))+k_1(t-\tau)^2(\|v\|_1^2+\|\partial_t v\|^2)\\
&\leqslant C(R,\beta_0,\|g\|,\lambda_1,C_1,C_2,M_0,\delta)(t-\tau)^2(1+\psi_3(t)+\psi_4(t))K_2(v(t),\partial_t v(t))\\
&\quad+2(t-\tau)\mu_7(\|v\|_\gamma^2+\varepsilon(t)\|\partial_t v\|_{-\gamma}^2)\\
&\leqslant C(R,\beta_0,\|g\|,\lambda_1,C_1,C_2,M_0,L)(1+\psi_3(t)+\psi_4(t))(t-\tau)^2K_2(v(t),\partial_t v(t))\\
&\quad+\frac{k_1}{2}(t-\tau)^2\|\partial_t v\|^2+C(R,\beta_0,\|g\|,\lambda_1,C_2,M_0,L,\delta),
\end{aligned}$$

其中，我们用到如下估计：

$$\begin{aligned}
2(t-\tau)\mu_7\varepsilon(t)\|\partial_t v\|_{-\gamma}^2&\leqslant 2(t-\tau)\mu_7C\|\partial_t v\|\varepsilon(t)\|\partial_t^2u\|_{-2\gamma}\\
&\leqslant\frac{k_1}{2}(t-\tau)^2\|\partial_t v\|^2+C(R,\beta_0,\|g\|,\lambda_1,C_2,M_0,L,\delta)
\end{aligned}$$

以及

$$\begin{aligned}
2(t-\tau)\mu_7\|v\|_\gamma^2&\leqslant\mu_7+\mu_7(t-\tau)^2\|\partial_t u\|_\gamma^2\|v\|_\gamma^2\\
&\leqslant\mu_7+\mu_7\psi_3(t)(t-\tau)^2K_2(v(t),\partial_t v(t)).
\end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}((t-\tau)^2K_2(v(t),\partial_t v(t)))+\frac{k_1}{2}(t-\tau)^2(\|v\|_1^2+\|\partial_t v\|^2)\\
&\leqslant C(R,\beta_0,\|g\|,\lambda_1,C_1,C_2,M_0,L,\delta)(1+\psi_3(t)+\psi_4(t))(t-\tau)^2K_2(v(t),\partial_t v(t))\\
&\quad+C(R,\beta_0,\|g\|,\lambda_1,C_2,M_0,L,\delta).
\end{aligned}\tag{3.43}$$

将 (3.43) 式乘以 $\mathrm{e}^{-C(R,\beta_0,\|g\|,\lambda_1,C_1,C_2,M_0,L,\delta)\int_\tau^t(1+\psi_3(r)+\psi_4(r))\mathrm{d}r}$ 并且在 $[\tau,t]$ 上积分，可得

$$\begin{aligned}
&(t-\tau)^2K_2(v(t),\partial_t v(t))\\
&\leqslant C(R,\beta_0,\|g\|,\lambda_1,C_2,M_0,L,\delta)\int_\tau^t\mathrm{e}^{C(R,\beta_0,\|g\|,\lambda_1,C_1,C_2,M_0,L,\delta)\int_s^t(1+\psi_3(r)+\psi_4(r))\mathrm{d}r}\mathrm{d}s\\
&\leqslant\frac{C(R,\beta_0,\|g\|,\lambda_1,C_2,M_0,L,\delta)}{C(R,\beta_0,\|g\|,\lambda_1,C_1,C_2,M_0,L,\delta)(1+C(R,\beta_0,\|g\|,\lambda_1,C_1,C_2,M_0,L))}\\
&\quad\cdot\mathrm{e}^{C(R,\beta_0,\|g\|,\lambda_1,C_1,C_2,M_0,L,\delta)(1+C(R,\beta_0,\|g\|,\lambda_1,C_1,C_2,M_0,L))((t-\tau)+C(R,\beta_0,\|g\|,\lambda_1,C_1,C_2,M_0,L))},
\end{aligned}$$

则

$$K_2(v(t),\partial_t v(t))\leqslant\frac{\widetilde{C}_3}{\widetilde{C}_2(1+\widetilde{C}_1)}\mathrm{e}^{\widetilde{C}_2\widetilde{C}_1}\frac{\mathrm{e}^{\widetilde{C}_2(1+\widetilde{C}_1)(t-\tau)}}{(t-\tau)^2},\quad\forall t>\tau, \tag{3.44}$$

其中

$$\widetilde{C}_1=C(R,\beta_0,\|g\|,\lambda_1,C_1,C_2,M_0,L),$$

$$\widetilde{C}_2 = C(R, \beta_0, \|g\|, \lambda_1, C_2, C_2, M_0, L, \delta),$$
$$\widetilde{C}_3 = C(R, \beta_0, \|g\|, \lambda_1, C_2, M_0, L, \delta).$$

对任意的 $\tau < a \leqslant t$, 将 (3.42) 式乘以 $\mathrm{e}^{-C(R,\delta_0,\|g\|,\lambda_1,C_1,C_2,M_0,\delta)\int_a^t(1+\psi_3(r)+\psi_4(r))\mathrm{d}r}$ 并在 $[a,t]$ 上积分，有

$$\begin{aligned}
&K_2(v(t),\partial_t v(t))\mathrm{e}^{-C(R,\beta_0,\|g\|,\lambda_1,C_1,C_2,M_0,\delta)\int_a^t(1+\psi_3(r)+\psi_4(r))\mathrm{d}r}\\
&\quad+k_1\int_a^t \mathrm{e}^{-C(R,\beta_0,\|g\|,\lambda_1,C_1,C_2,M_0,\delta)\int_a^s(1+\psi_3(r)+\psi_4(r))\mathrm{d}r}(\|v\|_1^2+\|\partial_t v\|^2)\mathrm{d}s\\
&=K_2(v(t),\partial_t v(t))\mathrm{e}^{-\widetilde{C}_0\int_a^t(1+\psi_3(r)+\psi_4(r))\mathrm{d}r}\\
&\quad+k_1\int_a^t \mathrm{e}^{-\overline{C}_0\int_a^s(1+\psi_3(r)+\psi_4(r))\mathrm{d}r}(\|v\|_1^2+\|\partial_t v\|^2)\mathrm{d}s\\
&\leqslant K_2(v(a),\partial_t v(a)),
\end{aligned}$$

其中

$$\widetilde{C}_0 = C(R, \beta_0, \|g\|, \lambda_1, C_1, C_2, M_0, \delta).$$

则

$$\begin{aligned}
&\int_a^t(\|v\|_1^2+\|\partial_t v\|^2)\mathrm{d}s\\
&\leqslant \frac{1}{k_1}\frac{\widetilde{C}_3}{\widetilde{C}_2(1+\widetilde{C}_1)}\mathrm{e}^{(\widetilde{C}_0+\widetilde{C}_2)\widetilde{C}_1}\frac{\mathrm{e}^{\widetilde{C}_2(1+\widetilde{C}_1)(a-\tau)}\mathrm{e}^{\widetilde{C}_0(1+\widetilde{C}_1)(t-a)}}{(a-\tau)^2},\quad \forall t>a.
\end{aligned}\tag{3.45}$$

将 (3.42) 式乘以 $\mathrm{e}^{-\widetilde{C}_0\int_\tau^t(1+\psi_3(r)+\psi_4(r))\mathrm{d}r}$ 并在 $[t,t+1]$ 上积分，可得

$$\begin{aligned}
&K_2(v(t+1),\partial_t v(t+1))\mathrm{e}^{-\widetilde{C}_0\int_\tau^{t+1}(1+\psi_3(r)+\psi_4(r))\mathrm{d}r}\\
&\quad+k_1\int_t^{t+1}\mathrm{e}^{-\widetilde{C}_0\int_\tau^s(1+\psi_3(r)+\psi_4(r))\mathrm{d}r}(\|v\|_1^2+\|\partial_t v\|^2)\mathrm{d}s\\
&\leqslant K_2(v(t),\partial_t v(t))\mathrm{e}^{-\widetilde{C}_0\int_\tau^t(1+\psi_3(r)+\psi_4(r))\mathrm{d}r}.
\end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned}
&\int_t^{t+1}(\|v\|_1^2+\|\partial_t v\|^2)\mathrm{d}s\\
&\leqslant \frac{1}{k_1}\frac{\widetilde{C}_3}{\widetilde{C}_2(1+\widetilde{C}_1)}\mathrm{e}^{(2\widetilde{C}_0+\widetilde{C}_2)\widetilde{C}_1+\widetilde{C}_0}\frac{\mathrm{e}^{\widetilde{C}_2(1+\widetilde{C}_1)(t-\tau)}}{(t-\tau)^2}.
\end{aligned}\tag{3.46}$$

联合 (3.44) 和 (3.46) 可得 (3.6) 式，即

$$\begin{aligned}
&\|\partial_t u\|_\gamma^2+\varepsilon(t)\|\partial_t^2 u\|_{-\gamma}^2+\int_t^{t+1}(\|\partial_t^2 u(s)\|^2+\|\partial_t u(s)\|_1^2)\mathrm{d}s\\
&\leqslant\Big(\frac{1}{\mu_6}+\frac{1}{k_1}\mathrm{e}^{2\widetilde{C}_0\widetilde{C}_1+\widetilde{C}_0}\Big)\frac{\widetilde{C}_3}{\widetilde{C}_2(1+\widetilde{C}_1)}\mathrm{e}^{\widetilde{C}_2\widetilde{C}_1}\frac{\mathrm{e}^{\widetilde{C}_2(1+\widetilde{C}_1)(t-\tau)}}{(t-\tau)^2},\quad\forall t>\tau.
\end{aligned}$$

将 (2.4) 式与 Au 作内积，且由 $M(\|u\|_1^2)\geqslant M_0$, 可得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|u\|_{1+\gamma}^2+2M_0\|u\|_2^2\leqslant 2\langle\varepsilon(t)\partial_t^2 u, Au\rangle+2\langle g, Au\rangle-2\langle f(u), Au\rangle.\tag{3.47}$$

易知

$$|2\varepsilon(t)\langle\partial_t^2 u, Au\rangle| \leqslant \frac{4L^2}{M_0}\|\partial_t^2 u\|^2 + \frac{M_0}{4}\|u\|_2^2, \tag{3.48}$$

$$|2\langle g, Au\rangle| \leqslant \frac{4}{M_0}\|g\|^2 + \frac{M_0}{4}\|u\|_2^2. \tag{3.49}$$

当 $p \leqslant 3+2\gamma$ 时，可知

$$\begin{aligned}|-2\langle f(u), Au\rangle| &\leqslant 2C_1(1+\|u\|_{L^{p+1}}^{p-1})\|\nabla u\|_{L^{p+1}}^2\\ &\leqslant C(R,\beta_0,\|g\|,\lambda_1,C_1,C_2)\|u\|_{2-\eta}^2\\ &\leqslant C(R,\beta_0,\|g\|,\lambda_1,C_1,C_2,M_0)\|u\|_1^2 + \frac{M_0}{4}\|u\|_2^2. \end{aligned}\tag{3.50}$$

综合上述估计，可得

$$\begin{aligned}&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|u\|_{1+\gamma}^2 + \frac{5M_0}{4}\|u\|_2^2\\ &\leqslant C(R,\beta_0,\|g\|,\lambda_1,C_1,C_2,M_0)\|u\|_{1+\gamma}^2 + C(\|g\|,M_0,L)(\|\partial_t^2 u\|^2+1). \end{aligned}\tag{3.51}$$

对任意的 $\tau < qa < a \leqslant t$, 满足 $a>0$ 且 $0<q<1$, 或者 $a<0$ 且 $q>1$, 将 (3.51) 式乘以 $(t-qa)^{\frac{1}{1-\gamma}}$, 可得

$$\begin{aligned}&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}((t-qa)^{\frac{1}{1-\gamma}}\|u\|_{1+\gamma}^2) + \frac{5M_0}{4}(t-qa)^{\frac{1}{1-\gamma}}\|u\|_2^2\\ &\leqslant C(R,\delta_0,\|g\|,\lambda_1,C_1,C_2,M_0)(t-qa)^{\frac{1}{1-\gamma}}\|u\|_{1+\gamma}^2 + \frac{1}{1-\gamma}(t-qa)^{\frac{\gamma}{1-\gamma}}\|u\|_{1+\gamma}^2\\ &\quad + C(\|g\|,M_0,L)(t-qa)^{\frac{1}{1-\gamma}}(\|\partial_t^2 u\|^2+1)\\ &\leqslant C(R,\beta_0,\|g\|,\lambda_1,C_1,C_2,M_0)(t-qa)^{\frac{1}{1-\gamma}}\|u\|_{1+\gamma}^2\\ &\quad + C(\|g\|,M_0,L)(t-qa)^{\frac{1}{1-\gamma}}(\|\partial_t^2 u\|^2+1) + \frac{(t-qa)^{\frac{2\gamma-1}{1-\gamma}}}{M_0(1-\gamma)^2}\|u\|_1^2 + \frac{M_0}{4}(t-qa)^{\frac{1}{1-\gamma}}\|u\|_2^2, \end{aligned}$$

其中

$$\frac{1}{1-\gamma}(t-qa)^{\frac{\gamma}{1-\gamma}}\|u\|_{1+\gamma}^2 \leqslant \frac{M_0}{4}(t-qa)^{\frac{1}{1-\gamma}}\|u\|_2^2 + \frac{(t-qa)^{\frac{2\gamma-1}{1-\gamma}}}{M_0(1-\gamma)^2}\|u\|_1^2.$$

因此

$$\begin{aligned}&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}((t-qa)^{\frac{1}{1-\gamma}}\|u\|_{1+\gamma}^2) + M_0(t-qa)^{\frac{1}{1-\gamma}}\|u\|_2^2\\ &\leqslant \widetilde{C}_4(t-qa)^{\frac{1}{1-\gamma}}\|u\|_{1+\gamma}^2 + \widetilde{C}_5(t-qa)^{\frac{1}{1-\gamma}}(\|\partial_t^2 u\|^2+1) + \widetilde{C}_6\frac{(t-qa)^{\frac{2\gamma-1}{1-\gamma}}}{M_0(1-\gamma)^2}, \end{aligned}\tag{3.52}$$

其中

$$\begin{aligned}\widetilde{C}_4 &= C(R,\beta_0,\|g\|,\lambda_1,C_1,C_2,M_0),\\ \widetilde{C}_5 &= C(\|g\|,M_0,L),\\ \widetilde{C}_6 &= C(R,\beta_0,\|g\|,\lambda_1,C_2). \end{aligned}$$

将 (3.52) 式乘以 $\mathrm{e}^{-\widetilde{C}_4(t-qa)}$ 并且在 $[qa,t]$ 上积分，可得

$$(t-qa)^{\frac{1}{1-\gamma}}\|u\|_{1+\gamma}^2$$

$$\leqslant \widetilde{C}_5 \mathrm{e}^{\widetilde{C}_4(t-qa)}(t-qa)^{\frac{2-\gamma}{1-\gamma}} + \frac{\widetilde{C}_6}{M_0\gamma(1-\gamma)}\mathrm{e}^{\widetilde{C}_4(t-qa)}(t-qa)^{\frac{\gamma}{1-\gamma}}$$
$$+ \widetilde{C}_5 \mathrm{e}^{\widetilde{C}_4(t-qa)}(t-qa)^{\frac{1}{1-\gamma}} \cdot \frac{1}{k_1}\frac{\widetilde{C}_3}{\widetilde{C}_2(1+\widetilde{C}_1)}\mathrm{e}^{(\widetilde{C}_0+\widetilde{C}_2)\widetilde{C}_1}\frac{\mathrm{e}^{\widetilde{C}_2(1+\widetilde{C}_1)(qa-\tau)}\mathrm{e}^{\widetilde{C}_0(1+\widetilde{C}_1)(t-qa)}}{(qa-\tau)^2},$$

即

$$\begin{aligned}\|u(t)\|_{1+\gamma}^2 \leqslant{}& \widetilde{C}_5 \mathrm{e}^{\widetilde{C}_4(t-qa)}(t-qa) + \frac{\widetilde{C}_6}{M_0\gamma(1-\gamma)}\mathrm{e}^{\widetilde{C}_4(t-qa)}(t-qa)^{-1}\\ &+ \widetilde{C}_5 \mathrm{e}^{\widetilde{C}_4(t-qa)}\frac{\widetilde{C}_3}{k_1\widetilde{C}_2(1+\widetilde{C}_1)}\mathrm{e}^{(\widetilde{C}_0+\widetilde{C}_2)\widetilde{C}_1}\frac{\mathrm{e}^{\widetilde{C}_2(1+\widetilde{C}_1)(qa-\tau)}\mathrm{e}^{\widetilde{C}_0(1+\widetilde{C}_1)(t-qa)}}{(qa-\tau)^2},\\ &t > qa. \end{aligned}\tag{3.53}$$

将 (3.51) 式乘以 $\mathrm{e}^{-\widetilde{C}_4(t-a)}$ 并且在 $[a,t]$ 上积分，可得

$$\begin{aligned}&\mathrm{e}^{-\widetilde{C}_4(t-a)}\|u(t)\|_{1+\gamma}^2 + \frac{5M_0}{4}\int_a^t \mathrm{e}^{-\widetilde{C}_4(s-a)}\|u\|_2^2\mathrm{d}s\\ &\leqslant \|u(a)\|_{1+\gamma}^2 + \widetilde{C}_5\int_a^t \mathrm{e}^{-\widetilde{C}_4(s-a)}(\|\partial_t^2 u\|^2+1)\mathrm{d}s.\end{aligned}$$

因此，当 $t > a$,

$$\begin{aligned}&\int_a^t \|u\|_2^2\mathrm{d}s\\ &\leqslant \frac{4}{5M_0}\mathrm{e}^{\widetilde{C}_4(t-a)}\Big(\widetilde{C}_5\mathrm{e}^{\widetilde{C}_4(a-qa)}(a-qa) + \frac{\widetilde{C}_6}{M_0\gamma(1-\gamma)}\mathrm{e}^{\widetilde{C}_4(a-qa)}(a-qa)^{-1}\\ &\quad + \widetilde{C}_5\mathrm{e}^{\widetilde{C}_4(a-qa)}\frac{\widetilde{C}_3}{k_1\widetilde{C}_2(1+\widetilde{C}_1)}\mathrm{e}^{(\widetilde{C}_0+\widetilde{C}_2)\widetilde{C}_1}\frac{\mathrm{e}^{\widetilde{C}_2(1+\widetilde{C}_1)(qa-\tau)}\mathrm{e}^{\widetilde{C}_0(1+\widetilde{C}_1)(a-qa)}}{(qa-\tau)^2}\\ &\quad + (t-a) + \frac{1}{k_1}\frac{\widetilde{C}_3}{\widetilde{C}_2(1+\widetilde{C}_1)}\mathrm{e}^{(\widetilde{C}_0+\widetilde{C}_2)\widetilde{C}_1}\frac{\mathrm{e}^{\widetilde{C}_2(1+\widetilde{C}_1)(a-\tau)}\mathrm{e}^{\widetilde{C}_0(1+\widetilde{C}_1)(t-a)}}{(a-\tau)^2}\Big).\end{aligned}\tag{3.54}$$

将 (3.51) 式乘以 $\mathrm{e}^{-\widetilde{C}_4(t-\tau)}$ 并且在 $[t,t+1]$ 上积分，可得

$$\begin{aligned}&\mathrm{e}^{-\widetilde{C}_4(t+1-\tau)}\|u(t+1)\|_{1+\gamma}^2 + \frac{5M_0}{4}\int_t^{t+1} \mathrm{e}^{-\widetilde{C}_4(s-\tau)}\|u\|_2^2\mathrm{d}s\\ &\leqslant \|u(t)\|_{1+\gamma}^2\mathrm{e}^{-\widetilde{C}_4(t-\tau)} + \widetilde{C}_5\int_t^{t+1} \mathrm{e}^{-\widetilde{C}_4(s-\tau)}(\|\partial_t^2 u\|^2+1)\mathrm{d}s.\end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned}\int_{t+1}^t \|u\|_2^2\mathrm{d}s \leqslant{}& \frac{4}{5M_0}\mathrm{e}^{-\widetilde{C}_4}\Big(\widetilde{C}_5\mathrm{e}^{\widetilde{C}_4(t-qa)}(t-qa) + \frac{\widetilde{C}_6}{M_0\gamma(1-\gamma)}\mathrm{e}^{\widetilde{C}_4(t-qa)}(t-qa)^{-1}\\ &+ \widetilde{C}_5\mathrm{e}^{\widetilde{C}_4(t-qa)}\frac{\widetilde{C}_3}{k_1\widetilde{C}_2(1+\widetilde{C}_1)}\mathrm{e}^{(\widetilde{C}_0+\widetilde{C}_2)\widetilde{C}_1}\frac{\mathrm{e}^{\widetilde{C}_2(1+\widetilde{C}_1)(qa-\tau)}\mathrm{e}^{\widetilde{C}_0(1+\widetilde{C}_1)(t-qa)}}{(qa-\tau)^2}\\ &+ \widetilde{C}_5 + \widetilde{C}_5\Big(\frac{1}{k_1}\frac{\widetilde{C}_3}{\widetilde{C}_2(1+\widetilde{C}_1)}\mathrm{e}^{(2\widetilde{C}_0+\widetilde{C}_2)\widetilde{C}_1+\widetilde{C}_0}\frac{\mathrm{e}^{\widetilde{C}_2(1+\widetilde{C}_1)(t-\tau)}}{(t-\tau)^2}\Big)\Big).\end{aligned}\tag{3.55}$$

根据 (3.53) 和 (3.55), 可证得 (3.7) 成立.

定理 3.2 设条件 (A_1)–(A_5) 成立. 如果 $y_1=(u_1,\partial_t u_1)$, $y_2=(u_2,\partial_t u_2)$ 是问题 (2.4)–(2.5) 分别关于初值 y_{1_0} 和 y_{2_0} 的两个解, 则对任意的 $\tau<T$, 有

$$\|y_1(t)-y_2(t)\|^2_{\mathcal{H}^1_t}\leqslant\frac{\overline{C}_9}{\overline{C}_8}\mathrm{e}^{\frac{2\widetilde{C}_{10}}{\widetilde{C}_8}\sqrt{\widetilde{C}_1(t-\tau)}}\|y_{1_0}-y_{2_0}\|^2_{\mathcal{H}^1_\tau},\quad\forall t\in[\tau,T].\tag{3.56}$$

证　设 $\widetilde{y}=y_1-y_2$, 则 $\widetilde{y}=(\widetilde{u},\partial_t\widetilde{u})$ 满足

$$\varepsilon(t)\partial_t^2\widetilde{u}+\frac{M_{12}}{2}A\widetilde{u}+\frac{M_1-M_2}{2}A(u_1+u_2)+A^\gamma\partial_t\widetilde{u}+f_1-f_2=0,\tag{3.57}$$

$$\widetilde{u}|_{\partial\Omega}=0,\ \widetilde{u}(x,\tau)=u_{1_0}(x)-u_{2_0}(x),\ \partial_t\widetilde{u}(x,\tau)=u_{1_1}(x)-u_{2_1}(x),\quad x\in\Omega,\tag{3.58}$$

其中 $x\in\Omega,\ t\in[\tau,\infty),\ M_{12}=M_1+M_2,\ M_i=M(\|u_i\|_1^2),\ f_i=f(u_i),\ i=1,2.$

将 (3.57) 式与 $\partial_t\widetilde{u}$ 作内积, 可得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}K_3(\widetilde{u},\partial_t\widetilde{u})+2\|\partial_t\widetilde{u}\|^2_\gamma=\sum_{i=1}^3\Lambda_i+\varepsilon'(t)\|\partial_t\overline{u}\|^2,\tag{3.59}$$

其中

$$\begin{aligned}K_3(\widetilde{u},\partial_t\widetilde{u})&=\varepsilon(t)\|\partial_t\widetilde{u}\|^2+\frac12M_{12}\|\widetilde{u}\|_1^2,\\ \Lambda_1&=(M'(\|u_1\|_1^2)\langle Au_1,\partial_tu_1\rangle+M'(\|u_2\|_1^2)\langle Au_2,\partial_tu_2\rangle)\|\widetilde{u}\|_1^2,\\ \Lambda_2&=-(M_1-M_2)\langle A(u_1+u_2),\partial_t\widetilde{u}\rangle,\\ \Lambda_3&=-2\langle f(u_1)-f(u_2),\partial_t\widetilde{u}\rangle.\end{aligned}$$

因此, 存在常数 μ_8,μ_9, 使得

$$\mu_8\|(\widetilde{u},\partial_t\widetilde{u})\|^2_{\mathcal{H}^1_t}\leqslant K_3(\widetilde{u},\partial_t\widetilde{u})\leqslant\mu_9\|(\widetilde{u},\partial_t\widetilde{u})\|^2_{\mathcal{H}^1_t},\tag{3.60}$$

其中 $\mu_8=\min\{1,M_0\},\mu_9=\max\{1,C(R,\beta_0,\|g\|,\lambda_1,C_2)\}$.

记

$$\psi_2(t)=\sum_{i=1}^2\|u_i\|^2_{2-\gamma},\quad\psi_5(t)=\|\partial_tu_1\|^2_\gamma,\quad\psi_6(t)=\|\partial_tu_2\|^2_\gamma.$$

根据 (3.1) 式, 可得

$$\begin{aligned}|\Lambda_1|&\leqslant C(R,\beta_0,\|g\|,\lambda_1,C_2)(|\langle Au_1,\partial_tu_1\rangle|+|\langle Au_2,\partial_tu_2\rangle|)\|\widetilde{u}\|_1^2\\&\leqslant C(R,\beta_0,\|g\|,\lambda_1,C_2)(\|u_1\|_{2-\gamma}\|\partial_tu_1\|_\gamma+\|u_2\|_{2-\gamma}\|\partial_tu_2\|_\gamma)\|\widetilde{u}\|_1^2\\&\leqslant C(R,\beta_0,\|g\|,\lambda_1,C_2)(\psi_5(t)+\psi_6(t)+\psi_2(t))\|\widetilde{u}\|_1^2\end{aligned}$$

和

$$\begin{aligned}|\Lambda_2|&\leqslant C(R,\beta_0,\|g\|,\lambda_1,C_2)\|\widetilde{u}\|_1(\|u_1\|_{2-\gamma}+\|u_2\|_{2-\gamma})\cdot\|\partial_t\widetilde{u}\|_\gamma\\&\leqslant\frac12\|\partial_t\widetilde{u}\|^2_\gamma+C(R,\beta_0,\|g\|,\lambda_1,C_2)(\|u_1\|_{2-\gamma}+\|u_2\|_{2-\gamma})^2\cdot\|\widetilde{u}\|_1^2\\&\leqslant\frac12\|\partial_t\widetilde{u}\|^2_\gamma+C(R,\beta_0,\|g\|,\lambda_1,C_2)\psi_2(t)\|\widetilde{u}\|_1^2.\end{aligned}$$

将上述估计代入 (3.59) 可得

$$\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}K_3(\widetilde{u},\partial_t\widetilde{u})+\frac{3}{2}\|\partial_t\widetilde{u}\|_\gamma^2\\
&\leqslant C(R,\beta_0,\|g\|,\lambda_1,C_2)(\psi_5(t)+\psi_6(t)+\psi_2(t))\|\widetilde{u}\|_1^2+\Lambda_3\\
&\leqslant C(R,\delta_0,\|g\|,\lambda_1,C_2)(\psi_5(t)+\psi_6(t)+\psi_2(t))(\|\widetilde{u}\|_1^2+\varepsilon(t)\|\partial_t\widetilde{u}\|^2)+\Lambda_3\\
&\leqslant C(R,\delta_0,\|g\|,\lambda_1,C_2)(\psi_5(t)+\psi_6(t)+\psi_2(t))\frac{1}{\mu_8}K_3(\widetilde{u},\partial_t\widetilde{u})+\Lambda_3\\
&=\widetilde{C_7}(\psi_5(t)+\psi_6(t)+\psi_2(t))K_3(\widetilde{u},\partial_t\widetilde{u})+\Lambda_3,
\end{aligned}\tag{3.61}$$

其中 $\widetilde{C_7}=C(R,\beta_0,\|g\|,\lambda_1,C_2,M_0)$.

将 (3.61) 式乘以 $\mathrm{e}^{-\widetilde{C}_7\int_\tau^t(\psi_5(r)+\psi_6(r)+\psi_2(r))\mathrm{d}r}$ 并且在 $[\tau,t]$ 上积分，可得

$$\begin{aligned}
&\mathrm{e}^{-\widetilde{C}_7\int_\tau^t(\psi_5(r)+\psi_6(r)+\psi_2(r))\mathrm{d}r}\mu_8(\|\widetilde{u}\|_1^2+\varepsilon(t)\|\partial_t\widetilde{u}\|^2)\\
&+\frac{3}{2}\int_\tau^t\mathrm{e}^{-\widetilde{C}_7\int_\tau^s(\psi_5(r)+\psi_6(r)+\psi_2(r))\mathrm{d}r}\|\partial_t\widetilde{u}\|_\gamma^2\mathrm{d}s\\
&\leqslant\mu_9(\|\widetilde{u}(\tau)\|_1^2+\varepsilon(\tau)\|\partial_t\widetilde{u}(\tau)\|^2)+\int_\tau^t\mathrm{e}^{-\widetilde{C}_7\int_\tau^s(\psi_5(r)+\psi_6(r)+\psi_2(r))\mathrm{d}r}\Lambda_3\mathrm{d}s.
\end{aligned}$$

进一步，当 $2\leqslant p\leqslant p_\gamma=3+2\gamma$ 时，我们估计 Λ_3. 利用分部积分，可得

$$\begin{aligned}
\Lambda_3&=-2\int_\Omega(f(u_1)-f(u_2))\partial_t\widetilde{u}\mathrm{d}x\\
&=-2\int_\Omega f'(u_1+\theta(u_2-u_1))\widetilde{u}\partial_t\widetilde{u}\mathrm{d}x\\
&=-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_\Omega f'(u_1+\theta(u_2-u_1))\widetilde{u}^2\mathrm{d}x+\int_\Omega f_t'(u_1+\theta(u_2-u_1))\widetilde{u}^2\mathrm{d}x,
\end{aligned}$$

其中 $\theta\in[0,1]$. 因此

$$\begin{aligned}
&-2\int_\tau^t\int_\Omega(f(u_1)-f(u_2))\partial_t\widetilde{u}\mathrm{d}x\mathrm{d}r\\
&=-\int_\Omega f'(u_1+\theta(u_2-u_1))\widetilde{u}^2\mathrm{d}x\mid_\tau^t+\int_\tau^t\int_\Omega f_t'(u_1+\theta(u_2-u_1))\widetilde{u}^2\mathrm{d}x\mathrm{d}r.
\end{aligned}\tag{3.62}$$

根据 Hölder 不等式，可得

$$\begin{aligned}
&-\int_\Omega f'(u_1(t)+\theta(u_2(t)-u_1(t)))\widetilde{u}^2\mathrm{d}x\\
&\leqslant C_1\int_\Omega(1+|u_1(t)|^{p-1}+|u_2(t)|^{p-1})|\widetilde{u}(t)|^2\mathrm{d}x\\
&\leqslant C_1(1+\|u_1(t)\|_{L^{p+1}}^{p-1}+\|u_2(t)\|_{L^{p+1}}^{p-1})\|\widetilde{u}(t)\|_{L^{p+1}}^2\\
&\leqslant C_2(1+\|u_1(t)\|_1^{p-1}+\|u_2(t)\|_1^{p-1})\|\widetilde{u}(t)\|_{1-\eta}^2\\
&\leqslant\delta\|\widetilde{u}\|_1^2+C(R,\beta_0,\|g\|,\lambda_1,C_2,\delta)\|\widetilde{u}(t)\|_\gamma^2\\
&\leqslant\delta\|\widetilde{u}\|_1^2+\frac{\mu_3}{\mu_2}C(R,\beta_0,\|g\|,\lambda_1,C_2,\delta)\mathrm{e}^{(\widetilde{C}_0+\widetilde{C}_0\widetilde{C}_1)(t-\tau)+\widetilde{C}_0\widetilde{C}_1}(\|\widetilde{u}(\tau)\|_\gamma^2+\varepsilon(\tau)\|\partial_t\widetilde{u}(\tau)\|_{-\gamma}^2),
\end{aligned}$$

其中，我们使用了 Sobolev 嵌入： $V_{1-\eta}\hookrightarrow L^{p+1}(\Omega)$ $(0<\eta\ll 1)$, 并选取正常数 δ 任意

小. 同理可得

$$\int_\Omega f'(u_1(\tau)+\theta(u_2(\tau)-u_1(\tau)))\widetilde{u}(\tau)^2\mathrm{d}x \leqslant C(R,C_2)\|\widetilde{u}(\tau)\|_1^2.$$

根据 Hölder 不等式，可得

$$\begin{aligned}
&\int_\tau^t\int_\Omega f_t'(u_1+\theta(u_2-u_1))\widetilde{u}^2\mathrm{d}x\mathrm{d}r\\
&\leqslant C_0\int_\tau^t\int_\Omega(1+|u_1|^{p-2}+|u_2|^{p-2})(|\partial_t u_1|+|\partial_t u_2|)|\widetilde{u}|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}r\\
&\leqslant C_0\int_\tau^t(1+\|u_1\|_{L^6}^{p-2}+\|u_2\|_{L^6}^{p-2})(\|\partial_t u_1\|_{L^{\frac{6}{6-p}}}+\|\partial_t u_2\|_{L^{\frac{6}{6-p}}})\|\widetilde{u}\|_{L^6}^2\mathrm{d}r\\
&\leqslant C_2\int_\tau^t(1+\|u_1\|_1^{p-2}+\|u_2\|_1^{p-2})\cdot(\|\partial_t u_1\|_{L^{\frac{6}{3-2\gamma}}}+\|\partial_t u_2\|_{L^{\frac{6}{3-2\gamma}}})\|\widetilde{u}\|_1^2\mathrm{d}r\\
&\leqslant C(R,\beta_0,\|g\|,\lambda_1,C_1,C_2)\int_\tau^t(\sqrt{\psi_5(r)}+\sqrt{\psi_6(r)})\|\widetilde{u}(r)\|_1^2\mathrm{d}r,
\end{aligned}$$

其中 $\frac{p-2}{6}+\frac{6-p}{6}+\frac{1}{3}=1$ 并且当 $p\leqslant 3+2\gamma$ 时，$\frac{6}{6-p}\leqslant\frac{6}{3-2\gamma}$.

基于上述估计，可知

$$\begin{aligned}
&(\mu_8-\delta\mathrm{e}^{\widetilde{C}_7\widetilde{C}_1+\widetilde{C}_7\widetilde{C}_1(T-\tau)})(\|\widetilde{u}\|_1^2+\varepsilon(t)\|\partial_t\widetilde{u}\|^2)+\int_\tau^t\mathrm{e}^{\widetilde{C}_7\int_s^t(\psi_5(r)+\psi_6(r)+\psi_2(r))\mathrm{d}r}\|\partial_t\widetilde{u}\|_\gamma^2\mathrm{d}r\\
\leqslant\,&(C(R,C_2)+\mu_9)\mathrm{e}^{\widetilde{C}_7\int_\tau^t(\psi_5(r)+\psi_6(r)+\psi_2(r))\mathrm{d}r}(\|\widetilde{u}(\tau)\|_1^2+\varepsilon(\tau)\|\partial_t\widetilde{u}(\tau)\|^2)\\
&+\frac{\mu_3}{\mu_2}C(R,\beta_0,\|g\|,\lambda_1,C_2,\delta)\mathrm{e}^{(\widetilde{C}_0+\widetilde{C}_0\widetilde{C}_1+\widetilde{C}_7\widetilde{C}_1)(T-\tau)+\widetilde{C}_0\widetilde{C}_1+\widetilde{C}_7\widetilde{C}_1}(\|\widetilde{u}(\tau)\|_\gamma^2+\varepsilon(\tau)\|\partial_t\widetilde{u}(\tau)\|_{-\gamma}^2)\\
&+C(R,\beta_0,\|g\|,\lambda_1,C_1,C_2)\mathrm{e}^{\widetilde{C}_7\int_\tau^t(\psi_5(r)+\psi_6(r)+\psi_2(r))\mathrm{d}r}\\
&\cdot\int_\tau^t(\sqrt{\psi_5(r)}+\sqrt{\psi_6(r)})(\|\widetilde{u}(r)\|_1^2+\varepsilon(r)\|\partial_t\widetilde{u}(r)\|^2)\mathrm{d}r\\
\leqslant\,&(C(R,C_2)+\mu_9)\mathrm{e}^{\widetilde{C}_7\widetilde{C}_1+\widetilde{C}_7\widetilde{C}_1(T-\tau)}(\|\widetilde{u}(\tau)\|_1^2+\varepsilon(\tau)\|\partial_t\widetilde{u}(\tau)\|^2)\\
&+\frac{\mu_3\lambda}{\mu_2}C(R,\beta_0,\|g\|,\lambda_1,C_2,\delta)\mathrm{e}^{(\widetilde{C}_0+\widetilde{C}_0\widetilde{C}_1+\widetilde{C}_7\widetilde{C}_1)(T-\tau)+\widetilde{C}_0\widetilde{C}_1+\widetilde{C}_7\widetilde{C}_1}(\|\widetilde{u}(\tau)\|_1^2+\varepsilon(\tau)\|\partial_t\widetilde{u}(\tau)\|^2)\\
&+C(R,\beta_0,\|g\|,\lambda_1,C_1,C_2)\mathrm{e}^{\widetilde{C}_7\widetilde{C}_1+\widetilde{C}_7\widetilde{C}_1(T-\tau)}\\
&\cdot\int_\tau^t(\sqrt{\psi_5(r)}+\sqrt{\psi_6(r)})(\|\widetilde{u}(r)\|_1^2+\varepsilon(r)\|\partial_t\widetilde{u}(r)\|^2)\mathrm{d}r\\
\leqslant\,&\widetilde{C}_9(\|\widetilde{u}(\tau)\|_1^2+\varepsilon(\tau)\|\partial_t\widetilde{u}(\tau)\|^2)\\
&+\widetilde{C}_{10}\int_\tau^t(\sqrt{\psi_5(r)}+\sqrt{\psi_6(r)})(\|\widetilde{u}(r)\|_1^2+\varepsilon(r)\|\partial_t\widetilde{u}(r)\|^2)\mathrm{d}r,
\end{aligned}\tag{3.63}$$

其中

$$\begin{aligned}
&\lambda=\max\Big\{\frac{1}{\lambda_1^{1-\gamma}},\frac{1}{\lambda_1^\gamma}\Big\},\\
&\widetilde{C}_8=\mu_8-\delta\mathrm{e}^{\widetilde{C}_7\widetilde{C}_1+\widetilde{C}_7\widetilde{C}_1(T-\tau)},\\
&\widetilde{C}_9=\Big(C(R,C_2)+\mu_9+\frac{\mu_3\lambda}{\mu_2}C(R,\beta_0,\|g\|,\lambda_1,C_2,\delta)\mathrm{e}^{(\widetilde{C}_0+\widetilde{C}_0\widetilde{C}_1)(T-\tau)+\widetilde{C}_0\widetilde{C}_1}\Big)\mathrm{e}^{\widetilde{C}_7\widetilde{C}_1+\widetilde{C}_7\widetilde{C}_1(T-\tau)},
\end{aligned}$$

$\overline{C}_{10} = C(R, \beta_0, \|g\|, \lambda_1, C_1, C_2)\mathrm{e}^{\widetilde{C}_7\widetilde{C}_1+\widetilde{C}_7\widetilde{C}_1(T-\tau)}$.

应用 Gronwall 引理，可证得 (3.56). 同时，我们也得到了问题 (2.4)–(2.5) 的解在空间 $\mathcal{H}_t^1$ 中的唯一性.

根据定理 3.1 和定理 3.2, 可以定义问题 (2.4)–(2.5) 的过程 $U(t,\tau)$ 如下：

$$y(t) = U(t,\tau)y(\tau) : \mathcal{H}_\tau^1 \to \mathcal{H}_t^1,$$

并且，该过程映 $\mathcal{H}_\tau^1$ 入 $\mathcal{H}_t^1$ 为连续的.

§4 时间依赖吸引子的存在性

§4.1 时间依赖吸收集

根据定理 3.2(i), 我们可得到如下结果.

定理 4.1 在定理 3.1 的假设下，如果对任意的初值 $y(\tau) \in \mathbb{B}_\tau(R) \subset \mathcal{H}_\tau^1$, 那么存在 $R_0 > 0$, 使得对应于问题 (2.4)–(2.5) 的过程 $U(t,\tau)$ 拥有时间依赖吸收集，即集族 $\mathfrak{B}_t = \{\mathbb{B}_t(R_0)\}_{t\in\mathbb{R}}$.

§4.2 先验估计

下面我们将对问题 (2.4)–(2.5) 的解过程 $U(t,\tau)$ 进行紧性验证. 为此，我们将做如下先验估计.

设 $y_i(t) = (u_i(t), \partial_t u_i(t))$ $(i=1,2)$ 是问题 (2.4)–(2.5) 分别关于初值 $(u_i(\tau), \partial_t u_i(\tau)) \in \{\mathbb{B}_\tau(R)\}_{\tau\in\mathbb{R}}$ 的解. 两解之差 $\widetilde{y}(t) = y_1(t) - y_2(t) = (\omega(t), \partial_t\omega(t))$ 满足以下方程：

$$\varepsilon(t)\partial_t^2\omega + \frac{M_{12}}{2}A\omega + \frac{M_1 - M_2}{2}A(u_1+u_2) + A^\gamma\partial_t\omega + f_1 - f_2 = 0, \tag{4.1}$$

$$\omega|_{\partial\Omega} = 0,\ \omega(x,\tau) = u_{1_0}(x) - u_{2_0}(x),\ \partial_t\omega(x,\tau) = u_{1_1}(x) - u_{2_1}(x), \tag{4.2}$$

其中 $x \in \Omega,\ t \in [\tau, \infty),\ M_{12} = M_1 + M_2,\ M_i(t) = M(\|u_i(t)\|_1^2),\ f_i = f(u_i),\ i = 1, 2.$

定义

$$H(t) = \varepsilon(t)\|\partial_t\omega(t)\|^2 + \frac{1}{2}M_{12}(t)\|\omega(t)\|_1^2.$$

我们将分为以下四步进行先验估计.

第一步 将 (4.1) 式乘以 $2\partial_t\omega$, 并且在 $[s,t]\times\Omega$ 上积分，可得

$$\begin{aligned}
&H(t) - H(s) - \int_s^t \int_\Omega \varepsilon'(r)|\partial_t\omega(r)|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}r \\
&- \int_s^t M'(\|u_1\|_1^2)\langle A^{\frac{\gamma}{2}}\partial_t u_1, A^{\frac{2-\gamma}{2}}u_1\rangle \int_\Omega |A^{\frac{1}{2}}\omega(r)|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}r \\
&- \int_s^t M'(\|u_2\|_1^2)\langle A^{\frac{\gamma}{2}}\partial_t u_2, A^{\frac{2-\gamma}{2}}u_2\rangle \int_\Omega |A^{\frac{1}{2}}\omega(r)|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}r
\end{aligned}$$

$$+2\int_s^t\int_\Omega|A^{\frac{\gamma}{2}}\partial_t\omega(r)|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}r+2\int_s^t\int_\Omega(f(u_1)-f(u_2))\partial_t\omega(r)\mathrm{d}x\mathrm{d}r$$
$$=-\int_s^t(M_1-M_2)\int_\Omega A^{\frac{2-\gamma}{2}}(u_1+u_2)A^{\frac{\gamma}{2}}\partial_t\omega(r)\mathrm{d}x\mathrm{d}r, \tag{4.3}$$

其中 $T\leqslant s\leqslant t$.

根据假设 (A_1) 中的 (1.4), 可得

$$\varepsilon(t)|\omega_t(t)|^2\leqslant L|\omega_t(t)|^2-\varepsilon'(t)|\omega_t(t)|^2,$$

则

$$\begin{aligned}
&\int_T^t\int_\Omega\varepsilon(r)|\partial_t\omega(r)|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}r\\
\leqslant{}& L\int_T^t\int_\Omega|\partial_t\omega(r)|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}r-\int_T^t\int_\Omega\varepsilon'(r)|\partial_t\omega(r)|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}s\\
\leqslant{}& H(T)+L\int_T^t\int_\Omega|\partial_t\omega(r)|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}r\\
&+\int_T^t M'(\|u_1\|_1^2)\langle A^{\frac{\gamma}{2}}\partial_t u_1,A^{\frac{2-\gamma}{2}}u_1\rangle\int_\Omega|A^{\frac12}\omega(r)|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}r\\
&+\int_T^t M'(\|u_2\|_1^2)\langle A^{\frac{\gamma}{2}}\partial_t u_2,A^{\frac{2-\gamma}{2}}u_2\rangle\int_\Omega|A^{\frac12}\omega(r)|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}r\\
&-\int_T^t(M_1-M_2)\int_\Omega A^{\frac{2-\gamma}{2}}(u_1+u_2)A^{\frac{\gamma}{2}}\partial_t\omega(r)\mathrm{d}x\mathrm{d}r\\
&-2\int_T^t\int_\Omega(f(u_1)-f(u_2))\partial_t\omega(r)\mathrm{d}x\mathrm{d}r.
\end{aligned}\tag{4.4}$$

第二步 将 (4.1) 式乘以 ω, 并且在 $[T,t]\times\Omega$ 上积分，得到

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega\varepsilon(t)\partial_t\omega(t)\omega(t)\mathrm{d}x-\int_\Omega\varepsilon(T)\partial_t\omega(T)\omega(T)\mathrm{d}x+\frac12\|\omega(t)\|_\gamma^2-\frac12\|\omega(T)\|_\gamma^2\\
&+\frac12\int_T^t(M_1-M_2)\int_\Omega A^{\frac12}(u_1+u_2)A^{\frac12}\omega(r)\mathrm{d}x\mathrm{d}r+\frac12\int_T^t M_{12}\int_\Omega|A^{\frac12}\omega(r)|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}r\\
&+\int_T^t\int_\Omega(f(u_1)-f(u_2))\omega(r)\mathrm{d}x\mathrm{d}r\\
={}&\int_T^t\varepsilon(r)\|\partial_t\omega(r)\|^2\mathrm{d}r+\int_T^t\int_\Omega\varepsilon'(r)\partial_t\omega(r)\omega(r)\mathrm{d}x\mathrm{d}r.
\end{aligned}\tag{4.5}$$

因此，根据 (4.4)–(4.5), 可得

$$\begin{aligned}
&\int_T^t H(r)\mathrm{d}r\\
={}&\int_T^t(\varepsilon(r)\|\partial_t\omega(r)\|^2+\frac12M_{12}\|\omega(r)\|_1^2)\mathrm{d}r\\
\leqslant{}& H(T)+L\int_T^t\|\partial_t\omega(r)\|^2\mathrm{d}r+\int_T^t M'(\|u_1\|_1^2)\langle A^{\frac{\gamma}{2}}\partial_t u_1,A^{\frac{2-\gamma}{2}}u_1\rangle\|\omega(r)\|_1^2\mathrm{d}r\\
&+\int_T^t M'(\|u_2\|_1^2)\langle A^{\frac{\gamma}{2}}\partial_t u_2,A^{\frac{2-\gamma}{2}}u_2\rangle\|\omega(r)\|_1^2\mathrm{d}r
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&-\int_T^t (M_1-M_2)\int_\Omega A^{\frac{2-\gamma}{2}}(u_1+u_2)\cdot A^{\frac{\gamma}{2}}\partial_t\omega(r)\mathrm{d}x\mathrm{d}r\\
&-2\int_T^t\int_\Omega (f(u_1)-f(u_2))\partial_t\omega(r)\mathrm{d}x\mathrm{d}r-\int_T^t\int_\Omega (f(u_1)-f(u_2))\omega(r)\mathrm{d}x\mathrm{d}r\\
&-\int_\Omega \varepsilon(t)\partial_t\omega(t)\omega(t)\mathrm{d}x+\int_\Omega \varepsilon(T)\partial_t\omega(T)\omega(T)\mathrm{d}x\\
&+\frac{1}{2}\|\omega(T)\|_\gamma^2-\frac{1}{2}\int_T^t (M_1-M_2)\int_\Omega A^{\frac{1}{2}}(u_1+u_2)A^{\frac{1}{2}}\omega(r)\mathrm{d}x\mathrm{d}r\\
&+\int_T^t\int_\Omega \varepsilon(r)|\partial_t\omega(r)|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}r+\int_T^t\int_\Omega \varepsilon'(r)\partial_t\omega(r)\omega(r)\mathrm{d}x\mathrm{d}r.
\end{aligned}
$$

第三步 对 (4.3) 在 $[T,t]$ 上关于 s 积分，得

$$
\begin{aligned}
&H(t)(t-T)\\
\leqslant&\int_T^t H(s)\mathrm{d}s-2\int_T^t\int_s^t\int_\Omega (f(u_1)-f(u_2))\partial_t\omega(r)\mathrm{d}x\mathrm{d}r\mathrm{d}s\\
&-\int_T^t\int_s^t (M_1-M_2)\int_\Omega A^{\frac{2-\gamma}{2}}(u_1+u_2)A^{\frac{\gamma}{2}}\partial_t\omega(r)\mathrm{d}x\mathrm{d}r\mathrm{d}s\\
&+\int_T^t\int_s^t M'(\|u_1\|_1^2)\langle A^{\frac{\gamma}{2}}\partial_t u_1, A^{\frac{2-\gamma}{2}}u_1\rangle\int_\Omega |A^{\frac{1}{2}}\omega(r)|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}r\mathrm{d}s\\
&+\int_T^t\int_s^t M'(\|u_2\|_1^2)\langle A^{\frac{\gamma}{2}}\partial_t u_2, A^{\frac{2-\gamma}{2}}u_2\rangle\int_\Omega |A^{\frac{1}{2}}\omega(r)|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}r\mathrm{d}s\\
\leqslant&H(T)+\frac{1}{2}\|\omega(T)\|_\gamma^2+L\int_T^t\|\partial_t\omega(s)\|^2\mathrm{d}s\\
&+\int_T^t M'(\|u_1\|_1^2)\langle A^{\frac{\gamma}{2}}\partial_t u_1, A^{\frac{2-\gamma}{2}}u_1\rangle\|\omega(s)\|_1^2\mathrm{d}s+\int_T^t M'(\|u_2\|_1^2)\langle A^{\frac{\gamma}{2}}\partial_t u_2, A^{\frac{2-\gamma}{2}}u_2\rangle\|\omega(s)\|_1^2\mathrm{d}s\\
&-\frac{1}{2}\int_T^t (M_1-M_2)\langle u_1+u_2,\omega(s)\rangle_1\mathrm{d}s-\int_T^t (M_1-M_2)\langle A^{\frac{2-\gamma}{2}}(u_1+u_2), A^{\frac{\gamma}{2}}\partial_t\omega(s)\rangle\mathrm{d}s\\
&-2\int_T^t\int_\Omega (f(u_1)-f(u_2))\partial_t\omega(s)\mathrm{d}x\mathrm{d}s-\int_T^t\int_\Omega (f(u_1)-f(u_2))\omega(s)\mathrm{d}x\mathrm{d}s\\
&-\int_\Omega \varepsilon(t)\partial_t\omega(t)\omega(t)\mathrm{d}x+\int_\Omega \varepsilon(T)\partial_t\omega(T)\omega(T)\mathrm{d}x\\
&+\int_T^t \varepsilon(s)\|\partial_t\omega(s)\|^2\mathrm{d}s+\int_T^t \varepsilon'(s)\langle\partial_t\omega(s),\omega(s)\rangle\mathrm{d}s\\
&-2\int_T^t\int_s^t\int_\Omega (f(u_1)-f(u_2))\partial_t\omega(r)\mathrm{d}x\mathrm{d}r\mathrm{d}s\\
&-\int_T^t\int_s^t (M_1-M_2)\langle A^{\frac{2-\gamma}{2}}(u_1+u_2), A^{\frac{\gamma}{2}}\partial_t\omega(r)\rangle\mathrm{d}r\mathrm{d}s\\
&+\int_T^t\int_s^t M'(\|u_1\|_1^2)\langle A^{\frac{\gamma}{2}}\partial_t u_1, A^{\frac{2-\gamma}{2}}u_1\rangle\|\omega(r)\|_1^2\mathrm{d}r\mathrm{d}s\\
&+\int_T^t\int_s^t M'(\|u_2\|_1^2)\langle A^{\frac{\gamma}{2}}\partial_t u_2, A^{\frac{2-\gamma}{2}}u_2\rangle\|\omega(r)\|_1^2\mathrm{d}r\mathrm{d}s.
\end{aligned}
$$

第四步 记

$$C(M)=H(T)+\frac{1}{2}\|\omega(T)\|_{\gamma}^{2}+\int_{\Omega}\varepsilon(T)\partial_t\omega(T)\omega(T)\mathrm{d}x \tag{4.6}$$

以及

$$\Phi_T^t((u_1(T),\partial_t u_1(T)),(u_2(T),\partial_t u_2(T)))=\Psi_1+\Psi_2+\Psi_3, \tag{4.7}$$

其中

$$\begin{aligned}
\Psi_1=&\frac{L}{(t-T)}\int_T^t\|\partial_t\omega(s)\|^2\mathrm{d}s-\frac{1}{(t-T)}\int_{\Omega}\varepsilon(t)\partial_t\omega(t)\omega(t)\mathrm{d}x\\
&+\frac{1}{(t-T)}\int_T^t\varepsilon(s)\|\partial_t\omega(s)\|^2\mathrm{d}s+\frac{1}{(t-T)}\int_T^t\varepsilon'(s)\langle\partial_t\omega(s),\omega(s)\rangle\mathrm{d}s,\\
\Psi_2=&-\frac{1}{(t-T)}\Big(2\int_T^t\int_{\Omega}(f(u_1)-f(u_2))\partial_t\omega(s)\mathrm{d}x\mathrm{d}s+\int_T^t\int_{\Omega}(f(u_1)-f(u_2))\omega(s)\mathrm{d}x\mathrm{d}s\\
&+2\int_T^t\int_s^t\int_{\Omega}(f(u_1)-f(u_2))\partial_t\omega(r)\mathrm{d}x\mathrm{d}r\mathrm{d}s\Big),\\
\Psi_3=&\frac{1}{t-T}\Big(\int_T^t M'(\|u_1\|_1^2)\langle A^{\frac{\gamma}{2}}\partial_t u_1,A^{\frac{2-\gamma}{2}}u_1\rangle\|\omega(s)\|_1^2\mathrm{d}s\\
&+\int_T^t M'(\|u_2\|_1^2)\langle A^{\frac{\gamma}{2}}\partial_t u_2,A^{\frac{2-\gamma}{2}}u_2\rangle\|\omega(s)\|_1^2\mathrm{d}s\\
&-\int_T^t(M_1-M_2)\langle A^{\frac{2-\gamma}{2}}(u_1+u_2),A^{\frac{\gamma}{2}}\partial_t\omega(s)\rangle\mathrm{d}s\\
&-\frac{1}{2}\int_T^t(M_1-M_2)\langle A^{\frac{1}{2}}u_1+u_2,A^{\frac{1}{2}}\omega(s)\rangle\mathrm{d}s\\
&-\int_T^t\int_s^t(M_1-M_2)\langle A^{\frac{2-\gamma}{2}}(u_1+u_2),A^{\frac{\gamma}{2}}\partial_t\omega(r)\rangle\mathrm{d}r\mathrm{d}s\\
&+\int_T^t\int_s^t M'(\|u_1\|_1^2)\langle A^{\frac{\gamma}{2}}\partial_t u_1,A^{\frac{2-\gamma}{2}}u_1\rangle\|\omega(r)\|_1^2\mathrm{d}r\mathrm{d}s\\
&+\int_T^t\int_s^t M'(\|u_2\|_1^2)\langle A^{\frac{\gamma}{2}}\partial_t u_2,A^{\frac{2-\gamma}{2}}u_2\rangle\|\omega(r)\|_1^2\mathrm{d}r\mathrm{d}s\Big).
\end{aligned}$$

因此

$$H(t)\leqslant\frac{1}{t-T}C_M+\Phi_T^t((u_1(T),\partial_t u_1(T)),(u_2(T),\partial_t u_2(T))). \tag{4.8}$$

§4.3 渐近紧性

下面我们将利用收缩函数方法证明问题 (2.4)–(2.5) 解过程的渐近紧性.

定理 4.2 如果条件 (A_1)–(A_5) 成立, 对于任意固定的 $t\in\mathbb{R}$ 和任意有界的 $\{\tau_n\}_{n=1}^{\infty}\subset(-\infty,t]$ (当 $n\to\infty$ 时, $\tau_n\to-\infty$) 以及对于任意序列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}\subset\mathbb{B}_{\tau_n}(R)\subset\mathcal{H}_{\tau_n}^1$, 那么序列 $\{U(t,\tau_n)x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 存在一个收敛子列.

证 对任意的 $\varepsilon>0$ 和固定的 t, 存在 $T<t$, 使得 $\frac{C_M}{t-T}<\varepsilon$. 根据定理 2.2, 我们还需要证明对于每一个固定的 t, 有 $\Phi_T^t\in\mathfrak{C}(\mathbb{B}_T(R))$.

设 $(u_n,\partial_t u_n)$ 是问题 (2.4)–(2.5) 关于初值 $(u_{n_0},u_{n_1})\in\mathbb{B}_T(R)$ 的解. 由定理 3.1, 可知 $\|u_n\|_1^2+\varepsilon(\xi)\|\partial_t u_n\|^2$ 是有界的, 且 $\|u_n\|_1^2$ 是有界的. 对于任意固定的 t 和 $\forall\xi\in[T,t]$, 根据 (1.4) 和 $\frac{1}{\varepsilon(\xi)}$ 的有界性, 可知 $\|\partial_t u_n\|^2$ 也是有界的.

根据 Alaoglu 定理, 引理 2.2 和定理 3.1, 对任意的 $\tau\leqslant T\leqslant t$, 不失一般性 (至多通过子列收敛), 我们设

$$u_n \text{ 在 } L^\infty([\tau,T];V_1) \text{ 中弱}^* \text{ 收敛于 } u, \tag{4.9}$$

$$\partial_t u_n \text{ 在 } L^\infty([\tau,T];L^2(\Omega)) \text{ 中弱}^* \text{ 收敛于 } \partial_t u, \tag{4.10}$$

$$\partial_t^2 u_n \text{ 在 } L^\infty([\tau,T];V_{-2\gamma}) \text{ 中弱}^* \text{ 收敛于 } \partial_t^2 u, \tag{4.11}$$

$$u_n \text{ 在 } L^2([\tau,T];V_{2-\gamma}) \text{ 中弱收敛于 } u, \tag{4.12}$$

$$\partial_t u_n \text{ 在 } L^2([\tau,T];V_\gamma) \text{ 中弱收敛于 } \partial_t u, \tag{4.13}$$

$$\partial_t^2 u_n \text{ 在 } L^2([\tau,T];V_{-\gamma}) \text{ 中弱收敛于 } \partial_t^2 u, \tag{4.14}$$

$$u_n \text{ 在 } L^{p+1}([\tau,T];L^{p+1}(\Omega)) \text{ 中收敛于 } u, \tag{4.15}$$

$$u_n \text{ 在 } L^2([\tau,T];V_1) \text{ 中收敛于 } u, \tag{4.16}$$

$$u_n(t) \text{ 在 } L^{p+1}(\Omega) \text{ 中收敛于 } u \text{ 并且 } u_n(T) \text{ 在 } L^{p+1}(\Omega) \text{ 中收敛于 } u(T), \tag{4.17}$$

$$\partial_t u_n \text{ 在 } L^2([\tau,T];L^2(\Omega)) \text{ 中收敛于 } \partial_t u. \tag{4.18}$$

其中, 当 $p\leqslant 3+2\gamma$ 时, 我们利用 Sobolev 嵌入 $V_1\hookrightarrow\hookrightarrow L^{p+1}(\Omega)$.

根据 (3.56) 可知

$$\{(u_n(s),\partial_t u_n(s))\}\subset C([T,t];\mathcal{H}_s^1) \text{ 是一个 Cauchy 列}, \tag{4.19}$$

并且存在 $(u(s),\partial_t u(s))\in C([T,t];\mathcal{H}_s^1)$, 使得

$$(u_n(s),\partial_t u_n(s)) \text{ 在 } C([T,t];\mathcal{H}_s^1) \text{ 中收敛于 } (u(s),\partial_t u(s)). \tag{4.20}$$

下面, 我们将处理 (4.7) 的每一项.

首先, 利用 (4.16)–(4.18) 可得

$$\lim_{n\to\infty}\lim_{m\to\infty}L\int_T^t\|\partial_t u_n-\partial_t u_m\|^2\mathrm{d}s=0, \tag{4.21}$$

$$\begin{aligned}&\lim_{n\to\infty}\lim_{m\to\infty}\int_\Omega\varepsilon(t)(\partial_t u_n-\partial_t u_m)(u_n-u_m)\mathrm{d}x\\ \leqslant&\lim_{n\to\infty}\lim_{m\to\infty}L\|\partial_t u_n-\partial_t u_m\|\|u_n-u_m\|\\ \leqslant&\lim_{n\to\infty}\lim_{m\to\infty}L(\|\partial_t u_n\|+\|\partial_t u_m\|)\|u_n-u_m\|=0,\end{aligned} \tag{4.22}$$

$$\begin{aligned}&\lim_{n\to\infty}\lim_{m\to\infty}\int_T^t\varepsilon(s)\|\partial_t u_n-\partial_t u_m\|^2\mathrm{d}s\\ \leqslant&\lim_{n\to\infty}\lim_{m\to\infty}L\int_T^t\|\partial_t u_n-\partial_t u_m\|^2\mathrm{d}s=0,\end{aligned} \tag{4.23}$$

$$\lim_{n\to\infty}\lim_{m\to\infty}\int_T^t\varepsilon'(s)\langle\partial_t u_n-\partial_t u_m,u_n-u_m\rangle\mathrm{d}s$$

$$\leqslant L \lim_{n\to\infty}\lim_{m\to\infty}\Big(\int_T^t \|\partial_t u_n-\partial_t u_m\|^2\mathrm{d}s\Big)^{\frac{1}{2}}\cdot\Big(\int_T^t \|u_n-u_m\|^2\mathrm{d}s\Big)^{\frac{1}{2}}=0. \tag{4.24}$$

综合 (4.21)–(4.24), 可得

$$\lim_{n\to\infty}\lim_{m\to\infty}\Psi_1=0. \tag{4.25}$$

其次，根据 (A_3) 中的 (1.8) 和 (4.16), 可得

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty}\lim_{m\to\infty}\int_T^t\int_\Omega (f(u_n)-f(u_m))(u_n-u_m)\mathrm{d}x\mathrm{d}s\\
&\leqslant C\lim_{n\to\infty}\lim_{m\to\infty}\int_T^t\int_\Omega (1+|u_n|^{p-1}+|u_m|^{p-1})|u_n-u_m|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}s\\
&\leqslant C\lim_{n\to\infty}\lim_{m\to\infty}\int_T^t (1+\|u_n\|_{L^{p+1}}^{p-1}+\|u_m\|_{L^{p+1}}^{p-1})\cdot\|u_n-u_m\|_{L^{p+1}}^2\mathrm{d}s\\
&\leqslant C\lim_{n\to\infty}\lim_{m\to\infty}\int_T^t (1+\|u_n\|_1^{p-1}+\|u_m\|_1^{p-1})\cdot\|u_n-u_m\|_1^2\mathrm{d}s\\
&\leqslant C\lim_{n\to\infty}\lim_{m\to\infty}\int_T^t \|u_n-u_m\|_1^2\mathrm{d}s=0.
\end{aligned} \tag{4.26}$$

易知

$$\begin{aligned}
&\int_T^t\int_\Omega (f(u_n)-f(u_m))(\partial_t u_n-\partial_t u_m)\mathrm{d}x\mathrm{d}s\\
&=\int_T^t\int_\Omega f(u_n)\partial_t u_n\mathrm{d}x\mathrm{d}s+\int_T^t\int_\Omega f(u_m)\partial_t u_m\mathrm{d}x\mathrm{d}s-\int_T^t\int_\Omega f(u_m)\partial_t u_n\mathrm{d}x\mathrm{d}s\\
&\quad-\int_T^t\int_\Omega f(u_n)\partial_t u_m\mathrm{d}x\mathrm{d}s\\
&=\int_\Omega F(u_n(t))\mathrm{d}x-\int_\Omega F(u_n(T))\mathrm{d}x+\int_\Omega F(u_m(t))\mathrm{d}x-\int_\Omega F(u_m(T))\mathrm{d}x\\
&\quad-\int_T^t\int_\Omega f(u_m)\partial_t u_n\mathrm{d}x\mathrm{d}s-\int_T^t\int_\Omega f(u_n)\partial_t u_m\mathrm{d}x\mathrm{d}s.
\end{aligned} \tag{4.27}$$

利用 (1.8) 和嵌入 $V_1 \hookrightarrow\hookrightarrow L^{p+1}(\Omega)$, 可得

$$\begin{aligned}
&\Big|\int_\Omega (F(u_n(t))-F(u(t)))\mathrm{d}x\Big|\\
&\leqslant \int_\Omega |f(u(t)+\vartheta(u_n(t)-u(t))||u_n(t)-u(t)|\mathrm{d}x\\
&\leqslant C\int_\Omega (1+|u_n(t)|^p+|(u(t)|^p)|u_n(t)-u(t)|\mathrm{d}x\\
&\leqslant C(1+\|u_n(t)\|_{L^{p+1}}^p+\|u(t)\|_{L^{p+1}}^p)\|u_n(t)-u(t)\|_{L^{p+1}}\\
&\leqslant C\varepsilon.
\end{aligned} \tag{4.28}$$

当 $n\to\infty$, $m\to\infty$ 时，由于 $f(u_n)\in L^2([\tau,T];V_{-\gamma})$ 以及 $\partial_t u_m\in L^2([\tau,T];V_\gamma)$, 故

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty}\lim_{m\to\infty}\int_T^t \langle f(u_n),\partial_t u_m\rangle\mathrm{d}s\\
&=\lim_{n\to\infty}\int_T^t \langle f(u_n),\partial_t u\rangle\mathrm{d}s
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_T^t \langle f(u), \partial_t u\rangle \mathrm{d}s \\
&= \int_\Omega F(u(t))\mathrm{d}x - \int_\Omega F(u(T))\mathrm{d}x.
\end{aligned}
$$

同理可得

$$
\lim_{n\to\infty}\lim_{m\to\infty}\int_T^t \langle f(u_m), \partial_t u_n\rangle \mathrm{d}s = \int_\Omega F(u(t))\mathrm{d}x - \int_\Omega F(u(T))\mathrm{d}x.
$$

因此

$$
\lim_{n\to\infty}\lim_{m\to\infty}\int_T^t\int_\Omega (f(u_n)-f(u_m))(\partial_t u_n - \partial_t u_m)\mathrm{d}x\mathrm{d}s = 0. \tag{4.29}
$$

对于每一个固定的 t, $|\int_s^t\int_\Omega (f(u_n)-f(u_m))(\partial_t u_n-\partial_t u_m)\mathrm{d}x\mathrm{d}r|$ 是有界的, 则根据 Lebesgue 控制收敛定理，可得

$$
\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty}\lim_{m\to\infty}\int_T^t\int_s^t\int_\Omega (f(u_n)-f(u_m))(\partial_t u_n-\partial_t u_m)\mathrm{d}x\mathrm{d}r\mathrm{d}s \\
&= \int_T^t \lim_{n\to\infty}\lim_{m\to\infty}\int_s^t\int_\Omega (f(u_n)-f(u_m))(\partial_t u_n-\partial_t u_m)\mathrm{d}x\mathrm{d}r\mathrm{d}s \\
&= \int_T^t 0\mathrm{d}s = 0.
\end{aligned} \tag{4.30}
$$

因此，由 (4.27)–(4.30), 可得

$$
\lim_{n\to\infty}\lim_{m\to\infty}\Psi_2 = 0. \tag{4.31}
$$

最后，我们估计 Ψ_3. 由 (3.27) 和 (4.20), 有

$$
\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty}\lim_{m\to\infty}\int_T^t\int_\Omega (M_n-M_m)\cdot A^{\frac12}(u_n+u_m)\cdot A^{\frac12}(u_n-u_m)\mathrm{d}x\mathrm{d}s \\
&\leqslant C\lim_{n\to\infty}\lim_{m\to\infty}\int_T^t \|A^{\frac12}(u_n-u_m)\|\int_\Omega |A^{\frac12}(u_n+u_m)|\cdot|A^{\frac12}(u_n-u_m)|\mathrm{d}x\mathrm{d}s \\
&\leqslant C\lim_{n\to\infty}\lim_{m\to\infty}\Big(\sup_{s\in[T,t]}\|u_n-u_m\|_1\Big(\int_T^t\int_\Omega |A^{\frac12}(u_n-u_m)|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}s\Big)^{\frac12}\Big) = 0.
\end{aligned} \tag{4.32}
$$

利用 (3.28) 和 (4.19)–(4.20), 可得

$$
\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty}\lim_{m\to\infty}\int_T^t\int_\Omega (M_n-M_m)\cdot A^{\frac{2-\gamma}{2}}(u_n+u_m)\cdot A^{\frac{\gamma}{2}}(\partial_t u_n-\partial_t u_m)\mathrm{d}x\mathrm{d}s \\
&\leqslant C\lim_{n\to\infty}\lim_{m\to\infty}\int_T^t \|A^{\frac12}(u_n-u_m)\|\int_\Omega A^{\frac{2-\gamma}{2}}(u_n+u_m)\cdot A^{\frac{\gamma}{2}}\partial_t(u_n-\partial_t u_m)\mathrm{d}x\mathrm{d}s \\
&\leqslant C\lim_{n\to\infty}\lim_{m\to\infty}\sup_{s\in[T,t]}\|u_n-u_m\|_1 \\
&\quad\cdot\lim_{n\to\infty}\lim_{m\to\infty}\int_T^t\Big(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|u_n\|_1^2+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|u_m\|_1^2-\langle A^{\frac{2-\gamma}{2}}u_n, A^{\frac{\gamma}{2}}\partial_t u_m\rangle-\langle A^{\frac{2-\gamma}{2}}u_m, A^{\frac{\gamma}{2}}\partial_t u_n\rangle\Big)\mathrm{d}s \\
&\leqslant C\lim_{n\to\infty}\lim_{m\to\infty}\sup_{s\in[T,t]}\|u_n-u_m\|_1 \\
&\quad\cdot\Big(\lim_{n\to\infty}\lim_{m\to\infty}\int_T^t\Big(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|u_n\|_1^2+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|u_m\|_1^2\Big)\mathrm{d}s-\int_T^t\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|u\|_1^2\mathrm{d}s-\int_T^t\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|u\|_1^2\mathrm{d}s\Big)
\end{aligned}
$$

$$= 0. \tag{4.33}$$

根据 Lebesgue 控制收敛定理，对于每一个固定的 t, 由于

$$\Big|\int_s^t \int_\Omega (M_n - M_m)\cdot A^{\frac{2-\gamma}{2}}(u_n+u_m)\cdot A^{\frac{\gamma}{2}}(\partial_t u_n - \partial_t u_m)\mathrm{d}x\mathrm{d}r\Big|$$

是有界的，所以

$$\lim_{n\to\infty}\lim_{m\to\infty}\int_T^t\int_s^t\int_\Omega (M_n - M_m)\cdot A^{\frac{2-\theta}{2}}(u_n+u_m)\cdot A^{\frac{\theta}{2}}(\partial_t u_n - \partial_t u_m)\mathrm{d}x\mathrm{d}r\mathrm{d}s$$
$$= \int_\tau^T 0\mathrm{d}s = 0. \tag{4.34}$$

由 (3.27) 和 (4.19), 有

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty}\lim_{m\to\infty}\int_T^t M'(\|u_n\|_1^2)\cdot\langle A^{\frac{\gamma}{2}}\partial_t u_n, A^{\frac{2-\gamma}{2}}u_n\rangle\|A^{\frac12}u_n - A^{\frac12}u_m\|^2\mathrm{d}s\\
&\leqslant C\lim_{n\to\infty}\lim_{m\to\infty}\int_T^t\|A^{\frac12}(u_n-u_m)\|^2\int_\Omega|A^{\frac{\gamma}{2}}\partial_t u_n|\cdot|A^{\frac{2-\gamma}{2}}u_n|\mathrm{d}x\mathrm{d}s\\
&\leqslant C\lim_{n\to\infty}\lim_{m\to\infty}\Big(\sup_{s\in[T,t]}\|u_n-u_m\|_1^2\Big(\int_T^t\|\partial_t u_n\|_\gamma^2\mathrm{d}s\Big)^{\frac12}\Big(\int_T^t\|u_n\|_{2-\gamma}^2\mathrm{d}s\Big)^{\frac12}\Big)\\
&\leqslant C\lim_{n\to\infty}\lim_{m\to\infty}\sup_{s\in[T,t]}\|u_n-u_m\|_1^2\\
&=0
\end{aligned}\tag{4.35}$$

和

$$\lim_{n\to\infty}\lim_{m\to\infty}\int_T^t M'(\|u_m\|_1^2)\langle A^{\frac{\theta}{2}}\partial_t u_m, A^{\frac{2-\theta}{2}}u_m\rangle\|A^{\frac12}u_n - A^{\frac12}u_m\|^2\mathrm{d}s = 0. \tag{4.36}$$

类似于 (4.35) 的估计，可得

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty}\lim_{m\to\infty}\int_T^t\int_s^t M'(\|u_n\|_1^2)\langle A^{\frac{\gamma}{2}}\partial_t u_n, A^{\frac{2-\gamma}{2}}u_n\rangle\|A^{\frac12}u_n - A^{\frac12}u_m\|^2\mathrm{d}r\mathrm{d}s\\
&=\int_T^t\lim_{n\to\infty}\lim_{m\to\infty}\int_s^t M'(\|u_n\|_1^2)\langle A^{\frac{\gamma}{2}}\partial_t u_n, A^{\frac{2-\gamma}{2}}u_n\rangle\|A^{\frac12}u_n - A^{\frac12}u_m\|^2\mathrm{d}r\mathrm{d}s\\
&=\int_T^t 0\mathrm{d}s = 0
\end{aligned}\tag{4.37}$$

和

$$\lim_{n\to\infty}\lim_{m\to\infty}\int_T^t\int_s^t M'(\|u_m\|_1^2)\langle A^{\frac{\gamma}{2}}\partial_t u_m, A^{\frac{2-\gamma}{2}}u_m\rangle\|A^{\frac12}u_n - A^{\frac12}u_m\|^2\mathrm{d}r\mathrm{d}s = 0. \tag{4.38}$$

根据 (4.32)–(4.38) 可得

$$\lim_{n\to\infty}\lim_{m\to\infty}\Psi_3 = 0. \tag{4.39}$$

综上所述，可得 $\Phi_T^t((u_1(T),\partial_t u_1(T)),(u_2(T),\partial_t u_2(T)))\in\mathfrak{C}(\mathbb{B}_T(R))$.

§4.4 时间依赖全局吸引子

定理 4.3 如果定理 4.2 的假设成立, 那么对应于问题 (2.4)–(2.5) 的动力系统 $(U(t,\tau), \mathcal{H}_t^1)$ 拥有一个不变的时间依赖吸引子 $\mathcal{A}=\{A_t\}_{t\in\mathbb{R}}$.

证 根据定理 3.1–3.2, 定理 4.1–4.2, 可以得到定理 4.3 的结论成立.

参 考 文 献

[1] Kirchhoff G. Vorlesungen über Mechanik, lectures on maechnanics [D]. Stuttgart: Teubner, 1883.

[2] Ono K. Global existence, decay, and blowup of solutions for some mildly degenerate nonlinear Kirchhoff string [J]. *J Differential Equations*, 1997, 137:273–301.

[3] Ono K. On decay properties of solutions for degenerate strongly damped wave equations of Kirchhoff type [J]. *J Math Anal Appl*, 2011, 381:229–239.

[4] Chueshov I. Global attractors for a class of Kirchhoff wave models with a structural nonlinear damping [J]. *J Abstr Differ Equ Appl*, 2010, 1(1):86–106.

[5] Yang Z J, Ding P Y, Li L. Longtime dynamics of the Kirchhoff equations with fractional damping and supercritical nonlinearity [J]. *J Math Anal Appl*, 2016, 442:485–510.

[6] Savostianov A. Strichartz estimates and smooth attractors for a sub-quintic wave equation with fractional damping in bounded domains [J]. *Adv Differential Equ*, 2015, 20(5–6):495–530.

[7] Luo X D, Ma Q Z. The existence of time-dependent attractor for wave equation with fractional damping and lower regular forcing term [J]. *Discrete Contin Dyn Syst, Series B*, 2022, 27(9):4817–4835.

[8] Li Y N, Yang Z J, Ding P Y. Regular solutions and strong attractors for the Kirchhoff wave model with structural nonlinear damping [J]. *Applied Mathematics Letters*, 2020, 104:106258.

[9] Carvaho A N, Cholewa J W. Attrators for strongly damped wave equations with critical nonlinearities [J]. *Pac J Math*, 2002, 207(2):287–310.

[10] Carvalho A N, Cholewa J W. Regularity of solutions on the global attractor for a semilinear damped wave equation [J]. *J Math Anal Appl*, 2008, 337(2):932–948.

[11] Pata V, Zelik S. A remark on the damped wave equation [J]. *Commun Pur Appl Anal*, 2017, 5(3):611–616.

[12] Pata V, Belleri V. Attractors for semilinear strongly damped wave equations on $\mathbb{R}^3$ [J]. *Discrete Contin Dyn Syst*, Series A, 2012, 7(4):719–735.

[13] Conti M, Pata V, Temam R. Attractors for processes on time-dependent spaces, applications to wave equations [J]. *J Differential Equations*, 2013, 255(6):1254–1277.

[14] Temam R, Duane G S, Plinio F D. Time-Dependent attractor for the oscillon equation [J]. *Discrete Contin Dyn Syst*, 2011, 29(1):141–167.

[15] Meng F J, Yang M H, Zhong C K. Attractors for wave equations with nonlinear damping on time-dependent space [J]. *Discrete Contin Dyn Syst, Series B*, 2016, 21(1):205–225.

[16] Meng F J, Wu J, Zhao C X. Time-Dependent global attractor for extensible Berger equation [J]. *J Math Anal Appl*, 2019, 469(2):1045–1069.

[17] Liu T T, Ma Q.Z. Time-Dependent attractor for plate equations on $\mathbb{R}^N$ [J]. *J Math Anal Appl*, 2019, 479(1):315–332.

[18] Pata V, Squassina M. On the strongly damped wave equation [J]. *Comm Math Phys*, 2005, 253:511–533.

[19] Chepyzhov V V, Vishik M I. Attractors for equations of mathematical physics [M]//Amer Math Soc Colloq Publ, vol 49, Providence, RI: Amer Math Soc, 2002.

[20] Simon J. Compact sets in the space $L^p(0,T;B)$ [J]. *Ann Mat Pura Appl*, 1987, 146(1):65–96.

[21] Chueshov I, Lasiecka I. Long-Time dynamics of semilinear wave equation with interior-boundary damping and sources of critical exponents [M]//Contemp Math, 426, Providence, RI: Amer Math Soc, 2007:153–192.

[22] Chueshov I, Lasiecka I, Toundykov D. Long-Term dynamics of semilinear wave equations with nonlinear localized interior damping and a sources term of critical exponent [J]. *Discrete Contin Dyn Syst*, 2008, 20:459–509.

[23] Conti M, Pata V. Asymptotic structure of the attractor for processes on time-dependent spaces [J]. *Nonlinear Anal, RWA*, 2014, 19(1):1–10.

[24] Ding T, Liu Y F. Time-Dependent global attractor for the nonclassical diffusion equations [J]. *Appl Anal*, 2015, 94:1439–1449.

The Time-Dependent Global Attractors for Kirchhoff-Type Wave Equation with Structural Damping

WANG Xuan[1] TIAN Kaihong[2]

[1]College of Mathematics and Statistics, Northwest Normal University, Lanzhou 730070, China. E-mail: wangxuan@nwnu.edu.cn

[2]Corresponding author. College of Mathematics and Statistics, Northwest Normal University, Lanzhou 730070, China. E-mail: 3071263024@qq.com

Abstract In this paper, the authors study the well-posedness and the longtime dynamics of the solutions to the Kirchhoff wave equation with structural damping:

$$\varepsilon(t)\partial_t^2 u - M(\|\nabla u\|^2)\Delta u + (-\Delta)^\gamma \partial_t u + f(u) = g(x),$$

where $\gamma \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$. When the growth exponent satisfies $1 \leqslant p \leqslant 3 + 2\gamma$, firstly, by use of Faedo-Galerkin approximation method and asymptotically regular estimate technique, the well-posedness and regularity of solutions are established. Secondly, the asymptotic compactness of the solution process is proved via the method of contraction function. Finally, the existence of time-dependent global attractor is obtained in the natural energy space $H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$.

Keywords Kirchhoff-Type wave equation, Time-Dependent global attractor, Structural damping, Regularity

2000 MR Subject Classification 47J07, 47J15, 47J25

The English translation of this paper will be published in

Chinese Journal of Contemporary Mathematics, Vol. 44 No. 2, 2023

by ALLERTON PRESS, INC., USA