数 学 年 刊 A 辑
2023, 44(2):199–210
DOI: 10.16205/j.cnki.cama.2023.0014

一类 Neumann-型特征值问题的 Kröger-型估计*

高 艳[1] 李 珊[2] 毛 井[3] 吴传喜[2]

提要 本文考虑了紧致带边的光滑度量测度空间上同加权 Laplace 算子有关的一类 Neumann-型特征值问题, 利用 Fourier 变换, 给出了该问题的低阶特征值和的 Kröger-型估计.

关键词 加权 Laplace 算子, Fourier 变换, Kröger- 型估计
MR (2000) 主题分类 53E99
中图法分类 O186
文献标志码 A
文章编号 1000-8314(2023)02-0199-12

§1 引 言

令 $(\mathbb{R}^n,\langle\cdot,\cdot\rangle)$ 为赋有经典欧氏度量 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 的 n-维欧氏空间, $(\mathbb{R}^n,\langle\cdot,\cdot\rangle,\mathrm{d}\mu)$ 为相应的光滑度量测度空间, 这里

$$\mathrm{d}\mu=\mathrm{e}^{-\phi}\mathrm{d}x,$$

ϕ 为定义在 n-维欧氏空间 $\mathbb{R}^n$ 上的光滑实值函数, $\mathrm{d}x$ 为欧氏体积元. 对于 $\mathbb{R}^n$ 中的有界区域 $\Omega\subset\mathbb{R}^n$, 可以定义其加权欧氏体积如下:

$$\mu(\Omega)=\int_\Omega \mathrm{d}\mu=\int_\Omega \mathrm{e}^{-\phi}\mathrm{d}x.$$

在光滑度量测度空间 $(\mathbb{R}^n,\langle\cdot,\cdot\rangle,\mathrm{d}\mu)$ 中, 我们可以定义加权 Laplace 算子:

$$\mathbb{L}_\phi=\Delta-\langle D\phi,D\cdot\ \rangle,$$

这里 D,Δ 分别为 $\mathbb{R}^n$ 中的梯度算子和 Laplace 算子. 设 Ω 是 $(\mathbb{R}^n,\langle\cdot,\cdot\rangle,\mathrm{d}\mu)$ 中具有逐段光滑边界 $\partial\Omega$ 的有界区域, $n\geqslant 2$. 考虑如下 Neumann-型特征值问题:

本文 2022 年 2 月 27 日收到, 2023 年 3 月 9 日收到修改稿.
[1]湖北大学数学与统计学学院, 应用数学湖北省重点实验室, 武汉 430062; 武汉商学院信息工程学院, 武汉 430056. E-mail: sabrina8128@163.com
[2]湖北大学数学与统计学学院, 应用数学湖北省重点实验室, 武汉 430062.
E-mail: 1981394637@qq.com; cxwu@hubu.edu.cn
[3]通信作者. 湖北大学数学与统计学学院, 应用数学湖北省重点实验室, 武汉 430062.
E-mail: jiner120@163.com
*本文受到国家自然科学基金 (No. 11801496, No. 11926352), 霍英东教育基金会青年教师基金 (No. 161004), 应用数学湖北省重点实验室和科技大数据湖北省重点实验室 (No. 2021KF004) 的资助.

$$\begin{cases}\mathbb{L}_\phi^2 u-\tau\mathbb{L}_\phi u=\Gamma u, & \text{在 }\Omega\text{内},\\ (1-\sigma)\Big(\dfrac{\partial^2 u}{\partial\vec{\nu}^2}-\nabla\phi\cdot\nabla u\Big)+\sigma\mathbb{L}_\phi u=0, & \text{在 }\partial\Omega\text{上},\\ \tau\dfrac{\partial u}{\partial\vec{\nu}}-(1-\sigma)[\mathrm{div}_{\partial\Omega}(\mathrm{Proj}_{\partial\Omega}(D_\phi^2 u\cdot\vec{\nu})) & \\ -\langle D\phi,\mathrm{Proj}_{\partial\Omega}(D_\phi^2 u\cdot\vec{\nu})\rangle_{\partial\Omega}]-\dfrac{\partial\mathbb{L}_\phi u}{\partial\vec{\nu}}=0, & \text{在 }\partial\Omega\text{上},\end{cases}\tag{1.1}$$

这里 $D_\phi^2:=D^2-\langle D\phi,D\cdot\rangle\mathrm{I}_n$, I_n 为 n 阶单位矩阵, D^2u 代表函数 u 的 Hessian 矩阵, 参数 σ,τ 为实数, $\mathrm{div}_{\partial\Omega}$ 为 $\partial\Omega$ 上的散度算子, $\vec{\nu}$ 为沿 $\partial\Omega$ 定义的的单位外法向量场, 算子 $\mathrm{Proj}_{\partial\Omega}$ 表示到边界 $\partial\Omega$ 的切丛上的正交投影. 我们将在第 2.2 节中严格证明: 当 $\tau\geqslant 0$, $\sigma\in\big(-\frac{1}{n-1},1\big)$, $|\phi|\leqslant B$ (这里 B 为非负常数), 且 $|D\phi|^2\leqslant \mathrm{A}=\min\big\{\frac{1-\sigma}{2\mathrm{e}^B\sqrt{n(\mathrm{C}+1)}},\frac{1-\sigma+\sigma n}{2\mathrm{e}^B\sqrt{n(\mathrm{C}+1)}}\big\}$ 时 (注意: 本文中, C 为依赖于 n 与 Ω 的常数, 具体可见文章第 2.2 节), 谱问题 (1.1) 只有离散谱, 并且离散谱中的元素 (即特征值) 可以按如下单调不减方式进行排列:

$$0=\Gamma_1<\Gamma_2\leqslant\Gamma_3\leqslant\cdots\uparrow\infty.$$

对于 $(\mathbb{R}^n,\langle\cdot,\cdot\rangle)$ 中的有界光滑带边区域 Ω, Brandolini, Chiacchio 和 Langford[1]考虑了如下的 Neumann-型特征值问题[1]:

$$\begin{cases}\Delta^2 u-\tau\Delta u=\lambda u, & \text{在 }\Omega\ \text{ 内},\\ \dfrac{\partial^2 u}{\partial\vec{\nu}^2}=0, & \text{在 }\partial\Omega\text{ 上},\\ \tau\dfrac{\partial u}{\partial\vec{\nu}}-\mathrm{div}_{\partial\Omega}[\mathrm{Proj}_{\partial\Omega}(D^2u\cdot\vec{\nu})]-\dfrac{\partial\Delta u}{\partial\vec{\nu}}=0, & \text{在 }\partial\Omega\text{ 上},\end{cases}\tag{1.2}$$

得到了如下的 Kröger-型上界估计:

$$\sum_{i=1}^m\lambda_i\leqslant(2\pi)^4\frac{n}{n+4}\Big(\frac{1}{\omega_n|\Omega|}\Big)^{\frac{4}{n}}m^{\frac{n+4}{n}}+\tau(2\pi)^2\frac{n}{n+2}\Big(\frac{1}{\omega_n|\Omega|}\Big)^{\frac{2}{n}}m^{\frac{n+2}{n}},$$

这里 w_n 表示 $(\mathbb{R}^n,\langle\cdot,\cdot\rangle)$ 中单位球体的体积, $|\Omega|$ 表示 $(\mathbb{R}^n,\langle\cdot,\cdot\rangle)$ 中区域 Ω 的体积. 另外, 若无特殊说明, (1.2) 中的记号同问题 (1.1) 中的相同记号意义一致.

最近, Li 和 Mao[2] 考虑了如下的 Neumann-型特征值问题:

$$\begin{cases}\Delta^2 u-\tau\Delta u=\Lambda u, & \text{在 }\Omega\ \text{ 内},\\ (1-\sigma)\dfrac{\partial^2 u}{\partial\vec{\nu}^2}+\sigma\Delta u=0, & \text{在 }\partial\Omega\text{ 上},\\ \tau\dfrac{\partial u}{\partial\vec{\nu}}-(1-\sigma)\mathrm{div}_{\partial\Omega}[\mathrm{Proj}_{\partial\Omega}(D^2u\cdot\vec{\nu})]-\dfrac{\partial\Delta u}{\partial\vec{\nu}}=0, & \text{在 }\partial\Omega\text{ 上},\end{cases}\tag{1.3}$$

这里, (1.3) 中的记号同问题 (1.1) 中的相同记号意义一致, σ 表示 Poisson 比. 当 $n=2$ 时, (1.3) 可以用来刻画具有非零 Poisson 比的平板的振动 (见 [3, Section 2] 的解释). 此外,

[1]当 $n=2$ 时, (1.2) 可以用来刻画平板的振动, 参数 τ 此时表示平板的横向张力和抗扰刚度的比值 (见 [3, Section 2] 的解释). 此外, Chasman[3, Section 4]证明了:$\tau\geqslant 0$ 时, 谱问题 (1.2) 只有离散谱, 并且特征值非负.

Chasman[4, Section 4]证明了: 当 $\tau \geqslant 0$, $\sigma \in \big(-\frac{1}{n-1}, 1\big)$ 时, 谱问题 (1.3) 中的算子 $\Delta^2 - \tau\Delta$ 有离散谱, 且该谱中所有特征值具有有限重数, 并可按如下单调不减的方式进行排列:

$$0 = \Lambda_1 < \Lambda_2 \leqslant \Lambda_3 \leqslant \cdots \uparrow \infty.$$

对于谱问题 (1.3), 利用 Fourier 变换的技巧, 在构造恰当的测试函数的基础上, 可以得到如下的 Kröger-型估计:

$$\sum_{i=1}^{m} \Lambda_i \leqslant (2\pi)^4 \frac{n}{n+4}\Big(\frac{1}{\omega_n|\Omega|}\Big)^{\frac{4}{n}} m^{\frac{n+4}{n}} + \tau(2\pi)^2 \frac{n}{n+2}\Big(\frac{1}{\omega_n|\Omega|}\Big)^{\frac{2}{n}} m^{\frac{n+2}{n}}. \tag{1.4}$$

很多时候,Laplace 算子的谱性质可以尝试拓展到加权的情形－本文通信作者毛井教授及其合作者有一些这方面的工作, 具体可见文 [2, 5–12]. 受这些前期工作的启发, 我们自然会问: Li 和 Mao[2] 的 Kröger-型上界估计 (1.4) 能否拓展到加权的情形? 也就是说谱问题 (1.1) 的低阶特征值和是否有 Kröger-型上界? 关于这个问题, 答案是肯定的. 事实上, 我们可以得到如下的结论.

定理 1.1　设 Ω 为 $(\mathbb{R}^n, \langle\cdot,\cdot\rangle, \mathrm{d}\mu)$ 中的有界光滑区域, Γ_j 为谱问题 (1.1) 的第 j 个特征值. 若 $\tau \geqslant 0$, $\sigma \in \big(-\frac{1}{n-1}, 1\big)$, $|\phi| \leqslant B$, 并且存在正常数 A, 使得 $|D\phi|^2 \leqslant \mathrm{A}$, 其中 $\mathrm{A} = \min\big\{\frac{1-\sigma}{2\mathrm{e}^B\sqrt{n(\mathrm{C}+1)}}, \frac{1-\sigma+\sigma n}{2\mathrm{e}^B\sqrt{n(\mathrm{C}+1)}}\big\}$, 那么

$$\sum_{i=1}^{m} \Gamma_i \leqslant \mathrm{e}^{2B} nm\Big\{\frac{(2\pi)^4}{n+4}\Big(\frac{m\mathrm{e}^B}{\mu(\Omega)\omega_n}\Big)^{\frac{4}{n}} + \frac{(2\pi)^2}{n+2}(\tau+\mathrm{A})\Big(\frac{m\mathrm{e}^B}{\mu(\Omega)\omega_n}\Big)^{\frac{2}{n}}\Big\}, \quad m \geqslant 1.$$

推论 1.1　在定理 1.1 的假设下, 可得

$$\Gamma_{m+1} \leqslant \min_{r > 2\pi\left(\frac{m\mathrm{e}^B}{\mu(\Omega)\omega_n}\right)^{\frac{1}{n}}} \frac{n\omega_n\mu(\Omega)\mathrm{e}^B\big\{\frac{r^{n+4}}{n+4} + (\tau+\mathrm{A})\frac{r^{n+2}}{n+2}\big\}}{\mu(\Omega)\omega_n\mathrm{e}^{-B}r^n - (2\pi)^n m}, \quad m \geqslant 0.$$

注 1.1　Colding 和 Minicozzi II 在他们具有重要影响力的论文 [13] 中清晰明了地揭示了加权算子 $\mathbb{L}_\phi$ 对于研究平均曲率流的具有多项式体积增长的自收缩的重要性. 据此可见, 研究算子 $\mathbb{L}_\phi$ 的相关谱问题也是很有必要的, 且有意义的. 特别地, 如果 $\phi = \frac{|x|^2}{4}$, 那么度量测度空间 $(\mathbb{R}^n, \langle,\rangle, \mathrm{d}\mu)$ 就退化为高斯收缩孤立子 $(\mathbb{R}^n, \langle,\rangle, \mathrm{e}^{-\frac{|x|^2}{4}}\mathrm{d}x)$, 其相应的 Bakry-Émery Ricci 曲率 (或加权 Ricci 曲率) 为 $\mathrm{Ric}^\phi = \mathrm{Ric} + \mathrm{Hess}\phi = \mathrm{Hess}\big(\frac{|x|^2}{4}\big) = \frac{1}{2}$. 不妨取 $|x|^2 \leqslant 4\mathrm{A}'$, 这里 A' 为满足式子 $\mathrm{A}' = \min\big\{\frac{1-\sigma}{2\mathrm{e}^{\mathrm{A}'}\sqrt{n(\mathrm{C}+1)}}, \frac{1-\sigma+\sigma n}{2\mathrm{e}^{\mathrm{A}'}\sqrt{n(\mathrm{C}+1)}}\big\}$ 的正常数, 那么根据下文第 2.2 节的讨论自然可以知道高斯收缩孤立子上满足约束条件 $|x|^2 \leqslant 4\mathrm{A}'$ 的有界区域 Ω 上的谱问题 (1.1) 有离散谱.

对于谱问题 (1.1), 我们可以给出其在高斯收缩孤立子的有界区域上具有更好形式的 Kröger-型估计.

定理 1.2　设 Ω 为 $(\mathbb{R}^n, \langle\cdot,\cdot\rangle, \mathrm{e}^{-\frac{|x|^2}{4}}\mathrm{d}x)$ 中的有界光滑区域, Γ_j 为谱问题 (1.1) 的第 j 个特征值. 若 $\tau \geqslant 0$, $\sigma \in \big(-\frac{1}{n-1}, 1\big)$, 并且存在正常数 $\mathrm{A}' = \min\big\{\frac{1-\sigma}{2\mathrm{e}^{\mathrm{A}'}\sqrt{n(\mathrm{C}+1)}}, \frac{1-\sigma+\sigma n}{2\mathrm{e}^{\mathrm{A}'}\sqrt{n(\mathrm{C}+1)}}\big\}$,

使得位置向量满足 $|x|^2 \leqslant 4\mathrm{A}'$, 那么

$$\sum_{i=1}^{m}\Gamma_i \leqslant \mathrm{e}^{2\mathrm{A}'}mn\Big\{\frac{(2\pi)^4}{n+4}\Big(\frac{me^{\mathrm{A}'}}{\mu(\Omega)\omega_n}\Big)^{\frac{4}{n}}+\frac{(2\pi)^2}{n+2}(\tau+\mathrm{A}')\Big(\frac{me^{\mathrm{A}'}}{\mu(\Omega)\omega_n}\Big)^{\frac{2}{n}}\Big\},$$

其中 $m \geqslant 1$.

推论 1.2 在定理 1.2 的假设下, 可得

$$\Gamma_{m+1} \leqslant \min_{r>2\pi\left(\frac{me^{\mathrm{A}'}}{\mu(\Omega)\omega_n}\right)^{\frac{1}{n}}}\frac{n\omega_n\mu(\Omega)\mathrm{e}^{\mathrm{A}'}\big\{\frac{r^{n+4}}{n+4}+(\tau+\mathrm{A}')\frac{r^{n+2}}{n+2}\big\}}{\mu(\Omega)\omega_n r^n\mathrm{e}^{-\mathrm{A}'}-(2\pi)^n m},\quad m\geqslant 0.$$

§2 问题 (1.1) 的重述及其谱的若干性质

设 Ω 为 $(\mathbb{R}^n,\langle\cdot,\cdot\rangle,\mathrm{d}\mu)$ 中的有界光滑区域, $L^2(\Omega)$ 表示 Ω 上关于测度 $\mathrm{d}\mu$ 的平方可积函数集. 当 $p=k=2$ 时, 关于测度 μ 的 Sobolev 空间 $W^{k,p}(\Omega)$ 记为 $H^2(\Omega)$, 此时 $L^2(\Omega)$ 和 $H^2(\Omega)$ 的范数依次定义为

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} := \Big(\int_\Omega u^2\mathrm{d}\mu\Big)^{\frac{1}{2}},$$

$$\|u\|_{H^2(\Omega)} := \Big[\int_\Omega (u^2+|Du|^2+|D^2u|^2)\mathrm{d}\mu\Big]^{\frac{1}{2}}.$$

下文中, 在不会导致混淆的情况下, 为了方便不妨将 $\|\cdot\|_{L^2(\Omega)}$ 简记为 $\|\cdot\|$.

§2.1 问题 (1.1) 的重述

在本小节中, 我们将解释边界条件的合理性, 以便读者能够更好地理解谱问题 (1.1).

类似于文 [3], 定义如下双线性形式:

$$a(u,v)=\int_\Omega (1-\sigma)\overline{D_\phi^2 u}:D_\phi^2 v+\sigma\overline{\mathbb{L}_\phi u}\cdot\mathbb{L}_\phi v+\tau\overline{Du}\cdot Dv\mathrm{d}\mu,\quad u,v\in H^2(\Omega), \tag{2.1}$$

这里

$$\begin{aligned} D_\phi^2 u : D_\phi^2 v := &\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\partial x_j}\frac{\partial^2 v}{\partial x_i\partial x_j}-\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\partial x_i}\sum_{k=1}^{n}v_k\phi_k\\ &-\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2 v}{\partial x_i\partial x_i}\sum_{k=1}^{n}u_k\phi_k+\sum_{k=1}^{n}u_k\phi_k\sum_{l=1}^{n}v_l\phi_l, \end{aligned} \tag{2.2}$$

$D^2u:D^2v := \sum\limits_{i,j=1}^{n}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\partial x_j}\frac{\partial^2 v}{\partial x_i\partial x_j}$. 此外, 对于谱问题 (1.1), 其 Rayleigh 商 $\mathrm{Q}[u]$ 的形式为

$$\begin{aligned}\mathrm{Q}[u] &= \frac{\int_\Omega (1-\sigma)\overline{D_\phi^2 u}:D_\phi^2 u+\sigma|\mathbb{L}_\phi u|^2+\tau|Du|^2\mathrm{d}\mu}{\int_\Omega u^2\mathrm{d}\mu}\\ &=\frac{a(u,u)}{\|u\|^2}.\end{aligned}$$

若 $\tau\geqslant 0$, $\sigma\in\big(-\frac{1}{n-1},1\big)$, $|\phi|\leqslant B$, 且 $|D\phi|^2\leqslant \mathrm{A}$ 时, 类似于 Chasman[3, Section 4], 我们将在文章第 2.2 节证明: $a(\cdot,\cdot)$ 是强制的, 此时, 任意特征值 Γ_j 都是非负数, $j=1,2,3,\cdots$. 因

此, 当 $\tau \geqslant 0$, $\sigma \in \left(-\frac{1}{n-1}, 1\right)$, $|\phi| \leqslant B$, 且 $|D\phi|^2 \leqslant$ A 时, 我们可以忽略双线性形式 $a(u, \upsilon)$ 共轭部分的影响, $a(\cdot,\cdot)$ 可直接写为

$$a(u,\upsilon) = \int_\Omega (1-\sigma) D_\phi^2 u : D_\phi^2 \upsilon + \sigma \mathbb{L}_\phi u \cdot \mathbb{L}_\phi \upsilon + \tau Du \cdot D\upsilon \mathrm{d}\mu, \quad u, \upsilon \in H^2(\Omega). \tag{2.3}$$

若 u 为特征值问题 (1.1) 的弱解, 由 Rayleigh 商 Q[u] 的表达式以及式子 (2.1)–(2.3) 易知:

$$a(u,v) = \Gamma \int_\Omega uv \mathrm{d}\mu, \quad \forall v \in H^2(\Omega).$$

由散度定理可得

$$\begin{aligned}\int_\Omega \mathbb{L}_\phi u \ \upsilon \mathrm{e}^{-\phi} \mathrm{d}x &= \int_\Omega \Delta u \ \upsilon \mathrm{e}^{-\phi} - Du \cdot D\phi \ \upsilon \mathrm{e}^{-\phi} \mathrm{d}x \\ &= \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \vec{\nu}} \ \upsilon \mathrm{e}^{-\phi} \mathrm{d}S - \int_\Omega D(\upsilon \mathrm{e}^{-\phi}) \cdot Du \mathrm{d}x - \int_\Omega Du \cdot D\phi \ \upsilon \mathrm{e}^{-\phi} \mathrm{d}x \\ &= \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \vec{\nu}} \ \upsilon \mathrm{e}^{-\phi} \mathrm{d}S - \int_\Omega D\upsilon \cdot Du \ \mathrm{e}^{-\phi} \mathrm{d}x,\end{aligned}$$

所以

$$\int_\Omega D\upsilon \cdot Du \ \mathrm{e}^{-\phi} \mathrm{d}x = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \vec{\nu}} \ \upsilon \mathrm{e}^{-\phi} \mathrm{d}S - \int_\Omega \mathbb{L}_\phi u \ \upsilon \mathrm{e}^{-\phi} \mathrm{d}x.$$

又因为

$$\begin{aligned}&\int_{\partial\Omega} \mathbb{L}_\phi u \ \frac{\partial \upsilon}{\partial \vec{\nu}} \mathrm{e}^{-\phi} \mathrm{d}S \\ =& \int_\Omega [D(\mathrm{e}^{-\phi} \mathbb{L}_\phi u) \cdot D\upsilon + \mathbb{L}_\phi u \Delta \upsilon \ \mathrm{e}^{-\phi}] \mathrm{d}x \\ =& \int_\Omega [\mathbb{L}_\phi u \Delta \upsilon - \mathbb{L}_\phi u \ D\phi \cdot D\upsilon + D(\mathbb{L}_\phi u) \cdot D\upsilon] \ \mathrm{e}^{-\phi} \mathrm{d}x\end{aligned}$$

且

$$\begin{aligned}&\int_{\partial\Omega} \upsilon \ \frac{\partial \mathbb{L}_\phi u}{\partial \vec{\nu}} \mathrm{e}^{-\phi} \mathrm{d}S \\ =& \int_\Omega [D(\mathrm{e}^{-\phi} \upsilon) \cdot D\mathbb{L}_\phi u + \upsilon(\Delta \mathbb{L}_\phi u) \ \mathrm{e}^{-\phi}] \mathrm{d}x \\ =& \int_\Omega [\upsilon \Delta \mathbb{L}_\phi u - \upsilon \ D\phi \cdot D\mathbb{L}_\phi u + D(\mathbb{L}_\phi u) \cdot D\upsilon] \ \mathrm{e}^{-\phi} \mathrm{d}x,\end{aligned}$$

所以

$$\int_\Omega \mathbb{L}_\phi u \cdot \mathbb{L}_\phi \upsilon \ \mathrm{e}^{-\phi} \mathrm{d}x = \int_{\partial\Omega} \Big(\mathbb{L}_\phi u \frac{\partial \upsilon}{\partial \vec{\nu}} - \upsilon \ \frac{\partial \mathbb{L}_\phi u}{\partial \vec{\nu}} \Big) \mathrm{e}^{-\phi} \mathrm{d}S + \int_\Omega \mathbb{L}_\phi^2 u \ \upsilon \mathrm{e}^{-\phi} \mathrm{d}x.$$

运用两次散度定理, 可得

$$\begin{aligned}&\int_\Omega D_\phi^2 u : D_\phi^2 \upsilon \ \mathrm{e}^{-\phi} \mathrm{d}x \\ =& \int_{\partial\Omega} D\upsilon \cdot (D^2 u \cdot \vec{\nu}) \mathrm{e}^{-\phi} \mathrm{d}S - \int_\Omega D\mathbb{L}_\phi u \cdot D\upsilon \ \mathrm{e}^{-\phi} \mathrm{d}x - \int_{\partial\Omega} (D\phi \cdot Du) D\upsilon \cdot \mathrm{I}_n \cdot \vec{\nu} \mathrm{e}^{-\phi} \mathrm{d}S\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_{\partial\Omega} Dv \cdot (D_\phi^2 u \cdot \vec{\nu}) \mathrm{e}^{-\phi} \mathrm{d}S - \int_\Omega D\mathbb{L}_\phi u \cdot Dv \ \mathrm{e}^{-\phi} \mathrm{d}x \\
&= \int_{\partial\Omega} \Big\{ \Big(\frac{\partial^2 u}{\partial \vec{\nu}^2} - \nabla\phi \cdot \nabla u \Big) \frac{\partial v}{\partial \vec{\nu}} + v \langle D\phi, \mathrm{Proj}_{\partial\Omega}(D_\phi^2 u \cdot \vec{\nu}) \rangle_{\partial\Omega} - v \frac{\partial \mathbb{L}_\phi u}{\partial \vec{\nu}} \\
&\quad - v \ \mathrm{div}_{\partial\Omega}(\mathrm{Proj}_{\partial\Omega}(D_\phi^2 u) \cdot \vec{\nu}) \Big\} \mathrm{e}^{-\phi} \mathrm{d}S + \int_\Omega \mathbb{L}_\phi^2 u \ v \mathrm{e}^{-\phi} \mathrm{d}x.
\end{aligned}
$$

最后, 整理得到

$$
\begin{aligned}
a(u,v) &= \int_{\partial\Omega} \Big\{ \tau \frac{\partial u}{\partial \vec{\nu}} - (1-\sigma)[\mathrm{div}_{\partial\Omega}(\mathrm{Proj}_{\partial\Omega}(D_\phi^2 u \cdot \vec{\nu})) - \langle D\phi, \mathrm{Proj}_{\partial\Omega}(D_\phi^2 u \cdot \vec{\nu}) \rangle_{\partial\Omega}] \\
&\qquad - \frac{\partial \mathbb{L}_\phi u}{\partial \vec{\nu}} \Big\} v \mathrm{e}^{-\phi} \mathrm{d}S + \int_{\partial\Omega} \Big[(1-\sigma) \Big(\frac{\partial^2 u}{\partial \vec{\nu}^2} - \nabla\phi \cdot \nabla u \Big) + \sigma \mathbb{L}_\phi u \Big] \frac{\partial v}{\partial \vec{\nu}} \mathrm{e}^{-\phi} \mathrm{d}S \\
&\qquad + \int_\Omega (\mathbb{L}_\phi^2 u - \tau \mathbb{L}_\phi u) v \ \mathrm{e}^{-\phi} \mathrm{d}\mu \\
&= \Gamma \int_\Omega uv \mathrm{d}\mu.
\end{aligned}
$$

由于上式对于任意的 $v \in H^2(\Omega)$ 均成立, 不难得到

$$
\begin{cases}
\mathbb{L}_\phi^2 u - \tau \mathbb{L}_\phi u = \Gamma u, & \text{在 } \Omega \text{内}, \\
(1-\sigma) \Big(\dfrac{\partial^2 u}{\partial \vec{\nu}^2} - \nabla\phi \cdot \nabla u \Big) + \sigma \mathbb{L}_\phi u = 0, & \text{在 } \partial\Omega \text{上}, \\
\tau \dfrac{\partial u}{\partial \vec{\nu}} - (1-\sigma)[\mathrm{div}_{\partial\Omega}(\mathrm{Proj}_{\partial\Omega}(D_\phi^2 u \cdot \vec{\nu})) & \\
-\langle D\phi, \mathrm{Proj}_{\partial\Omega}(D_\phi^2 u \cdot \vec{\nu}) \rangle_{\partial\Omega}] - \dfrac{\partial \mathbb{L}_\phi u}{\partial \vec{\nu}} = 0, & \text{在 } \partial\Omega \text{上}.
\end{cases}
$$

§2.2 谱结构

在本小节中, 我们将讨论离散谱的存在性问题. 首先, 利用 Cauchy-Schwarz 不等式可得如下结论.

性质 2.1 对任意函数 $u \in H^2(\Omega)$, 有 $(\Delta u)^2 \leqslant n|D^2 u|^2$.

双线性形式 $a(u,v)$ 涉及二阶项 $|D^2 u|$ 和 $|\Delta u|$, 因此, 我们讨论离散谱的存在性问题时, 性质 2.1 中不等式的应用是必不可少的.

引理 2.1 对于谱问题 (1.1), 如果参数 $\tau \geqslant 0$, $\sigma \in \big(-\frac{1}{n-1}, 1\big)$, $|\phi| \leqslant B$, 且

$$
|D\phi|^2 \leqslant \mathrm{A} = \min \Big\{ \frac{1-\sigma}{2\mathrm{e}^B \sqrt{n(\mathrm{C}+1)}}, \frac{1-\sigma+\sigma n}{2\mathrm{e}^B \sqrt{n(\mathrm{C}+1)}} \Big\},
$$

那么算子 $\mathbb{L}_\phi^2 - \tau \mathbb{L}_\phi$ 有离散谱, 谱中每个元素 (即特征值) 具有有限重数, 并且可按如下单调不减的方式进行排列:

$$
0 = \Gamma_1 < \Gamma_2 \leqslant \Gamma \leqslant \cdots \uparrow \infty.
$$

引理 2.1 的证明 已知

$$\begin{aligned}a(u,u)&=\int_\Omega(1-\sigma)D_\phi^2u:D_\phi^2u+\sigma|\mathbb{L}_\phi u|^2+\tau|Du|^2\mathrm{d}\mu\\&=\int_\Omega(1-\sigma)|D^2u|^2+\sigma|\Delta u|^2-2\Delta uD\phi\cdot Du+|D\phi\cdot Du|^2+\tau|Du|^2\mathrm{d}\mu.\end{aligned}$$

只需证明二次型 $a(\cdot,\cdot)$ 是有界且强制的.

先证有界性. 分两种情况讨论:

(i) 当 $0\leqslant\sigma<1$ 时,

$$\begin{aligned}a(u,u)&\leqslant\int_\Omega(1-\sigma)|D^2u|^2+\sigma|\Delta u|^2+2|\Delta u|\ |D\phi\cdot Du|+|D\phi\cdot Du|^2+\tau|Du|^2\mathrm{d}\mu\\&\leqslant\int_\Omega[1+\sigma(n-1)]|D^2u|^2+2\sqrt{n}|D^2u|\ |D\phi\cdot Du|+|D\phi\cdot Du|^2+\tau|Du|^2\mathrm{d}\mu\\&\leqslant[1+\sigma(n-1)]\|D^2u\|^2+2\sqrt{n}\ \|D^2u\|\ \|D\phi\cdot Du\|+\|D\phi\cdot Du\|^2+\tau\|Du\|^2.\end{aligned}$$

又因为 $|D\phi|^2\leqslant\mathrm{A}$, 且 $u\in H^2(\Omega)$, 易得 $a(\cdot,\cdot)$ 有界.

(ii) 当 $-\frac{1}{n-1}<\sigma<0$ 时,

$$\begin{aligned}a(u,u)&\leqslant\int_\Omega(1-\sigma)|D^2u|^2+2|\Delta u|\ |D\phi\cdot Du|+|D\phi\cdot Du|^2+\tau|Du|^2\mathrm{d}\mu\\&\leqslant(1-\sigma)\|D^2u\|^2+2\sqrt{n}\ \|D^2u\|\ \|D\phi\cdot Du\|+\|D\phi\cdot Du\|^2+\tau\|Du\|^2.\end{aligned}$$

显然, $a(\cdot,\cdot)$ 有界.

下面我们来证明 $a(\cdot,\cdot)$ 是强制的, 即只需证明存在正常数 A_1 和 A_2, 使得

$$a(u,u)+\mathrm{A}_1\|u\|\geqslant\mathrm{A}_2\|u\|_{\mathrm{H}^2(\Omega)}.$$

由 Poincaré 不等式, 我们有

$$\mathrm{C}\int_\Omega|D^2u|^2\mathrm{d}x\geqslant\int_\Omega|Du|^2\mathrm{d}x,$$

这里 C 为依赖于 n 与 Ω 的正常数, 则

$$\int_\Omega|D^2u|^2\mathrm{d}\mu\geqslant\mathrm{e}^{-B}\int_\Omega|D^2u|^2\mathrm{d}x\geqslant\frac{1}{\mathrm{C}\mathrm{e}^{2B}}\int_\Omega|Du|^2\mathrm{d}\mu.$$

分两种情况讨论: (i) 当 $-\frac{1}{n-1}<\sigma<0$ 时,

$$\begin{aligned}a(u,u)&\geqslant\int_\Omega(1-\sigma)|D^2u|^2+\sigma|\Delta u|^2-2|\Delta u|\ |D\phi\cdot Du|+\tau|Du|^2\mathrm{d}\mu\\&\geqslant(1-\sigma+\sigma n)\|D^2u\|^2-2\sqrt{n}\|D^2u\|\ \|D\phi\cdot Du\|+\tau\|Du\|^2\\&\geqslant\|D^2u\|[(1-\sigma+\sigma n)\|D^2u\|-2\sqrt{n}\|D\phi\cdot Du\|]+\tau\|Du\|^2.\end{aligned}$$

此时, 只需 $|D\phi|<\frac{1-\sigma+\sigma n}{2\sqrt{n}\mathrm{C}\mathrm{e}^B}$, 即可得到 $(1-\sigma+\sigma n)\|D^2u\|-2\sqrt{n}\|D\phi\cdot Du\|>0$. 因此, $a(\cdot,\cdot)$ 是强制的;

(ii) 当 $0\leqslant\sigma<1$ 时,

$$a(u,u)\geqslant\int_\Omega(1-\sigma)|D^2u|^2-2|\Delta u|\ |D\phi\cdot Du|+\tau|Du|^2\mathrm{d}\mu$$

$$\begin{aligned}&\geqslant (1-\sigma)\|D^2u\|^2 - 2\sqrt{n}\|D^2u\|\ \|D\phi\cdot Du\| + \tau\|Du\|^2\\&= \|D^2u\|[(1-\sigma)\|D^2u\| - 2\sqrt{n}\|D\phi\cdot Du\|] + \tau\|Du\|^2.\end{aligned}$$

故当 $|D\phi| < \frac{1-\sigma}{2\mathrm{e}^B\sqrt{n}\mathrm{C}}$ 时, $(1-\sigma)\|D^2u\| - 2\sqrt{n}\|D\phi\cdot Du > 0$. 因此, $a(\cdot,\cdot)$ 是强制的.

综上所述, 双线性形式 $a(\cdot,\cdot)$ 所对应的特征值问题 (1.1) 存在弱解形式给出的特征函数, 相应的特征值是有限重的, 算子 $\mathbb{L}_\phi^2 - \tau\mathbb{L}_\phi$ 有非负离散谱.

§3 主要定理的证明

定理 1.1 的证明 本节中, 我们将使用文 [1] 中介绍的方法来推导定理 1.1 中给出的估计. 设 $\phi_1,\phi_2,\cdots,\phi_m$ 表示 $H^2(\Omega)$ 中对应于特征值 $\Gamma_1,\Gamma_2,\cdots,\Gamma_m$ 的特征函数. 定义

$$\Phi(x,y) = \sum_{j=1}^m \phi_j(x)\phi_j(y).$$

用 $\widehat{\Phi}(z,y)$ 表示 $\Phi(x,y)$ 关于变量 x 的傅里叶变换, 使得 $\widehat{\Phi}(z,y) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}\int_\Omega \mathrm{e}^{\mathrm{i}x\cdot z}\Phi(x,y)\mathrm{e}^{-\phi}\mathrm{d}x$, 即 $(2\pi)^{\frac{n}{2}}\widehat{\Phi}(z,y) = \sum\limits_{j=1}^m \phi_j(y)\int_\Omega \mathrm{e}^{\mathrm{i}x\cdot z}\phi_j(x)\mathrm{e}^{-\phi}\mathrm{d}x$. 设 $h_z(y) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}y\cdot z}$, 可知

$$(2\pi)^{\frac{n}{2}}\widehat{\Phi}(z,y) = \sum_{j=1}^m \phi_j(y)\int_\Omega \mathrm{e}^{\mathrm{i}x\cdot z}\phi_j(x)\mathrm{e}^{-\phi}\mathrm{d}x$$

是函数 $h_z(y)$ 在由 $\phi_1,\phi_2,\cdots,\phi_m$ 张成的 $L^2(\Omega)$ 子空间上的正交投影. 取 $\rho(z,y) = h_z(y) - (2\pi)^{\frac{n}{2}}\widehat{\Phi}(z,y)$ 为 Γ_{m+1} 的 Rayleigh 商的测试函数, $\rho(z,y)\in H^2(\Omega)$, 则有

$$\begin{aligned}\Gamma_{m+1} &\leqslant \mathrm{Q}[\rho(z,y)]\\&= \inf_r\Big\{\frac{\int_{B_r}\int_\Omega(1-\sigma)\overline{D_\phi^2\rho} : D_\phi^2\rho\ \mathrm{d}\mu_y\mathrm{d}\mu_z + \sigma\int_{B_r}\int_\Omega|\mathbb{L}_\phi\rho|^2\mathrm{d}\mu_y\mathrm{d}\mu_z}{\int_{B_r}\int_\Omega|\rho|^2\ \mathrm{d}\mu_y\mathrm{d}\mu_z}\\&\quad + \frac{\tau\int_{B_r}\int_\Omega|D\rho|^2\mathrm{d}\mu_y\mathrm{d}\mu_z}{\int_{B_r}\int_\Omega|\rho|^2\ \mathrm{d}\mu_y\mathrm{d}\mu_z}\Big\}\\&:= \inf_r\Big\{\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{D}}\Big\},\end{aligned}$$

其中 $B_r = \{z\in\mathbb{R}^n \mid |z| < r\}$. 下面, 我们将分别对分子分母进行计算.

分母 D 计算如下:

$$\begin{aligned}\mathrm{D} &= \int_{B_r}\int_\Omega|\rho|^2\mathrm{d}\mu_y\mathrm{d}\mu_z\\&= \int_{B_r}\int_\Omega[h_z(y) - (2\pi)^{\frac{n}{2}}\widehat{\Phi}(z,y)]\overline{[h_z(y) - (2\pi)^{\frac{n}{2}}\widehat{\Phi}(z,y)]}\mathrm{d}\mu_y\mathrm{d}\mu_z\\&= \int_{B_r}\int_\Omega|h_z(y)|^2\mathrm{d}\mu_y\mathrm{d}\mu_z - 2(2\pi)^{\frac{n}{2}}\mathrm{Re}\Big\{\int_{B_r}\int_\Omega h_z(y)\overline{\widehat{\Phi}(z,y)}\mathrm{d}\mu_y\mathrm{d}\mu_z\Big\}\\&\quad + (2\pi)^n\int_{B_r}\int_\Omega|\widehat{\Phi}(z,y)|^2\mathrm{d}\mu_y\mathrm{d}\mu_z\end{aligned}$$

$$= \mu(\Omega)\int_{B_r} \mathrm{d}\mu_z - (2\pi)^n \sum_{i=1}^{m} \int_{B_r} |\widehat{\phi}_i(z)|^2 \mathrm{d}\mu_z.$$

下面计算分子 N:

$$\begin{aligned}
\mathrm{N} = &(1-\sigma)\int_{B_r}\int_{\Omega}[|D^2 h_z(y)|^2 + (2\pi)^n |D^2\widehat{\Phi}(z,y)|^2 + |Dh_z(y)\cdot D\phi|^2 \\
&+ (2\pi)^n |D\phi\cdot D\widehat{\Phi}(z,y)|^2]\mathrm{d}\mu_y \mathrm{d}\mu_z \\
&+ \sigma\int_{B_r}\int_{\Omega}[|\Delta h_z(y)|^2 + (2\pi)^n |\Delta\widehat{\Phi}(z,y)|^2 + |Dh_z(y)\cdot D\phi|^2 \\
&+ (2\pi)^n |D\phi\cdot D\widehat{\Phi}(z,y)|^2]\mathrm{d}\mu_y \mathrm{d}\mu_z \\
&+ 2(1-\sigma)\mathrm{Re}\Big\{\int_{B_r}\int_{\Omega}[-(2\pi)^{\frac{n}{2}} D^2 h_z(y) : \overline{D^2\widehat{\Phi}(z,y)} - \Delta h_z(y)\overline{D\phi\cdot Dh_z(y)} \\
&+ (2\pi)^{\frac{n}{2}}\Delta h_z(y)\overline{D\phi\cdot D\widehat{\Phi}(z,y)}]\mathrm{d}\mu_y \mathrm{d}\mu_z\Big\} \\
&+ 2\sigma\mathrm{Re}\Big\{\int_{B_r}\int_{\Omega}[-(2\pi)^{\frac{n}{2}}\Delta h_z(y)\overline{\Delta\widehat{\Phi}(z,y)} - \Delta h_z(y)\overline{D\phi\cdot Dh_z(y)} \\
&+ (2\pi)^{\frac{n}{2}}\Delta h_z(y)\overline{D\phi\cdot D\widehat{\Phi}(z,y)}]\mathrm{d}\mu_y \mathrm{d}\mu_z\Big\} \\
&+ 2(1-\sigma)\mathrm{Re}\Big\{\int_{B_r}\int_{\Omega}(2\pi)^{\frac{n}{2}} D\phi\cdot Dh_z(y)\overline{\Delta\widehat{\Phi}(z,y)} - (2\pi)^n D\phi\cdot D\widehat{\Phi}(z,y)\overline{\Delta\widehat{\Phi}(z,y)} \\
&- (2\pi)^{\frac{n}{2}}\ D\phi\cdot Dh_z(y)\overline{D\phi\cdot D\widehat{\Phi}(z,y)}\mathrm{d}\mu_y \mathrm{d}\mu_z\Big\} \\
&+ 2\sigma\mathrm{Re}\Big\{\int_{B_r}\int_{\Omega}(2\pi)^{\frac{n}{2}} D\phi\cdot Dh_z(y)\overline{\Delta\widehat{\Phi}(z,y)} - (2\pi)^n D\phi\cdot D\widehat{\Phi}(z,y)\overline{\Delta\widehat{\Phi}(z,y)} \\
&- (2\pi)^{\frac{n}{2}} D\phi\cdot Dh_z(y)\overline{D\phi\cdot D\widehat{\Phi}(z,y)}\mathrm{d}\mu_y \mathrm{d}\mu_z\Big\} \\
&+ \tau\int_{B_r}\int_{\Omega}|Dh_z(y)|^2\mathrm{d}\mu_y \mathrm{d}\mu_z - 2(2\pi)^{\frac{n}{2}}\tau\mathrm{Re}\Big\{\int_{B_r}\int_{\Omega} Dh_z(y)\cdot\overline{D\widehat{\Phi}(z,y)}\ \mathrm{d}\mu_y \mathrm{d}\mu_z\Big\} \\
&+ (2\pi)^n\tau\int_{B_r}\int_{\Omega}|D\widehat{\Phi}(z,y)|^2\mathrm{d}\mu_y \mathrm{d}\mu_z.
\end{aligned}$$

根据弱形式 $a(u,v)$ 及文中算子的定义, 我们可将分子简化为

$$\begin{aligned}
\mathrm{N} = &-2(2\pi)^n\sum_{i=1}^{m}\Gamma_i\int_{B_r}|\widehat{\phi}_i(z)|^2\mathrm{d}\mu_z + (2\pi)^n\int_{B_r}\int_{\Omega}[|D\phi\cdot D\widehat{\Phi}(z,y)|^2 + \tau|D\widehat{\Phi}(z,y)|^2]\mathrm{d}\mu_y \mathrm{d}\mu_z \\
&- 2(2\pi)^n\mathrm{Re}\Big\{\int_{B_r}\int_{\Omega}[(1-\sigma)D\phi\cdot D\widehat{\Phi}(z,y)\overline{\Delta\widehat{\Phi}(z,y)} + \sigma D\phi\cdot D\widehat{\Phi}(z,y)\overline{\Delta\widehat{\Phi}(z,y)}]\mathrm{d}\mu_y \mathrm{d}\mu_z\Big\} \\
&+ (2\pi)^n(1-\sigma)\int_{B_r}\int_{\Omega}|D^2\widehat{\Phi}(z,y)|^2\mathrm{d}\mu_y \mathrm{d}\mu_z + (2\pi)^n\sigma\int_{B_r}\int_{\Omega}|\Delta\widehat{\Phi}(z,y)|^2\mathrm{d}\mu_y \mathrm{d}\mu_z \\
&+ \int_{B_r}\int_{\Omega}[(1-\sigma)D_{\phi}^2 h_z(y) : \overline{D_{\phi}^2 h_z(y)} + \sigma|\mathbb{L}_{\phi} h_z(y)|^2 + \tau|Dh_z(y)|^2]\mathrm{d}\mu_y \mathrm{d}\mu_z.
\end{aligned}$$

代入边界条件, 可得

$$\mathrm{N} = -2(2\pi)^n\sum_{i=1}^{m}\Gamma_i\int_{B_r}|\widehat{\phi}_i(z)|^2\mathrm{d}\mu_z + \int_{B_r}\int_{\Omega}[(1-\sigma)D_{\phi}^2 h_z(y) : \overline{D_{\phi}^2 h_z(y)} + \sigma|\mathbb{L}_{\phi} h_z(y)|^2$$

$$+\tau|\nabla h_z(y)|^2]\mathrm{d}\mu_y\mathrm{d}\mu_z+\int_{B_r}\int_\Omega[(1-\sigma)D_\phi^2\widehat{\Phi}(z,y):\overline{D_\phi^2\widehat{\Phi}(z,y)}+\sigma|\mathbb{L}_\phi\widehat{\Phi}(z,y)|^2$$

$$+\tau|D\widehat{\Phi}(z,y)|^2]\mathrm{d}\mu_y\mathrm{d}\mu_z$$

$$=-(2\pi)^n\sum_{i=1}^m\Gamma_i\int_{B_r}|\widehat{\phi}_i(z)|^2\mathrm{d}\mu_z+\int_{B_r}\int_\Omega[(1-\sigma)|D_\phi^2h_z(y)|^2+\sigma|\mathbb{L}_\phi h_z(y)|^2$$

$$+\tau|Dh_z(y)|^2]\mathrm{d}\mu_y\mathrm{d}\mu_z,$$

故

$$\mathrm{N}\leqslant-(2\pi)^n\sum_{i=1}^m\Gamma_i\int_{B_r}|\widehat{\phi}_i|^2\mathrm{d}z+\mu(\Omega)\int_{B_r}(|z|^4+|z|^2|D\phi|^2+\tau|z|^2)\mathrm{d}\mu_z.$$

又因为 $|D\phi|^2\leqslant \mathrm{A}$, 所以

$$\mathrm{N}\leqslant-(2\pi)^n\sum_{i=1}^m\Gamma_i\int_{B_r}|\widehat{\phi}_i|^2\mathrm{d}z+\mu(\Omega)\int_{B_r}\{|z|^4+(\tau+\mathrm{A})|z|^2\}\mathrm{d}\mu_z.$$

可得

$$\Gamma_{m+1}\leqslant\inf_r\frac{-(2\pi)^n\sum\limits_{i=1}^m\Gamma_i\int_{B_r}|\widehat{\phi}_i|^2\mathrm{d}\mu_z+n\omega_n\mu(\Omega)\mathrm{e}^B\big\{\frac{r^{n+4}}{n+4}+(\tau+\mathrm{A})\frac{r^{n+2}}{n+2}\big\}}{\mu(\Omega)\omega_n\mathrm{e}^{-B}r^n-(2\pi)^n\sum\limits_{i=1}^m\int_{B_r}|\widehat{\phi}_i|^2\mathrm{d}\mu_z},\tag{3.1}$$

从而下确界在集合 $\big\{r|r>2\pi\big(\frac{m\mathrm{e}^B}{\mu(\Omega)\omega_n}\big)^{\frac1n}\big\}$ 上取得. 对每个 i, $\int_{B_r}|\widehat{\phi}_i|^2\mathrm{d}\mu_z$ 显然有界, 不妨使得

$$\int_{B_r}|\widehat{\phi}_i|^2\mathrm{d}\mu_z\leqslant1,\tag{3.2}$$

这是显然可以成立的. 由文 [1, 引理A1](另可见文 [14]), 可得

$$\sum_{i=1}^m\Gamma_i\leqslant\inf_{r>2\pi\big(\frac{m\mathrm{e}^B}{\mu(\Omega)\omega_n}\big)^{\frac1n}}\frac{n\omega_n\mu(\Omega)\mathrm{e}^B}{(2\pi)^n}\Big\{\frac{r^{n+4}}{n+4}+(\tau+\mathrm{A})\frac{r^{n+2}}{n+2}\Big\},$$

因此当 $r\to2\pi\big(\frac{me^B}{\mu(\Omega)\omega_n}\big)^{\frac1n}$ 时, 即可得到定理 1.1.

下面, 我们简单证明定理 1.2.

定理 1.2 的证明 由定理 1.1 的证明可知,

$$\Gamma_{m+1}\leqslant\inf_r\frac{\mu(\Omega)\int_{B_r}[|z|^4+(\tau+|D\phi|^2)|z|^2]\mathrm{d}\mu_z-(2\pi)^n\sum\limits_{i=1}^m\Gamma_i\int_{B_r}|\widehat{\phi}_i|^2\mathrm{d}\mu_z}{\mu(\Omega)\int_{B_r}\mathrm{d}\mu_z-(2\pi)^n\sum\limits_{i=1}^m\int_{B_r}|\widehat{\phi}_i(z)|^2\mathrm{d}\mu_z},\tag{3.3}$$

这里 $\phi=\frac{|x^2|}{4}$. 同理, 根据 (3.2) 及文 [1, 引理A1](另可见文 [14]), 可得

$$\sum_{i=1}^m\Gamma_i\leqslant\inf_{r>2\pi\big(\frac{m\mathrm{e}^{\mathrm{A}'}}{\mu(\Omega)\omega_n}\big)^{\frac1n}}\frac{n\omega_n\mu(\Omega)}{(2\pi)^n}\Big[\frac{r^{n+4}}{n+4}+(\tau+\mathrm{A}')\frac{r^{n+2}}{n+2}\Big].$$

因此当 $r\to2\pi\big(\frac{m\mathrm{e}^{\mathrm{A}'}}{\mu(\Omega)\omega_n}\big)^{\frac1n}$ 时, 可得到定理 1.2.

推论 1.1 及推论 1.2 的证明 由 (3.1) 及 (3.2), 即可得到推论 1.1. 同理, 由 (3.2) 及 (3.3), 即可得到推论 1.2.

参　考　文　献

[1] Brandolini B, Chiacchio F, Langford J J. Estimates for sums of eigenvalues of the free plate via the Fourier transform [J]. *Commun Pure Appl Anal*, 2020, 19(1):113–122.

[2] Li S, Mao J. Estimates for sums of eigenvalues of the free plate with nonzero poisson's ratio [J]. *Proc Amer Math Soc*, 2021, 149(5):2167–2177.

[3] Chasman L M. An isoperimetric inequality for fundamental tones of free plates [J]. *Commun Math Phys*, 2011, 303(2):421–449.

[4] Chasman L M. An isoperimetric inequality for fundamental tones of free plates with nonzero Poisson's ratio [J]. *Appl Anal*, 2016, 8(3):1700–1735.

[5] Du F, Mao J. Estimates for the first eigenvalue of the drifting Laplace and the p-Laplace operators on submanifolds with bounded mean curvature [J]. *J Math Anal Appl*, 2017, 456(2):787–795.

[6] Du F, Mao J, Wang Q L, et al. Universal inequalities of the poly-drifting Laplacian on the Gaussian and cylinder shrinking solitons [J]. *Ann Glob Anal Geom*, 2015, 48(3):255–268.

[7] Du F, Mao J, Wang Q L, et al. Eigenvalue inequalities for the buckling problem of the drifting Laplacian on Ricci solitons [J]. *J Differ Equat*, 2016, 260(7):5533–5564.

[8] Du F, Mao J, Wang Q L, et al. Estimates for eigenvalues of weighted Laplacian and weighted p-Laplacian [J]. *Hiroshima Math J*, 2021, 51(3):335–353.

[9] Du F, Mao J, Wu C X, et al. Eigenvalue comparisons in Steklov eigenvalue problem and some other eigenvalue estimates [J]. *Rev Mat Complut*, 2020, 33(2):389–414.

[10] Lu W, Mao J, Wu C X, et al. Eigenvalue estimates for the drifting Laplacian and the p-Laplacian on submanifolds of warped products [J]. *App Ana*, 2021, 100(11):2275–2300.

[11] Mao J, Xiang N. Estimates for the first eigenvalue of the drifting Laplacian on embedded hypersurfaces [J]. *Hokkaido Math J*, 2018, 47(3):625–636.

[12] Mao J, Tu R Q, Zeng K. Eigenvalue estimates for submanifolds in Hadamard manifolds and product manifolds $\mathrm{N} \times \mathrm{R}$ [J]. *Hiroshima Math J*, 2020, 50(1):17–42.

[13] Colding T, Minicozzi II W P. Generic mean curvature flow I: generic singularities [J]. *Ann Math*, 2012, 175(2):755–833.

[14] Li L, Tang L. Some upper bounds for sums of eigenoalues of the Neumann Laplacian [J]. *Proc Amer Math Soc*, 2006, 134 (11):3301–3307.

Kröger-Type Estimates for a Neumann-Type Eigenvalue Problem

GAO Yan[1] LI Shan[2] MAO Jing[3] WU Chuanxi[2]

[1]Faculty of Mathematics and Statistics, Key Laboratory of Applied Mathematics of Hubei Province, Hubei University, Wuhan 430062, China; College of Information Science and Engineering, Wuhan Business University, Wuhan 430056, China. E-mail: sabrina8128@163.com

[2]Faculty of Mathematics and Statistics, Key Laboratory of Applied Mathematics of Hubei Province, Hubei University, Wuhan 430062, China. E-mail: 1981394637@qq.com; cxwu@hubu.edu.cn

[3]Corresponding author. Faculty of Mathematics and Statistics, Key Laboratory of Applied Mathematics of Hubei Province, Hubei University, Wuhan 430062, China. E-mail: jiner120@163.com

Abstract In this paper, the authors consider a Neumann-type eigenvalue problem related to the weighted Laplace operator on compact smooth metric measure space with boundary, and by using the Fourier transform, the authors successfully give the Kröger-type estimates for sums of the eigenvalues of the eigenvalue problem.

Keywords The weighted Laplace operator, Fourier transform, Kröger-Type estimates

2000 MR Subject Classification 53E99

The English translation of this paper will be published in

Chinese Journal of Contemporary Mathematics, Vol. 44 No. 2, 2023

by ALLERTON PRESS, INC., USA