数 学 年 刊
2017, 38A(1):73–90
DOI: 10.16205/j.cnki.cama.2017.0007

p-进中心函数空间及奇异积分算子*

吴清艳[1] 陆善镇[2] 傅尊伟[3]

提要 引入了几类 p-进中心函数空间, 包括 p-进 A^q 和 B^q 空间、p-进 λ-中心 BMO 空间以及 p-进中心 Morrey 空间, 得到了 p-进 A^q 空间与 B^q 空间的对偶性、p-进 λ-中心 BMO 空间和中心 Morrey 空间的特征, 研究了这些空间与加权 p-进 Lebesgue 空间之间的关系. 另外, 还建立了一类奇异积分算子在 p-进中心 Morrey 空间中的有界性, 更进一步, 得到了这类算子交换子在 p-进中心 Morrey 空间中的 λ-中心 BMO 估计.

关键词 p-进 λ-中心 BMO 空间, p-进中心 Morrey 空间, 奇异积分算子
MR (2000) 主题分类 42B20, 11F85, 22E50, 46A20
中图法分类 O174.2
文献标志码 A
文章编号 1000-8314(2017)01-0073-18

1 引 言

为了推广 Wiener 关于描述函数在无穷远点处行为的思想 [1−2], 文 [3] 引入了一对对偶的 Banach 空间: $A^q(\mathbb{R}^n)$ 和 $B^{q'}(\mathbb{R}^n)$ 空间, 其中 $\frac{1}{q}+\frac{1}{q'}=1$. 具体地说, $A^q(\mathbb{R}^n)$ 空间可表示为一些特定加权 $L^q(\mathbb{R}^n)$ 的并; 而空间 $B^{q'}(\mathbb{R}^n)$ 可以表示为相应加权 $L^{q'}(\mathbb{R}^n)$ 空间的交. 文 [4] 给出 $A^q(\mathbb{R}^n)$ 的等价范数如下:

$$\|f\|_{A^q(\mathbb{R}^n)}=\sum_{k=1}^{\infty}2^{kn/q'}\|f\chi_{P_k}\|_{L^q(\mathbb{R}^n)},$$

其中 χ_{P_k} 是 P_k 的特征函数, 且

$$P_1=\{x\in\mathbb{R}^n:|x|\leqslant 2\},\quad P_k=\{x\in\mathbb{R}^n:2^{k-1}<|x|\leqslant 2^k\},\quad k\geqslant 2.$$

通过对偶性, 空间 $B^q(\mathbb{R}^n)$ 可描述为

$$\|f\|_{B^q(\mathbb{R}^n)}=\sup_{k\geqslant 1}(2^{-kn/q}\|f\chi_{P_k}\|_{L^q(\mathbb{R}^n)}).$$

文 [5] (也可见文 [6]) 引入相应于 Beurling 代数 $A^q(\mathbb{R}^n)$ 空间的原子空间 $HA^q(\mathbb{R}^n)$, 并且证明了它的对偶为 $\mathrm{CMO}^{q'}(\mathbb{R}^n)$, 该空间由如下条件定义:

$$\|f\|_{\mathrm{CMO}^{q'}(\mathbb{R}^n)}:=\sup_{R\geqslant 1}\Big(\frac{1}{|B(0,R)|}\int_{B(0,R)}|f(x)-f_{B(0,R)}|^{q'}\mathrm{d}x\Big)^{\frac{1}{q'}}<\infty.$$

文 [7–8] 引入了一些新的 Hardy 空间, 这些空间被证明是 $HA^q(\mathbb{R}^n)$ 空间的齐次空间, 并且指出这些新的 Hardy 空间的对偶空间是如下定义的有界平均震荡空间 $\mathrm{CBMO}^q(\mathbb{R}^n)$:

$$\|f\|_{\mathrm{CBMO}^q(\mathbb{R}^n)}:=\sup_{R>0}\Big(\frac{1}{|B(0,R)|}\int_{B(0,R)}|f(x)-f_{B(0,R)}|^q\mathrm{d}x\Big)^{\frac{1}{q}}<\infty.$$

本文 2015 年 3 月 4 日收到, 2016 年 4 月 26 日收到修改稿.
[1]临沂大学数学系, 山东 临沂 276005. E-mail: wuqingyan@lyu.edu.cn
[2]北京师范大学数学科学学院, 北京 100875. E-mail: lusz@bnu.edu.cn
[3]通讯作者. 临沂大学数学系, 山东 临沂 276005. E-mail: zwfu@mail.bnu.edu.cn
*本文受到国家自然科学基金 (No. 11271175, No. 11301248, No. 11671185) 的资助.

受 Chen 和 Lau[5] 的影响， Lu 和 Yang[7−8], Alvarez, Guzmán-Partida 和 Lakey[9] 研究了中心 BMO 空间和 Morrey 空间之间的关系. 更进一步，他们分别引入了 λ-中心有界平均震荡空间和中心 Morrey 空间. 本文将研究 p-进域中的这些中心函数空间.

p-进域 $\mathbb{Q}_p$ 定义为有理数域 $\mathbb{Q}$ 关于非阿基米德 p-进范数 $|\cdot|_p$ 的完备化. 该范数定义如下： $|0|_p=0$; 如果任意非零有理数 x 表示为 $x=p^\gamma\frac{m}{n}$, 其中 γ 为一整数，且整数 m, n 不能被 p 整除，则 $|x|_p=p^{-\gamma}$. 易见，该范数满足如下性质：

(i) $|x|_p=0$ 当且仅当 $x=0$;

(ii) 对任意 $x,y\in\mathbb{Q}_p$, 有 $|xy|_p=|x|_p|y|_p$;

(iii) 对任意 $x,y\in\mathbb{Q}_p$, 有 $|x+y|_p\leqslant\max\{|x|_p,|y|_p\}$. 且若 $|x|_p\neq|y|_p$, 则 $|x+y|_p=\max\{|x|_p,|y|_p\}$.

众所周知， $\mathbb{Q}_p$ 是非阿基米德局部域的典型模型，由标准的 p-进分析 [10] 可知，任意非零 p-进数 $x\in\mathbb{Q}_p$ 可以唯一表示为标准级数

$$x=p^\gamma\sum_{j=0}^{\infty}a_jp^j,\quad \gamma=\gamma(x)\in\mathbb{Z}, \tag{1.1}$$

其中 a_j 为整数， $0\leqslant a_j\leqslant p-1$, $a_0\neq 0$. 由于 $|a_jp^j|_p=p^{-j}$, 级数 (1.1) 在 p-进范数下收敛.

空间 $\mathbb{Q}_p^n$ 表示 $\mathbb{Q}_p$ 上由所有点 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 组成的向量空间. $\mathbb{Q}_p^n$ 上的 p-进范数为

$$|x|_p:=\max_{1\leqslant j\leqslant n}|x_j|_p,\quad x\in\mathbb{Q}_p^n.$$

记 $B_\gamma(a)=\{x\in\mathbb{Q}_p^n:|x-a|_p\leqslant p^\gamma\}$ 为以 $a\in\mathbb{Q}_p^n$ 为心，p^γ 为半径的球；$S_\gamma(a)=\{x\in\mathbb{Q}_p^n:|x-a|_p=p^\gamma\}$ 为以 $a\in\mathbb{Q}_p^n$ 为心，p^γ 为半径的球面，$\gamma\in\mathbb{Z}$. 显然 $S_\gamma(a)=B_\gamma(a)\backslash B_{\gamma-1}(a)$, 且

$$B_\gamma(a)=\bigcup_{k\leqslant\gamma}S_k(a),\quad \bigcup_{\gamma=-\infty}^{+\infty}B_\gamma(a)=\bigcup_{\gamma=-\infty}^{+\infty}S_\gamma(a)=\mathbb{Q}_p^n. \tag{1.2}$$

令 $B_\gamma(0)=B_\gamma$, $S_\gamma(0)=S_\gamma$.

在 $\mathbb{Q}_p^n$ 上存在 Haar 测度 $\mathrm{d}x$, 该测度在相差一个正常数因子的情况下是唯一的，并且是平移不变的. 通过如下等式将测度 $\mathrm{d}x$ 标准化：

$$\int_{B_0(0)}\mathrm{d}x=|B_0(0)|_H=1,$$

其中 $|E|_H$ 表示 $\mathbb{Q}_p^n$ 的可测子集 E 的 Haar 测度. 通过简单的计算可得，对任意的 $a\in\mathbb{Q}_p^n$,

$$|B_\gamma(a)|_H=p^{\gamma n},\quad |S_\gamma(a)|_H=p^{\gamma n}(1-p^{-n}).$$

关于 p-进域的更详细的介绍，参见文 [10–11].

近年来， p-进数在理论物理和数学物理中已得到广泛应用 (见 [10, 12–19] 及其参考文献). 新的数学问题也随之产生，如位势理论 [20−21] 、 p-进拟微分方程 [22−26] 等. 而 p-进域上的调和分析及相关的算子和空间理论也得到了进一步发展，如文 [11, 27–35].

在文 [36] 中，我们给出了 p-进中心有界平均震荡空间 $\mathrm{CBMO}^q(\mathbb{Q}_p^n)$:

$$\|f\|_{\mathrm{CBMO}^q(\mathbb{Q}_p^n)}:=\sup_{\gamma\in\mathbb{Z}}\Big(\frac{1}{|B_\gamma|_H}\int_{B_\gamma}|f(x)-f_{B_\gamma}|^q\mathrm{d}x\Big)^{\frac{1}{q}}<\infty,$$

其中 $f_{B_\gamma}=\frac{1}{|B_\gamma|_H}\int_{B_\gamma}f(x)\mathrm{d}x$. 空间 $\mathrm{CBMO}^q(\mathbb{Q}_p^n)$ 虽可看作是 $\mathrm{BMO}(\mathbb{Q}_p^n)$ 空间在原点处的局部版本，但它们又非常不同．例如，对任意 $1\leqslant q<\infty$, $\mathrm{BMO}(\mathbb{Q}_p^n)$ 中的函数可以通过下列条件描述：

$$\sup_{B\subset\mathbb{Q}_p^n}\Big(\frac{1}{|B|_H}\int_B|f(x)-f_B|^q\mathrm{d}x\Big)^{\frac{1}{q}},$$

其中 B 表示 $\mathbb{Q}_p^n$ 中的任意球．而空间 $\mathrm{CBMO}^q(\mathbb{Q}_p^n)$ 与 q 有关．若 $1\leqslant q_1<q_2<\infty$, 则 $\mathrm{CBMO}^{q_2}(\mathbb{Q}_p^n)$ 为 $\mathrm{CBMO}^{q_1}(\mathbb{Q}_p^n)$ 的一个真子集，且显然

$$L^\infty(\mathbb{Q}_p^n)\subset\mathrm{BMO}(\mathbb{Q}_p^n)\subset\mathrm{CBMO}^q(\mathbb{Q}_p^n).$$

本文中我们将继续研究 p-进域上的中心函数空间．第 2 节将引入 p-进 A^q 和 B^q 空间，并证明其基本性质．第 3 节将引入 p-进 λ-中心 BMO 空间及 λ-中心 Morrey 空间，并且研究 p-进 λ-中心 BMO 空间、 λ-中心 Morrey 空间和加权 Lebesgue 空间之间的关系．作为应用，第 4 节中将考虑下列由文 [11] 所定义的奇异积分算子的有界性．令 $\Omega\in L^\infty(\mathbb{Q}_p^n)$, $\Omega(p^kx)=\Omega(x)$, $k\in\mathbb{Z}$ 且 $\int_{|x|_p=1}\Omega(x)\mathrm{d}x=0$, 奇异积分算子 L_k 定义为

$$L_kf(x)=\int_{|z|_p>p^k}f(x-z)\frac{\Omega(z)}{|z|_p^n}\mathrm{d}z. \tag{1.3}$$

奇异积分算子 L 定义为 L_k 当 k 趋于 $-\infty$ 时的极限. 在一定条件下, 文 [11, 37] 得到 L_k 和 L 在局部域上是强 (q,q) $(1<q<\infty)$ 型和弱 $(1,1)$ 型的． Coifman, Rochberg 和 Weiss[38] 的一个著名结果表明奇异积分算子交换子在 $L^p(\mathbb{R}^n)$, $1<p<\infty$ 中有界的充要条件是象征函数 $b\in\mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n)$. 文 [39] 建立了带有粗糙核的奇异积分算子的交换子在中心 Morrey 空间中的 λ-中心 BMO 估计．受以上结果启发，在第 4 节中我们将研究 L_k 以及 L 在 p-进中心 Morrey 空间中的有界性．并且建立 L_k 和 L 的交换子在 p-进中心 Morrey 空间中的 λ-中心 BMO 估计．根据 p-进域的非阿基米德性质，我们将用 $f=f\chi_B+f\chi_{B^c}$ 来代替一般欧氏空间中的分解 $f=f\chi_{2B}+f\chi_{(2B)^c}$.

文章中字母 C 在不同的式子中将表示各种不同的常数.

2 p-进 A^q 和 B^q 空间

定义 2.1 令 $1\leqslant q\leqslant\infty$. 若函数 $f\in L^q_{\mathrm{loc}}(\mathbb{Q}_p^n)$ 满足

$$\|f\|_{A^q(\mathbb{Q}_p^n)}=\sum_{k=1}^{\infty}p^{kn/q'}\|f\chi_k\|_{L^q(\mathbb{Q}_p^n)}<\infty, \tag{2.1}$$

则称 f 属于空间 $A^q(\mathbb{Q}_p^n)$. 若函数 $f\in L^q_{\mathrm{loc}}(\mathbb{Q}_p^n)$ 满足

$$\|f\|_{B^q(\mathbb{Q}_p^n)}=\sup_{k\geqslant1}(p^{-kn/q}\|f\chi_k\|_{L^q(\mathbb{Q}_p^n)})<\infty, \tag{2.2}$$

则称 f 属于空间 $B^q(\mathbb{Q}_p^n)$. 这里 χ_1 表示 B_1 上的特征函数， χ_k 表示 S_k, $k=2,3,4,\cdots$ 上的特征函数.

我们定义 $\dot{A}^q(\mathbb{Q}_p^n)$ 和 $\dot{B}^q(\mathbb{Q}_p^n)$ 为 $A^q(\mathbb{Q}_p^n)$ 和 $B^q(\mathbb{Q}_p^n)$ 空间的齐次形式，分别满足

$$\|f\|_{\dot{A}^q(\mathbb{Q}_p^n)}=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}p^{kn/q'}\|f\chi_{S_k}\|_{L^q(\mathbb{Q}_p^n)}<\infty$$

及

$$\|f\|_{\dot{B}^q(\mathbb{Q}_p^n)} = \sup_{k\in\mathbb{Z}}(p^{-kn/q}\|f\chi_{S_k}\|_{L^q(\mathbb{Q}_p^n)}) < \infty.$$

易见, 它们分别为 p-进 Herz 空间 $\dot{K}_q^{\frac{n}{q'},1}(\mathbb{Q}_p^n)$ 和 $\dot{K}_q^{-\frac{n}{q},1}(\mathbb{Q}_p^n)$. 关于 p-进 Herz 空间的定义, 见文 [40].

定理 2.1 $A^q(\mathbb{Q}_p^n)$ 和 $B^q(\mathbb{Q}_p^n)$ 均为 Banach 空间.

证 由于 $A^q(\mathbb{Q}_p^n)$ 和 $B^q(\mathbb{Q}_p^n)$ 的证明是类似的, 因此我们只给出 $A^q(\mathbb{Q}_p^n)$ 的证明.

设 $\{f_k\}$ 为 $A^q(\mathbb{Q}_p^n)$ 中任一 Cauchy 列, 则对任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $N(\varepsilon)$, 使得当 $l, m \geqslant N(\varepsilon)$ 时,

$$\|f_l - f_m\|_{A^q(\mathbb{Q}_p^n)} < \varepsilon.$$

令 $n_k = N(\frac{1}{2^k})$, 则序列 f_{n_k} 满足

$$\|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}\|_{A^q(\mathbb{Q}_p^n)} < \frac{1}{2^k}.$$

定义函数 f 为

$$f(x) = f_{n_1}(x) + \sum_{k=1}^{\infty}(f_{n_{k+1}}(x) - f_{n_k}(x)), \quad x \in \mathbb{Q}_p^n.$$

注意部分和 $S_N(f) = f_{n_1} + \sum\limits_{k=1}^{N-1}(f_{n_{k+1}} - f_{n_k}) = f_{n_N}$. 定义函数 g 为

$$g(x) = |f_{n_1}(x)| + \sum_{k=1}^{\infty}|f_{n_{k+1}}(x) - f_{n_k}(x)|, \quad x \in \mathbb{Q}_p^n.$$

令 $S_N(g) = |f_{n_1}| + \sum\limits_{k=1}^{N-1}|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}|$. 则由 Minkowski 不等式，得

$$\begin{aligned}\|S_N(g)\|_{A^q(\mathbb{Q}_p^n)} &= \sum_{k=1}^{\infty} p^{kn/q'}\|S_N(g)\chi_k\|_{L^q(\mathbb{Q}_p^n)} \\ &\leqslant \sum_{k=1}^{\infty} p^{kn/q'}\|f_{n_1}\chi_k\|_{L^q(\mathbb{Q}_p^n)} + \sum_{l=1}^{N-1}\sum_{k=1}^{\infty} p^{kn/q'}\|(f_{n_{l+1}} - f_{n_l})\chi_k\|_{L^q(\mathbb{Q}_p^n)} \\ &\leqslant \|f_{n_1}\|_{A^q(\mathbb{Q}_p^n)} + \sum_{l=1}^{N-1}\frac{1}{2^l}.\end{aligned}$$

因此，递增序列 $\|S_N(g)\|_{A^q(\mathbb{Q}_p^n)}$ 的一个上界为 $\|f_{n_1}\|_{A^q(\mathbb{Q}_p^n)} + 1$, 这表明 $\|g\|_{A^q(\mathbb{Q}_p^n)} < \infty$. 显然， $|f| \leqslant g$, 则 $\|f\|_{A^q(\mathbb{Q}_p^n)} \leqslant \|g\|_{A^q(\mathbb{Q}_p^n)} < \infty$. 因此 $f \in A^q(\mathbb{Q}_p^n)$.

因为

$$|f - f_{n_N}| = |S_\infty(f) - S_{N-1}(f)| = \Big|\sum_{k=N}^{\infty}(f_{n_{k+1}} - f_{n_k})\Big| \leqslant g.$$

由 Lebesgue 控制收敛定理，得

$$\lim_{N\to\infty}\|f - f_{n_N}\|_{A^q(\mathbb{Q}_p^n)} = \sum_{k=1}^{\infty} p^{kn/q'}\lim_{N\to\infty}\|(f - f_{n_N})\chi_k\|_{L^q(\mathbb{Q}_p^n)} = 0.$$

这表明序列 $\{f_{n_k}\}$ 收敛于 $f \in A^q(\mathbb{Q}_p^n)$. 但 $\{f_k\}$ 本身是 Cauchy 列，因此 $\{f_k\}$ 在 $A^q(\mathbb{Q}_p^n)$ 中收敛于 f.

定理 2.2 $B^{q'}(\mathbb{Q}_p^n)$ 为 $A^q(\mathbb{Q}_p^n)$ 的对偶空间，其中 $\frac{1}{q}+\frac{1}{q'}=1$.

证 令 $\mathcal{L}_1$ 和 $\mathcal{L}_\infty$ 分别为满足下列条件的实序列 $x=(x_k)$ 所构成的线性空间：

$$\|x\|_{\mathcal{L}_1}=\sum_{k=1}^{\infty} p^{kn/q'}|x_k|<\infty, \quad \|x\|_{\mathcal{L}_\infty}=\sup_{k\geqslant 1} p^{-kn/q'}|x_k|<\infty. \tag{2.3}$$

则 $\mathcal{L}_1$ 和 $\mathcal{L}_\infty$ 为赋范线性空间. 下证 $\mathcal{L}_\infty$ 为 $\mathcal{L}_1$ 的对偶，即 $(\mathcal{L}_1)^*=\mathcal{L}_\infty$.

事实上，对任意 $\eta=(\eta_k)\in\mathcal{L}_\infty$, 在 $\mathcal{L}_1$ 上定义如下线性泛函：

$$f_\eta(x)=\sum_{k=1}^{\infty} x_k\eta_k, \tag{2.4}$$

其中 $x=(x_k)\in\mathcal{L}_1$. 则

$$\begin{aligned}|f_\eta(x)| &\leqslant \sum_{k=1}^{\infty}|x_k\eta_k|=\sum_{k=1}^{\infty}p^{kn/q'}|x_k|\cdot p^{-kn/q'}|\eta_k| \\ &\leqslant \Big(\sup_{k\geqslant 1}p^{-kn/q'}|\eta_k|\Big)\Big(\sum_{k=1}^{\infty}p^{kn/q'}|x_k|\Big)=\|\eta\|_{\mathcal{L}_\infty}\|x\|_{\mathcal{L}_1}.\end{aligned} \tag{2.5}$$

因此， f_η 为 $\mathcal{L}_1$ 上的有界线性泛函且

$$\|f_\eta\|\leqslant\|\eta\|_{\mathcal{L}_\infty}. \tag{2.6}$$

接下来，我们将要证明 $\mathcal{L}_1$ 上的每个有界线性泛函均具有形式 (2.4). 令 $f\in(\mathcal{L}_1)^*$, $\eta_k=f(e_k)$, 其中 $e_k=(0,\cdots,0,\underset{k}{1},0,\cdots,0)\in\mathcal{L}_1$. 则

$$|\eta_k|\leqslant\|f\|\|e_k\|_{\mathcal{L}_1}=p^{kn/q'}\|f\|.$$

因此， $\eta_f:=(\eta_k)\in\mathcal{L}_\infty$, 且

$$\|\eta_f\|_{\mathcal{L}_\infty}=\sup_{k\geqslant 1}p^{-kn/q'}|\eta_k|\leqslant\|f\|. \tag{2.7}$$

对任意 $x=(x_k)\in\mathcal{L}_1$, $x=\lim\limits_{N\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{N}x_ke_k$. 因为 f 在 $\mathcal{L}_1$ 上连续，则有

$$f(x)=\lim_{N\to\infty}f\Big(\sum_{k=1}^{N}x_ke_k\Big)=\lim_{N\to\infty}\sum_{k=1}^{N}x_k\eta_k.$$

(2.5) 的计算表明级数 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}x_k\eta_k$ 是绝对收敛的. 因此

$$f(x)=\sum_{k=1}^{\infty}x_k\eta_k,$$

其中 $\eta_f=(\eta_k)\in\mathcal{L}_\infty$, $\|\eta_f\|_{\mathcal{L}_\infty}\leqslant\|f\|$.

定义

$$\begin{aligned}T:(\mathcal{L}_1)^* &\longrightarrow \mathcal{L}_\infty \\ f &\longmapsto \eta_f.\end{aligned}$$

则 (2.6) 和 (2.7) 表明 $\|f\|=\|\eta_f\|=\|Tf\|$, 即 T 为等距的. 显然, T 为 $(\mathcal{L}_1)^*$ 和 $\mathcal{L}_\infty$ 之间的同构映射. 因此 $(\mathcal{L}_1)^*=\mathcal{L}_\infty$. 利用欧氏空间中的经典证明可以知道 $(L^q(\mathbb{Q}_p^n))^*=L^{q'}(\mathbb{Q}_p^n)$. 现取

$$E_k=L^q(S_k),\quad \omega_\rho=\mathcal{L}_1,$$

则由文 [41] 中的定理 2 可知

$$(A^q(\mathbb{Q}_p^n))^*=(\Pi E_k,\omega_\rho)^*=(\Pi E_k^*,\omega_\rho^*)=B^{q'}(\mathbb{Q}_p^n).$$

定理得证.

3 p-进 λ-中心 BMO 空间和 p-进 λ-中心 Morrey 空间

定义 3.1 设 $\lambda<\frac{1}{n}$ 且 $1<q<\infty$.

(1) 空间 $\mathrm{CMO}^{q,\lambda}(\mathbb{Q}_p^n)$ 由满足下列条件的函数 f 构成:

$$\|f\|_{\mathrm{CMO}^{q,\lambda}(\mathbb{Q}_p^n)}:=\sup_{\gamma\in\mathbb{Z}^+}\Big(\frac{1}{|B_\gamma|_H^{1+\lambda q}}\int_{B_\gamma}|f(x)-f_{B_\gamma}|^q\mathrm{d}x\Big)^{\frac{1}{q}}<\infty. \tag{3.1}$$

特别地, 当 $\lambda=0$ 时, 记 $\mathrm{CMO}^{q,0}(\mathbb{Q}_p^n)=\mathrm{CMO}^q(\mathbb{Q}_p^n)$.

(2) 空间 $\mathrm{CBMO}^{q,\lambda}(\mathbb{Q}_p^n)$ 由满足下列条件的函数 f 构成:

$$\|f\|_{\mathrm{CBMO}^{q,\lambda}(\mathbb{Q}_p^n)}:=\sup_{\gamma\in\mathbb{Z}}\Big(\frac{1}{|B_\gamma|_H^{1+\lambda q}}\int_{B_\gamma}|f(x)-f_{B_\gamma}|^q\mathrm{d}x\Big)^{\frac{1}{q}}<\infty. \tag{3.2}$$

注 3.1 当 $\lambda=0$ 时, 空间 $\mathrm{CBMO}^{q,\lambda}(\mathbb{Q}_p^n)$ 即为 $\mathrm{CBMO}^q(\mathbb{Q}_p^n)$. 显然

$$\mathrm{CBMO}^{q,\lambda}(\mathbb{Q}_p^n)\subset\mathrm{CMO}^{q,\lambda}(\mathbb{Q}_p^n),$$

且若 $1\leqslant q_1<q_2<\infty$, 则对任意 $\lambda\in\mathbb{R}$, 有

$$\mathrm{CMO}^{q_2,\lambda}(\mathbb{Q}_p^n)\subset\mathrm{CMO}^{q_1,\lambda}(\mathbb{Q}_p^n),\quad \mathrm{CBMO}^{q_2,\lambda}(\mathbb{Q}_p^n)\subset\mathrm{CBMO}^{q_1,\lambda}(\mathbb{Q}_p^n).$$

由 $\mathbb{R}^n$ 中的标准证明, 还可以得到

$$\|f\|_{\mathrm{CMO}^{q,\lambda}(\mathbb{Q}_p^n)}\sim\sup_{\gamma\in\mathbb{Z}^+}\inf_{c\in\mathbb{C}}\Big(\frac{1}{|B_\gamma|_H^{1+\lambda q}}\int_{B_\gamma}|f(x)-c|^q\mathrm{d}x\Big)^{\frac{1}{q}},$$

$$\|f\|_{\mathrm{CBMO}^{q,\lambda}(\mathbb{Q}_p^n)}\sim\sup_{\gamma\in\mathbb{Z}}\inf_{c\in\mathbb{C}}\Big(\frac{1}{|B_\gamma|_H^{1+\lambda q}}\int_{B_\gamma}|f(x)-c|^q\mathrm{d}x\Big)^{\frac{1}{q}}.$$

命题 3.1 设 $1<q<\infty$, 则 $f\in\mathrm{CMO}^{q,\lambda}$ 当且仅当存在常数 M, 使得对每个 $\gamma\in\mathbb{Z}^+$, 存在常数 a_γ 满足

$$\Big(\frac{1}{|B_\gamma|_H^{1+\lambda q}}\int_{B_\gamma}|f(x)-a_\gamma|^q\mathrm{d}x\Big)^{\frac{1}{q}}<M.$$

证 通过选取 $a_\gamma=f_{B_\gamma}$ 即得必要性. 另一方面, 由 Hölder 不等式, 可得

$$\begin{aligned}&\Big(\frac{1}{|B_\gamma|_H^{1+\lambda q}}\int_{B_\gamma}|f(x)-f_{B_\gamma}|^q\mathrm{d}x\Big)^{\frac{1}{q}}\\ \leqslant&\Big(\frac{1}{|B_\gamma|_H^{1+\lambda q}}\int_{B_\gamma}|f(x)-a_\gamma|^q\mathrm{d}x\Big)^{\frac{1}{q}}+|B_\gamma|_H^{-\lambda}|f_{B_\gamma}-a_\gamma|\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\leqslant \Big(\frac{1}{|B_\gamma|_H^{1+\lambda q}}\int_{B_\gamma}|f(x)-a_\gamma|^q\mathrm{d}x\Big)^{\frac{1}{q}}+|B_\gamma|_H^{-\lambda-1}\int_{B_\gamma}|f(x)-a_\gamma|\mathrm{d}x\\
&\leqslant 2\Big(\frac{1}{|B_\gamma|_H^{1+\lambda q}}\int_{B_\gamma}|f(x)-a_\gamma|^q\mathrm{d}x\Big)^{\frac{1}{q}}\leqslant 2M.
\end{aligned}
$$

证毕.

注 3.2 由该命题可以看出 $B^q(\mathbb{Q}_p^n)\subset \mathrm{CMO}^q(\mathbb{Q}_p^n)$.

命题 3.2 当 $\lambda<-\frac{1}{q}$ 时，空间 $\mathrm{CMO}^{q,\lambda}(\mathbb{Q}_p^n)$ 约化为常值函数空间．当 $\lambda=-\frac{1}{q}$ 时，空间 $\mathrm{CMO}^{q,\lambda}(\mathbb{Q}_p^n)$ 与 $L^q(\mathbb{Q}_p^n)$ 模掉常数一致.

证 假设 $f\in \mathrm{CMO}^{q,\lambda}(\mathbb{Q}_p^n)$，$\lambda<-\frac{1}{q}$, 则有

$$
\sup_{k\geqslant 1}\Big(\frac{1}{|B_k|_H^{1+\lambda q}}\int_{B_k}|f(x)-f_{B_k}|^q\mathrm{d}x\Big)^{\frac{1}{q}}<\infty.
$$

则

$$
\int_{B_k}|f(x)-f_{B_k}|^q\mathrm{d}x<C|B_k|_H^{1+\lambda q}.
$$

因此,

$$
\lim_{k\to\infty}\int_{B_k}|f(x)-f_{B_k}|^q\mathrm{d}x=0,
$$

即

$$
\lim_{k\to\infty}\int_{\mathbb{Q}_p^n}|f(x)-f_{B_k}|^q\chi_{B_k}(x)\mathrm{d}x=0.
$$

故存在一序列 $\{|f-f_{B_{k_j}}|^q\chi_{B_{k_j}}\}$, 当 $j\to\infty$ 时几乎处处收敛于 0. 因为 $\{\chi_{B_{k_j}}\}$ 当 $j\to\infty$ 时收敛于 1, 可得当 $j\to\infty$ 时， $f-f_{B_{k_j}}$ 几乎处处收敛于 0. 故 f 几乎处处为常数.

当 $\lambda=-\frac{1}{q}$ 时，由命题 3.1, 对每个 $k\in\mathbb{Z}^+$, 存在常数 a_k 满足

$$
\Big(\int_{B_k}|f(x)-a_k|^q\mathrm{d}x\Big)^{\frac{1}{q}}<M.
$$

因此可得

$$
|B_k|_H^{\frac{1}{q}}|a_k-a_{k+j}|\leqslant\Big(\int_{B_k}|f(x)-a_k|^q\mathrm{d}x\Big)^{\frac{1}{q}}+\Big(\int_{B_{k+j}}|f(x)-a_{k+j}|^q\mathrm{d}x\Big)^{\frac{1}{q}}\leqslant 2M,
$$

其中 $j=1,2,\cdots$. 因此，序列 $\{a_k\}$ 为 $\mathbb{C}$ 中的 Cauchy 序列．令 $a=\lim\limits_{k\to\infty}a_k$. 则

$$
|B_k|_H^{\frac{1}{q}}|a_k-a|\leqslant 2M.
$$

故

$$
\Big(\int_{B_k}|f(x)-a|^q\mathrm{d}x\Big)^{\frac{1}{q}}\leqslant\Big(\int_{B_k}|f(x)-a_k|^q\mathrm{d}x\Big)^{\frac{1}{q}}+|B_k|_H^{\frac{1}{q}}|a_k-a|\leqslant 3M.
$$

因此，函数 $f-a\in L^q(\mathbb{Q}_p^n)$.

下面我们将证明，上述结果与 $\{a_k\}$ 的选取无关．若存在另一序列 $\{b_k\}$ 满足上述条

件，则 $b=\lim\limits_{k\to\infty} b_k$ 存在并且

$$\Big(\int_{B_k}|f(x)-b|^q\mathrm{d}x\Big)^{\frac{1}{q}}\leqslant 3M.$$

故对任意 $k\in\mathbb{Z}^+$,

$$\Big(\int_{B_k}|a-b|^q\mathrm{d}x\Big)^{\frac{1}{q}}\leqslant\Big(\int_{B_k}|f(x)-a|^q\mathrm{d}x\Big)^{\frac{1}{q}}+\Big(\int_{B_k}|f(x)-b|^q\mathrm{d}x\Big)^{\frac{1}{q}}\leqslant 6M.$$

因此 $a=b$. 证毕.

定义 3.2 设 $\lambda\in\mathbb{R}$ 且 $1<q<\infty$.

(1) 非齐次 p-进中心 Morrey 空间 $B^{q,\lambda}(\mathbb{Q}_p^n)$ 由满足下列条件的函数 f 构成:

$$\|f\|_{B^{q,\lambda}(\mathbb{Q}_p^n)}:=\sup_{\gamma\in\mathbb{Z}^+}\Big(\frac{1}{|B_\gamma|_H^{1+\lambda q}}\int_{B_\gamma}|f(x)|^q\mathrm{d}x\Big)^{\frac{1}{q}}<\infty. \tag{3.3}$$

(2) 齐次 p-进中心 Morrey 空间 $\dot{B}^{q,\lambda}(\mathbb{Q}_p^n)$ 由满足下列条件的函数 f 构成:

$$\|f\|_{\dot{B}^{q,\lambda}(\mathbb{Q}_p^n)}:=\sup_{\gamma\in\mathbb{Z}}\Big(\frac{1}{|B_\gamma|_H^{1+\lambda q}}\int_{B_\gamma}|f(x)|^q\mathrm{d}x\Big)^{\frac{1}{q}}<\infty. \tag{3.4}$$

注 3.3 显然， $\dot{B}^{q,\lambda}(\mathbb{Q}_p^n)\subset B^{q,\lambda}(\mathbb{Q}_p^n)$. 若 $1\leqslant q_1<q_2<\infty$, 由 Hölder 不等式，对任意 $\lambda\in\mathbb{R}$, 有

$$\dot{B}^{q_2,\lambda}(\mathbb{Q}_p^n)\subset\dot{B}^{q_1,\lambda}(\mathbb{Q}_p^n),\quad B^{q_2,\lambda}(\mathbb{Q}_p^n)\subset B^{q_1,\lambda}(\mathbb{Q}_p^n).$$

当 $\lambda<-\frac{1}{q}$ 时，空间 $\dot{B}^{q,\lambda}(\mathbb{Q}_p^n)$ 和 $B^{q,\lambda}(\mathbb{Q}_p^n)$ 约化为 $\{0\}$, 且

$$\dot{B}^{q,-\frac{1}{q}}(\mathbb{Q}_p^n)=B^{q,-\frac{1}{q}}(\mathbb{Q}_p^n)=L^q(\mathbb{Q}_p^n).$$

由 (3.1)–(3.4) 可得 $\dot{B}^{q,\lambda}(\mathbb{Q}_p^n)$ 和 $B^{q,\lambda}(\mathbb{Q}_p^n)$ 为 Banach 空间并分别包含于空间 $\mathrm{CBMO}^{q,\lambda}(\mathbb{Q}_p^n)$ 和 $\mathrm{CMO}^{q,\lambda}(\mathbb{Q}_p^n)$.

命题 3.3 当 $\lambda>-\frac{1}{q}$ 时， $f\in B^{q,\lambda}(\mathbb{Q}_p^n)$ 当且仅当

$$\sup_{k\geqslant 1}p^{-nk(\frac{1}{q}+\lambda)}\|f\chi_k\|_{L^q(\mathbb{Q}_p^n)}<\infty, \tag{3.5}$$

其中 $\chi_1=\chi_{B_1}$, $\chi_k=\chi_{S_k}$, $k\geqslant 2$.

证 假设 $f\in B^{q,\lambda}(\mathbb{Q}_p^n)$, 则

$$p^{-nk(\frac{1}{q}+\lambda)}\|f\chi_k\|_{L^q(\mathbb{Q}_p^n)}\leqslant\Big(\frac{1}{p^{nk(1+\lambda q)}}\int_{B_k}|f(x)|^q\mathrm{d}x\Big)^{\frac{1}{q}}\leqslant\|f\|_{B^{q,\lambda}(\mathbb{Q}_p^n)}<\infty.$$

因此

$$\sup_{k\geqslant 1}p^{-nk(\frac{1}{q}+\lambda)}\|f\chi_k\|_{L^q(\mathbb{Q}_p^n)}\leqslant\|f\|_{B^{q,\lambda}(\mathbb{Q}_p^n)}<\infty.$$

另一方面，因为 $B_\gamma=B_1\cup\Big(\bigcup\limits_{j=2}^{\gamma}S_j\Big)$, $\gamma\in\mathbb{Z}^+$, 则有

$$\Big(\frac{1}{|B_\gamma|_H^{1+\lambda q}}\int_{B_\gamma}|f(x)|^q\mathrm{d}x\Big)^{\frac{1}{q}}=p^{-n\gamma(\frac{1}{q}+\lambda)}\sum_{j=1}^{\gamma}\|f\chi_j\|_{L^q(\mathbb{Q}_p^n)}$$

$$\begin{aligned}&\leqslant \Big(\sup_{j\geqslant 1} p^{-nj(\frac{1}{q}+\lambda)}\|f\chi_j\|_{L^q(\mathbb{Q}_p^n)}\Big)p^{-n\gamma(\frac{1}{q}+\lambda)}\sum_{j=1}^{\gamma} p^{nj(\frac{1}{q}+\lambda)}\\&\leqslant C\Big(\sup_{j\geqslant 1} p^{-nj(\frac{1}{q}+\lambda)}\|f\chi_j\|_{L^q(\mathbb{Q}_p^n)}\Big),\end{aligned}$$

其中 $\chi_1=\chi_{B_1}$, $\chi_k=\chi_{S_k}$, $k\geqslant 2$ 且常数 C 与 n,q,λ,p 有关.

注 3.4 该结果表明 (3.3) 和 (3.5) 为 $B^{q,\lambda}(\mathbb{Q}_p^n)$ 上的等价范数.

类似地，我们可以得到 $\dot{B}^{q,\lambda}(\mathbb{Q}_p^n)$ 上的下列等价范数.

命题 3.4 当 $\lambda>-\frac{1}{q}$ 时， $f\in \dot{B}^{q,\lambda}(\mathbb{Q}_p^n)$ 当且仅当

$$\sup_{k\in\mathbb{Z}} p^{-nk(\frac{1}{q}+\lambda)}\|f\chi_{S_k}\|_{L^q(\mathbb{Q}_p^n)}<\infty.$$

推论 3.1 设 $1<q<\infty$, 则

$$B^{q,0}(\mathbb{Q}_p^n)=B^q(\mathbb{Q}_p^n),\quad \dot{B}^{q,0}(\mathbb{Q}_p^n)=\dot{B}^q(\mathbb{Q}_p^n).$$

文 [5, 9] 中已经讨论过空间 $\mathrm{CMO}^{q,\lambda}(\mathbb{R}^n)$, $B^{q,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ 及 $\mathbb{R}^n$ 上的加权 Lebesgue 空间之间的关系. 接下来我们将得到 p-进域中的相关结果.

命题 3.5 设 $\theta<-n(1+\lambda q)$, 则给定 $f\in \mathrm{CMO}^{q,\lambda}(\mathbb{Q}_p^n)$, 有

$$\int_{\mathbb{Q}_p^n}|f(x)-f_{B_0}|^q(1+|x|_p)^\theta \mathrm{d}x<\infty.$$

证 对 $k\in\mathbb{Z}^+$, 由 Minkowski 不等式及 Hölder 不等式可得

$$\begin{aligned}&\Big(\frac{1}{|B_k|_H}\int_{B_k}|f(x)-f_{B_0}|^q\mathrm{d}x\Big)^{\frac{1}{q}}\\&\leqslant \Big(\frac{1}{|B_k|_H}\int_{B_k}|f(x)-f_{B_k}|^q\mathrm{d}x\Big)^{\frac{1}{q}}+|f_{B_0}-f_{B_k}|\\&\leqslant p^{nk\lambda}\|f\|_{\mathrm{CMO}^{q,\lambda}(\mathbb{Q}_p^n)}+\sum_{j=0}^{k-1}|f_{B_{j+1}}-f_{B_j}|\\&\leqslant p^{nk\lambda}\|f\|_{\mathrm{CMO}^{q,\lambda}(\mathbb{Q}_p^n)}+\sum_{j=0}^{k-1}\Big(\frac{1}{|B_j|_H}\int_{B_j}|f(x)-f_{B_{j+1}}|^q\mathrm{d}x\Big)^{\frac{1}{q}}\\&\leqslant p^{nk\lambda}\|f\|_{\mathrm{CMO}^{q,\lambda}(\mathbb{Q}_p^n)}+p^n\sum_{j=0}^{k-1}\Big(\frac{1}{|B_{j+1}|_H}\int_{B_{j+1}}|f-f_{B_{j+1}}|^q\mathrm{d}x\Big)^{\frac{1}{q}}\\&\leqslant C\sum_{j=1}^{k}p^{nj\lambda}\|f\|_{\mathrm{CMO}^{q,\lambda}(\mathbb{Q}_p^n)}.\end{aligned}$$

因此

$$\int_{B_k}|f(x)-f_{B_0}|^q\mathrm{d}x=\begin{cases}Ck^qp^{nk}\|f\|^q_{\mathrm{CMO}^{q,\lambda}(\mathbb{Q}_p^n)}, & 若\ \lambda=0,\\ Cp^{nk(1+\lambda q)}\|f\|^q_{\mathrm{CMO}^{q,\lambda}(\mathbb{Q}_p^n)}, & 若\ \lambda\neq 0.\end{cases}$$

则由条件 $\theta < -n(1+\lambda q)$ 可得

$$\begin{aligned}&\int_{\mathbb{Q}_p^n} |f(x)-f_{B_0}|^q(1+|x|_p)^\theta \mathrm{d}x\\&=\int_{B_1} |f(x)-f_{B_0}|^q(1+|x|_p)^\theta \mathrm{d}x+\sum_{k=2}^{\infty}\int_{S_k} |f(x)-f_{B_0}|^q(1+|x|_p)^\theta \mathrm{d}x\\&\leqslant C\sum_{k=1}^{\infty} p^{k\theta}\int_{B_k} |f(x)-f_{B_0}|^q \mathrm{d}x \leqslant C\|f\|^q_{\mathrm{CMO}^{q,\lambda}(\mathbb{Q}_p^n)}.\end{aligned}$$

推论 3.2 设 $\theta < \min\{-n, -n(1+\lambda q)\}$, 则 $\mathrm{CMO}^{q,\lambda}(\mathbb{Q}_p^n) \subset L^q((1+|x|_p)^\theta \mathrm{d}x)$.

命题 3.6 设 $\lambda \geqslant -\frac{1}{q}$, $\theta \geqslant -n(1+\lambda q)$, 则 $L^q((1+|x|_p)^\theta \mathrm{d}x) \subset B^{q,\lambda}(\mathbb{Q}_p^n)$.

证 任取 $f \in L^q((1+|x|_p)^\theta \mathrm{d}x)$. 对 $\gamma \in \mathbb{Z}^+$, 可得

$$\frac{1}{|B_\gamma|_H^{1+\lambda q}}\int_{B_\gamma} |f(x)|^q \mathrm{d}x = \int_{B_\gamma} |f(x)|^q \frac{(1+|x|_p)^\theta}{p^{n\gamma(1+\lambda q)}(1+|x|_p)^\theta}\mathrm{d}x.$$

当 $\theta \geqslant 0$ 时，有

$$\begin{aligned}\frac{1}{|B_\gamma|_H^{1+\lambda q}}\int_{B_\gamma} |f(x)|^q \mathrm{d}x &\leqslant C\int_{B_\gamma} |f(x)|^q(1+|x|_p)^\theta \mathrm{d}x\\&\leqslant C\int_{\mathbb{Q}_p^n} |f(x)|^q(1+|x|_p)^\theta \mathrm{d}x.\end{aligned}$$

当 $-n(1+\lambda q) \leqslant \theta < 0$ 时，可得

$$\begin{aligned}\frac{1}{|B_\gamma|_H^{1+\lambda q}}\int_{B_\gamma} |f(x)|^q \mathrm{d}x &\leqslant C\int_{B_\gamma} |f(x)|^q \frac{(1+|x|_p)^\theta}{p^{n\gamma(1+\lambda q)+\theta\gamma}}\mathrm{d}x\\&\leqslant C\int_{\mathbb{Q}_p^n} |f(x)|^q(1+|x|_p)^\theta \mathrm{d}x.\end{aligned}$$

证毕.

注 3.5 命题 3.1, 命题 3.5 及推论 3.2 对空间 $\mathrm{CBMO}^{q,\lambda}(\mathbb{Q}_p^n)$ 仍成立，且命题 3.6 对空间 $\dot{B}^{q,\lambda}(\mathbb{Q}_p^n)$ 仍成立.

4 奇异积分算子的有界性

我们得到奇异积分算子 L_k 及 L (定义见 (1.3)) 在 p-进中心 Morrey 空间中的有界性.

定理 4.1 设 $1 < q < +\infty$, $\lambda < 0$, $\Omega \in L^\infty(\mathbb{Q}_p^n)$, $\Omega(p^k x) = \Omega(x)$, $k \in \mathbb{Z}$ 且 $\int_{|x|_p=1}\Omega(x)\mathrm{d}x = 0$. 若

$$\sup_{|y|_p=1}\sum_{j=1}^{\infty}\int_{|x|_p=1} |\Omega(x+p^j y)-\Omega(x)|\mathrm{d}x < \infty,$$

则存在与 $f \in \dot{B}^{q,\lambda}(\mathbb{Q}_p^n)$ 和 $k \in \mathbb{Z}$ 无关的常数 $C > 0$, 使得

$$\|L_k f\|_{\dot{B}^{q,\lambda}(\mathbb{Q}_p^n)} \leqslant C\|f\|_{\dot{B}^{q,\lambda}(\mathbb{Q}_p^n)}.$$

更进一步， $Lf=\lim\limits_{k\to-\infty}L_kf$ 在 $\dot{B}^{q,\lambda}(\mathbb{Q}_p^n)$ 中存在，且

$$\|Lf\|_{\dot{B}^{q,\lambda}(\mathbb{Q}_p^n)}\leqslant C\|f\|_{\dot{B}^{q,\lambda}(\mathbb{Q}_p^n)}.$$

注 4.1 需要指出的是定理 4.1 的结论在空间 $B^{q,\lambda}(\mathbb{Q}_p^n)$ 中仍成立.

交换子的有界性是调和分析中的一个活跃课题，它可以用于刻画一些函数空间，见文 [38]. 本节将讨论由 L_k (及 L) 和 λ-中心 BMO 函数所生成的交换子在 λ-中心 Morrey 空间中的有界性.

定义 4.1 设 $b\in\mathrm{CBMO}^{q,\lambda}(\mathbb{Q}_p^n)$. 交换子 $[b,L_k]$ 定义为

$$[b,L_k]f(x)=b(x)L_kf(x)-L_k(bf)(x),\tag{4.1}$$

其中 f 为某些适当的函数.

定理 4.2 令 Ω 如定理 4.1. 设 $1<q_1,q_2<+\infty$, $\frac{1}{q}=\frac{1}{q_1}+\frac{1}{q_2}$, $0\leqslant\lambda_2<\frac{1}{n}$, $\lambda_1<-\lambda_2$ 且 $\lambda=\lambda_1+\lambda_2$. 若 $b\in\mathrm{CBMO}^{q_2,\lambda_2}(\mathbb{Q}_p^n)$, 则交换子 $[b,L_k]$ 从 $\dot{B}^{q_1,\lambda_1}(\mathbb{Q}_p^n)$ 到 $\dot{B}^{q,\lambda}(\mathbb{Q}_p^n)$ 有界，且下列不等式成立：

$$\|[b,L_k]f\|_{\dot{B}^{q,\lambda}(\mathbb{Q}_p^n)}\leqslant C\|b\|_{\mathrm{CBMO}^{q_2,\lambda_2}(\mathbb{Q}_p^n)}\|f\|_{\dot{B}^{q_1,\lambda_1}(\mathbb{Q}_p^n)}.$$

更进一步地， $[b,L]f=[b,\lim\limits_{k\to-\infty}L_k]f$ 在 $\dot{B}^{q,\lambda}(\mathbb{Q}_p^n)$ 中存在，且

$$\|[b,L]f\|_{\dot{B}^{q,\lambda}(\mathbb{Q}_p^n)}\leqslant C\|b\|_{\mathrm{CBMO}^{q_2,\lambda_2}(\mathbb{Q}_p^n)}\|f\|_{\dot{B}^{q_1,\lambda_1}(\mathbb{Q}_p^n)}.$$

注 4.2 若 $b\in\mathrm{CMO}^{q_2,\lambda_2}(\mathbb{Q}_p^n)$, 则定理 4.2 中相应的结论从 $B^{q_1,\lambda_1}(\mathbb{Q}_p^n)$ 到 $B^{q,\lambda}(\mathbb{Q}_p^n)$ 仍成立.

推论 4.1 令 Ω 如定理 4.1. 设 $1<q_1,q_2<+\infty$, $\frac{1}{q}=\frac{1}{q_1}+\frac{1}{q_2}$, $\lambda<0$. 若 $b\in\mathrm{CBMO}^{q_2}(\mathbb{Q}_p^n)$, 则交换子 $[b,L_k]$ 从 $\dot{B}^{q_1,\lambda}(\mathbb{Q}_p^n)$ 到 $\dot{B}^{q,\lambda}(\mathbb{Q}_p^n)$ 有界，且下列不等式成立：

$$\|[b,L_k]f\|_{\dot{B}^{q,\lambda}(\mathbb{Q}_p^n)}\leqslant C\|b\|_{\mathrm{CBMO}^{q_2}(\mathbb{Q}_p^n)}\|f\|_{\dot{B}^{q_1,\lambda}(\mathbb{Q}_p^n)}.$$

更进一步地， $[b,L]f=[b,\lim\limits_{k\to-\infty}L_k]f$ 在 $\dot{B}^{q,\lambda}(\mathbb{Q}_p^n)$ 中存在，且

$$\|[b,L]f\|_{\dot{B}^{q,\lambda}(\mathbb{Q}_p^n)}\leqslant C\|b\|_{\mathrm{CBMO}^{q_2}(\mathbb{Q}_p^n)}\|f\|_{\dot{B}^{q_1,\lambda}(\mathbb{Q}_p^n)}.$$

推论 4.2 令 Ω 如定理 4.1. 设 $1<q_1,q_2<+\infty$, $\frac{1}{q}=\frac{1}{q_1}+\frac{1}{q_2}$, $\beta<\min\{\frac{1}{n},\frac{1}{q_1}\}$, $\alpha=\beta-\frac{1}{q_1}$. 若 $b\in\mathrm{CBMO}^{q_2,\beta}(\mathbb{Q}_p^n)$, 则交换子 $[b,L_k]$ 从 $L^{q_1}(\mathbb{Q}_p^n)$ 到 $\dot{B}^{q,\alpha}(\mathbb{Q}_p^n)$ 有界，且下列不等式成立：

$$\|[b,L_k]f\|_{\dot{B}^{q,\alpha}(\mathbb{Q}_p^n)}\leqslant C\|b\|_{\mathrm{CBMO}^{q_2,\beta}(\mathbb{Q}_p^n)}\|f\|_{L^{q_1}(\mathbb{Q}_p^n)}.$$

进一步地， $[b,L]f=[b,\lim\limits_{k\to-\infty}L_k]f$ 在 $\dot{B}^{q,\lambda}(\mathbb{Q}_p^n)$ 中存在，且

$$\|[b,L]f\|_{\dot{B}^{q,\alpha}(\mathbb{Q}_p^n)}\leqslant C\|b\|_{\mathrm{CBMO}^{q_2,\beta}(\mathbb{Q}_p^n)}\|f\|_{L^{q_1}(\mathbb{Q}_p^n)}.$$

根据文 [11] 中定理 4.1 可得如下引理.

引理 4.1 设 $\Omega\in L^\infty(\mathbb{Q}_p^n)$, 对任意 $k\in\mathbb{Z}$, 有 $\Omega(p^kx)=\Omega(x)$ 且 $\int_{|x|_p=1}\Omega(x)\mathrm{d}x=0$. 若

$$\sup_{|y|_p=1}\sum_{j=1}^{\infty}\int_{|x|_p=1}|\Omega(x+p^jy)-\Omega(x)|\mathrm{d}x<\infty,$$

则对 $1<p<\infty$, 存在与 f 和 k 无关的常数 $C_p>0$, 使得

$$\|L_kf\|_{L^p(\mathbb{Q}_p^n)}\leqslant C_p\|f\|_{L^p(\mathbb{Q}_p^n)},$$

其中 $f\in L^p(\mathbb{Q}_p^n)$, $k\in\mathbb{Z}$. 更进一步地， $Lf=\lim\limits_{k\to-\infty}L_kf$ 在 L^p 范数下存在且

$$\|Lf\|_{L^p(\mathbb{Q}_p^n)}\leqslant C_p\|f\|_{L^p(\mathbb{Q}_p^n)}.$$

若 $f\in L^1(\mathbb{Q}_p^n)$, 则存在与 $k\in\mathbb{Z}$, $s>0$ 及 f 无关的常数 $C_1>0$, 使得

$$|\{x:|L_kf(x)|>s\}|\leqslant C_1\|f\|_{L^1}(\mathbb{Q}_p^n)s^{-1}.$$

更进一步地， $Lf=\lim\limits_{k\to-\infty}L_kf$ 在测度下成立，且

$$|\{x:|Lf(x)|>s\}|\leqslant C_1\|f\|_{L^1}(\mathbb{Q}_p^n)s^{-1}.$$

在证明主要定理之前，我们需要下列计算.

引理 4.2 设 $b\in\mathrm{CBMO}^{q,\lambda}$, $j,k\in\mathbb{Z}$, $\lambda>0$, 则

$$|b_{B_j}-b_{B_k}|\leqslant p^n|j-k|\|b\|_{\mathrm{CBMO}^{q,\lambda}}(\mathbb{Q}_p^n)\max\{|B_j|_H^\lambda,|B_k|_H^\lambda\},$$

其中 $B_i=B_i(0)=\{x\in\mathbb{Q}_p^n\mid|x|_p\leqslant p^i\}$, $i\in\mathbb{Z}$.

证 不失一般性，不妨设 $k\geqslant j$. 由 Hölder 不等式，可得

$$\begin{aligned}|b_{B_{i+1}}-b_{B_i}|&\leqslant\frac{1}{|B_i|_H}\int_{B_i}|b(x)-b_{B_{i+1}}|\mathrm{d}x\leqslant\frac{1}{|B_i|_H}\int_{B_{i+1}}|b(x)-b_{B_{i+1}}|\mathrm{d}x\\&\leqslant\frac{1}{|B_i|_H}\Big(\int_{B_{i+1}}|b(x)-b_{B_{i+1}}|^q\mathrm{d}x\Big)^{\frac1q}|B_{i+1}|_H^{1-\frac1q}\\&\leqslant\frac{|B_{i+1}|_H^{1+\lambda}}{|B_i|_H}\|b\|_{\mathrm{CBMO}^{q,\lambda}}=p^n|B_{i+1}|_H^\lambda\|b\|_{\mathrm{CBMO}^{q,\lambda}}.\end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned}|b_{B_j}-b_{B_k}|&\leqslant\sum_{i=j}^{k-1}|b_{B_{j+1}}-b_{B_j}|\leqslant p^n\|b\|_{\mathrm{CBMO}^{q,\lambda}}\sum_{i=j}^{k-1}|B_{j+1}|_H^\lambda\\&\leqslant(k-j)p^n\|b\|_{\mathrm{CBMO}^{q,\lambda}}|B_k|_H^\lambda.\end{aligned}$$

定理 4.1 的证明 设 $f\in\dot{B}^{q,\lambda}(\mathbb{Q}_p^n)$. 对任意 γ, $k\in\mathbb{Z}$,

$$\begin{aligned}&\Big(\frac{1}{|B_\gamma|_H^{1+\lambda q}}\int_{B_\gamma}|L_kf(x)|^q\mathrm{d}x\Big)^{\frac1q}\\\leqslant&\Big(\frac{1}{|B_\gamma|_H^{1+\lambda q}}\int_{B_\gamma}|L_k(f\chi_{B_\gamma})(x)|^q\mathrm{d}x\Big)^{\frac1q}+\Big(\frac{1}{|B_\gamma|_H^{1+\lambda q}}\int_{B_\gamma}|L_k(f\chi_{B_\gamma^c})(x)|^q\mathrm{d}x\Big)^{\frac1q}\\:=&\mathrm{I}_1+\mathrm{I}_2.\end{aligned}$$

下面分别估计 I_1 和 I_2. 对 I_1, 由引理 4.1 可得

$$\mathrm{I}_1\leqslant C|B_\gamma|_H^{-\frac1q-\lambda}\Big(\int_{B_\gamma}|f(x)|^q\mathrm{d}x\Big)^{\frac1q}\leqslant C\|f\|_{\dot{B}^{q,\lambda}(\mathbb{Q}_p^n)}.$$

对 I_2, 给定 $x\in B_\gamma$, 可得

$$\begin{aligned}|L_k(f\chi_{B_\gamma^c})(x)| &\leqslant \int_{|z|_p>p^k}|(f\chi_{B_\gamma^c})(x-z)|\frac{|\Omega(z)|}{|z|_p^n}\mathrm{d}z\\ &=\int_{|x-y|_p>p^k}|(f\chi_{B_\gamma^c})(y)|\frac{|\Omega(x-y)|}{|x-y|_p^n}\mathrm{d}y\\ &\leqslant \int_{B_\gamma^c}|f(y))|\frac{|\Omega(x-y)|}{|x-y|_p^n}\mathrm{d}y\\ &\leqslant C\int_{B_\gamma^c}\frac{|f(y)|}{|x-y|_p^n}\mathrm{d}y.\end{aligned}$$

由于 $x\in B_\gamma$, $y\in B_\gamma^c$ 及 $|x-y|_p=\max\{|x|_p,|y|_p\}=|y|_p$ (见 [42, p. 6]), 再结合 Hölder 不等式，可得

$$\begin{aligned}|L_k(f\chi_{B_\gamma^c})(x)| &\leqslant C\int_{B_\gamma^c}\frac{|f(y)|}{|y|_p^n}\mathrm{d}y=C\sum_{j=\gamma+1}^{\infty}\int_{S_j}\frac{|f(y)|}{|y|_p^n}\mathrm{d}y\\ &\leqslant C\sum_{j=\gamma+1}^{\infty}p^{-jn}\int_{B_j}|f(y)|\mathrm{d}y\\ &\leqslant C\sum_{j=\gamma+1}^{\infty}p^{-\frac{jn}{q}}\Big(\int_{B_j}|f(y)|^q\Big)^{\frac{1}{q}}\mathrm{d}y\\ &=C\|f\|_{\dot{B}^{q,\lambda}(\mathbb{Q}_p^n)}\sum_{j=\gamma+1}^{\infty}p^{jn\lambda}\\ &=C|B_\gamma|_H^{\lambda}\|f\|_{\dot{B}^{q,\lambda}(\mathbb{Q}_p^n)},\end{aligned}$$

其中最后一个等号是由 $\lambda<0$ 得到的．因此

$$\mathrm{I}_2=\Big(\frac{1}{|B_\gamma|_H^{1+\lambda q}}\int_{B_\gamma}|L_k(f\chi_{B_\gamma^c})(x)|^q\mathrm{d}x\Big)^{\frac{1}{q}}\leqslant C\|f\|_{\dot{B}^{q,\lambda}(\mathbb{Q}_p^n)}.$$

由 I_1 和 I_2 的估计，可得

$$\|L_kf\|_{\dot{B}^{q,\lambda}(\mathbb{Q}_p^n)}\leqslant C\|f\|_{\dot{B}^{q,\lambda}(\mathbb{Q}_p^n)}. \tag{4.2}$$

更进一步地，由引理 4.1, $\dot{B}^{q,\lambda}(\mathbb{Q}_p^n)$ 的定义及 (4.2), 可得 $Lf=\lim\limits_{k\to-\infty}L_kf$ 在 $\dot{B}^{q,\lambda}(\mathbb{Q}_p^n)$ 中存在，且

$$\|Lf\|_{\dot{B}^{q,\lambda}(\mathbb{Q}_p^n)}\leqslant C\|f\|_{\dot{B}^{q,\lambda}(\mathbb{Q}_p^n)}.$$

定理 4.1 得证.

定理 4.2 的证明　设 $f\in\dot{B}^{q,\lambda}(\mathbb{Q}_p^n)$. 对任意 $\gamma,k\in\mathbb{Z}$,

$$\begin{aligned}&\Big(\frac{1}{|B_\gamma|_H^{1+\lambda q}}\int_{B_\gamma}|[b,L_k]f(x)|^q\mathrm{d}x\Big)^{\frac{1}{q}}\\ \leqslant&\Big(\frac{1}{|B_\gamma|_H^{1+\lambda q}}\int_{B_\gamma}|(b-b_{B_\gamma})L_k(f\chi_{B_\gamma})(x)|^q\mathrm{d}x\Big)^{\frac{1}{q}}\\ &+\Big(\frac{1}{|B_\gamma|_H^{1+\lambda q}}\int_{B_\gamma}|(b-b_{B_\gamma})L_k(f\chi_{B_\gamma^c})(x)|^q\mathrm{d}x\Big)^{\frac{1}{q}}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&+\Big(\frac{1}{|B_\gamma|_H^{1+\lambda q}}\int_{B_\gamma}|L_k((b-b_{B_\gamma})f\chi_{B_\gamma})(x)|^q\mathrm{d}x\Big)^{\frac{1}{q}}\\
&+\Big(\frac{1}{|B_\gamma|_H^{1+\lambda q}}\int_{B_\gamma}|L_k((b-b_{B_\gamma})f\chi_{B_\gamma^c})(x)|^q\mathrm{d}x\Big)^{\frac{1}{q}}\\
&:=\mathrm{J}_1+\mathrm{J}_2+\mathrm{J}_3+\mathrm{J}_4. \qquad (4.3)
\end{aligned}$$

下面将分别估计 $\mathrm{J}_1,\mathrm{J}_2,\mathrm{J}_3$ 和 J_4.

由 Hölder 不等式 $\big(\frac{q}{q_1}+\frac{q}{q_2}=1\big)$ 及引理 4.1, 可得

$$\begin{aligned}
\mathrm{J}_1&\leqslant|B_\gamma|_H^{-\frac{1}{q}-\lambda}\Big(\int_{B_\gamma}|b(x)-b_{B_\gamma}|^{q_2}\mathrm{d}x\Big)^{\frac{1}{q_2}}\Big(\int_{B_\gamma}|L_k(f\chi_{B_\gamma})(x)|^{q_1}\mathrm{d}x\Big)^{\frac{1}{q_1}}\\
&\leqslant C|B_\gamma|_H^{-\frac{1}{q_1}-\lambda_1}\|b\|_{\mathrm{CBMO}^{p_2,\lambda_2}(\mathbb{Q}_p^n)}\Big(\int_{B_\gamma}|f(x)|^{q_1}\mathrm{d}x\Big)^{\frac{1}{q_1}}\\
&\leqslant C\|b\|_{\mathrm{CBMO}^{q_2,\lambda_2}(\mathbb{Q}_p^n)}\|f\|_{\dot{B}^{q_1,\lambda_1}(\mathbb{Q}_p^n)}. \qquad (4.4)
\end{aligned}$$

类似地，由引理 4.1 及 Hölder 不等式，可得

$$\begin{aligned}
\mathrm{J}_3&\leqslant C|B_\gamma|_H^{-\frac{1}{q}-\lambda}\Big(\int_{B_\gamma}|(b-b_{B_\gamma})f(x)|^q\mathrm{d}x\Big)^{\frac{1}{q}}\\
&\leqslant C|B_\gamma|_H^{-\frac{1}{q}-\lambda}\Big(\int_{B_\gamma}|b(x)-b_{B_\gamma}|^{q_2}\mathrm{d}x\Big)^{\frac{1}{q_2}}\Big(\int_{B_\gamma}|f(x)|^{q_1}\mathrm{d}x\Big)^{\frac{1}{q_1}}\\
&\leqslant C\|b\|_{\mathrm{CBMO}^{q_2,\lambda_2}(\mathbb{Q}_p^n)}\|f\|_{\dot{B}^{q_1,\lambda_1}(\mathbb{Q}_p^n)}. \qquad (4.5)
\end{aligned}$$

J_2 的估计与定理 4.1 证明中 I_2 的估计类似. 令 $x\in B_\gamma$, 由变量替换及 Hölder 不等式，可知

$$\begin{aligned}
|L_k(f\chi_{B_\gamma^c})(x)|&\leqslant\int_{|z|_p>p^k}|(f\chi_{B_\gamma^c})(x-z)|\frac{|\Omega(z)|}{|z|_p^n}\mathrm{d}z\\
&=\int_{|x-y|_p>p^k}|(f\chi_{B_\gamma^c})(y)|\frac{|\Omega(x-y)|}{|x-y|_p^n}\mathrm{d}y\\
&\leqslant\int_{B_\gamma^c}|f(y)|\frac{|\Omega(x-y)|}{|x-y|_p^n}\mathrm{d}y\leqslant C\int_{B_\gamma^c}\frac{|f(y)|}{|y|_p^n}\mathrm{d}y\\
&=C\sum_{j=\gamma+1}^{\infty}\int_{S_j}\frac{|f(y)|}{|y|_p^n}\mathrm{d}y\leqslant C\sum_{j=\gamma+1}^{\infty}p^{-jn}\int_{B_j}|f(y)|\mathrm{d}y\\
&\leqslant C\sum_{j=\gamma+1}^{\infty}p^{-\frac{jn}{q_1}}\Big(\int_{B_j}|f(y)|^{q_1}\Big)^{\frac{1}{q_1}}\mathrm{d}y\\
&=C|B_\gamma|_H^{\lambda_1}\|f\|_{\dot{B}^{q_1,\lambda_1}(\mathbb{Q}_p^n)}, \qquad (4.6)
\end{aligned}$$

其中 $\lambda_1<-\lambda_2\leqslant0$. 则由 Hölder 不等式，可得

$$\begin{aligned}
\mathrm{J}_2&=\Big(\frac{1}{|B_\gamma|_H^{1+\lambda q}}\int_{B_\gamma}|(b-b_{B_\gamma})L_k(f\chi_{B_\gamma^c})(x)|^q\mathrm{d}x\Big)^{\frac{1}{q}}\\
&\leqslant C|B_\gamma|_H^{-\lambda_2-\frac{1}{q_2}}\|f\|_{\dot{B}^{q_1,\lambda_1}(\mathbb{Q}_p^n)}\Big(\int_{B_\gamma}|b-b_{B_\gamma}|^{q_2}\Big)^{\frac{1}{q_2}}\\
&\leqslant C\|b\|_{\mathrm{CBMO}^{q_2,\lambda_2}(\mathbb{Q}_p^n)}\|f\|_{\dot{B}^{q_1,\lambda_1}(\mathbb{Q}_p^n)}. \qquad (4.7)
\end{aligned}$$

对 J_4, 由 (4.6) 中的计算及 Hölder 不等式可知

$$
\begin{aligned}
&|L_k((b-b_{B_\gamma})f\chi_{B_\gamma^c})(x)|\\
&\leqslant C\sum_{j=\gamma+1}^{\infty} p^{-jn}\int_{B_j}|(b-b_{B_\gamma})f(y)|\mathrm{d}y\\
&\leqslant C\sum_{j=\gamma+1}^{\infty} p^{-jn}|B_j|_H^{1-\frac{1}{q_1}-\frac{1}{q_2}}\Big(\int_{B_j}|f(y)|^{q_1}\mathrm{d}y\Big)^{\frac{1}{q_1}}\Big(\int_{B_j}|b-b_{B_\gamma}|^{q_2}\mathrm{d}y\Big)^{\frac{1}{q_2}}\\
&\leqslant C\|f\|_{\dot{B}^{q_1,\lambda_1}(\mathbb{Q}_p^n)}\sum_{j=\gamma+1}^{\infty} p^{jn(-\frac{1}{q_2}+\lambda_1)}\Big(\int_{B_j}|b-b_{B_\gamma}|^{q_2}\mathrm{d}y\Big)^{\frac{1}{q_2}}\\
&\leqslant C\|f\|_{\dot{B}^{q_1,\lambda_1}(\mathbb{Q}_p^n)}\sum_{j=1}^{\infty} p^{n(\gamma+j)(-\frac{1}{q_2}+\lambda_1)}\Big(\int_{B_{\gamma+j}}|b-b_{B_\gamma}|^{q_2}\mathrm{d}y\Big)^{\frac{1}{q_2}}\\
&\leqslant C\|f\|_{\dot{B}^{q_1,\lambda_1}(\mathbb{Q}_p^n)}\sum_{j=1}^{\infty} p^{n(\gamma+j)(-\frac{1}{q_2}+\lambda_1)}\Big[\Big(\int_{B_{\gamma+j}}|b-b_{B_{\gamma+j}}|^{q_2}\mathrm{d}y\Big)^{\frac{1}{q_2}}\\
&\quad+|b_{B_{\gamma+j}}-b_{B_\gamma}||B_{\gamma+j}|_H^{\frac{1}{q_2}}\Big].
\end{aligned}
$$

则由引理 4.2 得

$$
\begin{aligned}
&|L_k((b-b_{B_\gamma})f\chi_{B_\gamma^c})(x)|\\
&\leqslant C\|f\|_{\dot{B}^{q_1,\lambda_1}(\mathbb{Q}_p^n)}\|b\|_{\mathrm{CBMO}^{q_2,\lambda_2}(\mathbb{Q}_p^n)}\sum_{j=1}^{\infty} p^{n(\gamma+j)(-\frac{1}{q_2}+\lambda_1)}(1+p^n j)|B_{\gamma+j}|_H^{\frac{1}{q_2}+\lambda_2}\\
&\leqslant C\|f\|_{\dot{B}^{q_1,\lambda_1}(\mathbb{Q}_p^n)}\|b\|_{\mathrm{CBMO}^{q_2,\lambda_2}(\mathbb{Q}_p^n)}|B_\gamma|_H^{\lambda}\sum_{j=1}^{\infty} jp^{jn\lambda}.
\end{aligned}
$$

根据条件 $\lambda=\lambda_1+\lambda_2<0$, 有

$$|L_k((b-b_{B_\gamma})f\chi_{B_\gamma^c})(x)|\leqslant C|B_\gamma|_H^{\lambda}\|b\|_{\mathrm{CBMO}^{q_2,\lambda_2}(\mathbb{Q}_p^n)}\|f\|_{\dot{B}^{q_1,\lambda_1}(\mathbb{Q}_p^n)}.$$

因此

$$\mathrm{J}_4\leqslant C\|b\|_{\mathrm{CBMO}^{q_2,\lambda_2}(\mathbb{Q}_p^n)}\|f\|_{\dot{B}^{q_1,\lambda_1}(\mathbb{Q}_p^n)}. \tag{4.8}$$

结合 (4.3)–(4.8) 的估计，可得

$$\Big(\frac{1}{|B_\gamma|_H^{1+\lambda q}}\int_{B_\gamma}|[b,L_k]f(x)|^q\mathrm{d}x\Big)^{\frac{1}{q}}\leqslant C\|b\|_{\mathrm{CBMO}^{q_2,\lambda_2}(\mathbb{Q}_p^n)}\|f\|_{\dot{B}^{q_1,\lambda_1}(\mathbb{Q}_p^n)}.$$

更进一步，由引理 4.1, $\dot{B}^{q,\lambda}(\mathbb{Q}_p^n)$ 的定义和上面的估计可知， $[b,L]f=[b,\lim_{k\to-\infty}L_k]f$ 在 $\dot{B}^{q,\lambda}(\mathbb{Q}_p^n)$ 中存在，且

$$\|[b,L]f\|_{\dot{B}^{q,\lambda}(\mathbb{Q}_p^n)}\leqslant C\|b\|_{\mathrm{CBMO}^{q_2,\lambda_2}(\mathbb{Q}_p^n)}\|f\|_{\dot{B}^{q_1,\lambda_1}(\mathbb{Q}_p^n)}.$$

参　考　文　献

[1] Wiener N. Generalized harmonic analysis [J]. *Acta Math*, 1930, 55:117–258.

[2] Wiener N. Tauberian theorems [J]. *Ann Math*, 1932, 33:1–100.

[3] Beurling A. Construction and analysis of some convolution algebras [J]. *Ann Inst Fourier* (*Grenoble*), 1964, 14:1–32.

[4] Feichtinger H. An elementary approach to Wiener's third Tauberian theorem on Euclidean n-space [C]. Proceedings, Conference at Cortona 1984, Sympos Math, 29, Academic Press 1987.

[5] Chen Y, Lau K. Some new classes of Hardy spaces [J]. *J Func Anal*, 1989, 84:255–278.

[6] García-Cuerva J. Hardy spaces and Beurling algebras [J]. *J London Math Soc*, 1989, 39(2):499–513.

[7] Lu S Z, Yang D C. The Littlewood-Paley function and φ-transform characterization of a new Hardy space HK_2 associated with Herz space [J]. *Studia Math*, 1992, 101:285–298.

[8] Lu S Z, Yang D C. The central BMO spaces and Littlewood-Paley operators [J]. *Approx Theory Appl*, 1995, 11:72–94.

[9] Alvarez J, Guzman-Partida M, Lakey J. Spaces of bounded λ-central mean oscillation, Morrey spaces and λ-central Carleson measures [J]. *Collect Math*, 2000, 51:1–47.

[10] Vladimirov V S, Volovich I V, Zelenov E I. p-adic analysis and mathematical physics [M]. Series on Soviet and East European Mathematics, Vol I, Singapore: World Scientific, 1992.

[11] Taibleson M H. Fourier analysis on local fields [M]. Princeton: Princeton University Press; Tokyo: University of Tokyo Press, 1975.

[12] Albeverio S, Karwoski W. A random walk on p-adics: the generator and its spectrum [J]. *Stochastic Process Appl*, 1994, 53:1–22.

[13] Avetisov A V, Bikulov A H, Kozyrev S V, Osipov V A. p-Adic models of ultrametric diffusion constrained by hierarchical energy landscapes [J]. *J Phys A: Math Gen*, 2002, 35:177–189.

[14] Khrennikov A. p-Adic valued distributions in mathematical physics [M]. Dordrechht: Kluwer, 1994.

[15] Khrennikov A. Non-Archimedean analysis: Quantum paradoxes, dynamical systems and biological models [M]. Dordrechht: Kluwer, 1997.

[16] Varadarajan V S. Path integrals for a class of p-adic Schrödinger equations [J]. *Lett Math Phys*, 1997, 39:97–106.

[17] Vladimirov V S, Volovich I V. p-Adic quantum mechanics [J]. *Commun Math Phys*, 1989, 123:659–676.

[18] Volovich I V. p-Adic space-time and the string theory [J]. *Theoret Math Phys*, 1987, 71:337–340.

[19] Volovich I V. p-Adic string [J]. *Class Quant Grav*, 1987, 4:83–87.

[20] Haran S. Riesz potentials and explicit sums in arithmetic [J]. *Invent Math*, 1990, 101:697–703.

[21] Haran S. Analytic potential theory over the p-adics [J]. *Ann Inst Fourier* (*Grenoble*), 1993, 43:905–944.

[22] Albeverio S, Khrennikov A Yu, Shelkovich V M. Harmonic analysis in the p-adic Lizorkin spaces: Fractional operators, pseudo-differential equations, p-adic wavelets, Tauberian theorems [J]. *J Fourier Anal Appl*, 2006, 12:393–425.

[23] Chuong N M , Co N V. The Cauchy problem for a class of pseudo-differential equations over p-adic field [J]. *J Math Anal Appl*, 2008, 340(1):629–645.

[24] Chuong N M, Egorov Yu V, Khrennikov A, et al. Harmonic, wavelet and p-adic analysis [M]. Singapore: World Scientific, 2007.

[25] Kochubei A N. A non-Archimedean wave equation [J]. *Pacific J Math*, 2008, 235(2):245–261.

[26] Zuniga-Galindo W A. Pseudo-differential equations connected with p-adic forms and local zeta functions [J]. *Bull Austral Math Soc*, 2004, 70:73–86.

[27] Chuong N M, Hung H D. Maximal functions and weighted norm inequalities on local fields [J]. *Appl Comput Harmon Anal*, 2010, 29:272–286.

[28] Kim Y C. Carleson measures and the BMO space on the p-adic vector space [J]. *Math Nachr*, 2009, 282:1278–1304.

[29] Kim Y C. Weak type estimates of square functions associated with quasiradial Bochner-Riesz means on certain Hardy spaces [J]. *J Math Anal Appl*, 2008, 339:266–280.

[30] Rim K S, Lee J. Estimates of weighted Hardy-Littlewood averages on the p-adic vector space [J]. *J Math Anal Appl*, 2006, 324:1470–1477.

[31] Rogers K M. A van der Corput lemma for the p-adic numbers [J]. *Proc Amer Math Soc*, 2005, 133:3525–3534.

[32] Rogers K M. Maximal averages along curves over the p-adic numbers [J]. *Bull Austral Math Soc*, 2004, 70:357–375.

[33] Taibleson M H. Harmonic analysis on n-dimensional vector spaces over a local field I [J]. *Math Ann*, 1968, 176:191–207.

[34] Taibleson M H. Harmonic analysis on n-dimensional vector spaces over a local field II [J]. *Math Ann*, 1970, 186:1–19.

[35] Taibleson M H. Harmonic analysis on n-dimensional vector spaces over a local field III [J]. *Math Ann*, 1970, 187:259–271.

[36] Fu Z W, Wu Q Y, Lu S Z. Sharp estimates of p-adic Hardy and Hardy-Littlewood-Pólya operators [J]. *Acta Math Sin* (*Engl Ser*), 2013, 29:137–150.

[37] Phillips K, Taibleson M. Singular integrals in several variables over a local field [J]. *Pacific J Math*, 1969, 30(1):209–231.

[38] Coifman R R, Rochberg R, Weiss G. Factorization theorems for Hardy spaces in several variables [J]. *Ann Math*, 1976, 103:611–635.

[39] Fu Z W, Lin Y, Lu S Z. λ-Central BMO estimates for commutators of singular integral operators with rough kernels [J]. *Acta Math Sin* (*Engl Ser*), 2008, 24:373–386.

[40] Zhu Y P, Zheng W X. Besov spaces and Herz spaces on local fields [J]. *Sci China Ser A*, 1998, 41(10):1051–1060.

[41] Holland F. Harmonic analysis on amalgams of L^p and l^q [J]. *J London Math Soc*, 1975, 10(2):295–305.

[42] Albeverio S, Khrennikov A Yu, Shelkovich V M. Theory of p-adic distributions: Linear and nonolinear models [M]//London Mathematical Society Lecture Note Series, Vol 370, Cambridge: Cambridge University Press, 2010.

p-Adic Central Function Spaces and Singular Integral Operators

WU Qingyan[1] LU Shanzhen[2] FU Zunwei[3]

[1]Department of Mathematics, Linyi University, Linyi 276005, Shandong, China. E-mail: wuqingyan@lyu.edu.cn
[2]School of Mathematical Sciences, Beijing Normal University, Beijing 100875, China. E-mail: lusz@bnu.edu.cn
[3]Corresponding author. Department of Mathematics, Linyi University, Linyi 276005, Shandong, China. E-mail: zwfu@mail.bnu.edu.cn

Abstract In this paper, the authors introduce several p-adic central function spaces including p-adic A^q and B^q spaces, p-adic λ-central BMO spaces and p-adic central Morrey spaces. The authors get the duality of p-adic A^q and B^q spaces, the characterization of p-adic λ-central BMO spaces and central Morrey spaces, and study the relationship among these spaces and p-adic Lebesgue spaces with weights. In addition, the authors establish the boundedness of a class of singular integral operators on p-adic central Morrey spaces. Moreover, the λ-central BMO estimates for commutators of these singular integral operators on p-adic central Morrey spaces are obtained.

Keywords p-Adic λ-central BMO space, p-Adic central Morrey space, Singular integral operator

2000 MR Subject Classification 42B20, 11F85, 22E50, 46A20

The English translation of this paper will be published in
Chinese Journal of Contemporary Mathematics, Vol. 38 No. 1, 2017
by ALLERTON PRESS, INC., USA