数 学 年 刊 A 辑
2019, 40(4):349–360
DOI: 10.16205/j.cnki.cama.2019.0026

带有加权 Hardy-Sobolev 临界指数的非齐次 Neumann 边界奇异的多解问题*

商彦英[1] 王 聪[2]

提要 主要研究了非齐次 Neumann 边界奇异的问题, 利用 Ekeland 变分原理、山路引理和一些分析技巧, 证明了正解的存在性.

关键词 Neumann 问题, 边界奇异, Ekeland 变分原理

MR (2000) 主题分类 35B07, 35A10

中图法分类 O175.29

文献标志码 A

文章编号 1000-8314(2019)04-0349-12

1 引 言

本文我们主要考虑了下面的问题

$$\begin{cases} -\mathrm{div}(|x|^{-2a}\nabla u) - \mu \dfrac{u}{|x|^{2(1+a)}} + \lambda u = \dfrac{|u|^{q-2}u}{|x|^{bp}}, & x \in \Omega, \\ \dfrac{\partial u}{\partial \nu} = \phi, & x \in \partial\Omega \setminus \{0\}, \end{cases} \tag{1.1}$$

其中 Ω 是 $\mathbb{R}^N (N \geqslant 3)$ 中具有 C^2 边界 $\partial\Omega$ 的有界开区域, $0 \in \partial\Omega$, $0 \leqslant a < \sqrt{\overline{\mu}}$, $0 \leqslant \mu < (\sqrt{\overline{\mu}} - a)^2$, $\overline{\mu} \triangleq \frac{(N-2)^2}{4}$, λ 是大于零的实数. $a \leqslant b < a+1$, $2 < q \leqslant p$, 其中 $p = p(a,b) \triangleq \frac{2N}{N-2(1+a-b)}$ 是加权 Hardy-Sobolev 临界指数且 $p(a,a) = \frac{2N}{N-2}$ 是 Sobolev 临界指数, ν 表示边界 $\partial\Omega$ 的单位外法向量, $\phi \in L^2(\partial\Omega)$, 对于 $\forall x \in \Omega, \phi(x) \geqslant 0$ 且 $\phi \not\equiv 0$.

问题 (1.1) 的一般形式是

$$-\mathrm{div}(A(x)\nabla u) = g(x,u), \tag{1.2}$$

其中 $A(x)$ 是非负函数并且可能在某些点无界. 问题 (1.2) 是在研究各向异性的 Schrödinger 的驻波时发现的.

如果 $2 < q < p$, 即非线性项是次临界增长时. 对于有界区域 Ω, 众所周知, 嵌入 $H^1(\Omega, |x|^{-2a}) \hookrightarrow L^q(\Omega, |x|^{-bp})$ 是紧的, 其中 $H^1(\Omega, |x|^{-2a})$ 是 $H^1(\Omega)$ 的子空间且范数为 $\|u\|_1 \triangleq \big(\int_\Omega (|x|^{-2a}|\nabla u|^2 + |u|^2)\big)^{\frac{1}{2}}$. 利用变分方法, 易证解的存在性和多重性. 然而, 当 $q = p$ 时, 则嵌入 $H^1(\Omega, |x|^{-2a}) \hookrightarrow L^p(\Omega, |x|^{bp})$, $H^1(\Omega, |x|^{-2a}) \hookrightarrow L^2(\Omega, |x|^{-2(1+a)})$ 是非紧的. 对

本文 2018 年 10 月 20 日收到.

[1]通信作者. 西南大学数学与统计学院, 重庆 400715. E-mail: shangyan@swu.edu.cn

[2]西南大学数学与统计学院, 重庆 400715. E-mail: wc252015@163.com

*本文受到国家自然科学基金 (No. 11471267) 和中央高校基本科研专项资金 (No. XDJK2016C119) 的资助.

于求解临界指数的方程更加困难, Brezis 和 Nirenberg 在文 [1] 中研究了临界指数问题, 他们建立了局部 Palais-Smale 条件.

当 $0 \in \Omega$ 时, 大量学者研究此类问题的解的存在性和多重性 (见 [2–4]). 当问题 (1.1) 的非线性项是凹凸的情况时, Huang, Wu 和 Tang 在文 [2] 中利用变分方法证明了正解的存在性和多重性. 如果 $0 \in \partial\Omega$, 很多学者研究此类问题 (见 [5–11]). 若 $N \geqslant 4$ 且边界在 0 的主曲率是负的, 在文 [5] 中, Ghoussoub 和 Kang 建立了 $H_0^1(\Omega)$ 中最优 Hardy-Sobolev 常数. 另外, 当 $\mu = a = 0, \phi \equiv 0, N \geqslant 3$ 时, 在文 [5] 中, 只需假设边界在 0 点的平均曲率是正的, 发现了当 $\lambda > 0$ 时弱解的存在性. 当 $a = 0, \phi(x) = \alpha(x)u$ 时, Shang 和 Tang 研究了带有一般非线性项的问题 (1.1), 通过强极大值原理和变分方法, 他们获得了两个正解.

当问题 (1.1) 中 $\mu = 0, a = b = 0$ 时,

$$\begin{cases} -\triangle u + \lambda u = |u|^{q-1}u, \quad x \in \Omega, \\ \dfrac{\partial u}{\partial \nu} = \phi, \quad x \in \partial\Omega \setminus \{0\}, \end{cases} \tag{1.3}$$

其中 $1 < q \leqslant 2^* - 1 = \frac{n+2}{n-2}$. Deng 和 Peng 在文 [12] 中发现, 存在一个正常数 λ^*, 若 $\lambda \in (\lambda^*, +\infty)$, 则方程 (1.3) 存在两个正解, 若 $\lambda = \lambda^*$, 则方程有一个解, 若 $\lambda \in (-\infty, \lambda^*)$, 则方程无解. 当 $\phi \equiv 0$ 时, 可参见文 [13]. 其他相关可参见文 [14–17].

下面的 Caffarelli-Kohn-Nirenberg 不等式对于问题 (1.1) 的研究有着重要的作用 (见 [18]):

$$\Big(\int_{\mathbb{R}^N} \frac{|u|^p}{|x|^{bp}}\ \mathrm{d}x\Big)^{\frac{2}{p}} \leqslant C_{a,b} \int_{\mathbb{R}^N} |x|^{-2a}|\nabla u|^2\ \mathrm{d}x, \tag{1.4}$$

其中 $-\infty < a < \sqrt{\mu}, a \leqslant b \leqslant a+1, p = \frac{2N}{N-2(1+a-b)}$. 若 (1.4) 中的 $b = a+1$ 且 $p = 2$, 则下面的加权 Hardy 不等式成立 (见 [8]):

$$\int_{\mathbb{R}^N} \frac{|u|^2}{|x|^{2(1+a)}}\ \mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{(\sqrt{\mu}-a)^2} \int_{\mathbb{R}^N} |x|^{-2a}|\nabla u|^2\ \mathrm{d}x, \quad u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N). \tag{1.5}$$

注意不等式 (1.4) 和 (1.5) 对于有界区域 Ω 也成立. 根据加权 Hardy 不等式 (1.5) 和文 [14, 引理 2.1] 可知, 对于任意的 $\lambda > 0$ 和 $u \in H^1(\Omega, |x|^{-2a})$, 存在常数 $\widetilde{C} := C(N, \Omega, \lambda, a) > 0$, 满足

$$\int_\Omega \frac{|u|^2}{|x|^{2(1+a)}}\ \mathrm{d}x \leqslant \widetilde{C} \int_\Omega (|x|^{-2a}|\nabla u|^2 + \lambda|u|^2)\mathrm{d}x.$$

令

$$T^* = \inf\Big\{\widetilde{C}\ \Big|\ \int_\Omega \frac{|u|^2}{|x|^{2(1+a)}}\ \mathrm{d}x \leqslant \widetilde{C}\int_\Omega (|x|^{-2a}|\nabla u|^2 + \lambda|u|^2)\mathrm{d}x,\ \forall\ u \in H^1(\Omega, |x|^{-2a})\Big\}.$$

对于任意的 $0 \leqslant \mu < \mu^*$, 其中 $\mu^* \triangleq \min\{(\sqrt{\mu}-a)^2, T^*\}$, 存在常数 $C > 0$, 满足

$$\|u\| \triangleq \Big(\int_\Omega \Big(|x|^{-2a}|\nabla u|^2 - \mu\frac{|u|^2}{|x|^{2(1+a)}} + \lambda u^2\Big)\mathrm{d}x\Big)^{\frac{1}{2}} \geqslant C\Big(\int_\Omega \Big(|x|^{-2a}|\nabla u|^2 + u^2\Big)\mathrm{d}x\Big)^{\frac{1}{2}}.$$

进而, $\|\cdot\|$ 是 $H^1(\Omega, |x|^{-2a})$ 中的范数并且与范数 $\|u\|_1$ 等价.

本文的主要结论如下.

定理 1.1 假设 $N \geqslant 3, 0 \leqslant a < \sqrt{\mu}, 0 \leqslant \mu < (\sqrt{\mu}-a)^2$, $a \leqslant b < a+1, \lambda > 0$, 则存在正常数 λ^*, 当 $\|\phi\|_{L^2(\partial\Omega)} \leqslant \lambda^*$ 时, 问题 (1.1) 有一个局部极小正解 $u_\lambda \in H^1(\Omega)$.

定理 1.2　假设 $a \leqslant b < a+1, \lambda > 0$, 边界 $\partial\Omega$ 在 0 处的平均曲率大于零, 则存在常数 $\lambda^* > 0$, 当 $\|\phi\|_{L^2(\partial\Omega)} \leqslant \lambda^*$ 时, 若满足下边的任一条件:

(i) $2 < q < p$, $N \geqslant 3, 0 \leqslant a < \sqrt{\mu}, 0 \leqslant \mu < (\sqrt{\mu}-a)^2$;

(ii) $q = p$, $N \geqslant 5$, $0 \leqslant a < \frac{\sqrt{\mu}-1}{2}$, $0 \leqslant \mu < \min\{T^*, (\sqrt{\mu}-a)^2-(1+a)^2\}$;

(iii) $q = p$, $N \geqslant 4$, $0 \leqslant a \leqslant \frac{\sqrt{\mu}-1}{2}$, $\mu = (\sqrt{\mu}-a)^2-(1+a)^2$ 且 $\mu < T^*$;

(iv) $q = p$, $N > 3+2a$, $0 \leqslant a \leqslant \frac{\sqrt{\mu}-1}{2}$, $(\sqrt{\mu}-a)^2-(1+a)^2 \leqslant \mu < \min\left\{T^*, (\sqrt{\mu}-a)^2-\frac{1}{4}\right\}$.

问题 (1.1) 至少有两个正解.

注 1.1　我们的思想来源于文 [6–7], 两篇文献仅考虑了带有 Hardy-Sobolev 临界指数的解的存在性问题, 对于加权 Hardy-Sobolev 临界指数, 问题更加复杂.

本文结构如下: 在第 2 节, 我们利用 Ekeland 变分原理 (见 [20]), 获得了第一个局部极小正解. 第 3 节主要证明了问题 (1.1) 的第二个正解的存在性, 我们的方法是平移泛函 (见 [1]) 和山路引理.

2　定理 1.1 的证明

方程 (1.1) 的能量泛函是

$$I(u) = \frac{1}{2}\Big(\int_\Omega \Big(|x|^{-2a}|\nabla u|^2 - \mu\frac{|u|^2}{|x|^{2(1+a)}} + \lambda|u|^2\Big)\mathrm{d}x\Big) - \frac{1}{q}\int_\Omega \frac{(u^+)^q}{|x|^{bp}}\,\mathrm{d}x - \int_{\partial\Omega}\phi u \mathrm{d}\sigma,$$

其中 $u^+ = \max\{u, 0\}, u \in H^1(\Omega, |x|^{-2a})$, σ 是 $\partial\Omega$ 的表面测度. 易知 $I \in C^1(H^1(\Omega, |x|^{-2a}), \mathbb{R})$. 若 $u \in H^1(\Omega, |x|^{-2a})$ 被称为问题 (1.1) 的弱解, 当且仅当对于任意的 $v \in H^1(\Omega, |x|^{-2a})$, 满足

$$\langle I'(u), v\rangle = \int_\Omega \Big(|x|^{-2a}\nabla u\cdot\nabla v - \mu\frac{uv}{|x|^{2(1+a)}} + \lambda uv\Big)\mathrm{d}x - \int_\Omega \frac{(u^+)^{q-1}v}{|x|^{bp}}\,\mathrm{d}x - \int_{\partial\Omega}\phi v\mathrm{d}\sigma.$$

对于 $0 \leqslant \mu < (\overline{\mu}-a)^2$, 首先定义最优加权 Hardy-Sobolev 常数,

$$S_{a,b,\mu}(\Omega) = \inf_{u\in H_0^1(\Omega,|x|^{-2a})\setminus\{0\}} \frac{\int_\Omega (|x|^{-2a}|\nabla u|^2 - \mu\frac{u^2}{|x|^{2(1+a)}})\,\mathrm{d}x}{(\int_\Omega \frac{|u|^p}{|x|^{bp}}\,\mathrm{d}x)^{\frac{2}{p}}}. \tag{2.1}$$

已知 $S_{a,b,\mu} := S_{a,b,\mu}(\mathbb{R}^N)$ 的达到函数是

$$U_\varepsilon = \frac{(2\varepsilon p\beta^2)^{\frac{1}{p-2}}}{|x|^\gamma(\varepsilon + |x|^{(p-2)\beta})^{\frac{2}{p-2}}}, \quad \forall\varepsilon > 0,$$

其中 $\beta \triangleq \sqrt{(\sqrt{\mu}-a)^2-\mu}, \gamma = \sqrt{\mu}-a-\beta$. 另外, U_ε 是问题

$$-\mathrm{div}(|x|^{-2a}\nabla u) - \mu\frac{u}{|x|^{2(1+a)}} = \frac{|u|^{p-2}u}{|x|^{bp}}, \quad x \in \mathbb{R}^N\setminus\{0\}$$

的解, 且满足

$$\int_{\mathbb{R}^N}\Big(|x|^{-2a}|\nabla U_\varepsilon|^2 - \mu\frac{|U_\varepsilon|^2}{|x|^{2(1+a)}}\Big)\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^N}\frac{|U_\varepsilon|^p}{|x|^{bp}}\,\mathrm{d}x = S_{a,b,\mu}^{\frac{p}{p-2}}. \tag{2.2}$$

(1) $H := H(\Omega, |x|^{-2a})$;

(2) H^{-1} 是 H 的对偶空间;

(3) C 或 $C_i (i = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ 表示不同的正常数. $O(t)$, $o(t)$ 分别表示当 $t \to 0^+$ 时, $|O(t)| \leqslant Ct$, $\frac{o(t)}{t} \to 0$.

定理 1.1 的证明 证明方法和文 [7] 中的定理 1 的证明类似. 为读者方便, 我们给出一个证明过程. 由 Hardy-Sobolev 不等式, 迹定理和 Hölder 不等式可知

$$\begin{aligned}I(u)&=\frac{1}{2}\|u\|^2-\frac{1}{q}\int_\Omega\frac{(u^+)^q}{|x|^{bp}}\,\mathrm{d}x-\int_{\partial\Omega}\phi(x)u\mathrm{d}\sigma\\&\geqslant\frac{1}{2}\|u\|^2-C_1\|u\|^q-C_2\|\phi\|_{L^2(\partial\Omega)}\|u\|,\end{aligned}$$

其中 $C_1>0,C_2>0$. 由 Young 不等式可知

$$C_2\|\phi\|_{L^2(\partial\Omega)}\|u\|\leqslant\frac{\|\phi\|^2_{L^2(\partial\Omega)}\|u\|^2}{2\varepsilon}+\frac{\varepsilon C_2^2}{2},$$

其中 $\varepsilon>0$ 是任意的. 于是, 当 $\|\phi\|^2_{L^2(\partial\Omega)}<\frac{\varepsilon}{2}$ 时, 我们得到

$$\begin{aligned}I(u)&\geqslant\frac{1}{2}\|u\|^2-C_1\|u\|^q-C_2\|\phi\|_{L^2(\partial\Omega)}\|u\|\\&\geqslant\Big(\frac{1}{2}-\frac{\|\phi\|^2_{L^2(\partial\Omega)}}{2\varepsilon}\Big)\|u\|^2-C_1\|u\|^q-\frac{\varepsilon C_2^2}{2}\\&\geqslant\frac{1}{4}\|u\|^2-C_1\|u\|^q-\frac{\varepsilon C_2^2}{2}.\end{aligned}$$

对于 $q>2$, 当 ε 充分小时, 存在 $\rho>0$, 使得

$$I(u)>0,\quad\|u\|=\rho,\quad I_\lambda(u)\geqslant-C_3,\quad\|u\|\leqslant\rho,$$

$C_3>0$. 另外,

$$\begin{aligned}I(tu)&=\frac{t^2}{2}\|u\|^2-\frac{t^q}{q}\int_\Omega\frac{(u^+)^q}{|x|^{bp}}\,\mathrm{d}x-t\int_{\partial\Omega}\phi(x)u\mathrm{d}\sigma\\&\leqslant\frac{t^2}{2}\|u\|^2-t\int_{\partial\Omega}\phi(x)u\,\mathrm{d}\sigma.\end{aligned}$$

由于 $\varphi(x)\geqslant0$ 且 $\varphi(x)\not\equiv0$, 则存在 $v\in H$ (比如 $v\equiv1$) 满足 $\int_{\partial\Omega}\phi(x)v\,\mathrm{d}\sigma>0$. 从而, 存在 $t_0>0$, 满足 $\|t_0v\|<\rho$ 且 $I(t_0v)<0$. 令 $u_0=t_0v\in H$, $I_\lambda(u_0)<0$, 则

$$\inf_{u\in\overline{B_\rho(0)}}I_\lambda(u)<0<\inf_{u\in\partial\overline{B_\rho(0)}}I_\lambda(u).$$

在 $\overline{B_\rho(0)}$ 上应用 Ekeland 变分原理, 则存在极小化序列 $\{u_n\}\subset\overline{B_\rho(0)}$, 满足

$$I_\lambda(u_n)\leqslant\inf_{u\in\overline{B_\rho(0)}}+\frac{1}{n},\quad I_\lambda(v)\geqslant I_\lambda(u_n)-\frac{1}{n}\|v-u_n\|,\quad v\in B_\rho(0).$$

所以

$$\|I'(u_n)\|\to0,\quad I(u_n)\to c_\lambda,\quad n\to\infty,$$

其中 c_λ 是 $I_\lambda(u)$ 在 $\overline{B_\rho(0)}$ 上的极小值. 闭集合 $\overline{B_\rho(0)}$ 和 $\{u_n\}$ 意味着存在 $u_\lambda\in\overline{B_\rho(0)}\subset H$ 和一个子序列 (不妨仍记为 $\{u_n\}$), 满足

$$\begin{cases}u_n\rightharpoonup u_\lambda & \text{在 } H \text{ 中},\\ u_n\to u_\lambda & \text{几乎处处在 } \Omega \text{ 中},\\ u_n\to u_\lambda & \text{在 } L^r(\Omega) \text{ 中},\ \ 1<r<p.\end{cases}$$

对于任意的 $\omega\in H$, 对 $\langle I'(u_n),\ \omega\rangle$ 取极限, 当 $n\to\infty$ 时,

$$\int_\Omega\Big(|x|^{-2a}\nabla u_\lambda\cdot\nabla\omega-\mu\frac{u_\lambda\omega}{|x|^{2(1+a)}}+\lambda u_\lambda\omega-\frac{(u_\lambda^+)^{q-1}\omega}{|x|^{bp}}\Big)\mathrm{d}x-\int_{\partial\Omega}\phi(x)\omega\mathrm{d}\sigma=0,$$

从而, u_λ 是 I 的临界点. 特别地,

$$0=\langle I'(u_\lambda),u_\lambda^-\rangle=-\int_\Omega\Big(|\nabla u_\lambda^-|^2-\mu\frac{|u_\lambda^-|^2}{|x|^2}+\lambda|u_\lambda^-|^2\Big)\mathrm{d}x-\int_{\partial\Omega}\phi(x)u_\lambda^-\mathrm{d}\sigma,$$

其中 $u_\lambda^-=\max\{-u_\lambda,0\}$. 当 $0\leqslant\mu<\mu^*$, 易知

$$0=-\|u_\lambda^-\|^2-\int_{\partial\Omega}\phi(x)u_\lambda^-\mathrm{d}\sigma=-\Big(\|u_\lambda^-\|^2+\int_{\partial\Omega}\phi(x)u_\lambda^-\mathrm{d}\sigma\Big).$$

由 $\phi(x)\geqslant0$ 和 $u_\lambda^-\geqslant0$ 可知 $\|u_\lambda^-\|=0$. 于是 $u_\lambda^-\equiv0$, 从而 $u_\lambda\geqslant0$. 根据极大值原理可知 $u_\lambda(x)>0$ 对于 $x\in\Omega$.

3　定理 1.2 的证明

在第 2 节, 我们已经证明了第一个正解的存在性. 接下来, 将证明问题 (1.1) 的第二个正解的存在性, 令 $u=u_\lambda+w$, 从而关于 w 的方程变为

$$\begin{cases}-\triangle w-\mu\dfrac{w}{|x|^{2(1+a)}}+\lambda w=\dfrac{(u_\lambda+w)^{q-1}}{|x|^{bp}}-\dfrac{u_\lambda^q}{|x|^s}, & x\in\Omega,\\ \dfrac{\partial v}{\partial\nu}=0, & x\in\partial\Omega\setminus\{0\}.\end{cases}\tag{3.1}$$

对应的能量泛函是

$$J(w)=\frac12\|w\|^2-\frac1q\int_\Omega\Big(\frac{(u_\lambda+w^+)^q}{|x|^{bp}}-\frac{u_\lambda^q}{|x|^{bp}}-q\frac{u_\lambda^{q-1}w^+}{|x|^{bp}}\Big)\mathrm{d}x.$$

已知 J 在 H 中的临界点和问题 (3.1) 的解一一对应. 从而, 若 $w\in H^1(\Omega)$, $w\not\equiv0$ 是 J 的临界点, 则称 w 是 (3.1) 的解. $\|w^-\|^2=-\langle J'(w),\ w^-\rangle=0$ 意味着 $w=w^+\geqslant0$. 根据强极大值原理可知 $w>0$. 从而, $u=u_\lambda+w$ 是问题 (1.1) 的第二个正解. 我们将用反证法证明第二个解的存在性, 假设 J 在 H 中存在唯一解 $w=0$.

引理 3.1　$w=0$ 是 J 的唯一局部极小.

证　对于任意的 $v\in H$, 则 $w=w^+-w^-$. 计算可知

$$J(w)=\frac12\|w^-\|^2+I(u_\lambda+w^+)-I(u_\lambda).\tag{3.2}$$

因为 u_λ 是 I 在 H 中的局部极小, 从而, 当 $\|w\|$ 足够小时,

$$J(w)\geqslant\frac12\|w^-\|^2.$$

引理 3.2　假设 $2<q\leqslant p$ 且定理 1.2 的条件成立. 对于任意的 $c\in\mathbb{R}$, 令 $\{w_n\}$ 是 J 的 $(PS)_c$ 序列, 则序列 $\{w_n\}$ 在 H 中有界.

证　对于任意的 $c\in\mathbb{R}$, 假设 $\{w_n\}$ 是 J 的 $(PS)_c$, 即

$$J(w_n)\to c,\quad J'(w_n)\to0\text{在 }H^{-1}\text{中},$$

从而

$$J(w_n)=c+o(1),\quad\langle J'(w_n),u_\lambda+w_n^+\rangle=o(1)\|u_\lambda+w_n^+\|.\tag{3.3}$$

结合 I 表达式, J 和 (3.3) 可知

$$\langle J'(w_n),u_\lambda+w_n^+\rangle=-\langle w_n^-,u_\lambda\rangle+\langle I'(u_\lambda+w_n^+),u_\lambda+w_n^+\rangle=o(1)\|u_\lambda+w_n^+\|.$$

(3.2) 意味着

$$\begin{aligned}&J(w_n)-\frac{1}{2}\langle J(w_n),u_\lambda+w_n^+\rangle\\&=\frac{1}{2}\|w_n^-\|^2+\frac{1}{2}\langle w_n^-,u_\lambda\rangle+I(u_\lambda+w_n^+)-\frac{1}{2}\langle I(u_\lambda+w_n^+),u_\lambda+w_n^+\rangle-I(u_\lambda)\\&\leqslant c+o(1)+o(1)\|u_\lambda+w_n^+\|.\end{aligned}$$

进而

$$\frac{1}{2}\|w_n^-\|^2+\frac{1}{2}\langle w_n^-,u_\lambda\rangle+\Big(\frac{1}{2}-\frac{1}{q}\Big)\int_\Omega\frac{(u_\lambda+w_n^+)^q}{|x|^{bp}}\,\mathrm{d}x\leqslant c+1+o(1)\|u_\lambda+w_n^+\|+I(u_\lambda),$$

于是

$$\int_\Omega\frac{(u_\lambda+w_n^+)^q}{|x|^{bp}}\,\mathrm{d}x\leqslant C_4\|w_n^-\|+C_5+o(1)\|u_\lambda+w_n^+\|,$$

其中 $C_4=\frac{N-s}{2-s}\|u_\lambda\|,C_5=\frac{2(N-s)}{2-s}(c+1+I_\lambda(u_\lambda))$. 迹定理和 (3.2) 表明

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\|w_n^-\|^2+\frac{1}{2}(\|u_\lambda\|-\|w_n^+\|)^2\\&\leqslant\frac{1}{2}\|w_n^-\|^2+\frac{1}{2}\|u_\lambda+w_n^+\|^2\\&=\frac{1}{q}\int_\Omega\frac{(u_\lambda+w_n^+)^q}{|x|^{bp}}\,\mathrm{d}x+\int_{\partial\Omega}\phi(x)(u_\lambda+w_n^+)\mathrm{d}\sigma+J(w_n)+I(u_\lambda)\\&\leqslant C_6\|w_n^-\|+C_7+C_8\|u_\lambda+w_n^+\|+o(1)\|u_\lambda+w_n^+\|,\end{aligned}$$

其中 $C_6=\frac{C_4}{q},C_7=\frac{C_5}{q}+c+o(1)\|w_n\|+I(u_\lambda),C_8=C_9\|\phi\|_{L^2(\partial\Omega)}$, $C_9>0$ 且第二个不等式应用了 Poincaré 不等式. 因为 $\|w_n^-\|^2+\|w_n^+\|^2=\|w_n\|^2$, 从而

$$\|w_n\|^2-C_{10}\|w_n^+\|-C_{11}\|w_n^-\|\leqslant C_{12}+o(1)\|u_\lambda+w_n^+\|,$$

其中 $C_{10}=2\|u_\lambda\|+2C_8,C_{11}=2C_6,C_{12}=2C_7+2C_8\|u_\lambda\|-\|u_\lambda\|^2$. 进而

$$\|w_n\|^2-C_{13}\|w_n\|-C_{12}\leqslant o(1)\|u_\lambda+w_n^+\|,$$

其中 $C_{13}=C_{10}+C_{11}$. 因此 $\{w_n\}$ 在 H 中是有界的.

对于任意的 $c\in\mathbb{R}$, 引理 3.2 表明 $(PS)_c$ 序列 $\{w_n\}$ 在 H 中是有界的. 所以, 存在一个子序列 (不妨仍记为 $\{w_n\}$) 和 w_0, 满足

$$\begin{cases}w_n\rightharpoonup w_0 & 在\ H中,\\ w_n\to w_0 & 几乎处处在\ \Omega中,\\ w_n\to w_0 & 在\ L^\gamma(\Omega,|x|^{bp})中,\ 1<\gamma<p,\\ w_n\to w_0 & 在\ L^\gamma(\Omega)中,\ 1<\gamma<2^*.\end{cases}\tag{3.4}$$

引理 3.3 假设 $2<q<p$. 对于任意的 $c\in\mathbb{R}^N$, 令 $\{w_n\}$ 是 J 的 $(PS)_c$ 序列, 则 $\{w_n\}$ 在 H 中有一个收敛子列, 即 J 满足 $(PS)_c$ 条件.

证 由 (3.4) 可知, 存在 $\{w_n\}$ 的子序列 (不妨仍记为 $\{w_n\}$), 使得 $w_n\to w_0$, 令 $v_n:=w_n-w_0$, 易证 $v_n\to 0$ 在 $L^q(\Omega,|x|^{bp})$ 中. 结合 (3.4) 和 Brezis-Leib 引理可知, 当 $n\to\infty$ 时,

$$o(1)=\langle J(v_n),v_n\rangle=\int_\Omega\Big(|\nabla v_n|^2-\mu\frac{|v_n|^2}{|x|^{2(1+a)}}\Big)\mathrm{d}x+o(1),\quad\int_\Omega|v_n|^2\,\mathrm{d}x\to 0.$$

所以, 当 $n\to\infty$ 时, $v_n\to 0$ 在 H 中. 从而, $w_n\to w_0$ 在 H 中.

引理 3.4　若 $q=p$. 对于任意的 $c<\frac{p-2}{4p}S_{a,b,\mu}^{\frac{p}{p-2}}$, 令 $\{w_n\}$ 是 J 的 $(PS)_c$ 序列 L, 若 $w=0$ 是 J_λ 的唯一的临界点, 则 $w_n\to 0$ 在 H 中.

证　取序列 $\{w_n\}\subset H^1(\Omega)$ 满足

$$J(w_n)\to c<\frac{p-2}{4p}S_{a,b,\mu}^{\frac{p}{p-2}},\quad J'(w_n)\to 0 \text{ 在 } H^{-1}\text{中}. \tag{3.5}$$

Brezis-Leib 引理和 (3.5) 表明 $w_0\in H^1(\Omega)$ 是 J 的临界点. 假设条件说明 $w_0=0$. 接下来, 我们将证明 $w_n\to 0$ 在 H 中. 由 Brezis-Lieb 引理, (3.3) 和 (3.5), 可知

$$J(w_n)=\frac{1}{2}\int_\Omega\Big(|\nabla w_n|^2-\mu\frac{|w_n|^2}{|x|^{2(1+a)}}\Big)\mathrm{d}x-\frac{1}{p}\int_\Omega\frac{|w_n^+|^p}{|x|^{bp}}\ \mathrm{d}x+o(1), \tag{3.6}$$

$$\int_\Omega\Big(|\nabla w_n|^2-\mu\frac{|w_n|^2}{|x|^{2(1+a)}}\Big)\mathrm{d}x-\int_\Omega\frac{|w_n^+|^p}{|x|^{bp}}\ \mathrm{d}x=o(1). \tag{3.7}$$

令 $\int_\Omega\frac{|v_n^+|^{2^*(s)}}{|x|^s}\,\mathrm{d}x\to k\geqslant 0$. 若 $k=0$, 则证明结束. 若 $k>0$. 仿照文 [21], 对于任意的 $\varepsilon>0$, 存在仅依赖于区域 Ω 和 ε 的正常数 C_ε, 使得

$$\int_\Omega\Big(|\nabla w_n|^2-\mu\frac{|w_n|^2}{|x|^{2(1+a)}}\Big)\mathrm{d}x+C_\varepsilon\int_\Omega|w_n|^2\ \mathrm{d}x\geqslant(2^{-\frac{p-2}{p}}S_{a,b,\mu}-\varepsilon)\Big(\int_\Omega\frac{|w_n^+|^p}{|x|^{bp}}\ \mathrm{d}x\Big)^{\frac{2}{p}}.$$

ε 的任意性表明 $k\geqslant\frac{1}{2}S_{a,b,\mu}^{\frac{p}{p-2}}$. 进而

$$\begin{aligned}c=o(1)+J(w_n)&=\frac{1}{2}\int_\Omega\Big(|\nabla w_n|^2-\mu\frac{w_n^2}{|x|^{2(1+a)}}\Big)\mathrm{d}x-\frac{1}{p}\int_\Omega\frac{|w_n^+|^p}{|x|^{bp}}\ \mathrm{d}x+o(1)\\&=\frac{p-2}{2p}k+o(1)\\&\geqslant\frac{p-2}{4p}S_{a,b,\mu}^{\frac{p}{p-2}},\end{aligned}$$

与 $c<\frac{p-2}{4p}S_{a,b,\mu}^{\frac{p}{p-2}}$ 矛盾. 所以 $w_n\to 0$ 在 H 中.

令 $\Omega\subset\mathbb{R}_+^N\triangleq\{x=(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_N)\in\mathbb{R}^N\mid x_N>0\}$ 是具有 C^2 边界的有界区域. 存在 $\delta>0$, 使得 $\partial\Omega$ 在零点的小邻域内可表示为 (如有必要可沿着 $x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_{N-1}$ 方向旋转):

$$x_N=h(x')=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N-1}\lambda_ix_i^2+o(|x'|^2),\quad\forall x'=(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_{N-1})\in D(0,\delta),$$

其中 $D(0,\delta)=B_\delta(0)\cap\{x_N=0\}$. 定义 $\lambda_1,\ \lambda_2,\ \cdots,\ \lambda_{N-1}$ 是 $\partial\Omega$ 在 0 点的主曲率, 且

$$H(0)=\frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N-1}\lambda_i$$

是 $\partial\Omega$ 在 0 点的平均曲率. 对于任意的 $\varepsilon>0$, $0\leqslant\mu<(\sqrt{\bar{\mu}}-a)^2$, 令

$$u_\varepsilon(x)=\frac{\varepsilon^{\frac{1}{p-2}}}{|x|^\gamma(\varepsilon+|x|^{(p-2)\beta})^{\frac{2}{p-2}}},$$

则对于充分小的 $\varepsilon>0$, 下面的引理成立.

引理 3.5 如果 $N\geqslant 4, 0\leqslant a<\sqrt{\bar{\mu}}, a\leqslant b<a+1$ 且 $0\leqslant \mu<(\sqrt{\bar{\mu}}-a)^2-\frac{1}{4}$, 对于 $\varepsilon>0$, 下面的估计成立:

$$\Big[\frac{\int_\Omega(|x|^{-2a}|\nabla u_\varepsilon|^2-\mu\frac{|u_\varepsilon|^2}{|x|^{2(1+a)}})\mathrm{d}x}{(\int_\Omega\frac{|u_\varepsilon|^p}{|x|^{bp}}\ \mathrm{d}x)^{\frac{2}{p}}}\Big]^{\frac{p}{p-2}}\leqslant\frac{1}{2}S_{a,b,\mu}^{\frac{p}{p-2}}-C_{14}\varepsilon^{\frac{1}{(p-2)\beta}}, \tag{3.8}$$

其中 $C_{14}>0$. 当 $N\geqslant 3, 0\leqslant\mu<(\sqrt{\bar{\mu}}-a)^2$, 有下面的估计:

$$\int_\Omega u_\varepsilon^2\ \mathrm{d}x=\begin{cases}O(\varepsilon^{\frac{2}{p-2}}), & \mu>(\sqrt{\bar{\mu}}-a)^2-(1+a)^2,\\ O(\varepsilon^{\frac{2}{p-2}}|\ln\varepsilon|), & \mu=(\sqrt{\bar{\mu}}-a)^2-(1+a)^2,\\ O(\varepsilon^{\frac{2(1+a)}{(p-2)\beta}}), & \mu<(\sqrt{\bar{\mu}}-a)^2-(1+a)^2.\end{cases} \tag{3.9}$$

证 参考文 [4, 引理 2.3].

引理 3.6 若 $q=p$ 且定理 1.2 的任一假设条件 (ii), (iii), (iv) 成立, 则存在非负函数 $w^*\in H,\ w^*\not\equiv 0$, 满足

$$\sup_{t\geqslant 0}J(tw^*)<\frac{p-2}{4p}S_{a,b,\mu}^{\frac{p}{p-2}}.$$

证 不等式

$$(a+b)^\alpha\geqslant a^\alpha+b^\alpha+\alpha a^{\alpha-1}b,\quad \alpha\geqslant 2,\ a,b>0$$

意味着

$$\begin{aligned}J(tu_\varepsilon)&=\frac{t^2}{2}\int_\Omega\Big(|x|^{-2a}|\nabla u_\varepsilon|^2-\mu\frac{|u_\varepsilon|^2}{|x|^{2(1+a)}}+\lambda|u_\varepsilon|^2\Big)\mathrm{d}x\\&\quad-\frac{1}{p}\int_\Omega\Big(\frac{(u_\lambda+tu_\varepsilon)^p}{|x|^{bp}}-\frac{u_\lambda^p}{|x|^{bp}}-p\frac{|tu_\lambda|^{p-1}u_\varepsilon}{|x|^{bp}}\Big)\mathrm{d}x\\&\leqslant\frac{t^2}{2}\int_\Omega\Big(|x|^{-2a}|\nabla u_\varepsilon|^2-\mu\frac{u_\varepsilon^2}{|x|^{2(1+a)}}+\lambda u_\varepsilon^2\Big)\mathrm{d}x-\frac{t^p}{p}\int_\Omega\frac{u_\varepsilon^p}{|x|^{bp}}\ \mathrm{d}x:=Q(t).\end{aligned}$$

易知 $\lim\limits_{t\to+\infty}Q(t)=-\infty, Q(0)=0$, 若 $t\to 0^+$, 则 $Q(t)>0$. 所以 $\sup\limits_{t\geqslant 0}Q(t)$ 存在达到数 $t_\varepsilon>0$ 且当 $\varepsilon>0$ 足够小时, t_ε 是一致有界的. 显然

$$\begin{aligned}Q(t_\varepsilon)&=\sup_{t\geqslant 0}\Big(\frac{t^2}{2}\int_\Omega\Big(|x|^{-2a}|\nabla u_\varepsilon|^2-\mu\frac{u_\varepsilon^2}{|x|^{2(1+a)}}+\lambda u_\varepsilon^2\Big)\mathrm{d}x-\frac{t^p}{p}\int_\Omega\frac{u_\varepsilon^p}{|x|^{bp}}\ \mathrm{d}x\Big)\\&\leqslant\sup_{t\geqslant 0}\Big(\frac{t^2}{2}\int_\Omega\Big(|x|^{-2a}|\nabla u_\varepsilon|^2-\mu\frac{u_\varepsilon^2}{|x|^{2(1+a)}}\Big)\mathrm{d}x-\frac{t^p}{p}\int_\Omega\frac{u_\varepsilon^p}{|x|^{bp}}\ \mathrm{d}x\Big)+t_\varepsilon\lambda\int_\Omega|u_\varepsilon|^2\ \mathrm{d}x\\&\leqslant\Big(\frac{1}{2}-\frac{1}{p}\Big)\Big[\frac{\int_\Omega(|x|^{-2a}|\nabla u_\varepsilon|^2-\mu\frac{|u_\varepsilon|^2}{|x|^{2(1+a)}})\mathrm{d}x}{(\int_\Omega\frac{|u_\varepsilon|^p}{|x|^{bp}}\ \mathrm{d}x)^{\frac{2}{p}}}\Big]^{\frac{p}{p-2}}+t_\varepsilon\lambda\int_\Omega|u_\varepsilon|^2\ \mathrm{d}x.\end{aligned}$$

情况 (i) 由于 $0\leqslant\mu<(\sqrt{\bar{\mu}}-a)^2-(1+a)^2$, 由引理 3.5 可知

$$\begin{aligned}Q(t_\varepsilon)&\leqslant\Big(\frac{1}{2}-\frac{1}{p}\Big)\Big(\frac{1}{2}S_{a,b,\mu}^{\frac{p}{p-2}}-C_{14}\varepsilon^{\frac{1}{(p-2)\beta}}\Big)+O(\varepsilon^{\frac{2(1+a)}{(p-2)\beta}})\\&=\frac{p-2}{4p}S_{a,b,\mu}^{\frac{p}{p-2}}-C_{15}\varepsilon^{\frac{1}{(p-2)\beta}}+O(\varepsilon^{\frac{2(1+a)}{(p-2)\beta}}),\end{aligned}$$

其中 $C_{15}=\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{p}\right)C_{14}$. 对于 $N\geqslant 5, 0\leqslant a<\frac{\sqrt{\mu}-1}{2}, 0\leqslant\mu<(\sqrt{\mu}-a)^2-(1+a)^2$, 计算可知

$$\frac{1}{(p-2)\beta}<\frac{2(1+a)}{(p-2)\beta},\quad \frac{\sqrt{\mu}-1}{2}>0,\quad (\sqrt{\mu}-a)^2-(1+a)^2>0.$$

进而, 当 ε 充分小时,

$$\sup_{t\geqslant 0}J(tu_\varepsilon)<\frac{p-2}{4p}S_{a,b,\mu}^{\frac{p}{p-2}}.$$

情况 (ii) 因为 $\mu=(\sqrt{\mu}-a)^2-(1+a)^2$, 由引理 3.5 可知

$$\begin{aligned}Q(t_\varepsilon)&\leqslant\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{p}\right)\left(\frac{1}{2}S_{a,b,\mu}^{\frac{p}{p-2}}-C_{14}\varepsilon^{\frac{1}{(p-2)\beta}}\right)+O(\varepsilon^{\frac{2}{p-2}}|\ln\varepsilon|)\\&=\frac{p-2}{4p}S_{a,b,\mu}^{\frac{p}{p-2}}-C_{15}\varepsilon^{\frac{1}{(p-2)\beta}}+O(\varepsilon^{\frac{2}{p-2}}|\ln\varepsilon|).\end{aligned}$$

对于 $N\geqslant 4, 0\leqslant a\leqslant\frac{\sqrt{\mu}-1}{2}, \mu=(\sqrt{\mu}-a)^2-(1+a)^2$, 计算可知

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+}\frac{\varepsilon^{\frac{1}{(p-2)\beta}}}{\varepsilon^{\frac{2}{p-2}}|\ln\varepsilon|}=+\infty,\quad \frac{\sqrt{\mu}-1}{2}\geqslant 0,\quad (\sqrt{\mu}-a)^2-(1+a)^2\geqslant 0.$$

所以, 当 ε 充分小时,

$$\sup_{t\geqslant 0}J(tu_\varepsilon)<\frac{p-2}{4p}S_{a,b,\mu}^{\frac{p}{p-2}}.$$

情况 (iii) 对于 $(\sqrt{\mu}-a)^2-(1+a)^2<\mu<(\sqrt{\mu}-a)^2-\frac{1}{4}$, 结合引理 3.5 可知

$$\begin{aligned}Q(t_\varepsilon)&\leqslant\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{p}\right)\left(\frac{1}{2}S_{a,b,\mu}^{\frac{p}{p-2}}-C_{14}\varepsilon^{\frac{1}{(p-2)\beta}}\right)+O(\varepsilon^{\frac{2}{p-2}})\\&=\frac{p-2}{4p}S_{a,b,\mu}^{\frac{p}{p-2}}-C_{15}\varepsilon^{\frac{1}{(p-2)\beta}}+O(\varepsilon^{\frac{2}{p-2}}).\end{aligned}$$

若 $N>3+2a, 0\leqslant a\leqslant\frac{\sqrt{\mu}-1}{2}, (\sqrt{\mu}-a)^2-(1+a)^2<\mu<(\sqrt{\mu}-a)^2-\frac{1}{4}$, 计算可知

$$\frac{1}{(p-2)\beta}<\frac{2}{p-2},\quad \frac{\sqrt{\mu}-1}{2}\geqslant 0,\quad (\sqrt{\mu}-a)^2-(1+a)^2\geqslant 0,\quad (\sqrt{\mu}-a)^2-\frac{1}{4}>0.$$

所以, 对于充分小的 ε, 有

$$\sup_{t\geqslant 0}J(tu_\varepsilon)<\frac{p-2}{4p}S_{a,b,\mu}^{\frac{p}{p-2}}.$$

根据情况 (i),(ii),(iii) 的证明, 取 $w^*=u_\varepsilon$, 当 ε 充分小时,

$$\sup_{t\geqslant 0}J(tw^*)<\frac{p-2}{4p}S_{a,b,\mu}^{\frac{p}{p-2}}.$$

故引理 3.6 成立.

定理 1.2 的证明 我们利用山路引理和反证法证明第二个解的存在性. 假设 $w=0$ 是 J 的唯一的临界点. 由引理 3.1 可知对于任意的 $w\in\partial B_\rho=\{w\in H,\ \|w\|=\rho\}$, 存在 $\beta>0$, 使得 $J(w)>\beta$, 其中 $\rho>0$ 充分小.

(a) $2<q<p$. 对于任意的 $w\in H,\ w\not\equiv 0$. 显然有 $\lim\limits_{t\to+\infty}J(tw)\to-\infty$, 所以, 取 t_1 满足 $\|t_1w\|>\rho$ 且 $J(t_1w)<0$. 山路引理 (见 [22]) 意味着存在 (PS) 序列 $\{w_n\}\subset H$, 引理 3.2 表明 w_0 是 J 在水平 $c\geqslant\beta>0$ 的临界点.

(b) $q=p$. 由引理 3.6 可知, 存在 $w^*\in H$, $w^*\not\equiv 0$, 使得

$$\sup_{t\geqslant 0}J(tw^*)<\frac{p-2}{4p}S_{a,b,\mu}^{\frac{p}{p-2}}.$$

显然 $\lim\limits_{t\to+\infty}J(tw^*)\to-\infty$. 进而, 取 $t_2>0$, 满足 $\|t_2w^*\|>\rho$ 且 $J(t_2w^*)<0$. 山路引理表明存在 $\{w_n\}\subset H$, 满足

$$J(w_n)\to c\geqslant\beta,\quad J'(w_n)\to 0,$$

其中

$$c=\inf_{h\in\Gamma}\max_{t\in[0,1]}J(h(t)),$$
$$\Gamma=\{h\in C([0,1],\ H)\mid h(0)=0,\ h(1)=t_2w^*\}.$$

因此

$$0<\beta\leqslant c=\inf_{h\in\Gamma}\max_{t\in[0,1]}J(h(t))\leqslant\max_{t\in[0,1]}J(tt_0w^*)\leqslant\sup_{t\geqslant 0}J(tw^*)<\frac{p-2}{4p}S_{a,b,\mu}^{\frac{p}{p-2}}.$$

由引理 3.4 可知当 $n\to\infty$ 时, $w_n\to 0$ 在 H 中. 因此 $0=J(0)=\lim\limits_{n\to+\infty}J(w_n)=c\geqslant\beta>0$, 矛盾.

因此, 结合情况 (a) 和 (b) 可知定理 1.2 成立.

致谢 作者真挚地感谢审稿人和编辑给予的帮助和建议.

参 考 文 献

[1] Brezis H, Nirenberg L. Positive solutions of nonlinear elliptic equations involving critical Sobolev exponents [J]. *Comm Pure Appl Math*, 1983, 36:437–477.

[2] Huang X J, Wu X P, Tang C L. Multiple positive solutions for semilinear elliptic equations with critical weighted Hardy-Sobolev exponents [J]. *Nonlinear Anal*, 2011, 74:2602–2611.

[3] Huang L, Wu X P, Tang C L. Existence and multiplicity of solutions for semilinear elliptic equations with critical weighted Hardy-Sobolev exponents [J]. *Nonlinear Anal*, 2009, 71:1916–1924.

[4] Song Y Y, Wu X P, Tang C L. Multiple positive solutions for Robin problem involving critical weighted Hardy-Sobolev exponents with boundary singularities [J]. *J Math Anal Appl*, 2014, 414:211–236.

[5] Ghoussoub N, Kang X S. Hardy-Sobolev critical elliptic equations with boundary singularities [J]. *Ann Inst H Poincaré Anal Non Linéaire*, 2004, 21:767–793.

[6] Shang Y Y, Tang C L. Positive solutions for Neumann elliptic problems involving critical Hardy-Sobolev exponent with boundary singularities [J]. *Nonlinear Anal*, 2009, 70:1302–1320.

[7] Shang Y Y. Exitence and multiplicity of positive solutions for some Hardy-Sobolev critical elliptic equation with boundary singularities [J]. *Nonlinear Anal*, 2012, 75:2724–2734.

[8] Catrina F, Wang Z Q. On the Caffarelli-Kohn-Nirenberg inequalities: sharp constants, existence (and nonexistence), and symmetry of extremal functions [J]. *Comm Pure Appl Math*, 2001, 54:229–258.

[9] Bartsch T, Peng S J, Zhang Z T. Existence and non-existence of solutions to elliptic equations related to the Caffarelli-Kohn-Nirenberg inequalities [J]. *Calc Var Partial Differential Equations*, 2007, 30:113–136.

[10] Chern J L, Lin C S. Minimizers of Caffarelli-Kohn-Nirenberg inequalities with the singularity on the boundary [J]. *Arch Ration Mech Anal*, 2010, 197:401–432.

[11] Wang C, Shang Y Y. Existence and multiplicity of positive solutions for elliptic equation with critical weighted Hardy-Sobolev exponents and boundary singularities [J]. *Comput Math Appl*, 2017, 74:701–713.

[12] Deng Y B, Peng S J. Exitence of multiple solutions for inhomogeneous Neumann problem [J]. *J Math Anal Appl*, 2002, 271:155–174.

[13] Deng Y B, Jin L Y. Multiple positive solutions for a quasilinear nonhomogeneous Neumann problems with critical Hardy exponents [J]. *Nonlinear Anal*, 2007, 67:3261–3275.

[14] Wang X Z. Neumann problems of semilinear elliptic equations involving critical Sobolev exponents [J]. *J Differential Equations*, 1991, 93:283–310.

[15] Hashizume M, Hsia C H, Hwang G. On the Neumann problem of Hardy-Sobolev critical equations with the multiple singularities [J]. *Commun Pure Appl Anal*, 2019, 18:301–322.

[16] Kang D S, Peng S J. Solutions for semi-linear elliptic problems with critical Hardy-Sobolev exponents and Hardy potential [J]. *Appl Math Lett*, 2005, 18:1094–1100.

[17] Yang H T, Chen J H. A result on Hardy-Sobolev critical elliptic equations with boundary singularities [J]. *Commun Pure Appl Anal*, 2007, 6:191–201.

[18] Caffarelli L, Kohn R, Nirenberg L. First order interpolation inequalities with weights [J]. *Compositio Math*, 1984, 53:259–275.

[19] Willem M. Minimax theorems [M]. Boston: Birkhuser Boston, 1996.

[20] Mawhin J, Willem M. Critical point theory and Hamiltonian systems [M]. New York: Springer-Verlag, 1989.

[21] Chabrowski J. On a singular Neumann problem for semilinear elliptic equations with critical Sobolev exponent and lower order terms [J]. *J Fixed Point Theory Appl*, 2007, 2:333–352.

[22] Rabinowitz P H. Minimax methods in critical point theory with applictions to differential equations [M]. CBMS Reg Conf Series Math, Providence: American Mathematical Society, 1986.

Multiple Positive Solutions for a Inhomogeneous Neumann Problem with Critical Weight Hardy-Sobolev Exponent and Boundary Singularities

SHANG Yanying[1] WANG Cong[2]

[1]Corresponding author. School of Mathematics and Statistics, Southwest University, Chongqing 400715, China. E-mail: shangyan@swu.edu.cn

[2]School of Mathematics and Statistics, Southwest University, Chongqing 400715, China. E-mail: wc252015@163.com

Abstract In this paper, the authors study a inhomogeneous Neumann elliptic equation with boundary singularities. By Ekeland's variational principle, mountain pass lemma and some analysis technology, the existence of multiple positive solutions is established.

Keywords Neumann problem, Boundary singularities, Ekeland's variational principle

2000 MR Subject Classification 35B07, 35A10

The English translation of this paper will be published in
Chinese Journal of Contemporary Mathematics, Vol. 40 No. 4, 2019
by ALLERTON PRESS, INC., USA