数 学 年 刊 A 辑
2019, 40(4):361–364
DOI: 10.16205/j.cnki.cama.2019.0027

本原 Heronian 三角形的一个注记

张思汇[1] 蒋天泽[2]

提要 得到了无穷多个锐角本原 Heronian 三角形, 其内切圆及三个旁切圆半径均为整数, 并得到了无穷多个本原 Heronian 三角形, 其内切圆及三个旁切圆半径均不为整数.

关键词 Heronian 三角形, 本原 Heronian 三角形, 整数几何
MR (2000) 主题分类 11A67, 11A99
中图法分类 O156.1
文献标志码 A
文章编号 1000-8314(2019)04-0361-04

1 引 言

记三角形 ABC 的三边长为 a, b, c, 三角形 ABC 的面积为 T. 众所周知, 三边长都是整数的直角三角形 (又称为 Pythagorean 三角形) 的面积必为整数. 作为它的推广, 三角形 ABC 称为 Heronian 三角形, 若其三条边及面积的值均为整数, 进一步, 称其为本原的, 若 $\gcd(a, b, c) = 1$. 一些 Heronian 三角形的基本性质可以参考文 [1].

Heronian 三角形与一些数论的分支有较紧密的联系, 例如, 文 [2] 得到了每个 Heronian 三角形都可以作为直角坐标平面内的一个格点三角形 (即三个顶点都是整点的三角形), 文 [3] 证明了两条中线长为整数的 Heronian 三角形与一条特殊的椭圆曲线上的有理点的对应关系, 进而推动了对一些特殊 Heronian 三角形的讨论.

设 r, r_a, r_b, r_c 分别为其内切圆及角 A, B, C 所对的旁切圆半径. 三角形 ABC 称为不可分解的, 若 h_a, h_b, h_c 均不为整数, 其中 h_a, h_b, h_c 分别为边 a, b, c 上的高线长. 否则, 称三角形 ABC 为可分解的.

容易知道, 本原的直角三角形其内切圆及旁切圆半径均为整数. 文 [4] 中构造了无穷多本原可分解 (非直角)Heronian 三角形, 满足 $r, r_a, r_b, r_c \in \mathbb{N}$, 同时构造了无穷多本原不可分解 (非直角)Heronian 三角形, 满足 $r, r_a, r_b, r_c \in \mathbb{N}$, 但所有的这些三角形都是钝角三角形. 因此, 文 [4] 提出了如下两个问题:

(1) 是否存在无穷多个锐角本原 Heronian 三角形, 满足 $r, r_a, r_b, r_c \in \mathbb{N}$?

(2) 是否存在无穷多个本原 Heronian 三角形, 满足 $r, r_a, r_b, r_c \notin \mathbb{N}$?

本文回答了上述问题, 得到了如下的结论.

定理 1.1 存在无穷多个锐角本原 Heronian 三角形, 满足 $r, r_a, r_b, r_c \in \mathbb{N}$. 进一步, 存在无穷多个锐角本原可分解的 Heronian 三角形, 满足 $r, r_a, r_b, r_c \in \mathbb{N}$.

定理 1.2 存在无穷多个本原 Heronian 三角形, 满足 $r, r_a, r_b, r_c \notin \mathbb{N}$.

本文 2018 年 8 月 26 日收到, 2018 年 9 月 21 日收到修改稿.

[1]上海理工大学理学院, 上海 200093. E-mail: 071018005@fudan.edu.cn

[2]上海中学, 上海 200231. E-mail: szegdd@126.com

2 定理 1.1 的证明

令 $t\equiv 1262(\bmod 3492)$, 即 $t\equiv 2(\bmod 4)$, $t\equiv 2(\bmod 9)$ 且 $t\equiv 1(\bmod 97)$. 取

$$a=\frac{(5t-4)(13t+4)(2t^2+2t+1)}{36},$$
$$b=\frac{81t^4+16(t+1)^4}{36},$$

且

$$c=\frac{97t^2(t+1)^2}{36}.$$

由 $6|(5t-4),6|(13t+4)$ 得 $a\in\mathbb{N}$, 由 $2|t,3|(t+1)$ 得 $b,c\in\mathbb{N}$. 显然 $2|(a-1)$, $2|b$, $2|(c-1)$. 计算知

$$a+b+c=\frac{324t^4+324t^3+162t^2}{36}=\frac{9t^2(2t^2+2t+1)}{2},$$
$$a+b-c=\frac{130t^4-64t^3-32t^2}{36},$$
$$a-b+c=\frac{130t^4+196t^3-30t^2-128t-32}{36},$$
$$b+c-a=\frac{64t^4+192t^3+224t^2+128t+32}{36}.$$

因此

$$s=\frac{a+b+c}{2}=\frac{9t^2(2t^2+2t+1)}{4},$$
$$s-a=\frac{32t^4+96t^3+112t^2+64t+16}{36}=\frac{4(2t^2+2t+1)(t+1)^2}{9}>0,$$
$$s-b=\frac{65t^4+98t^3-15t^2-64t-16}{36}=\frac{(5t-4)(13t+4)(t+1)^2}{36}>0,$$
$$s-c=\frac{65t^4-32t^3-16t^2}{36}=\frac{t^2(5t-4)(13t+4)}{36}>0.$$

我们得到 a,b,c 组成三角形三边, 且

$$T=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}=\frac{t^2(t+1)^2(5t-4)(13t+4)(2t^2+2t+1)}{36},$$
$$r=\frac{T}{s}=\frac{(t+1)^2(5t-4)(13t+4)}{81},$$
$$r_a=\frac{T}{s-a}=\frac{t^2(5t-4)(13t+4)}{16},$$
$$r_b=\frac{T}{s-b}=t^2(2t^2+2t+1),$$
$$r_c=\frac{T}{s-c}=(t+1)^2(2t^2+2t+1),$$

故 $r_b,r_c\in\mathbb{N}$. 由 $6|(5t-4),6|(13t+4)$ 得 $T\in\mathbb{N}$, 由 $3|(t+1),3|(5t-4),3|(13t+4)$ 得 $r\in\mathbb{N}$, 由 $2|t,2|(5t-4),2|(13t+4)$ 得 $r_a\in\mathbb{N}$.

由于 a 的最高次项系数为 $\frac{130}{36}$, 大于 b,c 的最高次项系数, 因此对充分大的 t, $a>b,c$.

由于 $b^2+c^2-a^2$ 的最高次项系数为 $\frac{1918}{1296}(>0)$, 因此对充分大的 t, $b^2+c^2-a^2>0$, 所以对充分大的 t, 三角形为锐角三角形.

若存在素数 p, 使 $p|b, p|c$, 则由 $2|(c-1)$ 知, $p \neq 2$.

同理, 由于 3 不整除 c, 故 $p \neq 3$, 由于 97 不整除 b, 故 $p \neq 97$. 因此, 由 $p|c$, 我们得到 $p|t$ 或 $p|(t+1)$.

若 $p|t$, 则 p 不整除 $16(t+1)^4$, 故 p 不整除 b, 矛盾.

若 $p|(t+1)$, 则 p 不整除 $81t^4$, 故 p 仍不整除 b, 矛盾.

综上所述, 我们得到 $\gcd(a,b,c)=1$.

进一步, 由 $h_a = 2t^2(t+1)^2$ 知, 三角形是可分解的, 定理 1.1 证毕.

3　定理 1.2 的证明

令 $m \equiv 155 (\bmod 5005)$, 即 $m \equiv -1 (\bmod 13)$, $m \equiv 0 (\bmod 5)$, $m \equiv 1 (\bmod 7)$ 且 $m \equiv 1 (\bmod 11)$.

令 $n \equiv 2211 (\bmod 10010)$, 即 $n \equiv 1 (\bmod 2)$, $n \equiv 1 (\bmod 13)$, $n \equiv 1 (\bmod 5)$, $n \equiv -1 (\bmod 7)$, 且 $n \equiv 0 (\bmod 11)$. 由于 $2n+1 \equiv 4423 (\bmod 20020)$ 且 $(4423, 20020) = 1$, 我们取使 $2n+1$ 为素数的 n(由 Dirichlet 定理知, 存在无穷多个这样的 n). 取

$$a = (2n+1)(2m^2+2m+1),$$

$$b = (n+1)^2(m+1)^2 + m^2n^2,$$

且

$$c = (n+1)^2m^2 + (m+1)^2n^2.$$

计算知

$$\begin{aligned}
a+b+c &= 2(2m^2+2m+1)(n+1)^2, \\
s &= \frac{a+b+c}{2} = (2m^2+2m+1)(n+1)^2, \\
s-a &= (2m^2+2m+1)n^2 > 0, \\
s-b &= m^2(2n+1) > 0, \\
s-c &= (m+1)^2(2n+1) > 0,
\end{aligned}$$

我们得到 a, b, c 组成三角形的三边, 且

$$\begin{aligned}
T &= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} = (2m^2+2m+1)n(n+1)m(m+1)(2n+1), \\
r &= \frac{T}{s} = \frac{mn(m+1)(2n+1)}{n+1}, \\
r_a &= \frac{T}{s-a} = \frac{(n+1)m(m+1)(2n+1)}{n}, \\
r_b &= \frac{T}{s-b} = \frac{(2m^2+2m+1)n(n+1)(m+1)}{m}, \\
r_c &= \frac{T}{s-c} = \frac{(2m^2+2m+1)n(n+1)m}{m+1},
\end{aligned}$$

故 $T \in \mathbb{N}$. 由 $7|(n+1)$ 且 7 不整除 $mn(m+1)(2n+1)$ 知 $r \notin \mathbb{N}$, 由 $11|n$ 且 11 不整除 $(n+1)m(m+1)(2n+1)$ 知 $r_a \notin \mathbb{N}$, 由 $5|m$ 且 5 不整除 $(2m^2+2m+1)n(n+1)(m+1)$ 知 $r_b \notin \mathbb{N}$, 由 $13|(m+1)$ 且 13 不整除 $(2m^2+2m+1)n(n+1)m$ 知 $r_c \notin \mathbb{N}$.

若存在素数 p, 使 $p|a, p|b, p|c$, 则 $p|(2n+1)$ 或 $p|(2m^2+2m+1)$.

若 $p|(2n+1)$, 则 $p=2n+1$, 由

$$0 \equiv b=(n+1)^2(m+1)^2+m^2n^2 \equiv n^2((m+1)^2+m^2)(\operatorname{mod} p),$$

及 $(p,n)=1$, 我们得到 $p|(2m^2+2m+1)$, 但 p 为 $4k+3$ 型素数, 故由 $p|(m^2+(m+1)^2)$ 推出 $p|m$ 且 $p|(m+1)$, 矛盾.

若 $p|(2m^2+2m+1)$, 由

$$0 \equiv b=(n+1)^2(m+1)^2+m^2n^2 \equiv (m+1)^2((n+1)^2-n^2)(\operatorname{mod} p),$$

及 $(p,m+1)=1$, 我们得到 $p|(2n+1)$, 故 $p=2n+1$. 与上述论证同理得到矛盾.

综上所述, 我们得到 $\gcd(a,b,c)=1$, 定理 1.2 证毕.

4 进一步的问题

我们提出如下未解决的问题:

是否存在无穷多个锐角本原不可分解的 Heronian 三角形, 满足 $r, r_a, r_b, r_c \in \mathbb{N}$?

致谢 感谢审稿人对本文提出的十分有益的建议.

参 考 文 献

[1] Cheney W F. Heronian triangles [J]. *American Mathematical Monthly*, 1929, 36(1): 22–28.

[2] Paul Yiu. Heronian triangles are lattice triangles [J]. *American Mathematical Monthly*, 2001, 108(3):261–263.

[3] Ralph H B, Randall L R. Heron triangles and elliptic curves [J]. *Bull Austral Math Soc*, 1998, 58:411–421.

[4] Zhou Li. Primitive Heronian triangles with integer inradius and exradii [J]. *Forum Geometricorum*, 2018, 18:71–77.

A Note on Primitive Heronian Triangles

ZHANG Sihui[1] JIANG Tianze[2]

[1]College of Science, University of Shanghai for Science & Technology, Shanghai 200093, China. E-mail: 071018005@fudan.edu.cn

[2]Shanghai High School, Shanghai 200231, China. E-mail: szegdd@126.com

Abstract Infinitely many acute primitive Heronian triangles with integer inradius and exradii are obtained, and infinitely many primitive Heronian triangles with non-integer inradius and exradii are also obtained.

Keywords Heronian triangles, Primitive Heronian triangles, Integer geometry

2000 MR Subject Classification 11A67, 11A99