数 学 年 刊 A 辑
2019, 40(4):365–376
DOI: 10.16205/j.cnki.cama.2019.0028

关于两个素数和一个素数 k 次幂的丢番图不等式*

朱 立[1]

提要 令 $\psi(k)=\begin{cases}\frac{1}{2k}-\frac{3}{10}, & 1<k<\frac{5}{4},\\ \frac{1}{10}, & \frac{5}{4}\leqslant k<2,\\ \frac{2}{3k}-\frac{7}{30}, & 2\leqslant k\leqslant\frac{5}{2}.\end{cases}$ 设 $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ 是不全同号的非零实数, 且满足 $\frac{\lambda_1}{\lambda_2}$ 为无理数, 则对于任意实数 η 和 $\varepsilon>0$, 不等式

$$|\lambda_1p_1+\lambda_2p_2+\lambda_3p_3^k+\eta|\leqslant(\max\{p_1,p_2,p_3^k\})^{-\psi(k)+\varepsilon}$$

有无穷多组素数解 p_1, p_2, p_3. 该结果改进了 Gambini, Languasco 和 Zaccagnini 的结果.

关键词 素数, Davenport-Heilbronn 方法, 丢番图不等式
MR (2000) 主题分类 11P32, 11D75
中图法分类 O156.4
文献标志码 A
文章编号 1000-8314(2019)04-0365-12

1 引 言

N, $k_1,k_2,\cdots,k_s$ 均表示正整数. 混合幂的华林-哥德巴赫问题是研究关于 N 的方程

$$N=p_1^{k_1}+p_2^{k_2}+\cdots+p_s^{k_s}$$

是否有解, 其中 p_1, p_2, $\cdots$, p_s 均为素数. 这种类型的结果我们了解得并不多. 与华林-哥德巴赫问题类似的丢番图不等式问题也是一个很有趣的问题. 丢番图不等式问题是考虑对于任意给定的实数 $\varepsilon>0$ 和 η, 不等式

$$|\lambda_1p_1^{k_1}+\cdots+\lambda_sp_s^{k_s}+\eta|\leqslant\varepsilon \tag{1.1}$$

是否存在无穷多组素数解 $p_1,\cdots,p_s$, 其中 λ_1, $\cdots$, λ_s 是一些满足具体条件的非零实数. 一些作者还研究了更困难的问题. 他们考虑是否可以将 (1.1) 式右边的常数 ε 替换为一个形如 $(\max\limits_{1\leqslant j\leqslant s}p_j)^{-\sigma}$ 的函数, 且要求 $\sigma>0$.

在 2016 年, Languasco 和 Zaccagnini 在文 [1] 中证明了对于任意给定的实数 η, 存在无穷多组素数 p_1, p_2, p_3, 使得不等式

$$|\lambda_1p_1+\lambda_2p_2+\lambda_3p_3^k+\eta|<(\max\{p_1,\,p_2,\,p_3^k\})^{-\phi(k)} \tag{1.2}$$

本文 2018 年 6 月 4 日收到.
[1]同济大学数学科学学院, 上海 200092. E-mail: zhuli15@tongji.edu.cn
*本文受到国家自然科学基金 (No. 11771333) 的资助.

成立, 其中

$$\phi(k)=\frac{4-3k}{10k},\quad 1<k<\frac{4}{3},$$

λ_j $(1\leqslant j\leqslant 3)$ 是不全同号的非零实数, 且满足 $\frac{\lambda_1}{\lambda_2}$ 为无理数. 最近, Gambini, Languasco 和 Zaccagnini 在文 [2] 中对此结果做了改进. 他们将 (1.2) 中的指数 $\phi(k)$ 改进为 $\psi^*(k)$, 这里

$$\psi^*(k)=\frac{3-2k}{6k},\quad 1<k\leqslant\frac{6}{5},$$
$$\psi^*(k)=\frac{1}{12},\quad \frac{6}{5}<k\leqslant 2,$$
$$\psi^*(k)=\frac{3-k}{6k},\quad 2<k\leqslant\frac{5}{2}.$$

利用文 [3–5] 中的一些方法, 我们可以对指数 $\psi^*(k)$ 做进一步的改进, 从而得到如下更强的结果.

定理 1.1 令 k 为一个实数且满足 $1<k\leqslant\frac{5}{2}$, 设 $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ 是不全同号的非零实数, 满足 $\frac{\lambda_1}{\lambda_2}$ 为无理数, 则对于任意给定的实数 η 和 $\varepsilon>0$, 不等式

$$|\lambda_1p_1+\lambda_2p_2+\lambda_3p_3^k+\eta|\leqslant(\max\{p_1,p_2,p_3^k\})^{-\psi(k)+\varepsilon}\tag{1.3}$$

有无穷多组素数解 p_1,p_2,p_3, 其中

$$\psi(k)=\begin{cases}\dfrac{1}{2k}-\dfrac{3}{10}, & 1<k<\dfrac{5}{4},\\ \dfrac{1}{10}, & \dfrac{5}{4}\leqslant k<2,\\ \dfrac{2}{3k}-\dfrac{7}{30}, & 2\leqslant k\leqslant\dfrac{5}{2}.\end{cases}\tag{1.4}$$

2 符号与方法概要

在本文中, k 表示一个实数且满足 $1<k\leqslant\frac{5}{2}$. 字母 p 不论是否带下标都表示素数. ε 表示任意小的正数. δ 是根据定理中的系数 $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ 来取定的一个足够小的正数. 我们用 $\mathrm{e}(\alpha)$ 来表示 $\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}\alpha}$. 定义 $\frac{a}{q}$ 为 $\frac{\lambda_1}{\lambda_2}$ 的渐近分数. 因为 $\frac{\lambda_1}{\lambda_2}$ 是无理数, 所以我们可以令渐近分数的分母 q 充分大. 设

$$X=q^{\frac{5}{2}},\quad \tau=X^{-\psi(k)+10\varepsilon},\quad L=\log X,\quad S_j(\alpha)=\sum_{\delta X\leqslant p^j\leqslant X}\mathrm{e}(p^j\alpha)\log p,$$

其中 $\psi(k)$ 在 (1.4) 式中定义. 令

$$K_\tau(\alpha)=\begin{cases}\Big(\dfrac{\sin(\pi\tau\alpha)}{\pi\alpha}\Big)^2, & \alpha\neq 0,\\ \tau^2, & \alpha=0,\end{cases}$$

则

$$K_\tau(\alpha)\ll\min(\tau^2,\ |\alpha|^{-2}),\tag{2.1}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}(yx)K_\tau(x)\mathrm{d}x=\max(0,\ \tau-|y|).\tag{2.2}$$

对于实数集 $\mathbb{R}$ 的任意可测子集 $\mathfrak{X}$, 记

$$I(\tau,\eta,\mathfrak{X})=\int_{\mathfrak{X}}S_1(\lambda_1\alpha)S_1(\lambda_2\alpha)S_k(\lambda_3\alpha)K_\tau(\alpha)\mathrm{e}(\alpha\eta)\mathrm{d}\alpha.\tag{2.3}$$

由 (2.2) 式和 (2.3) 式, 可得

$$\begin{aligned}I(\tau,\eta,\mathbb{R})&=\sum_{\substack{\delta X\leqslant p_1,\,p_2\leqslant X\\(\delta X)^{\frac1k}\leqslant p_3\leqslant X^{\frac1k}}}\prod_{1\leqslant j\leqslant3}\log p_j\int_{\mathbb{R}}\mathrm{e}((\lambda_1p_1+\lambda_2p_2+\lambda_3p_3^k+\eta)\alpha)K_\tau(\alpha)\mathrm{d}\alpha\\&=\sum_{\substack{\delta X\leqslant p_1,\,p_2\leqslant X\\(\delta X)^{\frac1k}\leqslant p_3\leqslant X^{\frac1k}}}\prod_{1\leqslant j\leqslant3}\log p_j\max(0,\ \tau-|\lambda_1p_1+\lambda_2p_2+\lambda_3p_3^k+\eta|)\\&\leqslant\tau N_\tau(X)L^3,\end{aligned}\tag{2.4}$$

这里 $N_\tau(X)$ 表示不等式

$$|\lambda_1p_1+\lambda_2p_2+\lambda_3p_3^k+\eta|<\tau\tag{2.5}$$

的满足条件 $\delta X\leqslant p_1,\,p_2,\,p_3^k\leqslant X$ 的解的个数. 为了估计 $I(\tau,\eta,\mathbb{R})$, 我们把实数轴划分为 4 个部分. 设 $P=X^{\frac{5}{6k}-\varepsilon}$, $R=\tau^{-2}X^{2\varepsilon}$. 当 $1<k<\frac{25}{12}$ 时, 定义

$$\begin{aligned}&\mathfrak{M}=\Big[-\frac{P}{X},\frac{P}{X}\Big], &&\mathfrak{M}^*=\emptyset,\\&\mathfrak{m}=\Big(\frac{P}{X},R\Big]\cup\Big[-R,-\frac{P}{X}\Big), &&\mathfrak{t}=\mathbb{R}\setminus(\mathfrak{M}\cup\mathfrak{M}^*\cup\mathfrak{m}),\end{aligned}\tag{2.6}$$

当 $\frac{25}{12}\leqslant k\leqslant\frac52$ 时, 定义

$$\begin{aligned}&\mathfrak{M}=\Big[-\frac{P}{X},\frac{P}{X}\Big], &&\mathfrak{M}^*=\Big(\frac{P}{X},X^{-\frac35+\varepsilon}\Big]\cup\Big[-X^{-\frac35+\varepsilon},-\frac{P}{X}\Big),\\&\mathfrak{m}=(X^{-\frac35+\varepsilon},R]\cup[-R,-X^{-\frac35+\varepsilon}), &&\mathfrak{t}=\mathbb{R}\setminus(\mathfrak{M}\cup\mathfrak{M}^*\cup\mathfrak{m}).\end{aligned}\tag{2.7}$$

$\mathfrak{M}$ 称为主区间, $\mathfrak{M}^*$ 称为中间区间, $\mathfrak{m}$ 称为余区间, $\mathfrak{t}$ 称为平凡区间. 于是

$$I(\tau,\eta,\mathbb{R})=I(\tau,\eta,\mathfrak{M})+I(\tau,\eta,\mathfrak{M}^*)+I(\tau,\eta,\mathfrak{m})+I(\tau,\eta,\mathfrak{t}).\tag{2.8}$$

对于主区间和平凡区间上的积分, 采用文 [2] 中相应的估计来处理. 利用文 [2] 中第四部分和第五部分中的方法, 可得

$$I(\tau,\eta,\mathfrak{M})\gg\tau^2X^{1+\frac1k},\quad|I(\tau,\eta,\mathfrak{t})|\ll\tau^2X^{1+\frac1k-\varepsilon}.\tag{2.9}$$

接下来, 将要证明

$$|I(\tau,\eta,\mathfrak{M}^*)|\ll\tau^2X^{1+\frac1k-\varepsilon},\quad|I(\tau,\eta,\mathfrak{m})|\ll\tau^2X^{1+\frac1k-\varepsilon}.\tag{2.10}$$

3 中间区间

为了估计中间区间 $\mathfrak{M}^*$ 上的积分, 需要下面的两个引理.

引理 3.1 对于 $\frac{25}{12} \leqslant k \leqslant \frac{5}{2}$, 有

$$\int_{-X^{-\frac{3}{5}+\varepsilon}}^{X^{-\frac{3}{5}+\varepsilon}} |S_k(\lambda_3\alpha)|^2 \mathrm{d}\alpha \ll (X^{\frac{1}{k}-\frac{3}{5}+\varepsilon} + X^{\frac{2}{k}-1})L^3 \ll X^{\frac{2}{k}-1+\varepsilon}. \tag{3.1}$$

证 令文[2, 引理5] 中的 $\tau = X^{-\frac{3}{5}}$, 就可以得到引理 3.1.

引理 3.2 (见 [2, 引理7]) 对于 $X^{-1} \ll |\alpha| \ll X^{-\frac{3}{5}}$, 有

$$|S_1(\lambda_1\alpha)| \ll X^{\frac{1}{2}}|\alpha|^{-\frac{1}{2}}L^4. \tag{3.2}$$

当 $\frac{25}{12} \leqslant k \leqslant \frac{5}{2}$ 时, 运用 (2.1) 式引理 3.1 和引理 3.2, 可以得到

$$\begin{aligned}
&|I(\tau,\eta,\mathfrak{M}^*)| \\
&\ll \tau^2 \max_{\alpha\in\mathfrak{M}^*} |S_1(\lambda_1\alpha)| \Big(\int_{-X^{-\frac{3}{5}+\varepsilon}}^{X^{-\frac{3}{5}+\varepsilon}} |S_k(\lambda_3\alpha)|^2 \mathrm{d}\alpha\Big)^{\frac{1}{2}} \Big(\int_0^1 |S_1(\lambda_2\alpha)|^2 \mathrm{d}\alpha\Big)^{\frac{1}{2}} \\
&\ll \tau^2 X^{1-\frac{5}{12k}+\varepsilon} X^{\frac{1}{k}-\frac{1}{2}+\varepsilon} X^{\frac{1}{2}+\varepsilon} \\
&\ll \tau^2 X^{1+\frac{1}{k}-\frac{5}{12k}+3\varepsilon},
\end{aligned} \tag{3.3}$$

这里还用到了 Cauchy 不等式和华罗庚不等式. 根据 (3.3) 式, 就有

$$|I(\tau,\eta,\mathfrak{M}^*)| \ll \tau^2 X^{1+\frac{1}{k}-\varepsilon}. \tag{3.4}$$

4 余区间

首先罗列一些在定理证明中需要用到的辅助引理.

引理 4.1 (见 [2, 引理9, 引理10]) 设 λ 是一个非零实数, 则有

$$\begin{aligned}
&\text{(i)} \int_{\frac{P}{X}}^{R} |S_1(\lambda\alpha)|^2 K_\tau(\alpha)\mathrm{d}\alpha \ll \tau X^{1+\varepsilon}; \\
&\text{(ii)} \int_{\frac{P}{X}}^{R} |S_k(\lambda\alpha)|^2 K_\tau(\alpha)\mathrm{d}\alpha \ll \tau X^{\frac{1}{k}+\varepsilon}; \\
&\text{(iii)} \int_{\frac{P}{X}}^{R} |S_k(\lambda\alpha)|^4 K_\tau(\alpha)\mathrm{d}\alpha \ll \tau X^{\frac{2}{k}+\varepsilon} + \tau X^{\frac{4}{k}-1+\varepsilon.}
\end{aligned} \tag{4.1}$$

引理 4.2 (见[2, 引理8]) 设 $X \geqslant Z \geqslant X^{\frac{4}{5}+2\varepsilon}$, $|S_1(\alpha)| > Z$, 则存在整数 a_1, q_1, 满足

$$(a_1, q_1) = 1, \quad q_1 \leqslant \Big(\frac{X^{1+\varepsilon}}{Z}\Big)^2, \quad |q_1\alpha - a_1| \ll \frac{X^{1+2\varepsilon}}{Z^2}. \tag{4.2}$$

引理 4.3 (见[4, 引理10]) 设 α 为一个实数且存在互素的整数 a, q, 满足 $|q\alpha - a| \leqslant q^{-1}$, A 和 Q 为正整数, 满足 $AQ \ll q^C$. 用 $\mathcal{Q}$ 表示一个包含在区间 $[Q, 2Q)$ 内的整数集, $||x||$ 表示离 x 最近的整数到 x 的距离. 对于给定的 $\theta < \frac{1}{2}$ 和 $\varepsilon > 0$, 定义 H 为不等式

$$||bn\alpha|| < \theta, \quad b \in \mathcal{Q}, \quad 1 \leqslant n \leqslant A \tag{4.3}$$

的解的个数, 则有

$$H \ll |\mathcal{Q}|A\theta + q^\varepsilon(Q + AQq^{-1} + q\theta), \tag{4.4}$$

这里的 $\ll$ 符号含有的常数仅与 α, C 和 ε 有关.

引理 4.4 (见[3, 引理2]) 令 $1 \leqslant Q \leqslant X$. 假设对于 $Q \leqslant b \leqslant 2Q$, 存在实数 α_b, β_b, β 和整数 $a(b)$, 满足

$$\alpha_b = \frac{a(b)}{b} + \beta_b, \quad (a(b), b) = 1, \quad |\beta_b| \leqslant \beta < \frac{1}{b^2}, \quad \beta \leqslant X^{-\frac{3}{5}}, \tag{4.5}$$

则有

$$\sum_{Q \leqslant b \leqslant 2Q} \Big| \sum_{p \leqslant X} \mathrm{e}(\alpha_b p) \log p \Big| \ll (X + Q^{\frac{3}{2}} X \beta^{\frac{1}{2}} + Q^{\frac{3}{2}} X^{\frac{1}{2}}) L^5.$$

引理 4.5 (见[3, 引理3]) 假设引理 4.4 中的条件成立且 $Q\beta \ll X^{-\frac{1}{2}}$, $\mathcal{Q}$ 表示一个包含在区间 $[Q, 2Q)$ 内的整数集, 则对于任意的 $\varepsilon > 0$, 有

$$\begin{aligned}\sum_{b \in \mathcal{Q}} \Big| \sum_{p \leqslant X} \mathrm{e}(\alpha_b p) \log p \Big| &\ll X^{\varepsilon} (1 + X\beta)^{\frac{1}{2}} (X |\mathcal{Q}|^{\frac{1}{2}} Q^{-\frac{1}{2}} + Q X^{\frac{1}{2}} |\mathcal{Q}|^{\frac{1}{2}}) \\ &\quad + X^{\frac{4}{5}+\varepsilon} Q^{\frac{1}{5}} |\mathcal{Q}|^{\frac{3}{5}} (1 + X\beta)^{\frac{2}{5}}.\end{aligned}$$

为了估计余区间上的积分, 我们把 $\mathfrak{m}$ 分为 3 个部分:

$$\begin{aligned}\mathfrak{m}_1 &= \{\alpha \in \mathfrak{m}: \ |S_1(\lambda_1 \alpha)| \leqslant X^{\frac{4}{5}+2\varepsilon}\}, \\ \mathfrak{m}_2 &= \{\alpha \in \mathfrak{m}: \ |S_1(\lambda_2 \alpha)| \leqslant X^{\frac{4}{5}+2\varepsilon}\}, \\ \mathfrak{m}_3 &= \mathfrak{m} \setminus (\mathfrak{m}_1 \cup \mathfrak{m}_2),\end{aligned}$$

则

$$|I(\tau, \eta, \mathfrak{m})| \leqslant \sum_{1 \leqslant i \leqslant 3} |I(\tau, \eta, \mathfrak{m}_i)|. \tag{4.6}$$

当 $1 < k \leqslant \frac{5}{4}$ 时, 运用 Cauchy 不等式和引理 4.1 (i)–(ii), 可得

$$\begin{aligned}|I(\tau, \eta, \mathfrak{m}_1)| &\ll \max_{\alpha \in \mathfrak{m}_1} |S_1(\lambda_1 \alpha)| \Big(\int_{\frac{P}{X}}^{R} |S_1(\lambda_2 \alpha)|^2 K_\tau(\alpha) \mathrm{d}\alpha \Big)^{\frac{1}{2}} \\ &\quad \times \Big(\int_{\frac{P}{X}}^{R} |S_k(\lambda_3 \alpha)|^2 K_\tau(\alpha) \mathrm{d}\alpha \Big)^{\frac{1}{2}} \\ &\ll \tau X^{\frac{4}{5}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2k}+3\varepsilon} \ll \tau X^{\frac{13}{10}+\frac{1}{2k}+3\varepsilon}.\end{aligned} \tag{4.7}$$

当 $\frac{5}{4} < k \leqslant \frac{5}{2}$ 时, 运用 Hölder 不等式和引理 4.1 (i), (iii), 有

$$\begin{aligned}|I(\tau, \eta, \mathfrak{m}_1)| &\ll \max_{\alpha \in \mathfrak{m}_1} |S_1(\lambda_1 \alpha)|^{\frac{1}{2}} \Big(\int_{\frac{P}{X}}^{R} |S_1(\lambda_1 \alpha)|^2 K_\tau(\alpha) \mathrm{d}\alpha \Big)^{\frac{1}{4}} \\ &\quad \times \Big(\int_{\frac{P}{X}}^{R} |S_1(\lambda_2 \alpha)|^2 K_\tau(\alpha) \mathrm{d}\alpha \Big)^{\frac{1}{2}} \Big(\int_{\frac{P}{X}}^{R} |S_k(\lambda_3 \alpha)|^4 K_\tau(\alpha) \mathrm{d}\alpha \Big)^{\frac{1}{4}} \\ &\ll \tau X^{\frac{2}{5}+\frac{3}{4}+3\varepsilon} (X^{\frac{1}{2k}} + X^{\frac{1}{k}-\frac{1}{4}}) \\ &\ll \tau X^{\frac{23}{20}+\frac{1}{2k}+3\varepsilon} + \tau X^{\frac{9}{10}+\frac{1}{k}+3\varepsilon}.\end{aligned} \tag{4.8}$$

根据 (4.7) 式和 (4.8) 式, 就有

$$|I(\tau,\eta,\mathfrak{m}_1)| \ll \tau^2 X^{1+\frac{1}{k}-\varepsilon}. \tag{4.9}$$

显然, 运用推导 (4.9) 式的方法, 也可得到

$$|I(\tau,\eta,\mathfrak{m}_2)| \ll \tau^2 X^{1+\frac{1}{k}-\varepsilon}. \tag{4.10}$$

现在考虑 $\mathfrak{m}_3 = \mathfrak{m} \setminus (\mathfrak{m}_1 \cup \mathfrak{m}_2)$. 我们采用 Brüdern, Cook 和 Perelli 在文 [6] 中提出的方法. 这个方法还在 Matomäki 的文 [4] 以及 Wang 的文 [5] 中被使用过. 注意到 $\alpha \in \mathfrak{m}_3$, 所以有

$$|S_1(\lambda_1\alpha)| > X^{\frac{4}{5}+2\varepsilon},\ |S_1(\lambda_2\alpha)| > X^{\frac{4}{5}+2\varepsilon}.$$

对于 $y>0,\ Z_1,\ Z_2 \geqslant X^{\frac{4}{5}+2\varepsilon}$, 定义集合

$$\mathcal{A}(Z_1,Z_2,y) = \{\alpha \in \mathfrak{m}_3:\ y<|\alpha|\leqslant 2y,\ Z_j < |S_1(\lambda_j\alpha)| \leqslant 2Z_j,\ j=1,2\}. \tag{4.11}$$

由引理 4.2, 可以得到对于任意 $\alpha \in \mathcal{A}(Z_1,Z_2,y)$, 都存在对应的整数 $(a_1,q_1),\ (a_2,q_2)$, 满足

$$(a_i,q_i)=1,\quad q_i \leqslant \Big(\frac{X^{1+\varepsilon}}{Z_i}\Big)^2,\quad |q_i\lambda_i\alpha - a_i| \ll \frac{X^{1+2\varepsilon}}{Z_i^2},\quad i=1,2, \tag{4.12}$$

并且 $a_1a_2 \neq 0$, 否则会导致 $\alpha \in \mathfrak{M}\cup\mathfrak{M}^*$. 根据 q_j, 把集合 $\mathcal{A}(Z_1,Z_2,y)$ 划分为一些子集 $\mathcal{A}(Z_1,Z_2,y,Q_1,Q_2)$, 使得子集中的元素 α 对应的 q_j 满足 $Q_j<q_j\leqslant 2Q_j$. 用 $\mu(\mathcal{A})$ 表示子集 $\mathcal{A}(Z_1,Z_2,y,Q_1,Q_2)$ 的 Lebesgue 测度. 我们证明下述引理.

引理 4.6 我们有

$$\mu(\mathcal{A}) \ll \frac{yX^{\frac{13}{5}+5\varepsilon}}{Z_1^2Z_2^2} + \frac{X^{\frac{27}{10}+5\varepsilon}}{Z_1^2Z_2^2}. \tag{4.13}$$

证 需要分 4 种情况去讨论. 不失一般性, 可以假设 $Z_2 \leqslant Z_1$.

情况一 $X^{\frac{17}{20}+\varepsilon} < Z_2$.

对于

$$\alpha \in \mathcal{A}(Z_1,Z_2,y,Q_1,Q_2),$$

利用条件

$$Q_i \ll \frac{X^{2+2\varepsilon}}{Z_i^2},\quad i=1,2,\quad X^{\frac{17}{20}+\varepsilon} < Z_2 \leqslant Z_1$$

和 (4.12) 式, 可以得到

$$\begin{aligned}\Big|a_2q_1\frac{\lambda_1}{\lambda_2} - a_1q_2\Big| &= \Big|\frac{a_2(q_1\lambda_1\alpha - a_1) + a_1(a_2 - q_2\lambda_2\alpha)}{\lambda_2\alpha}\Big| \\ &\ll X^{1+\varepsilon}\max(Q_2Z_1^{-2}, Q_1Z_2^{-2}) \\ &\ll \frac{X^{3+3\varepsilon}}{Z_1^2Z_2^2} \ll X^{-\frac{2}{5}-\varepsilon}. \end{aligned} \tag{4.14}$$

注意到 $q = X^{\frac{2}{5}}$, 所以

$$\Big|a_2q_1\frac{\lambda_1}{\lambda_2} - a_1q_2\Big| = o(q^{-1}). \tag{4.15}$$

此外, 还有平凡估计

$$|a_2q_1| \ll \left|\frac{a_2}{q_2}q_2q_1\right| \ll yQ_1Q_2. \tag{4.16}$$

由 (4.14)–(4.16) 式, 可以发现: 如果所有的 $|a_2q_1|$ 共取了 R 个不同的值, 就会存在整数 n, 满足

$$\left\|n\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right\| \ll X^{-\frac{2}{5}-\varepsilon}, \quad n \ll \frac{yQ_1Q_2}{R}. \tag{4.17}$$

当 q 充分大时, n 的存在将与 $\frac{a}{q}$ 是 $\frac{\lambda_1}{\lambda_2}$ 的渐近分数相矛盾, 除非 R 满足

$$R \ll \frac{yQ_1Q_2}{q}. \tag{4.18}$$

根据熟知的除数函数的上界可以知道, 每一个 $|a_2q_1|$ 的取值至多对应 $O(X^{\varepsilon})$ 个 a_2 和 q_1. 而对于每组固定的 a_2 和 q_1, 至多有一组 a_1 和 q_2 满足 (4.12) 式. 定义

$$\gamma = \min\Big(\frac{X^{1+2\varepsilon}}{Q_1Z_1^2}, \quad \frac{X^{1+2\varepsilon}}{Q_2Z_2^2}\Big), \tag{4.19}$$

则由以上的分析以及 (4.12) 式, 可以得到

$$\mu(\mathcal{A}) \ll X^{\varepsilon}R\gamma. \tag{4.20}$$

因为

$$q = X^{\frac{2}{5}},$$

且

$$Q_i \ll \frac{X^{2+2\varepsilon}}{Z_i^2}, \quad i = 1, 2,$$

所以可以从 (4.18) 式和 (4.20) 式得出: 当 $Z_2 > X^{\frac{17}{20}+\varepsilon}$ 时,

$$\mu(\mathcal{A}) \ll X^{\varepsilon}\frac{yQ_1Q_2}{q}\gamma \ll \frac{yX^{1+3\varepsilon}Q_1^{\frac{1}{2}}Q_2^{\frac{1}{2}}}{qZ_1Z_2} \ll \frac{yX^{\frac{13}{5}+5\varepsilon}}{Z_1^2Z_2^2}. \tag{4.21}$$

情况二　$Z_2 \leqslant X^{\frac{17}{20}+\varepsilon}$ 且 $\min(Q_1, Q_2) \leqslant X^{\frac{3}{10}}$.

这种情况下, 用引理 4.4 来估计 q_1 的个数. 令 $\mathcal{Q}$ 表示 q_1 组成的数集. 因为

$$X^{\frac{4}{5}+2\varepsilon} \ll Z_1 \leqslant |S_1(\lambda_1\alpha)| \leqslant 2Z_1, \quad Q_1 \leqslant q_1 \leqslant 2Q_1, \quad \left|\lambda_1\alpha - \frac{a_1}{q_1}\right| \ll \frac{X^{1+2\varepsilon}}{Z_1^2Q_1}, \tag{4.22}$$

所以只要令

$$\beta = \frac{X^{1+2\varepsilon}}{Z_1^2Q_1},$$

就可以从引理 4.4 得到

$$\begin{aligned}|\mathcal{Q}| &\ll \frac{L^5}{Z_1}\Big(X + Q_1^{\frac{3}{2}}X\Big(\frac{X^{1+2\varepsilon}}{Q_1Z_1^2}\Big)^{\frac{1}{2}} + Q_1^{\frac{3}{2}}X^{\frac{1}{2}}\Big)\\ &\ll X^{\varepsilon}\Big(\frac{X}{Z_1} + \frac{Q_1X^{\frac{3}{2}}}{Z_1^2} + \frac{Q_1^{\frac{3}{2}}X^{\frac{1}{2}}}{Z_1}\Big)\\ &\ll X^{\frac{1}{5}} + Q_1X^{-\frac{1}{10}},\end{aligned} \tag{4.23}$$

这里还用到了条件 $X^{\frac{4}{5}+2\varepsilon} \ll Z_1$ 和

$$Q_1 \ll \frac{X^{2+\varepsilon}}{Z_1^2} \ll X^{\frac{2}{5}-\varepsilon}.$$

设

$$\theta = \max\Big(\frac{Q_1 X}{Z_2^2}, \quad \frac{Q_2 X}{Z_1^2}\Big). \tag{4.24}$$

定义 H 为不等式

$$\Big\| a_2 q_1 \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \Big\| \ll \theta, \quad a_2 \leqslant 5|\lambda_2| y Q_2, \quad q_1 \in \mathcal{Q} \tag{4.25}$$

的解的个数. 运用引理 4.3, 有

$$H \ll |\mathcal{Q}| y Q_2 \theta + q^{\varepsilon}\Big(Q_1 + \frac{yQ_1Q_2}{q} + q\theta\Big). \tag{4.26}$$

类似于推导 (4.20) 式, 也可以得到

$$\mu(\mathcal{A}) \ll H X^{\varepsilon} \gamma, \tag{4.27}$$

其中 γ 由 (4.19) 式定义. 容易发现

$$\theta\gamma \ll \frac{X^{2+2\varepsilon}}{Z_1^2 Z_2^2}. \tag{4.28}$$

于是由 (4.26)–(4.28) 式和 (4.21) 式, 就有

$$\begin{aligned}
\mu(\mathcal{A}) &\ll |\mathcal{Q}| y Q_2 \frac{X^{2+2\varepsilon}}{Z_1^2 Z_2^2} + X^{\varepsilon} Q_1 \gamma + X^{\varepsilon} \frac{yQ_1Q_2\gamma}{q} + \frac{qX^{2+2\varepsilon}}{Z_1^2 Z_2^2} \\
&\ll |\mathcal{Q}| y Q_2 \frac{X^{2+2\varepsilon}}{Z_1^2 Z_2^2} + \frac{X^{1+2\varepsilon}}{Z_1^2} + \frac{yX^{\frac{13}{5}+5\varepsilon}}{Z_1^2 Z_2^2} + \frac{X^{\frac{12}{5}+2\varepsilon}}{Z_1^2 Z_2^2} \\
&\ll |\mathcal{Q}| y Q_2 \frac{X^{2+2\varepsilon}}{Z_1^2 Z_2^2} + \frac{X^{\frac{27}{10}+3\varepsilon}}{Z_1^2 Z_2^2} + \frac{yX^{\frac{13}{5}+5\varepsilon}}{Z_1^2 Z_2^2} + \frac{X^{\frac{12}{5}+2\varepsilon}}{Z_1^2 Z_2^2},
\end{aligned} \tag{4.29}$$

这里还用到了条件 $Z_2 \leqslant X^{\frac{17}{20}+\varepsilon}$ 和 $q = X^{\frac{2}{5}}$. 考虑到 $\min(Q_1, Q_2) \leqslant X^{\frac{3}{10}}$ 且

$$Q_i \ll \frac{X^{2+\varepsilon}}{Z_i^2} \ll X^{\frac{2}{5}-\varepsilon} \quad (i = 1, 2),$$

所以可以从 (4.23) 式推得

$$\begin{aligned}
|\mathcal{Q}| y Q_2 \frac{X^{2+2\varepsilon}}{Z_1^2 Z_2^2} &\ll \frac{yX^{2+2\varepsilon}}{Z_1^2 Z_2^2}(Q_2 X^{\frac{1}{5}} + Q_2 Q_1 X^{-\frac{1}{10}}) \\
&\ll \frac{yX^{2+2\varepsilon}}{Z_1^2 Z_2^2}(X^{\frac{3}{5}} + X^{\frac{3}{10}+\frac{2}{5}-\frac{1}{10}}) \\
&\ll \frac{yX^{\frac{13}{5}+2\varepsilon}}{Z_1^2 Z_2^2}.
\end{aligned} \tag{4.30}$$

根据 (4.29) 式和 (4.30) 式, 得到: 当 $Z_2 \leqslant X^{\frac{17}{20}+\varepsilon}$ 且 $\min(Q_1, Q_2) \leqslant X^{\frac{3}{10}}$ 时,

$$\mu(\mathcal{A}) \ll \frac{yX^{\frac{13}{5}+5\varepsilon}}{Z_1^2 Z_2^2} + \frac{X^{\frac{27}{10}+5\varepsilon}}{Z_1^2 Z_2^2}. \tag{4.31}$$

情况三 $Z_2 \leqslant X^{\frac{17}{20}+\varepsilon}$ 且 $X^{\frac{3}{10}} < Q_2 \leqslant Q_1$.

这种情况下, 仍然用 $|\mathcal{Q}|$ 表示 q_1 的集合. 现在用引理 4.5 来估计 $|\mathcal{Q}|$ 的大小, 得到

$$|\mathcal{Q}| \ll X^{2\varepsilon}\Big(1+\frac{X^2}{Q_1Z_1^2}\Big)\Big(\frac{X^2}{Q_1Z_1^2}+\frac{XQ_1^2}{Z_1^2}+\frac{X^2Q_1^{\frac{1}{2}}}{Z_1^{\frac{5}{2}}}\Big). \tag{4.32}$$

运用引理 4.3 以及推导 (4.27) 式和 (4.29) 式的方法, 可得

$$\begin{aligned}\mu(\mathcal{A}) &\ll HX^{\varepsilon}\gamma \\ &\ll |\mathcal{Q}|yQ_2\frac{X^{2+2\varepsilon}}{Z_1^2Z_2^2}+X^{\varepsilon}Q_1\gamma+X^{\varepsilon}\frac{yQ_1Q_2\gamma}{q}+\frac{qX^{2+2\varepsilon}}{Z_1^2Z_2^2} \\ &\ll |\mathcal{Q}|yQ_2\frac{X^{2+2\varepsilon}}{Z_1^2Z_2^2}+\frac{X^{\frac{27}{10}+3\varepsilon}}{Z_1^2Z_2^2}+\frac{yX^{\frac{13}{5}+5\varepsilon}}{Z_1^2Z_2^2}+\frac{X^{\frac{12}{5}+2\varepsilon}}{Z_1^2Z_2^2}.\end{aligned} \tag{4.33}$$

利用 (4.32) 式, 就有

$$\begin{aligned}&|\mathcal{Q}|yQ_2\frac{X^{2+2\varepsilon}}{Z_1^2Z_2^2} \\ \ll\ &\frac{yX^{2+4\varepsilon}}{Z_1^2Z_2^2}Q_2\Big(1+\frac{X^2}{Q_1Z_1^2}\Big)\Big(\frac{X^2}{Q_1Z_1^2}+\frac{XQ_1^2}{Z_1^2}+\frac{X^2Q_1^{\frac{1}{2}}}{Z_1^{\frac{5}{2}}}\Big) \\ \ll\ &\frac{yX^{2+4\varepsilon}}{Z_1^2Z_2^2}\Big(\frac{XQ_1^2Q_2}{Z_1^2}+\frac{X^2Q_1^{\frac{1}{2}}Q_2}{Z_1^{\frac{5}{2}}}+\frac{X^3Q_1Q_2}{Z_1^4} \\ &+\frac{X^4Q_2}{Q_1^2Z_1^4}+\frac{X^2Q_2}{Q_1Z_1^2}+\frac{X^4Q_2}{Z_1^{\frac{9}{2}}Q_1^{\frac{1}{2}}}\Big).\end{aligned} \tag{4.34}$$

因为 $X^{\frac{4}{5}+2\varepsilon} \ll Z_1$ 且

$$Q_i \ll \frac{X^{2+\varepsilon}}{Z_i^2} \ll X^{\frac{2}{5}-\varepsilon} \quad (i=1,2),$$

所以

$$\frac{XQ_1^2Q_2}{Z_1^2}+\frac{X^2Q_1^{\frac{1}{2}}Q_2}{Z_1^{\frac{5}{2}}}+\frac{X^3Q_1Q_2}{Z_1^4} \ll X^{\frac{3}{5}}. \tag{4.35}$$

而运用假设条件 $X^{\frac{3}{10}} \leqslant Q_2 \leqslant Q_1 \ll X^{\frac{2}{5}}$ 和 $X^{\frac{4}{5}+2\varepsilon} \ll Z_1$, 可以得到

$$\frac{X^2Q_2}{Q_1Z_1^2}+\frac{X^4Q_2}{Q_1^2Z_1^4}+\frac{X^4Q_2}{Z_1^{\frac{9}{2}}Q_1^{\frac{1}{2}}} \ll \frac{X^2}{Z_1^2}+\frac{X^4}{Q_1Z_1^4}+\frac{X^4Q_2^{\frac{1}{2}}}{Z_1^{\frac{9}{2}}} \ll X^{\frac{3}{5}}. \tag{4.36}$$

由 (4.33)–(4.36) 式, 得到: 当 $Z_2 \leqslant X^{\frac{17}{20}+\varepsilon}$ 且 $X^{\frac{3}{10}} \leqslant Q_2 \leqslant Q_1$ 时,

$$\mu(\mathcal{A}) \ll \frac{yX^{\frac{13}{5}+5\varepsilon}}{Z_1^2Z_2^2}+\frac{X^{\frac{27}{10}+5\varepsilon}}{Z_1^2Z_2^2}. \tag{4.37}$$

情况四 $Z_2 \leqslant X^{\frac{17}{20}+\varepsilon}$ 且 $X^{\frac{3}{10}} \leqslant Q_1 \leqslant Q_2$.

处理这种情况的方法与处理情况三时的方法一样, 只是将 q_1 与 q_2 的角色互换, 所有的推导过程都与情况三中类似. 现在用 $|\mathcal{Q}|$ 表示 q_2 的个数. 用引理 4.5 来估计 $|\mathcal{Q}|$ 的大小, 可得

$$|\mathcal{Q}| \ll X^{2\varepsilon}\Big(1+\frac{X^2}{Q_2Z_2^2}\Big)\Big(\frac{X^2}{Q_2Z_2^2}+\frac{XQ_2^2}{Z_2^2}+\frac{X^2Q_2^{\frac{1}{2}}}{Z_2^{\frac{5}{2}}}\Big). \tag{4.38}$$

定义 H 为不等式

$$\Big\|a_1q_2\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\Big\|\ll\theta,\quad a_1\leqslant 5|\lambda_1|yQ_1,\quad q_2\in\mathcal{Q}\tag{4.39}$$

的解的个数. 类似于 (4.33) 式, 有

$$\begin{aligned}\mu(\mathcal{A})&\ll HX^{\varepsilon}\gamma\\&\ll|\mathcal{Q}|yQ_1\frac{X^{2+2\varepsilon}}{Z_1^2Z_2^2}+X^{\varepsilon}Q_2\gamma+X^{\varepsilon}\frac{yQ_1Q_2\gamma}{q}+\frac{qX^{2+2\varepsilon}}{Z_1^2Z_2^2}.\end{aligned}\tag{4.40}$$

用推导 (4.33)–(4.36) 式的方法, 可以得到

$$|\mathcal{Q}|yQ_1\frac{X^{2+2\varepsilon}}{Z_1^2Z_2^2}+X^{\varepsilon}\frac{yQ_1Q_2\gamma}{q}+\frac{qX^{2+2\varepsilon}}{Z_1^2Z_2^2}\ll\frac{yX^{\frac{13}{5}+5\varepsilon}}{Z_1^2Z_2^2}+\frac{X^{\frac{12}{5}+5\varepsilon}}{Z_1^2Z_2^2}.\tag{4.41}$$

因为

$$X^{\frac{3}{10}}\leqslant Q_1\leqslant\frac{X^{2+\varepsilon}}{Z_1^2},$$

所以 $Z_1\ll X^{\frac{17}{20}+\varepsilon}$. 于是

$$X^{\varepsilon}Q_2\gamma\ll\frac{X^{1+3\varepsilon}}{Z_2^2}\ll\frac{X^{\frac{27}{10}+5\varepsilon}}{Z_1^2Z_2^2}.\tag{4.42}$$

由 (4.40)–(4.42) 式, 我们得到: 当 $Z_2\leqslant X^{\frac{17}{20}+\varepsilon}$ 且 $X^{\frac{3}{10}}\leqslant Q_1\leqslant Q_2$ 时,

$$\mu(\mathcal{A})\ll\frac{yX^{\frac{13}{5}+5\varepsilon}}{Z_1^2Z_2^2}+\frac{X^{\frac{27}{10}+5\varepsilon}}{Z_1^2Z_2^2}.\tag{4.43}$$

根据 (4.21) 式、(4.31) 式、(4.37) 式和 (4.43) 式, 引理 4.6 得证.

利用二分法, 将所有的 y,Q_1,Q_2,Z_1,Z_2 累加, 就可以从引理 4.6 和 (2.1) 式推导出

$$\begin{aligned}&\int_{\mathfrak{m}_3}|S_1(\lambda_1\alpha)S_1(\lambda_2\alpha)|^2K_\tau(\alpha)\mathrm{d}\alpha\\&\ll L^5\min(\tau^2,y^{-2})Z_1^2Z_2^2\mu(\mathcal{A})\\&\ll\tau X^{\frac{13}{5}+6\varepsilon}+\tau^2X^{\frac{27}{10}+6\varepsilon}.\end{aligned}\tag{4.44}$$

当 $1<k\leqslant\frac{5}{4}$ 时, 应用 Cauchy 不等式, 引理 4.1 (ii) 和 (4.44) 式, 可得

$$\begin{aligned}&|I(\tau,\eta,\mathfrak{m}_3)|\\&\ll\Big(\int_{\mathfrak{m}_3}|S_1(\lambda_1\alpha)S_1(\lambda_2\alpha)|^2K_\tau(\alpha)\mathrm{d}\alpha\Big)^{\frac{1}{2}}\Big(\int_{\frac{P}{X}}^{R}|S_k(\lambda_3\alpha)|^2K_\tau(\alpha)\mathrm{d}\alpha\Big)^{\frac{1}{2}}\\&\ll\tau X^{\frac{13}{10}+\frac{1}{2k}+4\varepsilon}+\tau^{\frac{3}{2}}X^{\frac{27}{20}+\frac{1}{2k}+4\varepsilon}.\end{aligned}\tag{4.45}$$

当 $\frac{5}{4}<k\leqslant\frac{5}{2}$ 时, 应用 Hölder 不等式, 引理 4.1 (i), (iii) 和 (4.44) 式, 可得

$$\begin{aligned}&|I(\tau,\eta,\mathfrak{m}_3)|\\&\ll\Big(\int_{\mathfrak{m}_3}|S_1(\lambda_1\alpha)S_1(\lambda_2\alpha)|^2K_\tau(\alpha)\mathrm{d}\alpha\Big)^{\frac{1}{4}}\Big(\int_{\frac{P}{X}}^{R}|S_k(\lambda_3\alpha)|^4K_\tau(\alpha)\mathrm{d}\alpha\Big)^{\frac{1}{4}}\\&\quad\times\Big(\int_{\frac{P}{X}}^{R}|S_1(\lambda_1\alpha)|^2K_\tau(\alpha)\mathrm{d}\alpha\Big)^{\frac{1}{4}}\Big(\int_{\frac{P}{X}}^{R}|S_1(\lambda_2\alpha)|^2K_\tau(\alpha)\mathrm{d}\alpha\Big)^{\frac{1}{4}}\end{aligned}$$

$$\ll \tau X^{\frac{23}{20}+\frac{1}{2k}+3\varepsilon} + \tau X^{\frac{9}{10}+\frac{1}{k}+3\varepsilon} + \tau^{\frac{5}{4}} X^{\frac{47}{40}+\frac{1}{2k}+3\varepsilon} + \tau^{\frac{5}{4}} X^{\frac{37}{40}+\frac{1}{k}+3\varepsilon}. \tag{4.46}$$

根据 (4.45) 式和 (4.46) 式, 就有

$$|I(\tau,\eta,\mathfrak{m}_3)| \ll \tau^2 X^{1+\frac{1}{k}-\varepsilon}. \tag{4.47}$$

利用 (4.6) 式、(4.9)–(4.10) 式和 (4.47) 式, 有

$$|I(\tau,\eta,\mathfrak{m})| \ll \tau^2 X^{1+\frac{1}{k}-\varepsilon}. \tag{4.48}$$

现在, 通过 (2.9) 式、(3.4) 式和 (4.48) 式, 可以得到

$$|I(\tau,\eta,\mathbb{R})| \gg \tau^2 X^{1+\frac{1}{k}}. \tag{4.49}$$

由 (2.4) 式和 (4.49) 式, 就有

$$N_\tau(X) \gg \tau X^{1+\frac{1}{k}} L^{-3}. \tag{4.50}$$

因为 $\frac{\lambda_1}{\lambda_2}$ 是无理数, 所以存在无穷多对整数 q, a, 可为 $\frac{\lambda_1}{\lambda_2}$ 的渐近分数. 当 $q \to +\infty$ 时, 会有 $X \to +\infty$, 从而得到 $N_\tau(X) \to +\infty$. 定理得证.

致谢 感谢编辑与审稿人对本文提出了宝贵的意见. 作者还感谢蔡迎春教授的热情鼓励与指导.

参 考 文 献

[1] Languasco A, Zaccagnini A. A Diophantine problem with prime variables [C]//Kumar Murty V, Thangadurai R (eds), Highly composite: Papers in Number Theory, Allahbad: Ramannujan Math Soc Lect Notes Ser, 2016, 23:157–168.

[2] Gambini A, Languasco A, Zaccagnini A. A Diophantine approximation problem with two primes and one k-th power of a prime [J]. *J Number Theory*, 2018, 188:210–228.

[3] Harman G. Diophantine approximation by prime numbers [J]. *J London Math Soc,* 1991, 44(2):218–226.

[4] Matomäki K. Diophantine approximation by primes [J]. *Glasg Math J*, 2010, 52:87–106.

[5] Wang Y C. Values of binary linear forms at prime arguments [J]. *Front Math China,* 2015, 10:1449–1459.

[6] Brüdern J, Cook R J, Perelli A. The values of binary linear forms at prime arguments [C]//Greaves G R H, Harman G, Huxley M N (eds), Sieve Methods, Exponential Sums, and Their Applications in Number Theory, Cambridge: Cambridge University Press, 1997:87–100.

A Diophantine Inequality with Two Primes and One k-th Power of a Prime

ZHU Li[1]

[1]School of Mathematical Science, Tongji University, Shanghai 200092, China.
E-mail: zhuli15@tongji.edu.cn

Abstract Let $\psi(k)=\begin{cases}\frac{1}{2k}-\frac{3}{10}, & 1<k<\frac{5}{4},\\ \frac{1}{10}, & \frac{5}{4}\leqslant k<2,\\ \frac{2}{3k}-\frac{7}{30}, & 2\leqslant k\leqslant\frac{5}{2}.\end{cases}$ Suppose that λ_1,λ_2 and λ_3 are non-zero real numbers, not all of the same sign, satisfying that $\frac{\lambda_1}{\lambda_2}$ is irrational. Then for any real number η and $\varepsilon>0$, the inequality

$$|\lambda_1p_1+\lambda_2p_2+\lambda_3p_3^k+\eta|\leqslant(\max\{p_1,p_2,p_3^k\})^{-\psi(k)+\varepsilon}$$

has infinitely many solutions in prime variables p_1, p_2, p_3. This result constitutes an improvement on that of Gambini, Languasco and Zaccagnini.

Keywords Prime, Davenport-Heilbronn method, Diophantine inequalities
2000 MR Subject Classification 11P32, 11D75

The English translation of this paper will be published in
Chinese Journal of Contemporary Mathematics, Vol. 40 No. 4, 2019
by ALLERTON PRESS, INC., USA