数 学 年 刊 A 辑
2019, 40(4):377–398
DOI: 10.16205/j.cnki.cama.2019.0029

三维半群代数*

纪影丹[1] 罗彦锋[2]

提要 首先给出代数闭域上三维半群代数的幂等元集和 Jacobson 根, 并且刻画了三维半群代数的同构类. 通过计算箭图, 研究了三维代数的表示型. 进一步, 证明一个三维 (或者二维) 半群代数是胞腔的, 当且仅当它是交换的. 作为推论, 得到一个左零带所对应的半群代数是胞腔的, 当且仅当这个左零带是一个半格.

关键词 半群代数, 同构类, 箭图, 胞腔代数
MR (2000) 主题分类 20M25, 16G30, 16G60
中图法分类 O152.6
文献标志码 A
文章编号 1000-8314(2019)04-0377-22

1 引 言

在研究一般半群代数的性质时, 低维半群代数的结果可以作为引导和验证材料. 注意到每一个表示有限的有限维代数都可以写成一个压缩半群代数[1]. 在本文中, 在特征为 p(素数) 的代数闭域上, 研究三维半群代数, 以及二维半群代数.

所有三阶半群已经被分类了[2]. 注意到, 每一个三阶正则半群或者是一个局部逆半群, 或者是一个左正则带, 局部逆半群是逆半群的一类重要推广, 左正则带是一类特殊的纯正半群. 由 Björner[3]和 Brown[4]的工作, 引起了对左正则带半群代数的广泛研究兴趣. 在本文中, 把关于这两类半群代数的结果应用到三维半群代数上.

为了对代数闭域上的三维半群代数有更好的了解, 首先给出这些代数的 Jacobson 幂等元集, 然后给出所有三维半群代数的同构类, 这些结果依赖于基础域的特征.

某些特殊半群代数类的表示型已经被研究了[5−7]. 注意到, 不是所有的三维半群代数都是有限表示型的. 在本文中, 决定一个三维半群代数什么时候是表示有限的. 以此, 将利用二次根幂零代数, Nakayama 代数以及分离代数的相关理论.

胞腔代数的概念由 Graham 和 Lehrer[8]最初引入. 并不是每一个半群代数都是胞腔的; 例如, 如果把域上的 2×2 上三角矩阵代数看成半群代数, 它并不是胞腔的[9]. 某些特殊正则 (或者, U-半富足) 半群的半群代数的胞腔性已经给出了刻画[10−13]. 在本文中, 利用嘉当矩阵的理论来探讨三维半群代数的胞腔性.

本文安排如下. 第 2 节给出一些基本的定义和结果. 在第 3 节中, 计算所有三维半群代数的 Jacobson 根和幂等元集, 并在同构意义下对这些代数进行分类. 在第 4 节中, 决定三维半群代数的表示型和胞腔性. 为此, 研究了左正则带半群代数的胞腔性. 最后, 把上述结果应用到二维半群代数上.

本文 2018 年 6 月 4 日收到.
[1]广东工业大学应用数学学院, 广州 510520. E-mail: jiyingdan157@163.com
[2]兰州大学数学与统计学院, 兰州 730000. E-mail: luoyf@lzu.edu.cn
*本文受到国家自然科学基金 (No. 11701099, No. 11771191) 的资助.

2 预备知识

在本节中, 提供在本文中会用到的一些基本定义和结果. 对于本节中没有给出定义的关于半群和代数表示理论的记号和术语, 可以参见文 [14–16].

设 S 是一个半群且设 $E(S)$ 是它的幂等元集. 如果 S 中不包含幂等元, 那么用 S^1 记在 S 中添加一个单位元而得到的半群, 否则, 记 $S^1=S$. 格林关系由格林引入 (1951): 对于 $a,b\in S$,

$$\begin{aligned} a\ \mathcal{L}\ b &\iff S^1a=S^1b,\\ a\ \mathcal{R}\ b &\iff aS^1=bS^1,\\ a\ \mathcal{J}\ b &\iff S^1aS^1=S^1bS^1, \end{aligned}$$

且 $\mathcal{H}=\mathcal{L}\cap\mathcal{R},\mathcal{D}=\mathcal{L}\vee\mathcal{R}$. 称一个半群是正则的, 如果它的每一个 $\mathcal{L}$-类和每一个 $\mathcal{R}$-类都包含一个幂等元. 称一个半群 S 是一个左正则带, 如果对于任意的 $x,y\in S$, 等式 $x^2=x$ 和 $xy=xyx$ 成立. 称一个交换的左正则带为半格. 一个正则半群 S 称为局部逆的, 如果对于每一个 $e\in E(S)$, $E(eSe)$ 都是一个半格.

设 S 是一个不含零元 (或者, 包含一个零元 θ) 的有限半群, 则 S 被称为一个完全单 (或者, 完全 0-单) 半群, 如果 $\mathcal{J}=S\times S$(或者, θ 和 $S\backslash\{\theta\}$ 是 S 中的唯一的 $\mathcal{J}$-类).

下面列出在同构和反同构意义下所有的阶数 $n=2,3$ 的半群, 其中把每个半群的基础集记作 $\{1,2,\cdots,n\}$, 且用 $n\times n$ 阵列给出其乘法表, 其中阵列 (i,j)-位置的值表示元素 i 和 j 的乘积.

(i) 在同构和反同构意义下, 有 4 个二阶半群.

$$\begin{array}{cccc} 11 & 11 & 11 & 12\\ 11 & 22 & 12 & 21\\ {\scriptstyle U_1} & {\scriptstyle U_2} & {\scriptstyle U_3} & {\scriptstyle U_4} \end{array}$$

(ii) 在同构和反同构意义下, 有 18 个三阶半群.

$$\begin{array}{ccccccccccc} 111 & 111 & 111 & 111 & 111 & 111 & 113 & 122 & 111 & 111 & 111\\ 111 & 111 & 222 & 222 & 121 & 122 & 113 & 211 & 121 & 122 & 121\\ 111 & 112 & 111 & 333 & 111 & 122 & 331 & 211 & 131 & 133 & 333\\ {\scriptstyle T_1} & {\scriptstyle T_2} & {\scriptstyle T_3} & {\scriptstyle T_4} & {\scriptstyle T_5} & {\scriptstyle T_6} & {\scriptstyle T_7} & {\scriptstyle T_8} & {\scriptstyle T_9} & {\scriptstyle T_{10}} & {\scriptstyle T_{11}} \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccc} 111 & 111 & 123 & 111 & 113 & 111 & 111\\ 121 & 122 & 231 & 123 & 123 & 123 & 123\\ 113 & 123 & 312 & 132 & 331 & 131 & 333\\ {\scriptstyle T_{12}} & {\scriptstyle T_{13}} & {\scriptstyle T_{14}} & {\scriptstyle T_{15}} & {\scriptstyle T_{16}} & {\scriptstyle T_{17}} & {\scriptstyle T_{18}} \end{array}$$

在同构意义下, 分别有 5 个和 24 个二阶和三阶半群[2]. 设 $n\in\{2,3\}$, 且设 $\mathcal{T}_n$ 是同构意义下所有 n 阶半群所构成的集合, 则

$$\mathcal{T}_2=\{U_i\mid 1\leqslant i\leqslant 4\}\cup\{U_2^*\},$$

$$\mathcal{T}_3=\{T_i\mid 1\leqslant i\leqslant 18\}\cup\{T_j^*\mid j=3,4,9,10,11,18\}.$$

设 S 是一个半群, 则 S 的对偶半群, 记为 S^*, 与 S 有相同的基础集, 且乘法由 $s_1*s_2:=s_2s_1$ 给出, 其中 $s_1,s_2\in S$. 对于 $S\in\{T_j\mid j\neq 3,4,9,10,11,18\}$, 由于 S 是交换的, $S=S^*$.

注意到, 对于 $a,b\in S$, $a\mathcal{R}b$ 在 S 中成立当且仅当 $a\mathcal{L}b$ 在 S^* 中成立. 在一个半群的 "蛋壳图" 中, 两个元素在同一行 (或同一列), 当且仅当它们在同一个 $\mathcal{R}$-类 (或 $\mathcal{L}$-类). 为了描述二阶和三阶半群的结构, 下面提供半群 U_j $(1\leqslant j\leqslant 4)$ 和 T_i $(1\leqslant i\leqslant 18)$ 的 $\mathcal{D}$-类

的 “蛋壳图”, 并把所有幂等元都加黑.

U_1 $\boxed{\mathbf{1}}$ $\boxed{2}$, U_2 $\begin{array}{|c|}\hline \mathbf{1}\\\hline \mathbf{2}\\\hline\end{array}$, U_3 $\boxed{\mathbf{1}}$ $\boxed{\mathbf{2}}$, U_4 $\boxed{\mathbf{1},2}$,

T_1 $\boxed{\mathbf{1}}$ $\boxed{2}$ $\boxed{3}$, T_2 $\boxed{\mathbf{1}}$ $\boxed{2}$ $\boxed{3}$, T_3 $\begin{array}{|c|}\hline \mathbf{1}\\\hline \mathbf{2}\\\hline\end{array}$ $\boxed{3}$,

T_4 $\begin{array}{|c|}\hline \mathbf{1}\\\hline \mathbf{2}\\\hline \mathbf{3}\\\hline\end{array}$, T_5 $\boxed{\mathbf{1}}$ $\boxed{\mathbf{2}}$ $\boxed{3}$, T_6 $\boxed{\mathbf{1}}$ $\boxed{\mathbf{2}}$ $\boxed{3}$,

T_7 $\boxed{\mathbf{1},3}$ $\boxed{2}$, T_8 $\boxed{\mathbf{1},2}$ $\boxed{3}$, T_9 $\boxed{\mathbf{1}}$ $\boxed{\mathbf{2}}$ $\boxed{3}$,

T_{10} $\boxed{\mathbf{1}}$ $\begin{array}{|c|}\hline \mathbf{2}\\\hline \mathbf{3}\\\hline\end{array}$, T_{11} $\begin{array}{|c|}\hline \mathbf{1}\\\hline \mathbf{3}\\\hline\end{array}$ $\boxed{\mathbf{2}}$, T_{12} $\boxed{\mathbf{1}}$ $\boxed{\mathbf{2}}$ $\boxed{\mathbf{3}}$,

T_{13} $\boxed{\mathbf{1}}$ $\boxed{\mathbf{2}}$ $\boxed{\mathbf{3}}$, T_{14} $\boxed{\mathbf{1},2,3}$, T_{15} $\boxed{\mathbf{1}}$ $\boxed{2,3}$,

T_{16} $\boxed{\mathbf{1},3}$ $\boxed{\mathbf{2}}$, T_{17} $\boxed{\mathbf{1}}$ $\boxed{\mathbf{2}}$ $\boxed{3}$, T_{18} $\begin{array}{|c|}\hline \mathbf{1}\\\hline \mathbf{3}\\\hline\end{array}$ $\boxed{\mathbf{2}}$,

显然, $R_3 = \{T_4, T_4^*, T_{10}, T_{10}^*, T_{11}, T_{11}^*, T_{12}, T_{13}, T_{14}, T_{16}, T_{18}, T_{18}^*\}$ 包含 $\mathcal{T}_3$ 中 所有的正则半群. 并且观察到除了 T_{18} 和 T_{18}^* 分别是左正则带和右正则带之外, R_3 中其他半群都是局部逆的.

在本文中, 设 K 是一个特征为 p(素数或者 0) 的代数闭域, 且记 $\mathbb{N}^+$ 为包含所有正整数的集合. 下面介绍关于半群代数, 代数的箭图以及胞腔代数的概念和结果.

设 S 是一个半群, 且用 $K[S]$ 来记 S 在 K 上的半群代数[17]. 若 $a \in K[S]$, 则它可以唯一地写成 $a = \sum\limits_1^n k_i s_i$, 其中 $s_i \in S$, $k_i \in K$ 且 $n \in \mathbb{N}^+$. $K[S]$ 中的乘法是由 S 中的乘法 K-线性扩张得到的. 注意到 $K\mathcal{T}_3 = \{K[T] \mid T \in \mathcal{T}_3\}$ 包含 K 上所有的三维半群代数, 如果 S 包含一个零元 θ, 那么定义 $K[S]/K[\theta]$ 为 S 的压缩半群代数, 记为 $K_0[S]$.

在本文中, 有时称一个正则半群对应的半群代数为正则半群代数; 类似地, 称一个左正则带所对应的半群代数为左正则带代数.

设 $\mathcal{K}$ 是 S 上的一个等价关系, 且 $a \in S$, 则把 S 中包含 a 的 $\mathcal{K}$-类记作 K_a. 当容易引起歧义时, 记 $\mathcal{K}$ 和 K_a 分别为 $\mathcal{K}(S)$ 和 $K_a(S)$.

下面, 给出有限局部逆半群代数的一个直和分解. 设 E 是一个半格且 $e, f \in E$, 称 f 在 e 下是极大的[18]或者 e覆盖f[19]如果 $e > f$ (即 $ef = fe = e$ 且 $e \neq f$), 且不存在 $g \in E$ 满足 $e > g > f$. 定义 $\widehat{e} = \{f \in E : e \text{ 覆盖 } f\}$. 设 S 是一个有限的局部逆半群, 且设 $e \in E(S)$, 定义

$$\sigma(e) = \prod_{g \in \widehat{e}} (e - g),$$

称其为 $K[S]$ 的 Rukolaǐne 幂等元[19−20]. 对于每一个 $a\in S$, 令

$$\overline{a}=\sigma(a^{\dagger})a\sigma(a^{*}),$$

其中 $a^{\dagger}\in R_a\cap E(S)$ 且 $a^{*}\in L_a\cap E(S)$. 定义 $\overline{S}=\{\overline{a}\mid a\in S\}\cup\{0\}$, 其中 0 是 K 中的零元. 设 $a,b\in S$, 若 $L_a\cap R_b\cap E(S)\neq\emptyset$, 则 $\overline{a}\overline{b}=\overline{ab}$, 否则为 0, 因此 $\overline{S}$ 是 $K[S]$ 的一个子半群. 并且 $E(\overline{S})\backslash\{0\}=\{\overline{e}\mid e\in E(S)\}$. 对于每一个 $a\in S$ 和 $\mathcal{K}\in\{\mathcal{L},\mathcal{R},\mathcal{D}\}$, $K_{\overline{a}}(\overline{S})=\{\overline{u}\mid u\in\mathcal{K}_a(S)\}$, 也记为 $\overline{K_a}$. 最终

$$K[S]=K_0[\overline{S}]\cong\prod_{\alpha\in S/\mathcal{D}}K_0[\overline{D_\alpha}^{0}],\tag{2.1}$$

其中对每一个 $\alpha\in S/\mathcal{D}$, $\overline{D_\alpha}^{0}=\overline{D_\alpha}\cup\{0\}$ 是一个完全 0-单半群[21]. 注意到, 对于 $\alpha\in S/\mathcal{D}$, 如果 $\overline{D_\alpha}$ 是一个完全单半群, 那么 $K_0[\overline{D_\alpha}^{0}]\cong K[\overline{D_\alpha}]$. 把 (2.1) 应用到 $T_i\in R_3\backslash\{T_{18},T_{18}^{*}\}$, 可以把 $K[T_i]$ 分解为一些以 $T_i/\mathcal{D}$ 为指标集的左零带代数的直积.

一个代数 A(不一定包含单位元) 的 Jacobson 根$\operatorname{rad}A$ 是所有单 A-模的左零化子的交[22]. $\operatorname{rad}A$ 是代数 A 的唯一极大的幂零理想, 如果 A 是有限维的, 那么 $\operatorname{rad}A=0$ 当且仅当 A 是半单的.

Munn[23]研究了完全正则半群环的根. 下面的结果以及 (2.1), 将在下一节中被用来计算 $\{K[T_i]\mid T_i\in R_3\}\backslash\{K[T_{18}],K[T_{18}^{*}]\}$ 中半群代数的根和幂等元集.

引理 2.1 设 $S=\{e_1,e_2,\cdots,e_n\}$ 是一个左零带.

(i) 令 $x\in K[S]$, 则 x 是一个幂等元当且仅当存在 $k_1,k_2,\cdots,k_n\in K$, 满足

$$x=k_1e_1+\cdots+k_{n-1}e_{n-1}+(1-k_1-\cdots-k_{n-1})e_n.\tag{2.2}$$

(ii) $\operatorname{rad}K[S]=K(e_1-e_n)+\cdots+K(e_{n-1}-e_n)$.

证 (i) 因为 $e_ie_j=e_i$ 对所有的 $1\leqslant i,j\leqslant n$ 成立, 所以 (2.2) 右侧的元素是一个幂等元. 下面假设 $x=\sum\limits_{i=1}^{n}k_is_i\in K[S]$, 其中 $k_i\in K$, $s_i\in S$ 且 $n\in\mathbb{N}^{+}$. 如果 x 是一个幂等元, 那么

$$\sum_{i=1}^{n}\Big(\sum_{j=1}^{n}k_j\Big)k_is_i=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}k_ik_js_is_j=x^2=x=\sum_{i=1}^{n}k_is_i,$$

则 $\sum\limits_{j=1}^{n}k_j=1$. 因此 $K[S]$ 中的每一个幂等元可以写成 (2.2) 中的形式.

(ii) 因为

$$(e_i-e_n)^2=(e_i)^2-e_ie_n-e_ne_i+(e_n)^2=e_i-e_i-e_n+e_n=0,$$

且 S 是有限的, 所以 $I=K(e_1-e_n)+\cdots+K(e_{n-1}-e_n)$ 是 $K[S]$ 的一个幂零理想. 另一方面, 设 $x=\sum\limits_{i=1}^{m}k_ie_i\in K[S]$, 且设 ℓ 是一个大于等于 2 的正整数, 则

$$\begin{aligned}x^{\ell}=(x^2)x^{\ell-2}&=\Big(k_1e_1\Big(\sum_{i=1}^{m}k_ie_i\Big)+\cdots+k_ne_n\Big(\sum_{i=1}^{m}k_ie_i\Big)\Big)x^{\ell-2}\\&=\Big(k_1\Big(\sum_{i=1}^{m}k_i\Big)e_1+\cdots+k_n\Big(\sum_{i=1}^{m}k_i\Big)e_n\Big)x^{\ell-2}\end{aligned}$$

$$= \Big(\sum_{i=1}^{m} k_i\Big) x^{\ell-1} = \cdots = \Big(\sum_{i=1}^{m} k_i\Big)^{\ell} x.$$

因此, 如果 $x^\ell = 0$, 那么 $\sum\limits_{i=1}^{m} k_i = 0$, 于是 $x \in I$, 这样就得到 I 是 $K[S]$ 中的一个极大幂零理想. 最终 $I = \mathrm{rad}\,K[S]$.

设 A 是一个含有单位元 1_A 的代数, 称 A 中的一个非零幂等元 e 是本原的, 如果不存在 A 的非零正交幂等元 e_1 和 e_2, 使得 e 能写成形式 $e = e_1 + e_2$, 称 $\{e_1, \cdots, e_n\}$ 是 A 的一组本原正交幂等元的完全集, 如果 $e_1, \cdots, e_n$ 是 A 中的本原正交幂等元, 且满足 $1_A = e_1 + \cdots + e_n$ 和 $e_ie_j = 0 (i \neq j)$. 更进一步, 若对所有的 $1 \leqslant i \neq j \leqslant n$, $e_iA \ncong e_jA$, 则称 A 是基本的.

设 A 是一个基本代数且 $\{e_1, \cdots, e_n\}$ 是其一组本原正交幂等元的完全集, 下面给出 A 的通常箭图Q_A 的定义.

(a) Q_A 的点集 $(Q_A)_0$ 由数字 $1, 2, \cdots, n$ 组成, 与幂等元 $e_1, e_2, \cdots, e_n$ 之间存在一个双射对应;

(b) 对于 $a, b \in (Q_A)_0$, 箭头 $\alpha : a \to b$ 与 K-向量空间 $e_a(\mathrm{rad}\,A/\mathrm{rad}^2 A)e_b$ 的基中的向量存在一个双射对应.

设 R_{KQ_A} 是 KQ_A 的一个箭头理想. 称 KQ_A 的一个双边理想 I 是容许的, 如果存在 $m \geqslant 2$, 满足 $R^m_{KQ_A} \subseteq I \subseteq R^2_{KQ_A}$. 根据文 [16, 定理II.3.7], 存在 KQ_A 的一个容许理想 I, 满足 $A \cong KQ_A/I$, 则称 $\mathcal{Q}_A = (Q_A, I)$ 是 A 的有界箭图.

设 $\{A_i \mid 1 \leqslant i \leqslant n\}$ 是一组含有单位元的连通基本代数, 且设 $A = A_1 \times \cdots \times A_n$, 则 A 的有界箭图 $\mathcal{Q}_A$ 是有界箭图 $\mathcal{Q}_{A_i} (1 \leqslant i \leqslant n)$ 的不交并, 记为 $\mathcal{Q}_A = \mathcal{Q}_{A_1} \cup \cdots \cup \mathcal{Q}_{A_n}$.

称一个代数 A 是表示有限的, 如果仅存在有限个不可分解的有限生成右 A-模, 否则称其为表示无限的.

定义 2.1[8] 设 A 是一个结合 R- 代数 (可能没有单位元), 称 A 为关于胞腔组 (I, M, C, δ) 的胞腔代数, 如果满足下面的条件:

(C1) I 是一个偏序集, 对于每个 $\lambda \in I$, 存在集合 $M(\lambda)$, 使得集合 $C^\lambda_{S,T}$ 构成代数 A 的一组 R-基, 其中 λ 取遍 I 中的所有元素, (S, T) 取遍 $M(\lambda) \times M(\lambda)$ 中的所有元素.

(C2) δ 是 A 的阶数为 2 的 R- 线性反自同构, 且把 $C^\lambda_{S,T}$ 映到 $C^\lambda_{T,S}$.

(C3) 如果 $\lambda \in I$ 且 $S, T \in M(\lambda)$, 那么对于每一个 $a \in A$, 有

$$aC^\lambda_{S,T} = \sum_{U \in M(\lambda)} r^\lambda_a(U, S) C^\lambda_{U,T} + r',$$

其中系数 $r^\lambda_a(U, S) \in R$ 不依赖于参数 T, 且 r' 是基元素 $C^\mu_{W,Z} (\mu < \lambda)$ 的线性组合.

设 δ 为 A 上的一个 R-线性反自同构. 如果 $\delta^2 = \mathrm{id}$, 那么称 δ 为 A 上的一个对合.

注意到, 在假设所考虑的半群代数或者基础半群上存在一个对合的前提下, 考虑了某些正则半群代数和 U-半富足半群代数的胞腔性[10−13].

3 $K\mathcal{T}_3$ 的同构类

在这一节中, 首先给出每一个三维半群代数的幂等元集和 Jacobson 根. 注意到, 对于每一个半群 $T_i \in \mathcal{T}_3$ $(1 \leqslant i \leqslant 18)$, 由 $K[T_i]$ 的幂等元集 (或根) 可以很容易得到 $K[T_i]^*$ 的

幂等元集 (或根), 因而只需要考虑半群代数 $K[T_i]$ 的情况, 这些信息被收集在下面的表 1 中. 其次, 给出三维半群代数的同构类, 关键步骤是验证两个三维半群代数之间是否存在同构映射.

设 $1 \leqslant i \leqslant 18$, 不再用 $\{1,2,3\}$ 来记 T_i 的基础集, 而是用 $\{a,b,c\}$. 当容易引起混淆时, 将其记作 $\{a_i,b_i,c_i\}$. 用 Idm_i 来记 $K[T_i]$ 中所有非零幂等元所构成的集合.

表 1 半群代数 $K\mathcal{T}_3$ 的基本性质

$K\mathcal{T}_3$	char K	非零幂等元集	Jacobson 根
$K[T_1]$	p	a	$K(a-c)+K(b-c)$
$K[T_2]$	p	a	$K(a-c)+K(b-c)$
$K[T_3]$	p	$ka+(1-k)b$	$K(a-c)+K(b-c)$
$K[T_4]$	p	$k_1a+k_2b+(1-k_1-k_2)c$	$K(a-c)+K(b-c)$
$K[T_5]$	p	$a,b,-a+b$	$K(a-c)$
$K[T_6]$	p	$a,b,-a+b$	$K(b-c)$
$K[T_7]$	$p\neq 2$	$a,\frac{1}{2}a\pm\frac{1}{2}c$	$K(a-b)$
	2	a	$K(a+b)+K(a+c)$
$K[T_8]$	$p\neq 2$	$a,\frac{1}{2}a\pm\frac{1}{2}c$	$K(a-b)$
	2	a	$K(a+b)+K(a+c)$
$K[T_9]$	p	$a,ka+b-kc,(-k-1)a+b+kc$	$K(a-c)$
$K[T_{10}]$	p	$a,c,(1-k)b+kc,-a+(1-k)b+kc$	$K(b-c)$
$K[T_{11}]$	p	$-a+b,ka+(1-k)c,ka+b-kc$	$K(a-c)$
$K[T_{12}]$	p	$a,b,c,-a+b,-a+c,\overline{-a+b+c},-2a+b+c$	0
$K[T_{13}]$	p	$a,b,\overline{c},-a+b,-a+c,-b+c,a-b+c$	0
$K[T_{14}]$	$p\neq 3$	7	0
	3	$\overline{a}$	$K(a-b)+K(a+b+c)$
$K[T_{15}]$	$p\neq 2$	$a,\overline{b},-a+b,\frac{1}{2}b\pm\frac{1}{2}c,\mp a+\frac{1}{2}b\pm\frac{1}{2}c$	0
	2	$a,\overline{b},-a+b$	$K(b-c)$
$K[T_{16}]$	$p\neq 2$	$a,\overline{b},-a+b,\frac{1}{2}a\pm\frac{1}{2}c,-\frac{1}{2}a+b\pm\frac{1}{2}c$	0
	2	$a,\overline{b},-a+b$	$K(a-c)$
$K[T_{17}]$	p	$a,\overline{b},-a+b$	$K(a-c)$
$K[T_{18}]$	p	$\overline{b},ka+(1-k)c,ka+b+(-1-k)c$	$K(a-c)$

注: $k,k_1,k_2\in K$; 对于 $x\in K[T_i]$ (或者, $K[T_i]^1$), 用符号 $\overline{x}$ 来表明 x 是单位元; “7” 表示 $K[T_{14}]$ 中非零幂等元的个数.

下面给出表 1 中结果的简要证明, 其中在考虑正则三阶半群时, 将用到 (2.1) 和引理 2.1.

$K[T_1]$ 的情况 设 $x=k_1a+k_2b+k_3c\in K[T_1]$, 其中 $k_1,k_2,k_3\in K$, 是一个幂等元. 根据 T_1 的乘法表, $k_1^2+k_2^2+k_3^2+2k_1k_2+2k_2k_3+2k_1k_3=k_1$ 和 $k_2=k_3=0$ 成立. 于是 $k_1=0$ 或者 1, 因此 $\mathrm{Idm}_1=\{a\}$. 因为 $(a-c)^2=(a-b)^2=0$, 所以 $K(a-c)+K(b-c)$ 是 $K[T_1]$ 的一个幂零理想, 故 $K(a-c)+K(b-c)\subseteq \mathrm{rad}\, K[T_1]$. 由于 $|\mathrm{Idm}_1|=1$ 和

$\dim_K K[T_1]=3$, 得到 $\dim_K \operatorname{rad} K[T_1]=2$. 再结合事实 $\dim_K K(a-c)+K(b-c)=2$, 推出 $\operatorname{rad} K[T_1]=K(a-c)+K(b-c)$.

$\boldsymbol{K[T_2]}$ 的情况 设 $x=k_1a+k_2b+k_3c\in K[T_2]$, 其中 $k_1,k_2,k_3\in K$, 则 x 是 $K[T_2]$ 中的一个幂等元, 当且仅当 $k_1^2+k_2^2+2k_1k_2+2k_2k_3+2k_1k_3=k_1$, $k_3^2=k_2$ 以及 $k_3=0$ 成立. 因此 $k_1=0,1$, $k_2=k_3=0$, 由此推出 $\mathrm{Idm}_2=\{a\}$. 注意到 $K(a-c)+K(b-c)$ 是 $K[T_2]$ 的一个理想, 根据 $(a-c)^4=(a-b)^2=0$ 和 $(b-c)^4=(a-b)^2=0$, 得到 $K(a-c)+K(b-c)$ 是一个幂零理想. 于是 $\operatorname{rad} K[T_2]=K(a-c)+K(b-c)$.

$\boldsymbol{K[T_3]}$ 的情况 设 $x=k_1a+k_2b+k_3c\in K[T_3]$, 其中 $k_1,k_2,k_3\in K$, 则 x 是 $K[T_3]$ 的一个幂等元, 当且仅当 $k_1^2+k_1k_2+2k_1k_3+k_2k_3+k_3^2=k_1$, $k_1k_2+k_2^2+k_2k_3=k_2$ 和 $k_3=0$, 这等价于方程 $k_1(k_1+k_2-1)=0$, $k_2(k_1+k_2-1)=0$ 和 $k_3=0$ 成立, 因此 $\mathrm{Idm}_3=\{ka+(1-k)b\mid k\in K\}$. 另一方面, 由于 $(a-c)^2=(b-c)^2=(a-c)(b-c)=(b-c)(a-c)=0$, 可以得到 $K(a-c)+K(b-c)$ 是 $K[T_3]$ 的一个幂零理想. $\dim_K \operatorname{rad} K[T_3]\leqslant 2$, 最终得到 $\operatorname{rad} K[T_3]=K(a-c)+K(b-c)$.

$\boldsymbol{K[T_4]}$ 的情况 T_4 是一个左零带, 根据引理 2.1, $\mathrm{Idm}_4=\{k_1a+k_2b+(1-k_1-k_2)c\mid k_1,k_2\in K\}$, 且 $\operatorname{rad} K[T_4]=K(a-c)+K(b-c)$.

$\boldsymbol{K[T_5]}$ 的情况 设 $x=k_1a+k_2b+k_3c\in K[T_5]$, 其中 $k_1,k_2,k_3\in K$, 则 x 是 $K[T_5]$ 中的一个幂等元, 当且仅当 $k_1^2+2k_1k_2+2k_1k_3+2k_2k_3+k_3^2=k_1$, $k_2^2=k_2$, $k_3=0$, 当且仅当 $k_1^2+2k_1k_2=k_1$, $k_2^2=k_2$ 以及 $k_3=0$. 因此如果 $k_2=0$, 那么 $k_1=0,1$; 如果 $k_2=1$, 那么 $k_1=0,-1$. 于是 $\mathrm{Idm}_5=\{a,b,-a+b\}$. 再根据事实 $(a-c)^2=0$ 和 $\dim_K \operatorname{rad} K[T_5]\leqslant 1$, 可以推出 $\operatorname{rad} K[T_5]=K(a-c)$.

$\boldsymbol{K[T_6]}$ 的情况 设 $x=k_1a+k_2b+k_3c\in K[T_6]$, 其中 $k_1,k_2,k_3\in K$, 则 x 是 $K[T_6]$ 中的一个幂等元, 当且仅当 $k_1^2+2k_1k_2+2k_1k_3=k_2$, $k_2^2+2k_2k_3+k_3^2=k_2$, 且 $k_3=0$, 当且仅当 $k_1^2+2k_1k_2=k_2$, $k_2^2=k_2$ 且 $k_3=0$. 于是 $\mathrm{Idm}_6=\{a,b,-a+b\}$. 由此得到 $\dim_K \operatorname{rad} K[T_6]\leqslant 1$. 注意到 $(b-c)^2=0$ 以及 $K(b-c)$ 是 $K[T_6]$ 的一个理想, 因此 $\operatorname{rad} K[T_6]=K(b-c)$.

$\boldsymbol{K[T_7]}$ 的情况 设 $x=k_1a+k_2b+k_3c\in \mathrm{Idm}_7$, 其中 $k_1,k_2,k_3\in K$. 由 T_7 的乘法表, 可知

$$k_1^2+k_3^2=k_1,\ k_2=0,\ 2k_1k_3=k_3. \tag{3.1}$$

另一方面, 设 $y=\ell_1a+\ell_2b+\ell_3c\in \operatorname{rad} K[T_7]$, 则 $(ya)((\ell_1+\ell_2)a-\ell_3c)=((\ell_1+\ell_2)^2-\ell_3^2)a\in \operatorname{rad} K[T_7]$. 因为 $\operatorname{rad} K[T_7]$ 是一个幂零理想且 $a^2=a$, 所以

$$(\ell_1+\ell_2)^2=\ell_3^2. \tag{3.2}$$

需要考虑下面两种情况. 首先假设 $p\neq 2$, 根据 (3.1), $\mathrm{Idm}_7=\{a,\frac{1}{2}a\pm\frac{1}{2}c\}$, 因此 $K[T_7]$ 没有单位元. 现在利用 (3.2) 并对 n 进行递归证明, 得到 $y^{2n}=2^{2n-1}\ell_3^{2n}a+2^{2n-1}\ell_3^{2n-1}(\ell_1+\ell_2)c$. 因为 y 是幂零的, 所以 $\ell_3=0$. 利用 (3.2), 则有 $\ell_1+\ell_2=0$. 于是 $y\in K(a-b)$, 这样就得到 $\operatorname{rad} K[T_7]\subseteq K(a-b)$. 由于 $K(a-b)$ 是 $K[T_7]$ 的一个幂零理想, 反向的包含关系也是成立的, 这样就推出 $\operatorname{rad} K[T_7]=K(a-b)$. 现在假设 $p=2$, 根据 (3.1), $\mathrm{Idm}_7=\{a\}$, 观察到 a 不是 $K[T_7]$ 中的单位元, 注意到 $M=K(a+c)+K(b+c)$ 是 $K[T_7]$ 的一个理想, 对于 $y\in M$, 有 $y^2=(\ell_1^2+\ell_2^2+\ell_3^2)a=((\ell_1+\ell_2)^2+\ell_3^2)a=(2\ell_3)^2a=0$, 因此 M 是幂零的. 故有 $M\subseteq \operatorname{rad} K[T_7]$. 结合事实 $\dim_K \operatorname{rad} K[T_7]\leqslant 2$, 则推出 $\operatorname{rad} K[T_7]=K(a+c)+K(b+c)$.

$K[T_8]$ 的情况 设 $x = k_1a + k_2b + k_3c \in K[T_8]$, 其中 $k_1, k_2, k_3 \in K$, 则 $x \in \mathrm{Idm}_8$ 当且仅当 $k_1^2 + k_2^2 + k_3^2 + 2k_2k_3 = k_1$, $2k_1k_2 + 2k_1k_3 = k_2$ 和 $k_3 = 0$ 成立, 当且仅当 $k_1^2 + k_2^2 = k_1$, $2k_1k_2 = k_2$ 和 $k_3 = 0$ 成立. 需要考虑下面两种情况. 假设 $p = 2$, 则 $k_2 = 0$ 且 $k_1 = 0, 1$, 于是 $\mathrm{Idm}_8 = \{a\}$. 由于 $K(a+b) + K(a+c)$ 是 $K[T_8]$ 的一个幂零理想且 $\dim_K \mathrm{rad}\, K[T_8] \leqslant 2$, $\mathrm{rad}\, K[T_8] = K(a+b) + K(a+c)$. 假设 $p \neq 2$, 则 $k_1 = \frac{1}{2}$ 且 $k_1 = \pm\frac{1}{2}$. 因此 $\mathrm{Idm}_8 = \left\{a, \frac{1}{2}a \pm \frac{1}{2}c\right\}$. 更进一步, 由于 $(b-c)^2 = 0$ 和 $K(b-c)$ 是 $K[T_8]$ 的一个理想,$\mathrm{rad}\, K[T_8] = K(b-c)$.

$K[T_9]$ 的情况 设 $x = k_1a + k_2b + k_3c \in K[T_9]$, 其中 $k_1, k_2, k_3 \in K$, 则 $x \in \mathrm{Idm}_9 \cup \{0\}$ 当且仅当 $k_1^2 + 2k_1k_2 + 2k_1k_3 + k_2k_3 + k_3^2 = k_1$, $k_2^2 = k_2$ 以及 $k_2k_3 = k_3$ 成立. 若上述等式成立, 则有 $k_2 = 0, 1$. 如果 $k_2 = 0$, 那么 $k_3 = 0$ 且 $k_1 = 0, 1$, 故 $a \in \mathrm{Idm}_9$. 如果 $k_2 = 1$, 那么 $k_1^2 + 2k_1 + 2k_1k_3 + k_3 + k_3^2 = k_1$, 等价于 $(k_1 + k_3)(k_1 + k_3 + 1) = 0$, 即 $k_1 + k_3 = 0$ 或 $k_1 + k_3 + 1 = 0$, 这样就得到

$$\mathrm{Idm}_9 = \{a, ka + b - kc, (-k-1)a + b + kc\}.$$

因为 $K(a-c)$ 是 $K[T_9]$ 的一个幂零理想以及 $\dim_K \mathrm{rad}\, K[T_9] \leqslant 1$, 所以 $\mathrm{rad}\, K[T_9] = K(a-c)$.

$K[T_{10}]$ 的情况 注意到 T_{10} 不仅是一个局部逆半群, 而且是一个带. 根据 $a < b$, $a < c$ 以及 b, c 不是可比的, 得到 $\overline{a} = a$, $\overline{b} = b - a$ 和 $\overline{c} = c - a$. 注意到 $D_a = \{a\}$ 且 $D_b = \{b, c\}$, 于是有 $D_{\overline{a}} = \{\overline{a}\}$ 以及 $D_{\overline{b}} = \{\overline{b}, \overline{c}\}$, 且它们都是完全单左正则带. 根据引理 2.1(i), $K[D_{\overline{b}}]$ 的每一个非零幂等元都具有形式 $k\overline{b} + (1-k)\overline{c} = k(b-a) + (1-k)(c-a)$, 其中 $k \in K$, 由于 $K[T_{10}]$ 是 $K[\overline{D_{\overline{a}}}]$ 和 $K[\overline{D_{\overline{b}}}]$ 的直积, 得到

$$\mathrm{Idm}_{10} = \{k_1a + k_2b + (1-k_2)c \mid k_1 \in \{-1, 0\},\ k_2 \in K\}.$$

利用 $\mathrm{rad}\, K\overline{a} = \mathrm{rad}\, Ka = 0$, 以及引理 2.1(ii), 得到

$$\mathrm{rad}\, K[T_{10}] = \mathrm{rad}\, K[D_{\overline{a}}] \oplus \mathrm{rad}\, K[D_{\overline{b}}] = \mathrm{rad}\, K[D_{\overline{b}}] = K(\overline{b} - \overline{c}) = K(b-c).$$

$K[T_{11}]$ 的情况 T_{11} 不仅是一个局部逆半群, 也是一个左正则带, 它的非零 $\mathcal{D}$-类为 $\{a, c\}$ 和 $\{b\}$. 注意到 $a < b$, 以及 a 和 b 这两个元素都与 c 是不可比的, 则有 $\overline{a} = a$, $\overline{c} = c$ 和 $\overline{b} = b - a$. 根据引理 2.1, 有

$$\mathrm{Idm}_{11} = \{k_1a + (1-k_1)c + k_2(b-a) \mid k_1 \in K, k_2 \in \{0, 1\}\}.$$

于是 $\mathrm{rad}\, K[T_{11}] = K(a-c)$.

$K[T_{12}]$ 的情况 注意到 T_{12} 是一个半格, 且满足 $a < b$, $a < c$, b, c 是不可比的, 因此 $\overline{a} = a$, $\overline{b} = b - a$, $\overline{c} = c - a$. 从引理 2.1 得到,

$$\mathrm{Idm}_{12} = \{k_1a + k_2(b-a) + k_3(c-a) \mid k_1, k_2, k_3 \in \{0, 1\}\}.$$

由于 T_{12} 是一个半格, 则有 $\mathrm{rad}\, K[T_{12}] = 0$.

$K[T_{13}]$ 的情况 注意到 T_{13} 是一个半格, 且满足 $a < b < c$, 因此 $\overline{a} = a$, $\overline{b} = b - a$, $\overline{c} = (c-a)(c-b) = c - b$. 利用引理 2.1,

$$\mathrm{Idm}_{13} = \{k_1a + k_2(b-a) + k_3(c-b) \mid k_1, k_2, k_3 = 0, 1\}.$$

因为 T_{13} 是一个半格, 所以 $\mathrm{rad}\, K[T_{13}] = 0$.

$K[T_{14}]$ 的情况 设 $x=k_1a+k_2b+k_3c\in \mathrm{Idm}_{14}$, 则

$$\begin{cases}k_1^2+2k_2k_3=k_1,\\ k_2^2+2k_1k_3=k_3,\\ k_3^2+2k_1k_2=k_2.\end{cases}\tag{3.3}$$

断言 $1-2k_1\neq 0$ 成立. 反证法, 假设 $1-2k_1=0$, 则 $p\neq 2$, 故有 $k_1=\frac{1}{2}$, 从 (3.3) 中的后两个方程, 得到 $k_2=k_3=0$, 再利用 (3.3) 中的第一个方程, 则有 $\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$, 矛盾. 因此 $1-2k_1\neq 0$. 于是

$$k_3=k_2^2(1-2k_1)^{-1}.\tag{3.4}$$

根据 (3.3) 和 (3.4), 得到

$$\begin{cases}-2k_1^3+3k_1^2+2k_2^3-k_1=0,\\ k_2(-8k_1^3+12k_1^2-6k_1-k_2^3+1)=0.\end{cases}\tag{3.5}$$

若 $k_2=0$, 则 $k_3=0$ 且 $k_1(1-2k_1)(k_1-1)=0$, 因此 $k_1=0,1$, 于是 $a\in \mathrm{Idm}_{14}$. 若 $k_2\neq 0$, 则根据 (3.5), 有 $18k_1^3-27k_1^2+13k_1-2=0$, 因此

$$(2k_1-1)(3k_1-2)(3k_1-1)=0.$$

下面两种情况需要考虑. 首先假设 $p\neq 3$, 因为 $k_1\neq\frac{1}{2}$, 所以 $k_1=\frac{1}{3}$ 或者 $k_1=\frac{2}{3}$. 利用 (3.3) 中的第一个方程, 故知

$$k_2k_3=\frac{1}{9}.\tag{3.6}$$

把 (3.3) 中的最后两个方程加在一起, 得到

$$9(k_2+k_3)^2-(1-2k_1)(k_2+k_3)-2=0.\tag{3.7}$$

根据 (3.6) 和 (3.7), 如果 $k_1=\frac{1}{3}$, 那么 $k_2=k_3=\frac{1}{3}$ 或者 $(k_2,k_3)=(x_1,x_2)$, 其中 $x_1=\frac{-1+\sqrt{3}}{6}$ 且 $x_2=\frac{-1-\sqrt{3}}{6}$; 如果 $k_1=\frac{2}{3}$, 那么 $k_2=k_3=-\frac{1}{3}$ 或者 $(k_2,k_3)=(y_1,y_2)$, 其中 $y_1=\frac{1-\sqrt{3}\mathrm{i}}{6}$, $y_2=\frac{1+\sqrt{3}\mathrm{i}}{6}$. 因此

$$\begin{aligned}\mathrm{Idm}_{14}=\Big\{&a,\frac{1}{3}(a+b+c),\frac{1}{3}a+x_1b+x_2c,\frac{1}{3}a+x_2b+x_1c,\frac{1}{3}(2a-b-c),\\ &\frac{2}{3}a+y_1b+y_2c,\frac{1}{3}a+y_2b+y_1c\Big\}.\end{aligned}$$

并且可以推出 $\{\frac{1}{3}(a+b+c),\frac{1}{3}a+x_1b+x_2c,\frac{1}{3}a+x_2b+x_1c\}$ 是 $K[T_{14}]$ 的一个本原正交幂等元的完全集. 注意到, T_{14} 是一个阶数为 3 的群, 根据 Maschke 定理, $K[T_{14}]$ 是半单的当且仅当 $p\nmid 3$, 所以假设 $p=3$, 必然地, 有 $k_2=0$, 于是 $\mathrm{Idm}_{14}=\{a\}$. 因为 $(a-b)^4=(a+b+c)^2=3(a+b+c)=0$ 且 $a+b+c$ 和 $a-b$ 是幂零的, 所以 $K(a-b)\oplus K(a+b+c)$ 是 $K[T_{14}]$ 的一个幂零理想. 并且由 $|\mathrm{Idm}_{14}|\geqslant 1$, 可以得到 $\dim_K \mathrm{rad}\,K[T_{14}]\leqslant 2$, 这样就得到 $\mathrm{rad}\,K[T_{14}]=K(a-b)\oplus K(a+b+c)$.

$K[T_{15}]$ 的情况 设 $x=k_1a+k_2b+k_3c\in K[T_{15}]$, 其中 $k_1,k_2,k_3\in K$, 则 $x\in \mathrm{Idm}_{15}\cup\{0\}$ 当且仅当 $k_1^2+2k_1k_2+2k_1k_3=k_1$, $k_2^2+k_3^2=k_2$ 且 $2k_2k_3=k_3$. 下面两种情况需要考虑. 首先假设 $p=2$, 则 $k_3=0$, $k_2=0,1$ 且 $k_1=0,1$, 因此 $\mathrm{Idm}_{15}=\{a,b,a+b\}$, 于是 b 是 $K[T_{15}]$ 的单位元, 且 $\{a,a+b\}$ 是 $K[T_{15}]$ 的一组本原正交幂等元的完全集. 再结合事实 $(b-c)^2=0$, 可以推出 $K(b-c)$ 是 $K[T_{15}]$ 的一个幂零理想, 因此 $\mathrm{rad}\,K[T_{15}]=K(b-c)$. 现

在假设 $p \neq 2$, 如果 $k_3=0$, 那么 $k_2=0,1$. 若 $k_2=0$, 则 $k_1=0,1$; 若 $k_2=1$, 则 $k_1=0,-1$. 如果 $k_3 \neq 0$, 那么 $k_2=\frac{1}{2}$, $k_3=\pm\frac{1}{2}$ 和 $k_1=\mp 1$. 因此

$$\mathrm{Idm}_{15}=\Big\{a,b,-a+b,\frac{1}{2}b\pm\frac{1}{2}c,\mp a+\frac{1}{2}b\pm\frac{1}{2}c\Big\}.$$

容易验证 b 是 $K[T_{15}]$ 的单位元, 且 $\{a,\frac{1}{2}b-\frac{1}{2}c,-a+\frac{1}{2}b+\frac{1}{2}c\}$ 是 $K[T_{15}]$ 的一组本原正交幂等元的完全集, 故有 $\operatorname{rad}K[T_{15}]=0$.

$K[T_{16}]$ 的情况 注意到 $E(T_{16})=\{a,b\}$ 且满足 $a<b$, 同时也注意到 $a\mathcal{H}c$, 于是 $\overline{a}=\sigma(a)=a$, $\overline{c}=\sigma(a)c\sigma(a)=c$, $\overline{b}=\sigma(b)=b-a$, 因此 $D_{\overline{a}}=\{\overline{a},\overline{c}\}=\{a,c\}$ 且 $D_{\overline{b}}=\{\overline{b}\}=b-a$, 于是 $K[T_{16}]=K[D_{\overline{a}}]\times K[D_{\overline{b}}]$. 显然地, $K[D_{\overline{b}}]$ 是一个半单代数且其幂等元集为 $\{b-a\}$. 另一方面, 令 k_1a+k_2c, 其中 $k_1,k_2\in K$, 是 $K[D_{\overline{a}}]$ 的一个本原正交幂等元, 则 $k_1^2+k_2^2=k_1$ 且 $2k_1k_2=k_2$. 如果 $p=2$, 那么 $k_2=0$ 和 $k_1=0,1$ 成立, 于是 $\mathrm{Idm}_{16}=\{a,b,b-a\}$. 如果 $p\neq 2$, 那么 $k_1=\frac{1}{2}$, 因此 $k_2=\pm\frac{1}{2}$. 这样就得到

$$\mathrm{Idm}_{16}=\Big\{a,\frac{1}{2}a\pm\frac{1}{2}c,a+b-a,\frac{1}{2}a\pm\frac{1}{2}c+b-a,b-a\Big\}.$$

因为 $D_{\overline{a}}$ 是一个阶数为 2 的群, $\operatorname{rad}K[D_{\overline{a}}]=0$ 当且仅当 $p\neq 2$. 因此, 当 $p\neq 2$ 时, $\operatorname{rad}K[T_{16}]=\operatorname{rad}K[D_{\overline{a}}]\times\operatorname{rad}K[D_{\overline{b}}]=K(b-a)$. 当 $p=2$ 时, 由于 $K(a-c)$ 是 $K[D_{\overline{a}}]$ 的一个幂零理想, $\operatorname{rad}K[D_{\overline{a}}]=K(a-c)$, 这样就证明了 $\operatorname{rad}K[T_{16}]=K(a-c)$.

$K[T_{17}]$ 的情况 注意到 b 是 $K[T_{17}]$ 的单位元. 设 $x=k_1a+k_2b+k_3c\in\mathrm{Idm}_{17}$, 其中 $k_1,k_2,k_3\in K$, 则 $k_1^2+2k_1k_2+k_3^2+2k_1k_3=k_1$, $k_2^2=k_2$ 且 $2k_2k_3=k_3$, 于是 $k_2=0,1$. 需要考虑下面两种情况. 如果 $k_2=0$, 那么 $k_3=0$, 因此 $k_1=0,1$. 如果 $k_2=1$, 那么 $k_3=0$, 以及 $k_1=-1,0$. 因此 $\mathrm{Idm}_{17}=\{a,b,-a+b\}$. 并且由于 $K(a-c)$ 是 $K[T_{17}]$ 的一个幂零理想, $\operatorname{rad}K[T_{17}]=K(a-c)$.

$K[T_{18}]$ 的情况 设 $x=k_1a+k_2b+k_3c\in\mathrm{Idm}_{18}$, 其中 $k_1,k_2,k_3\in K$, 则 $k_1^2+2k_1k_2+k_1k_3=k_1$, $k_2^2=k_2$ 且 $k_1k_3+2k_2k_3+k_3^2=k_3$, 于是 $k_2=0,1$. 若 $k_2=0$, 则有 $k_3(k_1+k_3-1)=0$ 且 $k_1(k_1+k_3-1)=0$, 于是 $\{ka+(1-k)c\mid k\in K\}\in\mathrm{Idm}_{18}$. 若 $k_2=1$, 则 $k_3(k_1+k_3+1)=0$ 且 $k_1(k_1+k_3+1)=0$, 这样就推出 $\{b,ka+b+(-1-k)c\mid k\in K\}\in\mathrm{Idm}_{18}$. 因此,

$$\mathrm{Idm}_{18}=\{ka+(1-k)c,b,ka+b+(-1-k)c\mid k\in K\}.$$

由于 $K(a-c)$ 是 $K[T_{18}]$ 的一个幂零理想, 且满足 $\dim\operatorname{rad}K[T_{18}]\leqslant 1$, 可以得到 $\operatorname{rad}K[T_{18}]=K(a-c)$.

称一个半群 S 为一个左零半群, 如果对于任意的 $a,b\in S$, $ab=a$. 对偶地, 可以定义右零半群. 例如, T_4 (或者, T_4^*) 是 $\mathcal{T}_3$ 中唯一的左 (或者, 右) 零半群.

令 $1\leqslant i\leqslant 18$, 定义 $T_i^*=\{a_i^*,b_i^*,c_i^*\}$, 它的元素就是在 T_i 中元素的右上角加一个符号 $*$ 得到的, 满足对于 $x,y\in T_i$, 有 $x^*y^*=yx$.

引理 3.1 设 S 是一个左零半群且满足 $|S|\geqslant 2$, 假设 S^* 是 S 的对偶半群, 则 $K[S]\ncong K[S^*]$.

证 相反地, 假设 $\varphi: K[S]\to K[S^*]$ 是 $K[S]$ 到 $K[S^*]$ 的一个同构. 由已知条件, 存在 $a,b\in S$ 满足 $a\neq b$, 则 $ab=a$. 取 $a^*=\sum\limits_{i=1}^{n}r_i\varphi(x_i)$ 且 $b^*=\sum\limits_{j=1}^{n}k_j\varphi(y_j)$, 其中 $r_i,k_j\in K$,

$x_i, y_j \in S$. 注意到 S^* 是一个左零半群, 则有

$$a^* = b^*a^* = \sum_{j=1}^{n} k_j\varphi(y_j)\sum_{i=1}^{n} r_i\varphi(x_i) = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} k_jr_i\varphi(y_jx_i) = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} k_jr_i\varphi(y_j) = \sum_{i=1}^{n} r_ib^*.$$

故有 $\sum\limits_{i=1}^{n} r_i = 1$, $b^* = a^*$, 矛盾. 最终得到想要的结论 $K[S] \ncong K[S^*]$.

为了使陈述更加简单, 将用 $\varphi_{i,j}$ 来表示从 $K[T_i]$ 到 $K[T_j]$ 的一个 K-线性映射, 其中 $i, j \in \{1, 2, \cdots, 18\}$.

引理 3.2 下面的论断并不依赖于域 K 的特征 p:

(i) $K[T_1] \ncong K[T_2]$;

(ii) $K[T_3], K[T_4], K[T_3^*]$ 和 $K[T_4^*]$ 两两互不同构;

(iii) $K[T_5] \cong K[T_6]$;

(iv) $K[T_7] \cong K[T_8]$;

(v) $K[T_{10}] \cong K[T_{10}^*]$;

(vi) $K[T_9] \cong K[T_{10}] \cong K[T_{11}]$;

(vii) $K[T_9^*] \cong K[T_{10}^*] \cong K[T_{11}^*]$;

(viii) $K[T_{12}] \cong K[T_{13}]$;

(ix) $K[T_{15}] \cong K[T_{16}]$;

(x) $K[T_{18}] \cong K[T_{18}^*]$.

证 (i) 利用反证法证明, 假设存在一个代数同构 $\varphi : K[T_1] \to K[T_2]$, 则半群 $\varphi(T_1) = \{\varphi(a_1), \varphi(b_1), \varphi(c_1)\}$ 是 $K[T_2]$ 的一组 K-基, 并且它同构于半群 T_1. 于是 T_2 中的每一个元素都可以写成 T_1 中元素的 K-线性组合, 也就是说, 对于任意的 $y \in T_2$, 都存在 $\{k_x^y \in K \mid x \in T_1\}$, 使得 $y = \sum\limits_{x\in T_1} k_x^y\varphi(x)$. 因此, 在 $K[T_2]$ 中,

$$b_2 = c_2^2 = \Big(\sum_{x\in T_1} k_x^{c_2}\varphi(x)\Big)^2 = \sum_{x,y\in T_1} k_x^{c_2}k_y^{c_2}\varphi(a_1) = k\varphi(a_1),$$

其中 $k = \sum\limits_{x,y\in T_1} k_x^{c_2}k_y^{c_2}$. 这样就得到

$$a_2 = b_2a_2 = k\varphi(a_1)\sum_{x\in T_1} k_x^{a_2}\varphi(x) = \Big(\sum_{x\in T_1} k_x^{a_2}\Big)k\varphi(a_1) = \Big(\sum_{x\in T_1} k_x^{a_2}\Big)b_2,$$

矛盾. 因此得到 $K[T_1] \ncong K[T_2]$. 从而完成了 (i) 的证明.

(ii) 首先, 根据表 1, 推出 K-向量空间 $E_3 = \{ka + (1-k)b \mid k \in K\}$ 包含 $K[T_3]$ 中的所有非零幂等元. 假设 $\varphi : K[T_4] \to K[T_3]$ 是一个代数同态, 因为 T_4 中的元素都为幂等元, 所以 $\varphi(T_4) \subseteq E_3$, 再结合事实 $\dim_K E_3 = 2$, 就得到 $\dim_K \varphi(T_4) \leqslant 2$; 因此 φ 不是一个代数同构. 最终 $K[T_3] \ncong K[T_4]$. 类似地, $K[T_3] \ncong K[T_4^*]$. 因此 $K[T_3^*] \ncong K[T_4^*]$ 且 $K[T_3^*] \ncong K[T_4]$. 并且, 由于 T_4 和 T_4^* 分别是一个左零半群和一个右零半群, 根据引理 3.1, 可以得到 $K[T_4] \ncong K[T_4^*]$. 现在, 为了证明 (ii), 只需要证明 $K[T_3] \ncong K[T_3^*]$. 反证法, 假设存在一个同构 $\varphi : K[T_3] \to K[T_3^*]$. 注意到 $\varphi(b_3)\varphi(a_3) = \varphi(b_3)$ 且 $\varphi(a_3)\varphi(b_3) = \varphi(a_3)$. 因为 $c^* \notin (T_3^*)^2$, 故知 $\varphi(a_3), \varphi(b_3) \in K[a_3^*, b_3^*]$. 由于 $\{a_3, b_3\}$ 和 $\{a_3^*, b_3^*\}$ 分别是 T_3 和 T_3^* 的左正则和右正则子半群, 得到 $\varphi|_{K[\{a_3,b_3\}]} : K[\{a_3, b_3\}] \to K[\{a_3^*, b_3^*\}]$ 是从半群代数

$K[\{a_3, b_3\}]$ 到 $K[\{a_3^*, b_3^*\}]$ 的一个代数同构, 与引理 3.1 矛盾, 从而假设不成立. 至此证明了 $K[T_3] \ncong K[T_3^*]$.

(iii) 定义一个映射 $\varphi : K[T_5] \to K[T_6]$, 通过 $a_5 \mapsto a_6$, $b_5 \mapsto b_6$, $c_5 \mapsto b_6 - c_6 + a_6$ 再进行 K-线性扩张. 容易验证 $=\varphi(T_5) = \{a_6, b_6, b_6 - c_6 + a_6\}$ 是一个线性独立集合, 因此它是 $K[T_6]$ 的一个 K-基. 于是 $K[\varphi(T_5)] = K[T_6]$. 再通过半群 $\varphi(T_5)$ 的乘法表, 得到 $\varphi(T_5)$ 和 T_5 作为半群是同构的. 因此 $K[T_5] \cong K[\varphi(T_5)] = K[T_6]$, 即证明了 (iii).

(iv) 定义一个映射 $\varphi_{7,8} : a_7 \mapsto a_8$, $b_7 \mapsto a_8 + k_0(b_8 - c_8)$, $c_7 \mapsto b_8$, 其中 $0 \neq k_0 \in K$. 容易验证映射 $\varphi_{7,8}$ 是从 $K[T_7]$ 到 $K[T_8]$ 到一个代数同构.

(v) 直接验证可知映射 $\varphi : K[T_{10}] \to K[T_{10}^*]$, $a \mapsto a^*$, $b \mapsto k_0 b^* + (1 - k_0)c^*$ 和 $c \mapsto \ell b^* + (1 - \ell)c^*$, 其中 $k_0 \neq \ell \in K\backslash\{0, 1\}$, 是一个同构. 从而得到 (v).

(vi) 直接验证可以得到映射 $\varphi_{9,10} : a_9 \mapsto a_{10}$, $b_9 \mapsto c_{10}$, $c_9 \mapsto a_{10} + k_0 b_{10} - k_0 c_{10}$, 其中 $k_0 \in K\backslash\{0\}$, 以及映射 $\varphi_{9,11} : a_9 \mapsto -a_{11} + b_{11}$, $b_9 \mapsto b_{11}$, $c_9 \mapsto t a_{11} + b_{11} + (-1 - t)c_{11}$, 其中 $t \in K\backslash\{0, 1\}$, 是代数同构, 这样就证明了 (vi).

(vii) 这是 (vi) 的对偶.

(viii) 因为映射 $\varphi_{13,12}$:$a_{13} \mapsto -a_{12} + b_{12} + c_{12}$, $b_{13} \mapsto a_{12}$, $c_{13} \mapsto b_{12}$ 是一个代数同构, 所以 $K[T_{12}] \cong K[T_{13}]$, 于是证明了 (viii). 注意到也可以由 $K[T_{12}]$ 和 $K[T_{13}]$ 的半单性得到此结果.

(ix) 通过直接验证, 可得映射 $\varphi_{15,16} : K[T_{15}] \to K[T_{16}]$, $a_{15} \mapsto -a_{16} + c_{16}$, $b_{15} \mapsto b_{16}$, $c_{15} \mapsto -a_{16} + b_{16} + c_{16}$, 是一个代数同构. 因此 $K[T_{15}] \cong K[T_{16}]$. (ix) 被证明了.

(x) 为了避免混淆, 记 $T_{18}^* = \{a_{18}^*, b_{18}^*, c_{18}^*\}$. 定义一个映射 $\varphi : K[T_{18}^*] \to K[T_{18}]$ 满足 $a_{18}^* \mapsto a_{18} + b_{18}$, $b_{18}^* \mapsto b_{18}$, $c_{18}^* \mapsto b_{18} + c_{18}$. 直接验证可知 φ 是一个代数同构, 故有 (ix) 成立.

当 $\operatorname{char} K = p \notin \{2, 3\}$ 时, 下面的结果给出了 $K\mathcal{T}_3$ 中的同构类.

引理 3.3 当 $\operatorname{char} K = p$ 时, 用 $I_3(p)$ 来记三维半群代数的同构类的个数. 如果 $p \notin \{2, 3\}$, 那么 $I_3(p) = 11$.

证 假设 $p \notin \{2, 3\}$. 注意到每一个三维半群代数中幂等元的个数或者等于 2^i, 其中 $i \in \{1, 2, 3\}$, 或者等于 ∞. 由此, 根据表 1, 需要考虑下面 4 种情况.

情况 1 $K[T_1]$ 和 $K[T_2]$. 根据引理 3.2(i), 推出 $\{K[T_1]\}$ 和 $\{K[T_2]\}$ 是 $K\mathcal{T}_3$ 的两个同构类.

情况 2 $K[T_5]$, $K[T_6]$, $K[T_7]$, $K[T_8]$ 和 $K[T_{17}]$. 在这 5 个半群代数中, $K[T_{17}]$ 是唯一一个包含单位元的, 因此 $\{K[T_{17}]\}$ 在 $K\mathcal{T}_3$ 中是一个同构类. 定义一个映射 $\varphi : K[T_5] \to K[T_7]$ 如下: $a_5 \mapsto \frac{1}{2}(a_7 + c_7)$, $b_5 \mapsto a_7$, $c_5 \mapsto k a_7 + (\frac{1}{2} - k)b_7 + \frac{1}{2}c_7$, 其中 $k \in K\backslash\{0, \frac{1}{2}\}$. 容易验证映射 φ 是一个同构, 因此 $K[T_5] \cong K[T_7]$. 再根据引理 3.2(ii) 和 (iv), 可以得到 $\{K[T_5], K[T_6], K[T_7], K[T_8]\}$ 是 $K\mathcal{T}_3$ 的一个同构类.

情况 3 $K[T_{12}]$, $K[T_{13}]$, $K[T_{14}]$, $K[T_{15}]$ 和 $K[T_{16}]$. 定义映射 $\varphi_{13,15} : a_{13} \mapsto a_{15}$, $b_{13} \mapsto \frac{1}{2}(b_{15} + c_{15})$, $c_{13} \mapsto b_{15}$, 以及映射 $\varphi_{13,14} : a_{13} \mapsto \frac{1}{3}(a_{14} + b_{14} + c_{14})$, $b_{13} \mapsto \frac{2}{3}a_{14} + y_1 b_{14} + y_2 c_{14}$, $c_{13} \mapsto a_{14}$, 其中 $y_1 = \frac{1-\sqrt{3}\mathrm{i}}{6}$, $y_2 = \frac{1+\sqrt{3}\mathrm{i}}{6}$. 通过验证, $\varphi_{13,15}$ 和 $\varphi_{13,14}$ 都是代数同构. 根据引理 3.2(viii) 及 (ix), $\{K[T_{12}], K[T_{13}], K[T_{14}], K[T_{15}]\}$ 是 $K\mathcal{T}_3$ 的一个同构类.

情况 4 $K[T_3]$, $K[T_4]$, $K[T_9]$, $K[T_{10}]$, $K[T_{11}]$, $K[T_{18}]$ 和它们的对偶半群. 由于 $K[T_{18}]$ 和 $K[T_{18}^*]$ 是这 12 个代数中包含单位元的仅有的两个代数, 根据引理 3.2(ix), 推出 $\{K[T_{18}],$

$K[T^*_{18}]\}$ 是一个同构类. 注意到 $\dim_K \mathrm{rad}\, K[T_3] = \dim_K \mathrm{rad}\, K[T_4] = 2$. 也注意到

$$\dim_K \mathrm{rad}\, K[T_9] = \dim_K \mathrm{rad}\, K[T_{10}] = \dim_K \mathrm{rad}\, K[T_{11}] = 1.$$

根据引理 3.2(ii) 以及 (v)–(vii), 得到 $\{K[T_3]\}$, $\{K[T_4]\}$, $\{K[T_3]^*\}$, $\{K[T_4]^*\}$, $\big\{K[T_9], K[T_{10}]$, $K[T_{11}]$, $K[T_9]^*$, $K[T_{10}]^*$, $K[T_{11}]^*\big\}$ 和 $\{K[T_{18}], K[T^*_{18}]\}$ 是 $K\mathcal{T}_3$ 的 6 个同构类.

综上所述, 得到 $K\mathcal{T}_3$ 中所有包含不止一个半群代数的同构类为 $\{K[T_5], K[T_6], K[T_7]$, $K[T_8]\}$, $\{K[T_9], K[T_{10}], K[T_{11}], K[T^*_9], K[T^*_{10}], K[T^*_{11}]\}$, $\{K[T_{12}], K[T_{13}], K[T_{14}], K[T_{15}]$, $K[T_{16}]\}$ 和 $\{K[T_{18}], K[T^*_{18}]\}$. 至此就证明了 $I_3(p) = 11$.

下面给出这一节的主要结果.

定理 3.1 设 K 是一个特征为 p 的代数闭域, 如果 $p \notin \{2, 3\}$, 那么 $I_3(p) = 11$, 且

(i) $K[T_5] \cong K[T_6] \cong K[T_7] \cong K[T_8]$;

(ii) $K[T_9] \cong K[T_{10}] \cong K[T_{11}] \cong K[T^*_9] \cong K[T^*_{10}] \cong K[T^*_{11}]$;

(iii) $K[T_{12}] \cong K[T_{13}] \cong K[T_{14}] \cong K[T_{15}] \cong K[T_{16}]$;

(iv) $K[T_{18}] \cong K[T^*_{18}]$.

如果 $p = 2$, 那么 $I_3(p) = 12$, 且

(i′) $K[T_5] \cong K[T_6]$;

(ii′) $K[T_7] \cong K[T_8]$;

(iii′) $K[T_9] \cong K[T_{10}] \cong K[T_{11}] \cong K[T^*_9] \cong K[T^*_{10}] \cong K[T^*_{11}]$;

(iv′) $K[T_{12}] \cong K[T_{13}] \cong K[T_{14}]$;

(v′) $K[T_{15}] \cong K[T_{16}] \cong K[T_{17}]$;

(vi′) $K[T_{18}] \cong K[T^*_{18}]$.

如果 $p = 3$, 那么 $I_3(p) = 13$, 且

(i″) $K[T_5] \cong K[T_6] \cong K[T_7] \cong K[T_8]$;

(ii″) $K[T_9] \cong K[T_{10}] \cong K[T_{11}] \cong K[T^*_9] \cong K[T^*_{10}] \cong K[T^*_{11}]$;

(iii″) $K[T_{12}] \cong K[T_{13}] \cong K[T_{15}] \cong K[T_{16}]$;

(iv″) $K[T_{18}] \cong K[T^*_{18}]$.

在上面 3 种情况中, 为了叙述简单起见, 若 $K[T] \in K\mathcal{T}_3$ 没有出现在任一同构等式中, 则表示 $K[T]$ 不与 $K\mathcal{T}_3$ 中其他的任何半群代数同构.

证 下面分 3 种情况来进行讨论. 首先假设 $p \notin \{2, 3\}$. 根据引理 3.3 的证明过程, 可以推出 (i)–(iv). 下面假设 $p = 2$. 根据表 1 及引理 3.2 以及引理 3.3 的证明过程, 可以得到 (i′)–(v′) 和 (vii′). 因此只需决定 $K[T_{15}]$, $K[T_{16}]$ 和 $K[T_{17}]$ 之间的同构关系就足够了. 为此, 定义一个映射 $\varphi_{17,15} : K[T_{17}] \to K[T_{15}]$, $a_{17} \mapsto a_{15}$, $b_{17} \mapsto b_{15}$, $c_{17} \mapsto b_{15} - c_{15} + a_{15}$, 通过验证得到 $\varphi_{17,15}$ 是一个代数同构. 再结合引理 3.2(x), 得到 (vi′). 最后, 假设 $p = 3$. 根据引理 3.2 和引理 3.3, 推出 (i″), (ii″), 以及 (iv″). 再利用在引理 3.3 的证明过程中构造的同构映射 $\varphi_{13,15}$, 得到 (iii″). 至此完成了证明.

观察到 T_9 不是正则的, 且 T_{10} 是正则的. 然而, 根据定理 3.1 可知 $K[T_9] \cong K[T_{10}]$. 受此启发, 称一个非正则半群为 iso-正则的, 如果它的半群代数与某个正则半群代数同构, 否则称这个非正则半群为 non-iso-正则的.

在 $\mathcal{T}_3$ 中, 对于任意的 p, $\{T_9, T^*_9, T_{15}\}$ 都是 iso-正则半群, 而 $\{T_1, T_2, T_3, T^*_3, T_5, T_6$, $T_7, T_8\}$ 都是 non-iso-正则半群. 也注意到 T_{17} 是 iso-正则的当且仅当 $p = 2$.

下面的结果表明每一个半单三维半群代数都可以表示成一个正则半群代数.

推论 3.1 设 $T \in \mathcal{T}_3$, 如果 $K[T]$ 是半单的, 那么 T 是正则的或 iso-正则的.

证 根据表 1, $K[T_{12}]$, $K[T_{13}]$, $K[T_{14}](p \neq 3)$, $K[T_{15}](p \neq 2)$, $K[T_{16}](p \neq 2)$ 是 $K\mathcal{T}_3$ 中所有的半单代数. 根据定理 3.1, 若 $p \neq 2$, 则 $K[T_{15}] \cong K[T_{16}]$. 由于 T_{12}, T_{13}, T_{14} 和 T_{16} 都是正则半群, 故有想要的结果.

4 箭图, 表示型和胞腔性

这一节的主要目的是决定所有三维半群代数的表示型和胞腔性, 将利用有界箭图, 分离箭图和嘉当矩阵的理论. 分下面 3 种情况进行考虑.

首先, 因为 $K[T_{12}] \cong K[T_{13}]$, $K[T_{14}](p \neq 3)$ 以及 $K[T_{15}] \cong K[T_{16}](p \neq 2)$ 是半单的, 所以它们的有界箭图都形为 $A_1 \cup A_1 \cup A_1$. 其次, 所有含有单位元的非半单三维半群代数为 $K[T_{14}](p = 3)$, $K[T_{15}](p = 2)$, $K[T_{16}](p = 2)$, $K[T_{17}]$ 和 $K[T_{18}]$. 需要计算它们的有界箭图, 再次, 设 $T \in \{T_i \mid 1 \leqslant i \leqslant 11\} \cup \{T_i^* \mid i = 3, 4, 9, 10, 11\}$, 则 $K[T]$ 没有单位元. 注意到 $\operatorname{mod} K[T^1] \cong \operatorname{mod} K[T]^1 \cong \operatorname{mod} K[T]$, 其中 $K[T]^1 = K[T] \oplus K$ 是一个乘法满足 $(u, k_1)(v, k_2) = (uv + k_2 u + k_1 v, k_1 k_2)$ 的代数. 所以只需考虑 $K[T^1]$ 的有界箭图.

根据上面的讨论和定理 3.1, 计算下面结果中所列的半群代数的有界箭图就足够了.

引理 4.1 设 K 是一个特征为 p 的代数闭域, 则

$$\mathcal{Q}_{K[T_1]^1} = A_1 \cup C(2,2), \qquad \mathcal{Q}_{K[T_2]^1} = A_1 \cup C(1,3),$$

$$\mathcal{Q}_{K[T_3]^1} = H, \qquad \mathcal{Q}_{K[T_3^*]^1} = H^{op},$$

$$\mathcal{Q}_{K[T_4]^1} = \mathcal{Q}_{K[T_4^*]^1} = P, \qquad \mathcal{Q}_{K[T_5]^1} = A_1 \cup A_1 \cup C(1,2),$$

$$\mathcal{Q}_{K[T_7]^1} = C(1,2) \cup C(1,2), \quad p = 2, \qquad \mathcal{Q}_{K[T_7]^1} = A_1 \cup A_1 \cup C(1,2), \quad p \neq 2,$$

$$\mathcal{Q}_{K[T_9]^1} = \mathcal{Q}_{K[T_9^*]^1} = A_1 \cup A_2, \qquad \mathcal{Q}_{K[T_{14}]} = C(1,3), \quad p = 3,$$

$$\mathcal{Q}_{K[T_{17}]} = A_1 \cup C(1,2), \qquad \mathcal{Q}_{K[T_{18}]} = A_2,$$

其中

$$A_1: \underset{1}{\circ}, \qquad A_2: \underset{1}{\circ} \xrightarrow{\alpha} \underset{2}{\circ},$$

$$H: \begin{tikzcd} \underset{1}{\circ} & \underset{2}{\circ} \arrow[l, "\beta"] \arrow[loop above, "\alpha"] \end{tikzcd} \qquad 满足\ \alpha^2 = \alpha\beta = 0,$$

$$H^{op}: \begin{tikzcd} \underset{1}{\circ} \arrow[r, "\beta"] & \underset{2}{\circ} \arrow[loop above, "\alpha"] \end{tikzcd} \qquad 满足\ \alpha^2 = \beta\alpha = 0,$$

$$P: \begin{tikzcd} \underset{1}{\circ} \arrow[r, shift left, "\alpha"] \arrow[r, shift right, "\beta"'] & \underset{2}{\circ} \end{tikzcd},$$

$$C(1,n)\,(n = 2,3): \begin{tikzcd} \underset{1}{\circ} \arrow[loop above, "\alpha"] \end{tikzcd} \qquad 满足\ \alpha^n = 0,$$

$C(2,2):\ \beta \circlearrowleft \underset{1}{\circ} \circlearrowright \alpha$　　满足 $\alpha^2=\beta^2=\alpha\beta=\beta\alpha=0$.

证 根据表 1 和一般箭图的定义, 给出下面 10 个半群代数的有界箭图. 方便其见, 引入一些记号. 如果 $K[T_i]^1$ 是交换的 $(1\leqslant i\leqslant 18)$, 则令 $N_1^i,\cdots,N_{i_0}^i$ $(i_0\in N^+)$ 为 $K[T_i]^1$ 的所有不可分解直和项; 更进一步, 对于 $1\leqslant t\leqslant i_0$, 用 $\{e_1^{i,t},\cdots,e_{t_0^i}^{i,t}\}$ 来记 N_t^i 的一组本原正交幂等元的完全集. 在不至于引起歧义的时候, 将会省略上指标 i.

$K[T_1]^1$ 的情况 根据表 1, 推出 $\{a,-a+d\}$ 是 $K[T_1]^1$ 的一组本原正交幂等元的完全集. 于是 $1_0=2$, $N_1=aK[T_1]^1$, 且 $N_2=(-a+d)K[T_1]^1$. 因为右 $K[T_1]^1$-模 N_1 和 N_2 不是同构的, 所以 $K[T_1]^1$ 是基本的. 注意到 N_1 是半单的, 则其有界箭图为 A_1. 下面考虑 N_2 的有界箭图. 首先有 $2_0^1=1$, 以及 $e_1^2=-a+d$. 利用 $\mathrm{rad}\,N_2=\mathrm{rad}\,K[T_1]^1=K(a-c)+K(b-c)$ 和 $\mathrm{rad}^2\,N_2=0$, 可以推出 $\dim_K e_1^2(\mathrm{rad}\,N_2/\mathrm{rad}^2\,N_2)e_1^2=2$. 因此 $Q_{N_2}=C(2,2)$. 因为 $R_{N_2}^2$ 是 KN_2 中唯一的容许理想, 所以 $KQ_{N_2}/R_{N_2}^2\cong KN_2$, 于是 $\mathcal{Q}_{N_2}=C(2,2)$. 这样就得到 $\mathcal{Q}_{K[T_1]^1}=A_1\cup C(2,2)$.

$K[T_2]^1$ 的情况 注意到 $\{a,-a+d\}$ 是 $K[T_2]^1$ 的一组本原正交幂等元的完全集. 于是 $2_0=2$, $N_1=aK[T_2]^1$ 以及 $N_2=(-a+d)K[T_2]^1$. 有 $N_1=Ka$ 是基本的, 且 $\mathrm{rad}\,N_1=0$. 由此得到 $Q_{N_1}=\mathcal{Q}_{N_1}=A_1$. 另一方面, 有 N_2 是基本的, $2_0=1$ 且 $e_1^2=-a+d$. 注意到 $\mathrm{rad}\,N_2=K(a-c)+K(b-c)$, $\mathrm{rad}^2\,N_2=K(a-b)$, $\mathrm{rad}^3\,N_2=0$ 以及 $\mathrm{rad}\,N_2/\mathrm{rad}^2\,N_2=K(b-c)$, 则 $e_1^2(\mathrm{rad}\,F/\mathrm{rad}^2\,F)e_1^2=K(b-c)$. 因此 Q_{N_2} 的顶点集只有一个点, 设为 e_1, 且包含一个自环, 设为 α. 定义一个 K-线性映射 $\varphi: KQ_{N_2}\to N_2$, $e_1\mapsto e_1^2$, $\alpha\mapsto b-c$, 则 φ 是一个满同态且 $\ker\varphi$ 是一个容许理想. 因为 $\varphi(\alpha^2)=(b-c)^2=a-b\neq 0$ 且 $\varphi(\alpha^3)=(b-c)^3=0$, 所以 $\ker\varphi=R_{N_2}^3$, 因此 $KQ_{N_2}/R_{N_2}^3\cong N_2$, 这样就得到 $\mathcal{Q}_{N_2}=C(1,3)$. 最终, $\mathcal{Q}_{K[T_2]^1}=A_1\cup C(1,3)$.

$K[T_3]^1$ 的情况 注意到 $\{a,-a+d\}$ 是 $K[T_3]^1$ 的一组本原正交幂等元的完全集, 也注意到 $K[T_3]^1$ 是基本的且满足 $\mathrm{rad}\,K[T_3]^1=K(a-c)+K(b-c)$, 则 $\mathrm{rad}^2\,K[T_3]^1=0$. 设 $e_1=a$ 且 $e_2=-a+d$, 于是 $e_1\mathrm{rad}\,K[T_3]^1e_i=0$ $(i=1,2)$, $e_2(\mathrm{rad}\,K[T_3]^1)e_1=K(b-a)$ 以及 $e_2(\mathrm{rad}\,K[T_3]^1)e_2=K(a-c)$. 此时就立刻得到 $\mathcal{Q}_{K[T_3]^1}=H$.

$K[T_4]^1$ 的情况 注意到 $\{a+b-c,-(a+b-c)+d\}$ 是 $K[T_4]^1$ 的一组本原正交幂等元的完全集. 也注意到, $\mathrm{rad}^2\,K[T_4]^1=0$. 设 $e_1=-(a+b-c)+d$ 且 $e_2=a+b-c$, 则 $e_i(\mathrm{rad}\,K[T_4]^1/\mathrm{rad}^2\,K[T_4]^1)e_j=e_i\mathrm{rad}\,K[T_4]^1e_j$. 进一步, 有 $e_i(\mathrm{rad}\,K[T_4]^1/\mathrm{rad}^2\,K[T_4]^1)e_j=K(a-c)+K(b-c)$ 当且仅当 $i=1$ 且 $j=2$, 否则等于 0. 于是得到结论 $\mathcal{Q}_{K[T_4]^1}=\mathcal{Q}_{K[T_4]^1}=P$.

$K[T_5]^1$ 的情况 可以得到 $5_0=3$, $N_1=Ka$, $N_2=K(-a+b)$ 以及 $N_3=(-b+d)K[T_5]^1$. 显然地, $\mathcal{Q}_{N_1}=\mathcal{Q}_{N_2}=A_1$. 并且, $N_3=K(-a+c)+K(-b+d)$, $3_0^5=1$, $e_1^3=-b+d$. 再结合事实 $\mathrm{rad}\,N_3=K(a-c)$ 和 $\mathrm{rad}^2\,N_3=0$, 可以得到 $\mathcal{Q}_{N_3}=C(1,2)$. 最终, $\mathcal{Q}_{K[T_5]^1}=A_1\cup A_1\cup C(1,2)$.

$K[T_7]^1$ 的情况 有两种情况需要考虑. 首先假设 $p\neq 2$, 则 $\big\{-a+d,\frac{1}{2}a+\frac{1}{2}c,\frac{1}{2}a-\frac{1}{2}c\big\}$ 是 $K[T_7]^1$ 的一组本原正交幂等元的完全集. 因此 $7_0=3$, $N_1=(a+c)K[T_7]^1=K(a+c)$, $N_2=(a-c)K[T_7]^1=K(a-c)$ 且 $N_3=(-a+d)K[T_7]^1=K(a-b)+K(-a+d)$. 于是得到

$\mathcal{Q}_{N_1}=\mathcal{Q}_{N_2}=A_1$, 并且, 从 $3_0^7=1$, $e_1^3=-a+d$, $\operatorname{rad}N_3=K(a-b)$ 和 $\mathcal{Q}_{N_3}=C(1,2)$, 可以得到 $\mathcal{Q}_{K[T_7]^1}=A_1\cup A_1\cup C(1,2)(p\neq 2)$. 现在假设 $p=2$, 则 $K[T_7]^1=aK[T_7]^1\times(a+d)K[T_7]^1$, 也就是说, $7_0=2$, $N_1=aK[T_7]^1=Ka+Kc$, $N_2=(a+d)K[T_7]^1=K(a+b)+K(a+d)$. 注意到 $\operatorname{rad}N_1=K(a+c)$, $\operatorname{rad}N_2=K(a+b)$, 以及 $\operatorname{rad}^2N_1=\operatorname{rad}^2N_2=0$. 这样就得到 $\mathcal{Q}_{N_1}=\mathcal{Q}_{N_2}=C(1,2)$. 因此 $\mathcal{Q}_{K[T_7]^1}=C(1,2)\cup C(1,2)$ $(p=2)$.

$K[T_9]^1$ 的情况 有 $\{a,-b+d,-a+b\}$ 是 $K[T_9]^1$ 的一组本原正交幂等元的完全集, 记 $M_1=aK[T_9]^1$ 且 $M_2=(-b+d)K[T_9]^1+(-a+b)K[T_9]^1$, 则 $K[T_9]^1$ 是 M_1 和 M_2 的直积. 有 $M_1=Ka$ 是一个根为零的基本代数, 因此 $\mathcal{Q}_{M_1}=A_1$. 又有 $M_2=K(a-c)+K(d-b)+K(b-a)$ 是一个基本代数. 令 $e_1=d-b$ 且 $e_2=b-a$, 则 $\{e_1,e_2\}$ 是 M_2 的一组本原正交幂等元的完全集. 注意到 $\operatorname{rad}M_2=K(a-c)$, $\operatorname{rad}^2M_2=0$, 观察到, 对于 $i,j\in\{1,2\}$, $e_i\operatorname{rad}M_2e_j\neq 0$ 当且仅当 $i=1$ 且 $j=2$. 也观察到 $\dim_K e_1\operatorname{rad}M_2\,e_2=\dim_K K(a-c)=1$, 这样就证明了 $\mathcal{Q}_{M_2}=A_2$. 最终 $\mathcal{Q}_{K[T_9]^1}=A_1\cup A_2$.

$K[T_{14}]$ 的情况 如果 $p\neq 3$, 那么 $K[T_{14}]$ 是半单的. 现在假设 $p=3$, 则 $\operatorname{rad}K[T_{14}]=K(a-b)+K(a+b+c)$, $\operatorname{rad}K[T_{14}]^2=K(a+b+c)$ 且 $\operatorname{rad}^3K[T_{14}]=0$. 注意到 a 是 $K[T_{14}]$ 中的唯一幂等元且为单位元, 根据 $\dim_K a(\operatorname{rad}K[T_{14}]/\operatorname{rad}^2K[T_{14}])a=\dim_K K(a+b+c)=1$, 可以推出 $\mathcal{Q}_{K[T_{14}]}=C(1,3)$.

$K[T_{17}]$ 的情况 因为 $\{a,-a+d\}$ 是 $K[T_{17}]^1$ 的一组本原正交幂等元的完全集, 所以 $K[T_{17}]\cong N_1\times N_2$, 其中 $N_1=Ka$ 且 $N_2=(-a+d)K[T_{17}]$. 有 N_1 是一个基本代数且满足 $\mathcal{Q}_{N_1}=A_1$. 也有 $N_2=K(-a+b)+K(a-c)$ 是一个基本代数. 注意到 $-a+b$ 是 N_2 中的唯一幂等元, 且为 N_2 的单位元. 再结合事实 $\operatorname{rad}N_2=K(a-c)$ 和 $\operatorname{rad}^2N_2=0$, 则有 $\mathcal{Q}_{N_2}=C(1,2)$. 最终, $\mathcal{Q}_{K[T_{17}]}=A_1\cup C(1,2)$.

$K[T_{18}]$ 的情况 根据表 1, $\{a,-a+b\}$ 是 $K[T_{18}]$ 的一组本原正交幂等元的完全集, 且 $\operatorname{rad}^2K[T_{18}]=0$. 设 $e_1=-a+b$ 且 $e_2=a$, 则 $e_1(\operatorname{rad}K[T_{18}])e_2=K(a-c)$, 且当 $i\neq 1$ 以及 $j\neq 2$ 时, $e_i(\operatorname{rad}K[T_{18}])e_j=0$.

于是 $\mathcal{Q}_{K[T_{18}]}=A_2$.

设 A 是一个包括单位元的代数, 且设 Q 是 A 的一般箭图, 顶点集为 $\{1,\cdots,n\}$, 则 A 的分离箭图[24]Q_s 有 $2n$ 个顶点, 记为 $\{1,\cdots,n,1',\cdots,n'\}$, 并且对于 Q 中的每一个箭头 $i\to j$, Q_s 都有一个箭头 $i\to j'$.

引理 4.2[24–25] 设 A 是一个含有单位元的有限维代数, 如果 A 是根平方等于零的, 那么 A 是有限表示型的, 当且仅当 A 的可分箭图是一些 Dynkin 图的不交并.

定理 4.1 设 $K[T]$ 是一个三维半群代数, 则 $K[T]$ 是无限表示型的当且仅当 $K[T]$ 同构于 $K[T_1]$, $K[T_4]$, 或者 $K[T_4^*]$.

证 根据定理 3.1 以及引理 4.1, 每一个三维半群代数的有界箭图都可以表示成 A_1, A_2, P, H, H^{op}, $C(1,n)\,(n=2,3)$ 和 $C(2,2)$ 中某些箭图的不交并. 利用 Gabriel 定理[1–2], KA_1 和 KA_2 都是表示有限的, 且 KP 是表示无限的. 另外, 注意到有界箭图 H, H^{op},

$C(1,n)\,(n=2,3)$ 和 $C(2,2)$ 所对应的代数都是根平方为零的, 下面给出了其分离箭图:

$$\begin{tikzcd} 1 & 2 \arrow[dl] \arrow[d] \\ 1' & 2' \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} 1 \arrow[dr] & 2 \arrow[d] \\ 1' & 2' \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} 1 \arrow[r] & 1' \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} 1 \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] & 1' \end{tikzcd}$$

H_s　　H_s^{op}　　$C(1,n)_s$　　$C(2,2)_s$

根据引理 4.2, KH, KH^{op}, $KC(1,2)$ 和 $KC(1,3)$ 都是表示有限的, 且 $KC(2,2)_s$ 是表示无限的. 再结合引理 4.1, 表示无限的三维半群代数只有 $K[T_1]$ 和 $K[T_4]$.

推论 4.1 设 $T\in\mathcal{T}_3$. 如果 $K[T]$ 是无限表示型的, 那么 T 既不是正则的, 也不是 iso-正则的.

在研究所有三维半群代数的胞腔性之前, 给出一些准备知识.

引理 4.3 设 S 是一个半群, 且设 S^* 是 S 的对偶半群. 如果 $K[S]\ncong K[S^*]$, 那么 $K[S]$ 不是一个胞腔代数.

证 反证法, 假设 $K[S]$ 是一个胞腔代数, 则在 $K[S]$ 中存在一个对合, 设为 δ. 令 $x,y\in S$, 则 $\delta(x)\delta(y)=\delta(yx)\in\delta(S)=\{\delta(s)\mid s\in S\}$, 因此 $\delta(S)$ 是 $K[S]$ 的一个子半群. 由于 $\delta(\delta(x)\delta(y))=\delta(\delta(yx))=yx=x*y$, 其中 $x*y$ 表示 S^* 中的乘法, 得到 δ 是从 $\delta(S)$ 到 S^* 的同构, 也就是说, $\delta(S)\cong S^*$. 于是 $K[S^*]\cong K[\delta(S)]=K[S]$, 与已知条件矛盾. 因此 $K[S]$ 不是一个胞腔代数.

注意到一个左零带是一个左零半群. 利用引理 3.1 和引理 4.3 可以直接得到下面的结果.

推论 4.2 设 S 是一个左零带, 则 $K[S]$ 是一个胞腔代数, 当且仅当 S 是一个平凡群.

设 S 是一个左正则带且 1_S 是其单位元, 取 $u,v\in S$ 满足 $L_u\leqslant L_v$ (即 $S^1u\subseteq S^1v$), 且选取 $y\in L_v$. 在 L_u 上, 定义关系 $\smile$[26]如下: $x\smile x'$ 当且仅当存在一个元素 $w\in S$ 满足 $w\neq y$, $yw=w$, $wyx=yx$ 以及 $wyx'=yx'$. 显然, $\smile$ 是自反的和反对称的. 令 $\sim$ 是 $\smile$ 在 S 上的传递闭包, 则 $\sim$ 是一个等价关系. 然后定义

$$a_{L_uL_v}=|L_u/\sim|-1,$$

其中 $|L_u/\sim|$ 是 $\sim$ 在 L_u 上的等价类的个数.

引理 4.4[26] 设 S 是一个含有单位元的左正则带, 且设 $L=S/\mathcal{L}$, 则 L 是 $K[S]$ 的箭图 $Q_{K[S]}$ 的顶点集, 且对于 $u,v\in S$, 在顶点 L_u 和 L_v 之间存在 $a_{L_uL_v}$ 个箭头.

设 A 是一个代数. 用 $S(1),\cdots,S(m)$ 来记所有的单 A-模, 并分别用 $P(1),\cdots,P(m)$ 来记其投射覆盖. 在 A 的嘉当矩阵 $C(A)$ 中, $c_{j,h}$ $(1\leqslant j,h\leqslant m)$ 的取值是合成重数 $[P(j):S(h)]$. 一般情况下, $C(A)$ 的行列式可以取任意整数, 称其为 A 的嘉当行列式.

引理 4.5[27] 设 K 是一个域 且 A 是一个胞腔 K-代数 (关于对合 δ), 则代数 A 是半单的, 当且仅当 A 的嘉当矩阵所有的特征值都是有理数且嘉当行列式为 1.

引理 4.6 设 S 是一个含有单位元的有限左正则带, 假设 $|S/\mathcal{D}|=2$, 则 $K[S]$ 是一个胞腔代数当且仅当 S 是一个半格.

证 首先假设 S 是一个半格, 则 $K[S]$ 是半单的, 因此它是胞腔的. 现在假设 $K[S]$ 是胞腔的. 反之, 假设 S 不是一个半格, 则存在 S 的一个 $\mathcal{L}$-类 (或者等价地, 一个 $\mathcal{D}$-类), 设其为 L_0, 满足 $|L_0| = n \geqslant 2$, 其中 $n \in \mathbb{N}^+$. 设 $L_0 = \{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$, 且设 1_S 是 S 的单位元, 则 $1_S \notin L_0$, 且 $L_0 < L_{1_S}$. 注意到 $\sim$ 是 L_0 上的单位关系, 于是 $a_{L_0 L_{1_S}} = |L_0| - 1 = n - 1$, 且 $a_{L_{1_S} L_0} = 0$. 根据引理 4.4, 一般箭图 $Q_{K[S]}$ 的顶点集用 $\{L_{1_S}, L_0\}$ 来标记, 且 $Q_{K[S]}$ 中仅有的箭头为从标记为 L_0 的顶点到标记为 L_{1_S} 的顶点的 $n-1$ 个箭头. 因此

$$C_{K[S]} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ n-1 & 1 \end{pmatrix}.$$

因此 $C_{K[S]}$ 的所有特征值都等于 1, 因此 A 的嘉当行列式等于 1. 再结合引理 4.5, 得到 $K[S]$ 是半单的. 这是一个矛盾, 由于根据引理 2.1(ii), 有 $\operatorname{rad} K[S] \neq 0$. 最终, 有 S 是一个半格.

引理 4.7 设 S 是一个有限交换半群. 假设 $S = \{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$. 如果对于所有的 $1 \leqslant j \leqslant n$,

$$Sx_j \subseteq \{x_j, x_{j-1}, \cdots, x_2, x_1\} \tag{4.1}$$

是成立的, 那么 $K[S]$ 是一个胞腔代数.

证 下面证明 $K[S]$ 是一个具有胞腔组 (Σ, C, M, δ) 的胞腔代数, 其中

(i) $\Sigma = \{\lambda_1, \cdots, \lambda_n\}$ 是一个偏序集, 满足 $\lambda_i < \lambda_j$ 当且仅当 $i < j$;

(ii) $\{M_i \mid 1 \leqslant i \leqslant n\}$ 是一族对象, 且对于每一个 $1 \leqslant i \leqslant n$, $M(\lambda_i) = M_i$ 且 $C^{\lambda_i}_{M_i M_i} = x_i$;

(iii) δ 是 $K[S]$ 上的单位映射.

事实上, $\{C^{\lambda_i}_{M_i M_i} \mid 1 \leqslant i \leqslant n\}$ 是 $K[S]$ 的一个 K-基, 并且由于 S 是一个交换半群, δ 是 $K[S]$ 上的一个对合. 于是只需说明 $K[S]$ 满足定义 2.1(C3). 为此, 令 $u = \sum\limits_{i=1}^{n} k_i x_i \in K[S]$, 且令 $j \in \{1, \cdots, n\}$, 则 $uC^{\lambda_j}_{M_j M_j} = \sum\limits_{i=1}^{n} k_i x_i \cdot C^{\lambda_j}_{M_j M_j} = \sum\limits_{i \geqslant j} k_i x_i x_j + \sum\limits_{i<j} k_i x_i x_j$. 利用 (4.1) 以及半群 S 的交换性可知, $\sum\limits_{i \geqslant j} k_i x_i x_j \in \sum\limits_{u=1}^{j} K x_u$, 且对每一个 $i < j$, $x_i x_j = x_j x_i \in \sum\limits_{v=1}^{i} K x_v$. 这样就得到

$$uC^{\lambda_j}_{M_j M_j} = \ell_j C^{\lambda_j}_{M_j M_j} + \sum_{t<j} \ell_t C^{\lambda_t}_{M_t M_t},$$

其中对于每一个 $h \in \{1, 2, \cdots, j\}$,

$$\ell_h = \begin{cases} \sum\limits_{x_i x_j = x_h} k_i, & \text{如果 } \{i \mid k_i \neq 0 \text{ 且 } x_i x_j = x_h\} \neq \emptyset, \\ 0, & \text{否则}, \end{cases}$$

注意到 ℓ_j 并不依赖于 M_j, 且对于任意的 $t < j$, $\lambda_t < \lambda_j$ 成立, 故有 $K[S]$ 满足定义 2.1(C3). 至此就证明了 $K[S]$ 是一个关于胞腔组 (Σ, C, M, δ) 的胞腔代数.

下面的结果提供了一个胞腔三维半群代数的等价刻画.

定理 4.2 设 $T \in \mathcal{T}_3$, 则 $K[T]$ 是胞腔的当且仅当 T 是交换的.

证　为了决定三维半群代数的胞腔性, 把 $\mathcal{T}_3$ 中的 24 个半群代数分成 6 种情况来考虑.

情况 1　$K[T_1]$, $K[T_2]$, $K[T_5]$, $K[T_6]$, $K[T_7]$, $K[T_8]$ 和 $K[T_{17}]$. 注意到这 7 个半群代数都是交换的. 设 $i\in\{1,2,5,6\}$, 下面证明 $K[T_i]$ 是一个胞腔代数. 事实上, 如果用 a_i, b_i 和 c_i 分别替换 x_1, x_2 和 x_3, 那么利用引理 4.7, 就能得到想要的结果. 类似地, $K[T_{17}]$ 是胞腔的, 如果用 a_{17}, c_{17} 和 b_{17} 来分别替换 x_1, x_2 和 x_3, 再应用引理 4.7, 下面考虑 $K[T_7]$ 的胞腔性. 为此,

(i) 设 $\Sigma=\{\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3\}$ 是一个满足 $\lambda_1<\lambda_2<\lambda_3$ 的偏序集;

(ii) 设 $\{M_i\mid 1\leqslant i\leqslant 3\}$ 是一族对象, 且对于 $1\leqslant i\leqslant 3$, 令 $M(\lambda_i)=M_i$;

(iii) 设 $C^{\lambda_1}_{M_1M_1}=a+c$, $C^{\lambda_2}_{M_2M_2}=a$ 和 $C^{\lambda_3}_{M_3M_3}=b+c$;

(iv) 设 π 是 $K[T_7]$ 上的单位映射.

断言 $K[T_7]$ 是一个关于胞腔组 (Σ,C,M,π) 的胞腔代数. 事实上, $K[T_7]$ 显然满足定义 2.1(C1) 和 (C2). 现在令 $u=k_1a+k_2b+k_3c\in K[T_7]$, 其中 $k_1,k_2,k_3\in K$, 则

$$uC^{\lambda_1}_{M_1M_1}=(k_1a+k_2b+k_3c)(a+c)=(k_1+k_2+k_3)(a+c)=(k_1+k_2+k_3)C^{\lambda_1}_{M_1M_1},$$

也有 $uC^{\lambda_2}_{M_2M_2}=(k_1+k_2-k_3)C^{\lambda_2}_{M_2M_2}+k_3C^{\lambda_1}_{M_1M_1}$ 以及 $uC^{\lambda_3}_{M_3M_3}=(k_1+k_2+k_3)C^{\lambda_1}_{M_1M_1}$. 注意到 $k_1+k_2+k_3$ (或者, $k_1+k_2-k_3$) 并不依赖于 M_1 (或者 M_2). 也注意到 $\lambda_1<\lambda_2$ 以及 $\lambda_1<\lambda_3$, 于是 $K[T_7]$ 满足 (C3), 因此 $K[T_7]$ 是一个关于胞腔组 (Σ,C,M,π) 的胞腔代数. 再结合引理 3.2(iv), 推出 $K[T_8]$ 也是一个胞腔代数.

情况 2　$K[T_3]$, $K[T_3^*]$, $K[T_4]$ 和 $K[T_4^*]$. 因为 $K[T_3]\not\cong K[T_3^*]$, 根据引理 4.3, $K[T_3]$ 和 $K[T_3^*]$ 都不是胞腔代数. 由于 T_4 是一个满足 $|T_4|=3>2$ 的左零带, 根据推论 4.2, $K[T_4]$ 不是一个胞腔代数. 对偶地, $K[T_4^*]$ 也不是胞腔的.

情况 3　$K[T_9]$, $K[T_9^*]$, $K[T_{10}]$, $K[T_{10}^*]$, $K[T_{11}]$ 和 $K[T_{11}^*]$. 证明 $K[T_9^*]$, $K[T_{10}]$, $K[T_{10}^*]$, $K[T_{11}]$ 和 $K[T_{11}^*]$ 不是胞腔的. 事实上, 根据引理 3.2(v)–(vii), 只需要证明 $K[T_9]$ 不是一个胞腔代数. 利用反证法, 假设 $K[T_9]$ 是一个以 (Λ,M,C,δ) 为胞腔组的胞腔代数, 则容易验证 $K[T_9^1]$ 是一个以 (Γ,N,D,i) 为胞腔组的胞腔代数, 其中

(i) 设 λ_0 是一个对象, 且设 $\Gamma=\Lambda\cup\lambda_0$ 是一个偏序集, 满足 $\lambda_0>\lambda$, 其中 $\lambda\in\Lambda$;

(ii) 设 $N(\lambda_0)=U_0$, 其中 $U_0\notin\{N(\lambda)\mid\lambda\in\Lambda\}$, 并且, 对每一个 $\lambda\in\Lambda$, 设 $N(\lambda)=M(\lambda)$;

(iii) 设 $D^{\lambda_0}_{U_0U_0}=1_T$, 其中 1_T 是 T_9^1 的单位元, 且设 $D^{\lambda}_{W,Z}=C^{\lambda}_{W,Z}$, 其中 $\lambda\in\Lambda$ 和 $W,Z\in M(\lambda)$;

(iv) 设 i 是一个 K-线性映射, 满足 $i(D^{\lambda_0}_{U_0U_0})=D^{\lambda_0}_{U_0U_0}$, 且对 $\lambda\in\Lambda$ 与 $W,Z\in M(\lambda)$, 满足 $i(D^{\lambda}_{W,Z})=\delta(C^{\lambda}_{W,Z})$, 则 i 是 $K[T_9^1]$ 上的一个对合.

根据引理 4.1, $Q_{K[T_9]^1}\cong A_1\cup A_2$, 则 $C_{K[T_9]^1}=\left(\begin{smallmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&1&1\end{smallmatrix}\right)$ 是 $K[T_9]^1$ 的嘉当矩阵, 其中 1 是 K 的单位元. 因此 $C_{K[T_9]^1}$ 的所有特征值都等于 1, 因此 $C_{K[T_9]^1}=1$. 根据引理 4.5, $K[T_9]^1$ 是半单的. 但是, 根据引理 4.1, 却能得到 $\operatorname{rad}K[T_9]^1\neq 0$, 所以假设不成立, 于是 $K[T_9]$ 不是一个胞腔代数.

情况 4　$K[T_{12}]$ 和 $K[T_{13}]$. 根据表 1, $K[T_{12}]$ 是半单的, 因此它是胞腔的. 类似地, $K[T_{13}]$ 是胞腔的.

情况 5　$K[T_{14}]$, $K[T_{15}]$ 和 $K[T_{16}]$. 设 $T'_{16}=\{a_{16},c_{16}\}$, 则 $K[T_{16}]\cong K[T'_{16}]^1$. 如果可以证明 $K[T'_{16}]$ 是胞腔的, 那么利用和情况 3 中同样的论证, 可以得到 $K[T_{16}]$ 是胞腔的. 下面证明 $K[T'_{16}]$ 是胞腔的. 注意到 T'_{16} 是一个阶数为二的循环群. 有两种情况需要考虑.

若 $p \neq 2$, 则 $K[T'_{16}]$ 是半单的, 因此它是胞腔的. 若 $p=2$, 则 $K[T'_{16}] \cong K[x]/(x^2)$, 其中 $K[x]$ 是 K 上关于变量 x 的多项式代数, 因此 $K[T'_{16}]$ 是胞腔的. 由同样的论证, 也可以证明 $K[T_{14}]$ 也是胞腔的, 由于 T_{14} 是一个阶数为 3 的循环群, 根据定理 3.1, $K[T_{15}] \cong K[T_{16}]$, 由此得到 $K[T_{15}]$ 是一个胞腔代数.

情况 6 $K[T_{18}]$. 注意到 T_{18} 是一个包含单位元的左正则带, 且 $|T_{18}/\mathcal{D}|=2$. 应用引理 4.6, 得到 $K[T_{18}]$ 不是胞腔的.

归纳起来, 推出 $K[T_1]$, $K[T_2]$, $K[T_5]$, $K[T_6]$, $K[T_7]$, $K[T_8]$, $K[T_{12}]$, $K[T_{13}]$, $K[T_{14}]$, $K[T_{15}]$, $K[T_{16}]$ 和 $K[T_{17}]$ 是所有的胞腔三维半群代数. 也注意到这 12 个半群代数的基础半群都是交换的. 最终, 一个三维半群代数是胞腔的当且仅当它是交换的.

下面的结果给出二维半群代数的胞腔性, 同构类以及表示型.

引理 4.8 设 K 是一个特征为 p 的代数闭域, 则

(i) $\{K[U_1]\}$, $\{K[U_2]\}$ 和 $\{K[U_2^*]\}$ 是 $K\mathcal{T}_2$ 中的 3 个同构类, $\{K[U_3], K[U_4]\}$ 是 $K\mathcal{T}_2$ 中的一个同构类当且仅当 $p \neq 2$;

(ii) 设 $U \in \mathcal{T}_2$, 则 $K[U]$ 是胞腔的当且仅当 U 是交换的;

(iii) 所有的二维半群代数都是表示有限的.

证 (i) 因为 U_1 是一个零半群, 所以 $\{K[U_1]\}$ 是 $K\mathcal{T}_2$ 中的一个同构类. 注意到 U_2 和 U_2^* 都不包含单位元, 且 U_3 和 U_4 都包含一个单位元. 更进一步, 由于 U_2 是一个左零半群, 利用引理 3.1, $K[U_2] \ncong K[U_2^*]$. 于是 $\{K[U_2]\}$ 和 $\{K[U_2^*]\}$ 是 $K\mathcal{T}_2$ 中的两个同构类. 下面决定 $K[U_3]$ 和 $K[U_4]$ 是否为同构的. 容易验证 $K[U_3]$ 是一个半单代数且 $\{a_3, -a_3+b_3\}$ 是它的一组本原正交幂等元的完全集, 也可以验证 $K[U_4]$ 是半单的当且仅当 $p \neq 2$. 因此, 若 $p=2$, 则 $\{K[U_3]\}$ 和 $\{K[U_4]\}$ 是 $K\mathcal{T}_2$ 中的两个同构类. 现在假设 $p \neq 2$, 则映射 $\varphi: K[U_3] \to K[U_4]$, $a_3 \mapsto \frac{1}{2}a_4 + \frac{1}{2}b_4$, $b_3 \mapsto a_4$, 是一个代数同构, 于是 $\{K[U_3], K[U_4]\}$ 是 $K\mathcal{T}_2$ 中的一个同构类. 归纳得到 $K[U_3] \cong K[U_4]$ 当且仅当 $p \neq 2$. (i) 的证明完成了.

(ii) 根据引理 4.7, $K[U_1]$ 是胞腔的. 利用 (i) 和引理 4.3, $K[U_2]$ 和 $K[U_2^*]$ 都不是胞腔代数. 而且, 由于 $K[U_3]$ 是半单的, 得到 $K[U_3]$ 是一个胞腔代数. 若 $p \neq 2$, 根据 (i), $K[U_3] \cong K[U_4]$, 所以 $K[U_4]$ 是胞腔的. 若 $p=2$, 则 $\{a\}$ 是 $K[U_4]$ 中的唯一幂等元, 且 $\operatorname{rad} K[U_4] = K(a+b)$, $\operatorname{rad}^2 K[U_4] = 0$. 于是 $a \operatorname{rad} K[U_4]/\operatorname{rad}^2 K[U_4]\, a = K(a+b)$, 因此 $K[U_4]$ 的有界箭图为 $C(1,2)$. 利用引理 4.1 和 定理 4.1 可知, $K[U_4]$ 是胞腔的. 因此一个二维半群代数不是胞腔的当且仅当它同构于 $K[U_2]$ 或 $K[U_2^*]$, 或者, 当且仅当它是交换的. 这样就证明了 (ii).

(iii) 注意到 $U_1^1 \cong T_{17}$, $U_2^1 \cong T_{18}$, $U_3^1 \cong T_{13}$ 以及 $U_4^1 \cong T_{16}$. 根据定理 4.1 可知, 所有的二维半群代数都是表示有限的.

致谢 感谢审稿人提供的宝贵修改意见.

参 考 文 献

[1] Bautista R, Gabriel P, Roiter A V, et al. Representation-finite algebras and multiplicative bases [J]. *Invent math*, 1985, 81:217–285.

[2] Petrich M. Introduction to semigroups [M]. Columbus: Merrill, 1973.

[3] Björner A. Random walks, arrangements, cell complexes, greedoids, and self-organizing libraries [M]//Building bridges, Berlin: Springer-Verlag, 2008:165–203.

[4] Brown K S. Semigroups, rings, and Markov chains [J]. *J Theoret Probab*, 2000, 13(3):871–938.

[5] Ponizovskiĭ J S. Semigroup algebras of finite representation type [J]. *Semigroup Forum*, 1993, 46:1–6.

[6] Ringel C M. The representation type of the full transformation semigroup T_4 [J]. *Semigroup Forum*, 1993, 61:429–434.

[7] Steinberg B. The global dimension of the full transformation monoid [J]. *Algebr Represent Theory*, 2016, 19(3):731–747.

[8] Graham J J, Lehrer G I. Cellular algebras [J]. *Invent Math*, 1996, 123:1–34.

[9] König S, Xi C C. On the structure of cellular algebras [M]//Reiten I, SmaløS O, ØSolberg (ed). Algebras and Modules II, Canadian Mathematical Society Conference Proceedings, Pronidence, RI: Amer Math Soc, Vol 24, 1998:365–386.

[10] East J. Cellular algebras and inverse semigroups [J]. *J Algebra*, 2006, 296(2):505–519.

[11] Guo X J, Xi C C. Cellularity of twisted semigroup algebras [J] *J Pure Appl Algebra*, 2009, 213:71–86.

[12] Ji Y D, Luo Y F. Cellularity of some semigroup algebras [J]. *Bull Malays Math Sci Soc*, 2018, 40:215-235.

[13] Wilcox S. Cellularity of diagram algebras as twisted semigroup algebras [J]. *J Algebra*, 2007, 309:10–31.

[14] Clifford A H, Preston G B. The algebraic theory of semigroup [M]. Providence, RI: American Mathematical Society, 1961.

[15] Howie J M. Fundamentals of semigroup theory [M]. New York: Oxford University Press, 1995.

[16] Assem I, Simson D, Skowroński A. Elements of the representation theory of associative algebras Vol 1: techniques of representation theory [M]. New York: Cambridge University Press, 2006.

[17] Okninski J. Semigroup algebras [M]. New York: Marcel Dekker, Inc, 1991.

[18] Teply M L, Turman E G, Quesada A. On semisimple semigroup rings [J]. *Proc Amer Math Soc*, 1980, 79:157–163.

[19] Munn W D. A class of contracted inverse semigroup rings [J]. *Proc Roy Soc Edinburgh*, 1987, 107A(1–2):175–196.

[20] Rukolaĭne A V. Semigroup algebras of finite inverse semigroups over arbitrary fields [J]. *J Math Sci*, 1984, 24(4):460–464.

[21] Ji Y D, Luo Y F. Locally adequate semigroup algebras [J]. *Open Math*, 2016, 14:29–48.

[22] Hungerford T M. Algebra [M]. New York: Springer-Verlag, 1974.

[23] Munn W D. Semigroup rings of completely regular semigroups [M]//Lattices, Semigroups, and Universal Algebra, New York: Springer-Verlag, 1990:191–201.

[24] Auslander M, Reiten I, Smalø S O. Representation theory of Artin algebras [M]. Cambridge: Cambridge University Press, 1997.

[25] Gabriel P. Indecomposable reoresebtatuibs I [J]. *Manuscripta Math*, 1972, 6(1):72–103.

[26] Saliola F V. The quiver of the semigroup algebra of a left regular band [J]. *Int J Algebra Comput*, 2011, 17(8):1593–1610.

[27] Xi C C, Xiang D J. Cellular algebras and Cartan matrices [J]. *Linear Algebra Appl*, 2003, 365:369–388.

Three Dimensional Semigroup Algebras

JI Yingdan[1] LUO Yanfeng[2]

[1]School of Applied Mathematics, Guangdong University of Technology, Guangzhou 510520, China. E-mail: jiyingdan157@163.com

[2]School of Mathematics and Statistics, Lanzhou University, Lanzhou 730000, China. E-mail: luoyf@lzu.edu.cn

Abstract In this paper, the authors provide the idempotent sets and Jacobson radicals of all three dimensional semigroup algebras, and then classify these algebras up to isomorphism, where the results depend on the characteristic of the ground algebraically closed field. Then the representation type of these semigroup algebras are investigated by computing certain quivers. The authors also prove that a three (resp., two) dimensional semigroup algebra is cellular if and only if it is commutative. As a by-product, it is showed that the semigroup algebra of a left zero band is cellular if and only if it is a semilattice.

Keywords Semigroup algebras, Isomorphism classes, Quivers, Cellular algebras

2000 MR Subject Classification 20M25, 16G30, 16G60

The English translation of this paper will be published in
Chinese Journal of Contemporary Mathematics, Vol. 40 No. 4, 2019
by ALLERTON PRESS, INC., USA