数 学 年 刊 A 辑
2019, 40(4):399–416
DOI: 10.16205/j.cnki.cama.2019.0030

多线性强奇异 Calderón-Zygmund 算子的多线性迭代交换子的 Sharp 极大和加权估计*

林 燕[1] 韩妍妍[1]

提要 本文主要建立了由多线性强奇异 Calderón-Zygmund 算子和 BMO 函数生成的多线性迭代交换子的 Sharp 极大估计. 作为应用, 也分别得到了该类多线性迭代交换子在乘积加权 Lebesgue 空间和乘积变指数 Lebesgue 空间上的有界性.

关键词 多线性强奇异 Calderón-Zygmund 算子, 多线性迭代交换子, BMO 函数, Sharp 极大函数

MR (2000) 主题分类 42B20, 42B35

中图法分类 O174.2

文献标志码 A

文章编号 1000-8314(2019)04-0399-18

1 引 言

强奇异积分算子是调和分析奇异积分算子理论中的重要部分, 并且有许多学者对其进行了研究.

Alvarez 和 Milman[1−2]确立了强奇异 Calderón-Zygmund 算子的 Lebesgue 空间有界性. 进一步, Lin 和 Lu[3−4]证明了强奇异 Calderón-Zygmund 算子的 Sharp 极大和端点估计.

Grafakos, Kalton 和 Torres[5−7]系统地发展了多线性 Calderón-Zygmund 算子理论. Kenig 和 Stein[8] 讨论了多线性分数次积分. 此外, 在文 [9–14] 中多线性分数次积分或多线性 Calderón-Zygmund 奇异积分生成的多线性交换子也得到广泛研究.

Pérez[15] 等学者研究了多线性奇异积分的多线性迭代交换子. 在他们的研究中, 首先建立了 Sharp 极大估计, 随后, 证明了其端点估计. Lin 和 Zhang[16] 研究了带有广义核的多线性奇异积分算子生成的多线性迭代交换子的相应估计.

基于上述研究, 我们主要致力于研究由多线性强奇异 Calderón-Zygmund 算子和 BMO 函数生成的多线性迭代交换子的 Sharp 极大估计. 随后, 也可建立其在乘积加权 Lebesgue 空间和乘积变指数 Lebesgue 空间上的有界性.

本文 2018 年 5 月 29 日收到.

[1]中国矿业大学 (北京) 理学院, 北京 100083. E-mail: linyan@cumtb.edu.cn; hanyanyan_bj@163.com

*本文受到国家自然科学基金 (No. 11671397), 中央高校基本科研业务费 (No. 2009QS16) 和中国矿业大学 (北京) 越崎青年学者项目的资助.

定义 1.1 设有界线性算子 $T:\mathcal{S}\to\mathcal{S}'$. T 被称为强奇异 Calderón-Zygmund 算子, 若满足以下条件:

(1) T 是 $L^2(\mathbb{R}^n)$ 上的有界线性算子.

(2) 存在对角线 $\{(x,y):x=y\}$ 之外连续的函数 $K(x,y)$, 使得对某个 $0<\delta\leqslant 1$ 和 $0<\alpha<1$, 当 $2|y-z|^\alpha\leqslant|x-z|$ 时, 有

$$|K(x,y)-K(x,z)|+|K(y,x)-K(z,x)|\leqslant C\frac{|y-z|^\delta}{|x-z|^{n+\frac{\delta}{\alpha}}},$$

且当 $f,g\in\mathcal{S}$ 无公共支集时, 有

$$\langle Tf,g\rangle=\int\int K(x,y)f(y)g(x)\mathrm{d}y\mathrm{d}x.$$

(3) 对某个 $\frac{n(1-\alpha)}{2}\leqslant\beta<\frac{n}{2}$, T 和其共轭算子 T^* 从 L^q 到 L^2 有界, 其中 $\frac{1}{q}=\frac{1}{2}+\frac{\beta}{n}$.

我们先简要回忆一下多线性 Calderón-Zygmund 算子的定义. 设 $m\in\mathbb{N}_+$ 且 $K(y_0,y_1,\cdots,y_m)$ 是定义在 $(\mathbb{R}^n)^{m+1}\setminus\{y_0=y_1=\cdots=y_m\}$ 上的函数. T 是定义在乘积测试函数空间上的 m 线性算子, 使得对核函数 K, 有

$$T(f_1,\cdots,f_m)(x)=\int_{\mathbb{R}^n}\cdots\int_{\mathbb{R}^n}K(x,y_1,\cdots,y_m)\prod_{j=1}^m f_j(y_j)\mathrm{d}y_1\cdots\mathrm{d}y_m,\tag{1.1}$$

其中 $x\notin\bigcap\limits_{j=1}^m\mathrm{supp}f_j$ 且 $f_j=(j=1,\cdots,m)$ 是具有紧支集的光滑函数.

特别地, 称 K 是标准 m 线性 Calderón-Zygmund 核, 若其满足如下尺寸条件和光滑条件: 对某个 $C>0$ 和所有 $(y_0,y_1,\cdots,y_m)\in(\mathbb{R}^n)^{m+1}\setminus\{y_0=y_1=\cdots=y_m\}$, 有

$$|K(y_0,y_1,\cdots,y_m)|\leqslant\frac{C}{\Big(\sum\limits_{k,l=0}^m|y_k-y_l|\Big)^{mn}}.\tag{1.2}$$

对某个 $\varepsilon>0$, 当 $0\leqslant j\leqslant m$ 且 $|y_j-y_j'|\leqslant\frac{1}{2}\max\limits_{0\leqslant k\leqslant m}|y_j-y_k|$, 有

$$|K(y_0,\cdots,y_j,\cdots,y_m)-K(y_0,\cdots,y_j',\cdots,y_m)|\leqslant\frac{C|y_j-y_j'|^\varepsilon}{\Big(\sum\limits_{k,l=0}^m|y_k-y_l|\Big)^{mn+\varepsilon}}.\tag{1.3}$$

若 T 是定义形如 (1.1) 的 m 线性算子, 相关一个标准 m 线性 Calderón-Zygmund 核 K, 且对给定的 $1\leqslant t_1,t_2,\cdots,t_m,t<\infty$, 使得 $\frac{1}{t}=\frac{1}{t_1}+\frac{1}{t_2}+\cdots+\frac{1}{t_m}$, 满足如下两条件之一:

(C1) T 从 $L^{t_1,1}\times\cdots L^{t_m,1}$ 到 $L^{t,\infty}$ 有界, 当 $t>1$ 时;

(C2) T 从 $L^{t_1,1}\times\cdots L^{t_m,1}$ 到 L^1 有界, 当 $t=1$ 时,

其中 $L^{t_1,1},\cdots,L^{t_m,1}$ 和 $L^{t,\infty}$ 是 Lorentz 空间, 则称 T 是一个标准 m 线性 Calderón-Zygmund 算子.

定义 1.2 设 T 是定义形如 (1.1) 的 m 线性算子, 则称 T 是 m 线性强奇异 Calderón-Zygmund 算子, 若满足如下 3 个条件:

(1) 对某个 $\varepsilon > 0$ 和 $0 < \alpha \leqslant 1$, 当 $|\ x - x'\ |^{\alpha} \leqslant \frac{1}{2} \max\limits_{1 \leqslant j \leqslant m} |\ x - y_j\ |$ 时, 有

$$|\ K(x, y_1, \cdots, y_m) - K(x', y_1, \cdots, y_m)\ | \leqslant \frac{c|\ x - x'\ |^{\varepsilon}}{(|\ x - y_1\ | + \cdots + |\ x - y_m\ |)^{mn + \frac{\varepsilon}{\alpha}}}. \tag{1.4}$$

(2) 对于给定的 $1 \leqslant r_1, \cdots, r_m < \infty$, 使得 $\frac{1}{r} = \frac{1}{r_1} + \cdots + \frac{1}{r_m}$, T 从 $L^{r_1} \times L^{r_2} \cdots \times L^{r_m}$ 到 $L^{r,\infty}$ 有界.

(3) 对于给定的 $1 \leqslant l_1, \cdots, l_m < \infty$, 使得 $\frac{1}{l} = \frac{1}{l_1} + \cdots + \frac{1}{l_m}$, T 从 $L^{l_1} \times L^{l_2} \cdots \times L^{l_m}$ 到 $L^{q,\infty}$ 有界, 其中 $0 < \frac{l}{q} \leqslant \alpha$.

对标准多线性 Calderón-Zygmund 算子与多线性强奇异 Calderón-Zygmund 算子进行比较, 得出如下结论.

对于特殊情况 $\alpha = 1$, 不等式 (1.4) 蕴含不等式 (1.3), 可以在定义 1.2 的条件 (3) 中取 $l_j = r_j$, $j = 1, \cdots, m$, 且 $q = l = r$. 此时定义 1.2 的条件 (3) 与条件 (2) 完全一致, 因此在此情况下可以将其去掉. 由此看来, 多线性强奇异 Calderón-Zygmund 算子是标准型的推广. 此外, 多线性强奇异 Calderón-Zygmund 算子的核不需要形如 (1.2) 的尺寸条件.

如果关注 $0 < \alpha < 1$ 的情形则会发现, 定义 1.2 中的多线性强奇异 Calderón-Zygmund 算子在对角线附近具有比标准情形更强的奇异性. 因此, 需要有克服更强奇异性的新方法.

定义 1.3　令 T 是 m 线性算子, $\vec{f} = (f_1, \cdots, f_m)$, $\vec{b} = (b_1, \cdots, b_m)$ 是一组局部可积函数, 则由 T 和 $\vec{b}$ 生成的 m 线性迭代交换子定义如下:

$$T_{\prod \vec{b}}(f_1, \cdots, f_m) = [b_1, [b_2, \cdots, [b_{m-1}, [b_m, T]_m]_{m-1} \cdots]_2]_1(\vec{f}).$$

若 T 的核函数为 K, 则可记为

$$\begin{aligned} & T_{\Pi \vec{b}}(f_1, \cdots, f_m)(x) \\ = & \int_{(\mathbb{R}^n)^m} \prod_{j=1}^{m} (b_j(x) - b_j(y_j)) K(x, y_1, \cdots, y_m) f_1(y_1) \cdots f_m(y_m) \mathrm{d}y_1 \cdots \mathrm{d}y_m. \end{aligned}$$

同时, 令

$$T^j_{b_j}(\vec{f})(x) = b_j(x) T(f_1, \cdots, f_m)(x) - T(f_1, \cdots, f_{j-1}, b_j f_j, f_{j+1}, \cdots, f_m)(x).$$

定义 1.4　Hardy-Littlewood 极大算子 M 定义为

$$M(f)(x) = \sup_{B \ni x} \frac{1}{|\ B\ |} \int_B |\ f(y)\ | \mathrm{d}y,$$

其中上确界遍取包含 x 的球体. 定义算子 $M_s(f) = M(|\ f\ |^s)^{\frac{1}{s}}$, $0 < s < \infty$.

Sharp 极大算子定义为

$$M^{\sharp}(f)(x) = \sup_{B \ni x} \frac{1}{|\ B\ |} \int_B |\ f(y) - f_B\ | \mathrm{d}y \sim \sup_{B \ni x} \inf_{a \in \mathbb{C}} \frac{1}{|\ B\ |} \int_B |\ f(y) - a\ | \mathrm{d}x.$$

记 $M^{\sharp}_s(f) = M^{\sharp}(|\ f\ |^s)^{\frac{1}{s}}$, $0 < s < \infty$.

定义 1.5 令正整数 j 和 m 满足 $1\leqslant j\leqslant m$, C_j^m 为 $\{1,\cdots,m\}$ 中 j 个不同元素构成的有限子集 $\psi=\{\psi(1),\cdots,\psi(j)\}$ 的全体. 若 $k<l$, 则 $\psi(k)<\psi(l)$. 对任意 $\psi\in C_j^m$, 令 $\psi'=\{1,\cdots,m\}\backslash\psi$ 是 ψ 的互补序列. 特别地, $C_0^m=\varnothing$. 对任意 m 重的 $\vec{b}$ 和 $\psi\in C_j^m$, j 重 $\vec{b}_\psi=(\vec{b}_{\psi(1)},\cdots,\vec{b}_{\psi(j)})$ 是 $\vec{b}=(b_1,\cdots,b_m)$ 的有限子集.

令 T 是 m 线性算子, $\psi\in C_j^m$, $\vec{b}_\psi=(\vec{b}_\psi(1),\cdots,\vec{b}_\psi(j))$, 则迭代交换子定义为

$$T_{\Pi\vec{b}_\psi}(f_1,\cdots,f_m)=[b_{\psi(1)},[b_{\psi(2)},\cdots,[b_{\psi(j-1)},[b_{\psi(j)},T]_{\psi(j)}]_{\psi(j-1)}\cdots]_{\psi(2)}]_{\psi(1)}(\vec{f}).$$

也可表示为

$$\begin{aligned}&T_{\Pi\vec{b}_\psi}(f_1,\cdots,f_m)(x)\\&=\int_{(\mathbb{R}^n)^m}\prod_{i=1}^{j}(b_{\psi(i)}(x)-b_{\psi(i)}(y_{\psi(i)}))K(x,y_1,\cdots,y_m)f_1(y_1)\cdots f_m(y_m)\mathrm{d}\vec{y},\end{aligned}$$

其中 $\mathrm{d}\vec{y}=\mathrm{d}y_1\cdots\mathrm{d}y_m$. 显然, 当 $\psi=\{1,2,\cdots,m\}$ 时, $T_{\prod\vec{b}_\psi}=T_{\prod\vec{b}}$. 当 $\psi=\{j\}$ 时, $T_{\prod\vec{b}_\psi}=T_{b_j}^j$.

定义 1.6 设 $p(\cdot):\mathbb{R}^n\to[1,\infty)$ 是可测函数. 变指数 Lebesgue 空间 $L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ 定义为

$$L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)=\Big\{f:\exists\lambda>0,\int_{\mathbb{R}^n}\Big(\frac{|f(x)|}{\lambda}\Big)^{p(x)}\mathrm{d}x<\infty\Big\}.$$

$L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ 在范数

$$\|f\|_{L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}=\inf\Big\{\lambda>0:\int_{\mathbb{R}^n}\Big(\frac{|f(x)|}{\lambda}\Big)^{p(x)}\mathrm{d}x\leqslant 1\Big\}$$

意义下是一个 Banach 空间. 设 $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ 是可测函数 $p(\cdot)$ 的集合, 其中 $p(\cdot):\mathbb{R}^n\to[1,\infty)$ 满足

$$1<p_-:=\operatorname*{essinf}_{x\in\mathbb{R}^n}p(x),\quad p_+:=\operatorname*{esssup}_{x\in\mathbb{R}^n}p(x)<\infty.$$

定义 $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ 是 Hardy-Littlewood 极大算子 M 在 $L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ 上有界的 $p(\cdot)\in\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ 的全体.

2 主要结论

此部分将给出本文的主要结论.

定理 2.1 设 T 为定义 1.2 中的 m 线性强奇异 Calderón-Zygmund 算子, 且条件 (3) 中 $0<\frac{l}{q}<\alpha$. 设 $s_0=\max\{r_1,\cdots,r_m,l_1,\cdots,l_m\}$, 其中 r_j 和 l_j ,$j=1,\cdots,m$, 形如定义 1.2. 若 $\vec{b}\in\mathrm{BMO}^m$, $0<\delta<\frac{1}{m}$, $\delta<\varepsilon<\infty$ 且 $s_0<s<\infty$, 则有

$$\begin{aligned}M_\delta^\sharp(T_{\Pi\vec{b}}(\vec{f}))(x)\leqslant{}& C\prod_{j=1}^{m}\|b_j\|_{\mathrm{BMO}}\Big(\prod_{k=1}^{m}M_s(f_k)(x)+M_\varepsilon(T(\vec{f}))(x)\Big)\\&+C\sum_{j=1}^{m-1}\sum_{\psi\in C_j^m}\prod_{i=1}^{j}\|b_{\psi(i)}\|_{\mathrm{BMO}}M_\varepsilon(T_{\Pi\vec{b}_{\psi'}}(\vec{f})(x)),\end{aligned}$$

对任意 m 重具有紧支集的有界可测函数 $\vec{f}=(f_1,\cdots,f_m)$ 成立.

定理 2.2　设 T 为定义 1.2 中的 m 线性强奇异 Calderón-Zygmund 算子, 且条件 (3) 中 $0<\frac{l}{q}<\alpha$. 设 $s_0=\max\{r_1,\cdots,r_m,l_1,\cdots,l_m\}$, 其中 r_j 和 l_j, $j=1,\cdots,m$, 形如定义 1.2. 若 $\vec{b}\in\mathrm{BMO}^m$, 则对于任意的 $s_0<p_1,\cdots,p_m<\infty$, 使得 $\frac{1}{p}=\frac{1}{p_1}+\cdots+\frac{1}{p_m}$, $T_{\Pi\vec{b}}$ 是从 $L^{p_1}(w_1)\times\cdots\times L^{p_m}(w_m)$ 到 $L^p(w)$ 有界的, 其中

$$(w_1,\cdots,w_m)\in(A_{p_1/s_0},\cdots,A_{p_m/s_0}),\quad w=\prod_{j=1}^m w_j^{\frac{p}{p_j}}.$$

定理 2.3　设 $p(\cdot)$, $p_1(\cdot)$, $\cdots$, $p_m(\cdot)\in\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ 满足 $\frac{1}{p(\cdot)}=\frac{1}{p_1(\cdot)}+\cdots+\frac{1}{p_m(\cdot)}$. 按照引理 3.10 给定与 $p_j(\cdot)$ 对应的 q_0^j, $j=1,\cdots,m$. 设 T 为定义 1.2 中的 m 线性强奇异 Calderón-Zygmund 算子, 且条件 (3) 中 $0<\frac{l}{q}<\alpha$. 设 $s_0=\max\{r_1,\cdots,r_m,l_1,\cdots,l_m\}$, 其中 r_j 和 l_j, $j=1,\cdots,m$, 形如定义 1.2. 若 $s_0<\min\limits_{1\leqslant j\leqslant m}q_0^j$ 且 $\vec{b}\in\mathrm{BMO}^m$, 则 $T_{\Pi\vec{b}}$ 是从 $L^{p_1(\cdot)}(\mathbb{R}^n)\times\cdots\times L^{p_m(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ 到 $L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ 有界的.

3 引　理

在给出主要结果的证明之前, 我们需要一些引理.

引理 3.1[4]　设 $f\in\mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n)$, $1\leqslant p<\infty$, $r_1>0$, $r_2>0$ 且 $x\in\mathbb{R}^n$, 则

$$\Big(\frac{1}{|B(x,r_1)|}\int_{B(x,r_1)}|f(y)-f_{B(x,r_2)}|^p\mathrm{d}y\Big)^{\frac{1}{p}}\leqslant C\Big(1+\Big|\ln\frac{r_1}{r_2}\Big|\Big)\|f\|_{\mathrm{BMO}},$$

其中 C 是与 f, x, r_1 和 r_2 无关的正常数.

引理 3.2[17−18] 设 $0<p<q<\infty$, 则存在常数 $C=C_{p,q}>0$, 使得对任意的可测函数 f, 有

$$|Q|^{-\frac{1}{p}}\parallel f\parallel_{L^p(Q)}\leqslant C|Q|^{-\frac{1}{q}}\parallel f\parallel_{L^{q,\infty}(Q)}.$$

引理 3.3[19]　设 $(w_1,\cdots,w_m)\in(A_{p_1},\cdots,A_{p_m})$, 且 $1\leqslant p_1,\cdots,p_m<\infty$, $0<\theta_1,\cdots,\theta_m<1$ 满足 $\theta_1+\cdots+\theta_m=1$, 则 $w_1^{\theta_1}\cdots w_m^{\theta_m}\in A_{\max\{p_1,\cdots,p_m\}}$.

引理 3.4[18]　设 $0<p,\delta<\infty$ 且 $w\in A_\infty$. 存在依赖于 w 的 A_∞ 常数的正数 C, 使得

$$\int_{\mathbb{R}^n}[M_\delta(f)(x)]^pw(x)\mathrm{d}x\leqslant C\int_{\mathbb{R}^n}[M_\delta^\sharp(f)(x)]^pw(x)\mathrm{d}x,$$

对于任意使得上式左侧有限的函数 f 成立.

引理 3.5[20]　设 $s=\max\{r_1,\cdots,r_m,l_1,\cdots,l_m\}$, 其中 r_j 和 l_j, $j=1,\cdots,m$, 形如定义 1.2, T 是 m 线性强奇异 Calderón-Zygmund 算子. 若 $0<\delta<\frac{1}{m}$, 则

$$M_\delta^\sharp(T(\vec{f}))(x)\leqslant C\prod_{j=1}^m M_s(f_j)(x),$$

对于所有具有紧支集的 m 重有界函数, $\vec{f}=(f_1,\cdots,f_m)$ 成立.

引理 3.6[21] 设 T 为定义 1.2 中的 m 线性强奇异 Calderón-Zygmund 算子, 且条件 (3) 中 $0<\frac{l}{q}<\alpha$. 设 $s_0=\max\{r_1,\cdots,r_m,l_1,\cdots,l_m\}$, 其中 r_j 和 l_j, $j=1,\cdots,m$, 形如定义 1.2. 若 $b_j\in\mathrm{BMO}$, $j=1,\cdots,m$, $0<\delta<\frac{1}{m}$ 且 $\delta<t<\infty$, $s_0<s<\infty$, 则有

$$M_\delta^\sharp(T_{b_j}^j(\vec{f}))(x)\leqslant C\|b_j\|_{\mathrm{BMO}}\Big(M_t(T(\vec{f}))(x)+\prod_{i=1}^m M_s(f_i)(x)\Big),$$

对于所有具有紧支集的 m 重有界函数, $\vec{f}=(f_1,\cdots,f_m)$ 成立.

上述结果可以从文 [21, 定理 2.1] 的证明中得到.

引理 3.7[22] 设 $p(\cdot)\in\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$, 则下面 4 个条件等价:

(1) $p(\cdot)\in\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$;

(2) $p'(\cdot)\in\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$;

(3) 对某个 $1<p_0<p_-$, $\frac{p(\cdot)}{p_0}\in\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$;

(4) 对某个 $1<p_0<p_-$, $\big(\frac{p(\cdot)}{p_0}\big)'\in\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$.

引理 3.8[23] 给一族有序可测函数 $\mathcal{F}$, 对某个 $0<p_0<\infty$, 对任意 $(f,g)\in\mathcal{F}$ 和任意 $w\in A_1$, 有

$$\int_{\mathbb{R}^n}|f(x)|^{p_0}w(x)\mathrm{d}x\leqslant C_0\int_{\mathbb{R}^n}|g(x)|^{p_0}w(x)\mathrm{d}x.$$

设 $p(\cdot)\in\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ 满足 $p_0\leqslant p_-$, 若 $\big(\frac{p(\cdot)}{p_0}\big)'\in\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$, 则存在常数 $C>0$, 使得对于任意的 $(f,g)\in\mathcal{F}$, 有 $\|f\|_{L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}\leqslant C\|g\|_{L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}$.

引理 3.9[12] 设 $p(\cdot),p_1(\cdot),\cdots,p_m(\cdot)\in\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ 满足 $\frac{1}{p(x)}=\frac{1}{p_1(x)}+\cdots+\frac{1}{p_m(x)}$. 对于任意的 $f_j\in L^{p_j(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$, $j=1,\cdots,m$, 有

$$\Big\|\prod_{j=1}^m f_j\Big\|_{L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}\leqslant 2^{m-1}\prod_{j=1}^m\|f_j\|_{L^{p_j(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}.$$

引理 3.10[22] 设 $p(\cdot)\in\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$. M 在 $L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ 上有界, 当且仅当存在 $1<q_0<\infty$, 使得 M_{q_0} 在 $L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ 上有界, 其中 $M_{q_0}(f)=[M(|f|^{q_0})]^{\frac{1}{q_0}}$.

4 定理证明

现在能够证明我们的主要结果.

定理 2.1 的证明 为了简化证明过程, 只考虑 $m=2$ 的情况, 事实上, 其他情况有类似的证明过程. 设 f_1,f_2 是具有紧支集的可测函数, b_1, $b_2\in\mathrm{BMO}$, 则对于任意包含 x 的以 x_0 为中心, $r_B>0$ 为半径的球 $B(x_0,r_B)$, 有

$$\begin{aligned}T_{\Pi\vec{b}}(\vec{f})(x)&=(b_1(x)-\lambda_1)(b_2(x)-\lambda_2)T(f_1,f_2)(x)-(b_1(x)-\lambda_1)\\&\quad\times T(f_1,(b_2-\lambda_2)f_2)(x)-(b_2(x)-\lambda_2)T((b_1-\lambda_1)f_1,f_2)(x)\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\quad + T((b_1-\lambda_1)f_1,(b_2-\lambda_2)f_2)(x)\\
&= -(b_1(x)-\lambda_1)(b_2(x)-\lambda_2)T(f_1,f_2)(x) + (b_1(x)-\lambda_1)\\
&\quad \times T^2_{b_2-\lambda_2}(f_1,f_2)(x) + (b_2(x)-\lambda_2)T^1_{b_1-\lambda_1}(f_1,f_2)(x)\\
&\quad + T((b_1-\lambda_1)f_1,(b_2-\lambda_2)f_2)(x),
\end{aligned}
$$

其中 $\lambda_j = \frac{1}{|B|}\int_B b_j(x)\mathrm{d}x$, $j=1,2$. 下面分别考虑两种情况.

情况 1 $r_B \geqslant 1$.

设 C_0 为待定的常数. 对 $0<\delta<\frac{1}{2}$, 有

$$
\begin{aligned}
&\Big(\frac{1}{|B|}\int_B \big||T_{\Pi\vec{b}}(\vec{f})(z)|^\delta - |C_0|^\delta\big|\mathrm{d}z\Big)^{\frac{1}{\delta}}\\
\leqslant{}& \Big(\frac{1}{|B|}\int_B |T_{\Pi\vec{b}}(\vec{f})(z) - C_0|^\delta \mathrm{d}z\Big)^{\frac{1}{\delta}}\\
\leqslant{}& C\Big(\frac{1}{|B|}\int_B |(b_1(z)-\lambda_1)(b_2(z)-\lambda_2)T(f_1,f_2)(z)|^\delta \mathrm{d}z\Big)^{\frac{1}{\delta}}\\
&+ C\Big(\frac{1}{|B|}\int_B |(b_1(z)-\lambda_1)T^2_{b_2-\lambda_2}(f_1,f_2)(z)|^\delta \mathrm{d}z\Big)^{\frac{1}{\delta}}\\
&+ C\Big(\frac{1}{|B|}\int_B |(b_2(z)-\lambda_2)T^1_{b_1-\lambda_1}(f_1,f_2)(z)|^\delta \mathrm{d}z\Big)^{\frac{1}{\delta}}\\
&+ C\Big(\frac{1}{|B|}\int_B |T((b_1-\lambda_1)f_1,(b_2-\lambda_2)f_2)(z) - C_0|^\delta \mathrm{d}z\Big)^{\frac{1}{\delta}}\\
:={}& \mathrm{I}+\mathrm{II}+\mathrm{III}+\mathrm{IV}.
\end{aligned}
$$

由于 $0<\delta<\frac{1}{2}$ 且 $0<\delta<\varepsilon<\infty$, 则存在 v, 满足 $1<v<\min\big\{\frac{\varepsilon}{\delta},\frac{1}{1-\delta}\big\}$, 于是 $v\delta<\varepsilon$ 且 $v'\delta>1$. 选取 $q_1,q_2\in(1,\infty)$, 满足 $\frac{1}{q_1}+\frac{1}{q_2}=\frac{1}{v'}$, 则有 $\frac{1}{q_1}+\frac{1}{q_2}+\frac{1}{v}=1$ 和 $q_1\delta>1$, $q_2\delta>1$.

根据 Hölder 不等式, 有

$$
\begin{aligned}
\mathrm{I} \leqslant{}& C\Big(\frac{1}{|B|}\int_B |b_1(z)-\lambda_1|^{\delta q_1}\mathrm{d}z\Big)^{\frac{1}{\delta q_1}}\Big(\frac{1}{|B|}\int_B |b_2(z)-\lambda_2|^{\delta q_2}\mathrm{d}z\Big)^{\frac{1}{\delta q_2}}\\
&\times\Big(\frac{1}{|B|}\int_B |T(f_1,f_2)(z)|^{\delta v}\mathrm{d}z\Big)^{\frac{1}{\delta v}}\\
\leqslant{}& C\|b_1\|_{\mathrm{BMO}}\|b_2\|_{\mathrm{BMO}} M_{\delta v}(T(f_1,f_2))(x)\\
\leqslant{}& C\|b_1\|_{\mathrm{BMO}}\|b_2\|_{\mathrm{BMO}} M_{\varepsilon}(T(f_1,f_2))(x).
\end{aligned}
$$

由 Hölder 不等式, 有

$$
\begin{aligned}
\mathrm{II} \leqslant{}& C\Big(\frac{1}{|B|}\int_B |b_1(z)-\lambda_1|^{\delta v'}\mathrm{d}z\Big)^{\frac{1}{\delta v'}}\Big(\frac{1}{|B|}\int_B |T^2_{b_2-\lambda_2}(f_1,f_2)(z)|^{\delta v}\mathrm{d}z\Big)^{\frac{1}{\delta v}}\\
\leqslant{}& C\|b_1\|_{\mathrm{BMO}} M_{\delta v}(T^2_{b_2-\lambda_2}(f_1,f_2))(x)\\
\leqslant{}& C\|b_1\|_{\mathrm{BMO}} M_{\varepsilon}(T^2_{b_2-\lambda_2}(f_1,f_2))(x)\\
={}& C\|b_1\|_{\mathrm{BMO}} M_{\varepsilon}(T^2_{b_2}(f_1,f_2))(x).
\end{aligned}
$$

类似地,

$$\mathrm{III} \leqslant C\|b_2\|_{\mathrm{BMO}} M_\varepsilon(T^1_{b_1}(f_1,f_2))(x).$$

接下来, 分析 IV. 记

$$f_1 = f_1\chi_{2B} + f_1\chi_{(2B)^c} := f_1^1 + f_1^2, \quad f_2 = f_2\chi_{2B} + f_2\chi_{(2B)^c} := f_2^1 + f_2^2.$$

取

$$\begin{aligned}\mathrm{C}_0 &= T((b_1-\lambda_1)f_1^1,(b_2-\lambda_2)f_2^2)(x_0) + T((b_1-\lambda_1)f_1^2,(b_2-\lambda_2)f_2^1)(x_0)\\ &\quad + T((b_1-\lambda_1)f_1^2,(b_2-\lambda_2)f_2^2)(x_0) := \mathrm{C}_1+\mathrm{C}_2+\mathrm{C}_3,\end{aligned}$$

则有

$$\begin{aligned}\mathrm{IV} &\leqslant C\Big(\frac{1}{|B|}\int_B |T((b_1-\lambda_1)f_1^1,(b_2-\lambda_2)f_2^1)(z)|^\delta \mathrm{d}z\Big)^{\frac{1}{\delta}}\\ &\quad + C\Big(\frac{1}{|B|}\int_B |T((b_1-\lambda_1)f_1^1,(b_2-\lambda_2)f_2^2)(z)-\mathrm{C}_1|^\delta \mathrm{d}z\Big)^{\frac{1}{\delta}}\\ &\quad + C\Big(\frac{1}{|B|}\int_B |T((b_1-\lambda_1)f_1^2,(b_2-\lambda_2)f_2^1)(z)-\mathrm{C}_2|^\delta \mathrm{d}z\Big)^{\frac{1}{\delta}}\\ &\quad + C\Big(\frac{1}{|B|}\int_B |T((b_1-\lambda_1)f_1^2,(b_2-\lambda_2)f_2^2)(z)-\mathrm{C}_3|^\delta \mathrm{d}z\Big)^{\frac{1}{\delta}}\\ &:= \mathrm{IV}_1+\mathrm{IV}_2+\mathrm{IV}_3+\mathrm{IV}_4.\end{aligned}$$

令 $t=\frac{s}{s_0}$. 由于 $s_0<s<\infty$, 则 $1<t<\infty$ 且 $r_it\leqslant s$, $i=1,2$. 由 $0<\delta<r<\infty$ 和引理 3.2, 有

$$\begin{aligned}\mathrm{IV}_1 &\leqslant C|B|^{-\frac{1}{r}}\|T((b_1-\lambda_1)f_1^1,(b_2-\lambda_2)f_2^1)\|_{L^{r,\infty}(B)}\\ &\leqslant C\Big(\frac{1}{|2B|}\int_{2B}|b_1(y_1)-\lambda_1|^{r_1}|f_1(y_1)|^{r_1}\mathrm{d}y_1\Big)^{\frac{1}{r_1}}\\ &\quad\times\Big(\frac{1}{|2B|}\int_{2B}|b_2(y_2)-\lambda_2|^{r_2}|f_2(y_2)|^{r_2}\mathrm{d}y_2\Big)^{\frac{1}{r_2}}\\ &\leqslant C\Big(\frac{1}{|2B|}\int_{2B}|b_1(y_1)-\lambda_1|^{r_1t'}\mathrm{d}y_1\Big)^{\frac{1}{r_1t'}}\Big(\frac{1}{|2B|}\int_{2B}|f_1(y_1)|^{r_1t}\mathrm{d}y_1\Big)^{\frac{1}{r_1t}}\\ &\quad\times\Big(\frac{1}{|2B|}\int_{2B}|b_2(y_2)-\lambda_2|^{r_2t'}\mathrm{d}y_2\Big)^{\frac{1}{r_2t'}}\Big(\frac{1}{|2B|}\int_{2B}|f_2(y_2)|^{r_2t}\mathrm{d}y_2\Big)^{\frac{1}{r_2t}}\\ &\leqslant C\|b_1\|_{\mathrm{BMO}}\|b_2\|_{\mathrm{BMO}}\Big(\frac{1}{|2B|}\int_{2B}|f_1(y_1)|^s\mathrm{d}y_1\Big)^{\frac{1}{s}}\Big(\frac{1}{|2B|}\int_{2B}|f_2(y_2)|^s\mathrm{d}y_2\Big)^{\frac{1}{s}}\\ &\leqslant C\|b_1\|_{\mathrm{BMO}}\|b_2\|_{\mathrm{BMO}}M_s(f_1)(x)M_s(f_2)(x).\end{aligned}$$

对 $z\in B$ 和 $y_2\in(2B)^c$, 有 $|z-x_0|\leqslant r_B^\alpha\leqslant r_B\leqslant\frac{1}{2}|y_2-x_0|$. 根据 Hölder 不等式和引理 3.1, 有

$$\begin{aligned}\mathrm{IV}_2 &\leqslant C\frac{1}{|B|}\int_B|T((b_1-\lambda_1)f_1^1,(b_2-\lambda_2)f_2^2)(z)-T((b_1-\lambda_1)f_1^1,(b_2-\lambda_2)f_2^2)(x_0)|\mathrm{d}z\\ &\leqslant C\frac{1}{|B|}\int_B\int_{2B}\int_{(2B)^c}\frac{|z-x_0|^\varepsilon}{(|x_0-y_1|+|x_0-y_2|)^{2n+\frac{\varepsilon}{\alpha}}}|b_1(y_1)-\lambda_1||b_2(y_2)-\lambda_2|\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\times |f_1(y_1)||f_2(y_2)|\mathrm{d}y_2\mathrm{d}y_1\mathrm{d}z\\
&\leqslant Cr_B^{\varepsilon}\Big(\int_{2B}|b_1(y_1)-\lambda_1||f_1(y_1)|\mathrm{d}y_1\Big)\\
&\quad\times\Big(\int_{(2B)^c}\frac{1}{|x_0-y_2|^{2n+\frac{\varepsilon}{\alpha}}}|b_2(y_2)-\lambda_2||f_2(y_2)|\mathrm{d}y_2\Big)\\
&\leqslant Cr_B^{\varepsilon}|B|\|b_1\|_{\mathrm{BMO}}M_s(f_1)(x)r_B^{-n-\frac{\varepsilon}{\alpha}}\\
&\quad\times\sum_{k=1}^{\infty}2^{-k(n+\frac{\varepsilon}{\alpha})}\frac{1}{|2^{k+1}B|}\int_{2^{k+1}B}|b_2(y_2)-\lambda_2||f_2(y_2)|\mathrm{d}y_2\\
&\leqslant Cr_B^{\varepsilon}|B|\|b_1\|_{\mathrm{BMO}}M_s(f_1)(x)r_B^{-n-\frac{\varepsilon}{\alpha}}\sum_{k=1}^{\infty}2^{-k(n+\frac{\varepsilon}{\alpha})}\\
&\quad\times\Big(\frac{1}{|2^{k+1}B|}\int_{2^{k+1}B}|b_2(y_2)-\lambda_2|^{s'}\mathrm{d}y_2\Big)^{\frac{1}{s'}}\Big(\frac{1}{|2^{k+1}B|}\int_{2^{k+1}B}|f_2(y_2)|^{s}\mathrm{d}y_2\Big)^{\frac{1}{s}}\\
&\leqslant Cr_B^{\varepsilon}|B|\|b_1\|_{\mathrm{BMO}}M_s(f_1)(x)r_B^{-n-\frac{\varepsilon}{\alpha}}\|b_2\|_{\mathrm{BMO}}M_s(f_2)(x)\sum_{k=1}^{\infty}k2^{-k(n+\frac{\varepsilon}{\alpha})}\\
&\leqslant C\|b_1\|_{\mathrm{BMO}}\|b_2\|_{\mathrm{BMO}}M_s(f_1)(x)M_s(f_2)(x).
\end{aligned}$$

类似地, 对 $z\in B$ 和 $y_1\in(2B)^c$, 有

$$|z-x_0|^{\alpha}\leqslant r_B^{\alpha}\leqslant r_B\leqslant\frac{1}{2}|y_1-x_0|.$$

根据 Hölder 不等式和引理 3.1, 有

$$\begin{aligned}
\mathrm{IV}_3&\leqslant C\frac{1}{|B|}\int_B\int_{2B}\int_{(2B)^c}\frac{|z-x_0|^{\varepsilon}}{(|x_0-y_1|+|x_0-y_2|)^{2n+\frac{\varepsilon}{\alpha}}}|b_1(y_1)-\lambda_1||b_2(y_2)-\lambda_2|\\
&\quad\times|f_1(y_1)||f_2(y_2)|\mathrm{d}y_1\mathrm{d}y_2\mathrm{d}z\\
&\leqslant Cr_B^{\varepsilon}|B|\Big(\frac{1}{|2B|}\int_{2B}|b_2(y_2)-\lambda_2|^{s'}\mathrm{d}y_2\Big)^{\frac{1}{s'}}\Big(\frac{1}{|2B|}\int_{2B}|f_2(y_2)|^{s}\mathrm{d}y_2\Big)^{\frac{1}{s}}\\
&\quad\times\sum_{k=1}^{\infty}\int_{2^{k+1}B\backslash 2^kB}\frac{|b_1(y_1)-\lambda_1||f_1(y_1)|}{|x_0-y_1|^{2n+\frac{\varepsilon}{\alpha}}}\mathrm{d}y_1\\
&\leqslant Cr_B^{\varepsilon}|B|\|b_2\|_{\mathrm{BMO}}M_s(f_2)(x)r_B^{-n-\frac{\varepsilon}{\alpha}}\\
&\quad\times\sum_{k=1}^{\infty}2^{-k(n+\frac{\varepsilon}{\alpha})}\frac{1}{|2^{k+1}B|}\int_{2^{k+1}B}|b_1(y_1)-\lambda_1||f_1(y_1)|\mathrm{d}y_1\\
&\leqslant Cr_B^{\varepsilon}|B|\|b_2\|_{\mathrm{BMO}}M_s(f_2)(x)r_B^{-n-\frac{\varepsilon}{\alpha}}\|b_1\|_{\mathrm{BMO}}M_s(f_1)(x)\sum_{k=1}^{\infty}k2^{-k(n+\frac{\varepsilon}{\alpha})}\\
&\leqslant C\|b_1\|_{\mathrm{BMO}}\|b_2\|_{\mathrm{BMO}}M_s(f_1)(x)M_s(f_2)(x).
\end{aligned}$$

对 $z\in B$ 和 $y_1,y_1\in(2B)^c$, 有 $|z-x_0|^{\alpha}\leqslant\frac{1}{2}|y_1-x_0|$ 和 $|z-x_0|^{\alpha}\leqslant\frac{1}{2}|y_2-x_0|$. 根据 Hölder 不等式和引理 3.1, 有

$$\begin{aligned}
\mathrm{IV}_4&\leqslant C\frac{1}{|B|}\int_B\int_{(2B)^c}\int_{(2B)^c}\frac{|z-x_0|^{\varepsilon}}{(|x_0-y_1|+|x_0-y_2|)^{2n+\frac{\varepsilon}{\alpha}}}|b_1(y_1)-\lambda_1||b_2(y_2)-\lambda_2|\\
&\quad\times|f_1(y_1)||f_2(y_2)|\mathrm{d}y_1\mathrm{d}y_2\mathrm{d}z
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\leqslant Cr_B^{\varepsilon}\Big(\int_{(2B)^c}\frac{|b_1(y_1)-\lambda_1||f_1(y_1)|}{|x_0-y_1|^{n+\frac{\varepsilon}{2\alpha}}}\mathrm{d}y_1\Big)\Big(\int_{(2B)^c}\frac{|b_2(y_2)-\lambda_2||f_2(y_2)|}{|x_0-y_2|^{n+\frac{\varepsilon}{2\alpha}}}\mathrm{d}y_2\Big)\\
&\leqslant Cr_B^{\varepsilon}r_B^{-\frac{\varepsilon}{2\alpha}}r_B^{-\frac{\varepsilon}{2\alpha}}\sum_{k_1=1}^{\infty}2^{-k_1\frac{\varepsilon}{2\alpha}}\Big(\frac{1}{|2^{k_1+1}B|}\int_{2^{k_1+1}B}|b_1(y_1)-\lambda_1|^{s'}\mathrm{d}y_1\Big)^{\frac{1}{s'}}\\
&\quad\times\Big(\frac{1}{|2^{k_1+1}B|}\int_{2^{k_1+1}B}|f_1(y_1)|^{s}\mathrm{d}y_1\Big)^{\frac{1}{s}}\\
&\quad\times\sum_{k_2=1}^{\infty}2^{-k_2\frac{\varepsilon}{2\alpha}}\Big(\frac{1}{|2^{k_2+1}B|}\int_{2^{k_2+1}B}|b_2(y_2)-\lambda_2|^{s'}\mathrm{d}y_2\Big)^{\frac{1}{s'}}\\
&\quad\times\Big(\frac{1}{|2^{k_2+1}B|}\int_{2^{k_2+1}B}|f_2(y_2)|^{s}\mathrm{d}y_2\Big)^{\frac{1}{s}}\\
&\leqslant Cr_B^{\varepsilon}r_B^{-\frac{\varepsilon}{2\alpha}}r_B^{-\frac{\varepsilon}{2\alpha}}\|b_1\|_{\mathrm{BMO}}\|b_2\|_{\mathrm{BMO}}M_s(f_1)(x)M_s(f_2)(x)\\
&\quad\times\Big(\sum_{k_1=1}^{\infty}k_1 2^{-k_1\frac{\varepsilon}{2\alpha}}\Big)\Big(\sum_{k_2=1}^{\infty}k_2 2^{-k_2\frac{\varepsilon}{2\alpha}}\Big)\\
&\leqslant C\|b_1\|_{\mathrm{BMO}}\|b_2\|_{\mathrm{BMO}}M_s(f_1)(x)M_s(f_2)(x).
\end{aligned}
$$

情况 2 $0<r_B<1$.

由于 $0<\frac{l}{q}<\alpha$, 存在 θ, 满足 $\frac{l}{q}<\theta<\alpha$. 定义 $\widetilde{B}=B(x_0,r_B^{\theta})$. 记

$$
f_1=f_1\chi_{2\widetilde{B}}+f_1\chi_{(2\widetilde{B})^c}:=\widetilde{f_1^1}+\widetilde{f_1^2},\quad f_2=f_2\chi_{2\widetilde{B}}+f_2\chi_{(2\widetilde{B})^c}:=\widetilde{f_2^1}+\widetilde{f_2^2},
$$

则有

$$
\begin{aligned}
&\Big(\frac{1}{|B|}\int_B||T_{\Pi\vec{b}}(\vec{f})(z)|^{\delta}-|\widetilde{C_0}|^{\delta}|\mathrm{d}z\Big)^{\frac{1}{\delta}}\\
\leqslant{}& C\Big(\frac{1}{|B|}\int_B|(b_1(z)-\lambda_1)(b_2(z)-\lambda_2)T(f_1,f_2)(z)|^{\delta}\mathrm{d}z\Big)^{\frac{1}{\delta}}\\
&+C\Big(\frac{1}{|B|}\int_B|(b_1(z)-\lambda_1)T^2_{b_2-\lambda_2}(f_1,f_2)(z)|^{\delta}\mathrm{d}z\Big)^{\frac{1}{\delta}}\\
&+C\Big(\frac{1}{|B|}\int_B|(b_2(z)-\lambda_2)T^1_{b_1-\lambda_1}(f_1,f_2)(z)|^{\delta}\mathrm{d}z\Big)^{\frac{1}{\delta}}\\
&+C\Big(\frac{1}{|B|}\int_B|T((b_1-\lambda_1)f_1,(b_2-\lambda_2)f_2)(z)-\widetilde{\mathrm{C}}_0|^{\delta}\mathrm{d}z\Big)^{\frac{1}{\delta}}\\
:={}&\widetilde{\mathrm{I}}+\widetilde{\mathrm{II}}+\widetilde{\mathrm{III}}+\widetilde{\mathrm{IV}},
\end{aligned}
$$

其中 $\widetilde{\mathrm{C}_0}$ 待定.

与 I, II, III 的估计一样, 有

$$
\begin{aligned}
\widetilde{\mathrm{I}}&\leqslant C\|b_1\|_{\mathrm{BMO}}\|b_2\|_{\mathrm{BMO}}M_{\varepsilon}(T(f_1,f_2))(x),\\
\widetilde{\mathrm{II}}&\leqslant C\|b_1\|_{\mathrm{BMO}}M_{\varepsilon}(T^2_{b_2}(f_1,f_2))(x),\\
\widetilde{\mathrm{III}}&\leqslant C\|b_2\|_{\mathrm{BMO}}M_{\varepsilon}(T^1_{b_1}(f_1,f_2))(x).
\end{aligned}
$$

接下来, 分析 $\widetilde{\mathrm{IV}}$.

选取

$$\begin{aligned}\widetilde{\mathrm{C}_0}&=T((b_1-\lambda_1)\widetilde{f_1^1},(b_2-\lambda_2)\widetilde{f_2^2})(x_0)+T((b_1-\lambda_1)\widetilde{f_1^2},(b_2-\lambda_2)\widetilde{f_2^1})(x_0)\\&\quad+T((b_1-\lambda_1)\widetilde{f_1^2},(b_2-\lambda_2)\widetilde{f_2^2})(x_0)\\&:=\widetilde{\mathrm{C}_1}+\widetilde{\mathrm{C}_2}+\widetilde{\mathrm{C}_3},\end{aligned}$$

则有

$$\begin{aligned}\widetilde{\mathrm{IV}}&\leqslant C\Big(\frac{1}{|B|}\int_B|T((b_1-\lambda_1)\widetilde{f_1^1},(b_2-\lambda_2)\widetilde{f_2^1})(z)|^\delta\mathrm{d}z\Big)^{\frac{1}{\delta}}\\&\quad+C\Big(\frac{1}{|B|}\int_B|T((b_1-\lambda_1)\widetilde{f_1^1},(b_2-\lambda_2)\widetilde{f_2^2})(z)-\widetilde{\mathrm{C}_1}|^\delta\mathrm{d}z\Big)^{\frac{1}{\delta}}\\&\quad+C\Big(\frac{1}{|B|}\int_B|T((b_1-\lambda_1)\widetilde{f_1^2},(b_2-\lambda_2)\widetilde{f_2^1})(z)-\widetilde{\mathrm{C}_2}|^\delta\mathrm{d}z\Big)^{\frac{1}{\delta}}\\&\quad+C\Big(\frac{1}{|B|}\int_B|T((b_1-\lambda_1)\widetilde{f_1^2},(b_2-\lambda_2)\widetilde{f_2^2})(z)-\widetilde{\mathrm{C}_3}|^\delta\mathrm{d}z\Big)^{\frac{1}{\delta}}\\&:=\widetilde{\mathrm{IV}_1}+\widetilde{\mathrm{IV}_2}+\widetilde{\mathrm{IV}_3}+\widetilde{\mathrm{IV}_4}.\end{aligned}$$

由于 $s_0<s<\infty$, 令 $t=\frac{s}{s_0}$, 令 $1<t<\infty$. 记

$$\varepsilon_1=\frac{n}{2}\Big(\frac{\theta}{l}-\frac{1}{q}\Big),$$

则 $\varepsilon_1>0$. 注意到 $0<\delta<q<\infty$, 根据 Hölder 不等式、定义 1.2 的条件 (3)、引理 3.1 和引理 3.2, 可得

$$\begin{aligned}\widetilde{\mathrm{IV}_1}&\leqslant C|B|^{-\frac{1}{q}}\|T((b_1-\lambda_1)\widetilde{f_1^1},(b_2-\lambda_2)\widetilde{f_2^1})\|_{L^{q,\infty}(B)}\\&\leqslant C|B|^{-\frac{1}{q}}|\widetilde{B}|^{\frac{1}{l}}\Big(\frac{1}{|2\widetilde{B}|}\int_{2\widetilde{B}}|b_1(y_1)-\lambda_1|^{l_1}|f_1(y_1)|^{l_1}\mathrm{d}y_1\Big)^{\frac{1}{l_1}}\\&\quad\times\Big(\frac{1}{|2\widetilde{B}|}\int_{2\widetilde{B}}|b_2(y_2)-\lambda_2|^{l_2}|f_2(y_2)|^{l_2}\mathrm{d}y_2\Big)^{\frac{1}{l_2}}\\&\leqslant Cr_B^{n(\frac{\theta}{l}-\frac{1}{q})}\Big(\frac{1}{|2\widetilde{B}|}\int_{2\widetilde{B}}|b_1(y_1)-\lambda_1|^{l_1t'}\mathrm{d}y_1\Big)^{\frac{1}{l_1t'}}\Big(\frac{1}{|2\widetilde{B}|}\int_{2\widetilde{B}}|f_1(y_1)|^{l_1t}\mathrm{d}y_1\Big)^{\frac{1}{l_1t}}\\&\quad\times\Big(\frac{1}{|2B|}\int_{2\widetilde{B}}|b_2(y_2)-\lambda_2|^{l_2t'}\mathrm{d}y_2\Big)^{\frac{1}{l_2t'}}\Big(\frac{1}{|2\widetilde{B}|}\int_{2\widetilde{B}}|f_2(y_2)|^{l_2t}\mathrm{d}y_2\Big)^{\frac{1}{l_2t}}\\&\leqslant Cr_B^{n(\frac{\theta}{l}-\frac{1}{q})}\Big(1+\Big|\ln\frac{2r_B^\theta}{r_B}\Big|\Big)\|b_1\|_{\mathrm{BMO}}M_{l_1t}(f_1)(x)\\&\quad\times\Big(1+\Big|\ln\frac{2r_B^\theta}{r_B}\Big|\Big)\|b_2\|_{\mathrm{BMO}}M_{l_2t}(f_2)(x)\\&\leqslant Cr_B^{n(\frac{\theta}{l}-\frac{1}{q})-2\varepsilon_1}\|b_1\|_{\mathrm{BMO}}\|b_2\|_{\mathrm{BMO}}M_{l_1t}(f_1)(x)M_{l_2t}(f_2)(x)\\&\leqslant C\|b_1\|_{\mathrm{BMO}}\|b_2\|_{\mathrm{BMO}}M_s(f_1)(x)M_s(f_2)(x).\end{aligned}$$

对 $z\in B$ 和 $y_2\in(2\widetilde{B})^c$, 有

$$|z-x_0|^\alpha\leqslant r_B^\alpha\leqslant r_B^\theta\leqslant\frac{1}{2}|y_2-x_0|.$$

记 $\varepsilon_2=\frac{1}{2}(\varepsilon-\frac{\theta\varepsilon}{\alpha})$, 则 $\varepsilon_2>0$. 根据 Hölder 不等式和引理 3.1, 有

$$\begin{aligned}
\widetilde{\mathrm{IV}_2}&\leqslant C\frac{1}{|B|}\int_B\int_{2\widetilde{B}}\int_{(2\widetilde{B})^c}\frac{|z-x_0|^\varepsilon}{(|x_0-y_1|+|x_0-y_2|)^{2n+\frac{\varepsilon}{\alpha}}}|b_1(y_1)-\lambda_1||b_2(y_2)-\lambda_2|\\
&\quad\times|f_1(y_1)||f_2(y_2)|\mathrm{d}y_2\mathrm{d}y_1\mathrm{d}z\\
&\leqslant Cr_B^\varepsilon\Big(\int_{2\widetilde{B}}|b_1(y_1)-\lambda_1||f_1(y_1)|\mathrm{d}y_1\Big)\\
&\quad\times\Big(\int_{(2\widetilde{B})^c}\frac{1}{|x_0-y_2|^{2n+\frac{\varepsilon}{\alpha}}}|b_2(y_2)-\lambda_2||f_2(y_2)|\mathrm{d}y_2\Big)\\
&\leqslant Cr_B^\varepsilon|2\widetilde{B}|\Big(\frac{1}{|2\widetilde{B}|}\int_{2\widetilde{B}}|b_1(y_1)-\lambda_1|^{s'}\mathrm{d}y_1\Big)^{\frac{1}{s'}}\Big(\frac{1}{|2\widetilde{B}|}\int_{2\widetilde{B}}|f_1(y_1)|^s\mathrm{d}y_1\Big)^{\frac{1}{s}}\\
&\quad\times\sum_{k=1}^\infty\int_{2^{k+1}\widetilde{B}\backslash 2^k\widetilde{B}}\frac{|b_2(y_2)-\lambda_2||f_2(y_2)|}{|x_0-y_2|^{2n+\frac{\varepsilon}{\alpha}}}\mathrm{d}y_2\\
&\leqslant Cr_B^{\varepsilon+n\theta}\Big(1+\Big|\ln\frac{2r_B^\theta}{r_B}\Big|\Big)\|b_1\|_{\mathrm{BMO}}M_s(f_1)(x)r_B^{-\theta(n+\frac{\varepsilon}{\alpha})}\\
&\quad\times\sum_{k=1}^\infty2^{-k(n+\frac{\varepsilon}{\alpha})}\Big(\frac{1}{|2^{k+1}\widetilde{B}|}\int_{2^{k+1}\widetilde{B}}|b_2(y_2)-\lambda_2|^{s'}\mathrm{d}y_2\Big)^{\frac{1}{s'}}\\
&\quad\times\Big(\frac{1}{|2^{k+1}\widetilde{B}|}\int_{2^{k+1}\widetilde{B}}|f_2(y_2)|^s\mathrm{d}y_2\Big)^{\frac{1}{s}}\\
&\leqslant Cr_B^{\varepsilon-\frac{\theta\varepsilon}{\alpha}-\varepsilon_2}\|b_2\|_{\mathrm{BMO}}M_s(f_2)(x)\Big(1+\Big|\ln\frac{2r_B^\theta}{r_B}\Big|\Big)\|b_1\|_{\mathrm{BMO}}M_s(f_1)(x)\sum_{k=1}^\infty k2^{-k(n+\frac{\varepsilon}{\alpha})}\\
&\leqslant Cr_B^{\varepsilon-\frac{\theta\varepsilon}{\alpha}-2\varepsilon_2}\|b_1\|_{\mathrm{BMO}}\|b_2\|_{\mathrm{BMO}}M_s(f_1)(x)M_s(f_2)(x)\\
&\leqslant C\|b_1\|_{\mathrm{BMO}}\|b_2\|_{\mathrm{BMO}}M_s(f_1)(x)M_s(f_2)(x).
\end{aligned}$$

类似地, 对 $z\in B$ 和 $y_1\in(2\widetilde{B})^c$, 有 $|z-x_0|^\alpha\leqslant r_B^\alpha\leqslant r_B^\theta\leqslant\frac{1}{2}|y_1-x_0|$. 根据 Hölder 不等式和引理 3.1, 有

$$\begin{aligned}
\widetilde{\mathrm{IV}_3}&\leqslant Cr_B^\varepsilon\Big(\int_{2\widetilde{B}}|b_2(y_2)-\lambda_2||f_2(y_2)|\mathrm{d}y_2\Big)\\
&\quad\times\Big(\int_{(2\widetilde{B})^c}\frac{1}{|x_0-y_1|^{2n+\frac{\varepsilon}{\alpha}}}|b_1(y_1)-\lambda_1||f_1(y_1)|\mathrm{d}y_1\Big)\\
&\leqslant Cr_B^\varepsilon|\widetilde{B}|\Big(\frac{1}{|2\widetilde{B}|}\int_{2\widetilde{B}}|b_2(y_2)-\lambda_2|^{s'}\mathrm{d}y_2\Big)^{\frac{1}{s'}}\Big(\frac{1}{|2\widetilde{B}|}\int_{2\widetilde{B}}|f_2(y_2)|^s\mathrm{d}y_2\Big)^{\frac{1}{s}}\\
&\quad\times\sum_{k=1}^\infty\int_{2^{k+1}\widetilde{B}\backslash 2^k\widetilde{B}}\frac{|b_1(y_1)-\lambda_1||f_1(y_1)|}{|x_0-y_1|^{2n+\frac{\varepsilon}{\alpha}}}\mathrm{d}y_1\\
&\leqslant Cr_B^{\varepsilon+n\theta}\Big(1+\Big|\ln\frac{2r_B^\theta}{r_B}\Big|\Big)\|b_2\|_{\mathrm{BMO}}M_s(f_2)(x)r_B^{-\theta(n+\frac{\varepsilon}{\alpha})}\sum_{k=1}^\infty2^{-k(n+\frac{\varepsilon}{\alpha})}\\
&\quad\times\Big(\frac{1}{|2^{k+1}\widetilde{B}|}\int_{2^{k+1}\widetilde{B}}|b_1(y_1)-\lambda_1|^{s'}\mathrm{d}y_1\Big)^{\frac{1}{s'}}\Big(\frac{1}{|2^{k+1}\widetilde{B}|}\int_{2^{k+1}\widetilde{B}}|f_1(y_1)|^s\mathrm{d}y_1\Big)^{\frac{1}{s}}
\end{aligned}$$

$$\leqslant Cr_B^{\varepsilon-\frac{\theta\varepsilon}{\alpha}-\varepsilon_2}\|b_2\|_{\mathrm{BMO}}M_s(f_2)(x)\Big(1+\Big|\ln\frac{2r_B^\theta}{r_B}\Big|\Big)\|b_1\|_{\mathrm{BMO}}M_s(f_1)(x)\sum_{k=1}^{\infty}k2^{-k(n+\frac{\varepsilon}{\alpha})}$$
$$\leqslant Cr_B^{\varepsilon-\frac{\theta\varepsilon}{\alpha}-2\varepsilon_2}\|b_1\|_{\mathrm{BMO}}\|b_2\|_{\mathrm{BMO}}M_s(f_1)(x)M_s(f_2)(x)$$
$$\leqslant C\|b_1\|_{\mathrm{BMO}}\|b_2\|_{\mathrm{BMO}}M_s(f_1)(x)M_s(f_2)(x).$$

对 $z\in B$ 和 $y_1,y_2\in(2\widetilde{B})^c$, 有 $|z-x_0|^\alpha\leqslant\frac{1}{2}|y_1-x_0|$ 和 $|z-x_0|^\alpha\leqslant\frac{1}{2}|y_2-x_0|$. 根据 Hölder 不等式和引理 3.1, 有

$$\widetilde{\mathrm{IV}_4}\leqslant C\frac{1}{|B|}\int_B\int_{(2\widetilde{B})^c}\int_{(2\widetilde{B})^c}\frac{|z-x_0|^\varepsilon}{(|x_0-y_1|+|x_0-y_2|)^{2n+\frac{\varepsilon}{\alpha}}}|b_1(y_1)-\lambda_1||b_2(y_2)-\lambda_2|$$
$$\times|f_1(y_1)||f_2(y_2)|\mathrm{d}y_1\mathrm{d}y_2\mathrm{d}z$$
$$\leqslant Cr_B^{\varepsilon}\Big(\sum_{k_1=1}^{\infty}\int_{2^{k_1+1}\widetilde{B}\backslash 2^{k_1}\widetilde{B}}\frac{|b_1(y_1)-\lambda_1||f_1(y_1)|}{|x_0-y_1|^{n+\frac{\varepsilon}{2\alpha}}}\mathrm{d}y_1\Big)$$
$$\times\Big(\sum_{k_2=1}^{\infty}\int_{2^{k_2+1}\widetilde{B}\backslash 2^{k_2}\widetilde{B}}\frac{|b_2(y_2)-\lambda_2||f_2(y_2)|}{|x_0-y_2|^{n+\frac{\varepsilon}{2\alpha}}}\mathrm{d}y_2\Big)$$
$$\leqslant Cr_B^{\varepsilon-\frac{\theta\varepsilon}{\alpha}}\Big(1+\Big|\ln\frac{2r_B^\theta}{r_B}\Big|\Big)\|b_1\|_{\mathrm{BMO}}M_s(f_1)(x)\Big(1+\Big|\ln\frac{2r_B^\theta}{r_B}\Big|\Big)\|b_2\|_{\mathrm{BMO}}M_s(f_2)(x)$$
$$\times\Big(\sum_{k_1=1}^{\infty}k_12^{-k_1\frac{\varepsilon}{2\alpha}}\Big)\Big(\sum_{k_2=1}^{\infty}k_22^{-k_2\frac{\varepsilon}{2\alpha}}\Big)$$
$$\leqslant Cr_B^{\varepsilon-\frac{\theta\varepsilon}{\alpha}-2\varepsilon_2}\|b_2\|_{\mathrm{BMO}}M_s(f_2)(x)\|b_1\|_{\mathrm{BMO}}M_s(f_1)(x)$$
$$\leqslant C\|b_1\|_{\mathrm{BMO}}\|b_2\|_{\mathrm{BMO}}M_s(f_1)(x)M_s(f_2)(x).$$

因此,

$$\widetilde{IV}\leqslant C\|b_1\|_{\mathrm{BMO}}\|b_2\|_{\mathrm{BMO}}M_s(f_1)(x)M_s(f_2)(x).$$

结合上述两种情况, 有

$$M_\delta^\sharp(T_{\Pi\vec{b}}(\vec{f}))(x)=M^\sharp(|T_{\Pi\vec{b}}(\vec{f})|^\delta)^{\frac{1}{\delta}}(x)$$
$$\sim\sup_{B\ni x}\inf_{a\in\mathbb{C}}\Big(\frac{1}{|B|}\int_B||T_{\Pi\vec{b}}(\vec{f})(z)|^\delta-a|\mathrm{d}z\Big)^{\frac{1}{\delta}}$$
$$\leqslant C\|b_1\|_{\mathrm{BMO}}\|b_2\|_{\mathrm{BMO}}(M_s(f_1)(x)M_s(f_2)(x)+M_\varepsilon(T(f_1,f_2))(x))$$
$$+C(\|b_1\|_{\mathrm{BMO}}M_\varepsilon(T_{b_2}^2(f_1,f_2))(x)+\|b_2\|_{\mathrm{BMO}}M_\varepsilon(T_{b_1}^1(f_1,f_2))(x)),$$

从而完成定理 2.1 的证明.

定理 2.2 的证明　根据引理 3.3, 有 $w\in A_{\max\{\frac{p_1}{s_0},\cdots,\frac{p_m}{s_0}\}}\subset A_\infty$. 选取 $\delta,\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_m$ 满足 $0<\delta<\varepsilon_1<\varepsilon_2<\cdots<\varepsilon_m<\frac{1}{m}$, 则根据引理 3.4 和引理 3.5, 有

$$\|M_{\varepsilon_j}(T(\vec{f}))\|_{L^p(w)}\leqslant C\|M_{\varepsilon_j}^\sharp(T(\vec{f}))\|_{L^p(w)}\leqslant C\Big\|\prod_{i=1}^m M_{s_0}(f_i)\Big\|_{L^p(w)},\quad j=1,\cdots,m.$$

对于所有的 $i=1,\cdots,m$, 由于 $w_i\in A_{\frac{p_i}{s_0}}$, 则存在 t_i, 使得 $1<t_i<\frac{p_i}{s_0}$, 且 $w_i\in A_{t_i}$. 由于 $s_0<\frac{p_i}{t_i}$, 则存在 s_i, 满足 $s_0<s_i<\frac{p_i}{t_i}<p_i$. 令 $s=\min\limits_{1\leqslant i\leqslant m}s_i$, 则有 $s_0<s<p_i$. 由于 $t_i<\frac{p_i}{s_i}\leqslant\frac{p_i}{s}$, 则有 $w_i\in A_{t_i}\subset A_{\frac{p_i}{s}}$, $i=1,\cdots,m$.

根据定理 2.1, 有

$$\begin{aligned}&\|M_\delta^\sharp(T_{\Pi\vec{b}}(\vec{f}))\|_{L^p(w)}\\&\leqslant C\prod_{j=1}^m\|b_j\|_{\mathrm{BMO}}\Big(\Big\|\prod_{k=1}^m M_s(f_k)\Big\|_{L^p(w)}+\|M_{\varepsilon_1}(T(\vec{f}))\|_{L^p(w)}\Big)\\&\quad+C\sum_{j=1}^{m-1}\sum_{\psi\in C_j^m}\prod_{i=1}^j\|b_{\psi(i)}\|_{\mathrm{BMO}}\|M_{\varepsilon_1}(T_{\Pi\vec{b}_{\psi'}}(\vec{f}))\|_{L^p(w)}\\&\leqslant C\prod_{j=1}^m\|b_j\|_{\mathrm{BMO}}\Big(\Big\|\prod_{k=1}^m M_s(f_k)\Big\|_{L^p(w)}+\|M_{\varepsilon_1}(T(\vec{f}))\|_{L^p(w)}\Big)\\&\quad+C\sum_{j=1}^{m-1}\sum_{\psi\in C_j^m}\prod_{i=1}^j\|b_{\psi(i)}\|_{\mathrm{BMO}}\|M^\sharp_{\varepsilon_1}(T_{\Pi\vec{b}_{\psi'}}(\vec{f}))\|_{L^p(w)}.\end{aligned}$$

为了降低交换子中 BMO 函数的维数, 对 $\|M^\sharp_{\varepsilon_1}(T_{\Pi\vec{b}_{\psi'}}(\vec{f}))\|_{L^p(w)}$ 再次应用定理 2.1.

根据定义 1.5, $\psi=\{\psi(1),\cdots,\psi(j)\}$ 和 $\psi'=\{\psi(j+1),\cdots,\psi(m)\}$, $A_h=\{\psi_1:\psi_1\subset\psi'\}$, 其中 ψ_1 是 ψ' 中由不同元素组成的任意有限子集, $\psi_1'=\psi'-\psi_1$. 根据定理 2.1, 有

$$\begin{aligned}&\|M^\sharp_{\varepsilon_1}(T_{\Pi\vec{b}_{\psi'}}(\vec{f}))\|_{L^p(w)}\\&\leqslant C\prod_{k=j+1}^m\|b_{\psi(k)}\|_{\mathrm{BMO}}\Big(\Big\|\prod_{l=1}^m M_s(f_l)\Big\|_{L^p(w)}+\|M_{\varepsilon_2}(T(\vec{f}))\|_{L^p(w)}\Big)\\&\quad+C\sum_{h=1}^{m-j-1}\sum_{\psi_1\in B_h}\prod_{i=1}^h\|b_{\psi_1(i)}\|_{\mathrm{BMO}}\|M_{\varepsilon_2}(T_{\Pi\vec{b}_{\psi_1'}}(\vec{f}))\|_{L^p(w)}.\end{aligned}$$

将上述公式代入 $\|M_\delta^\sharp(T_{\Pi\vec{b}}(\vec{f}))\|_{L^p(w)}$ 可以降低 BMO 函数的维度.

重复上述过程并运用引理 3.6, 可得

$$\begin{aligned}&\|M_\delta^\sharp(T_{\Pi\vec{b}}(\vec{f}))\|_{L^p(w)}\\&\leqslant C\prod_{j=1}^m\|b_j\|_{\mathrm{BMO}}\Big(B_{m+1}(m,n)\Big\|\prod_{k=1}^m M_s(f_k)\Big\|_{L^p(w)}\\&\quad+B_1(m,n)\|M_{\varepsilon_1}(T(\vec{f}))\|_{L^p(w)}+B_2(m,n)\|M_{\varepsilon_2}(T(\vec{f}))\|_{L^p(w)}\\&\quad+\cdots+B_m(m,n)\|M_{\varepsilon_m}(T(\vec{f}))\|_{L^p(w)}\Big),\end{aligned}$$

其中 $B_1(m,n),B_2(m,n),\cdots,B_{m+1}(m,n)$ 是与 m 和 n 有关的有限实数. 然后根据引理 3.4 和引理 3.5, 有

$$\|T_{\Pi\vec{b}}(\vec{f})\|_{L^p(w)}\leqslant\|M_\delta(T_{\Pi\vec{b}}(\vec{f}))\|_{L^p(w)}\leqslant C\|M_\delta^\sharp(T_{\Pi\vec{b}}(\vec{f}))\|_{L^p(w)}$$

$$
\begin{aligned}
&\leqslant C\prod_{j=1}^{m}\|b_j\|_{\mathrm{BMO}}\Big(B_{m+1}(m,n)\Big\|\prod_{k=1}^{m}M_s(f_k)\Big\|_{L^p(w)}\\
&\quad+B_1(m,n)\|M_{\varepsilon_1}(T(\vec{f}))\|_{L^p(w)}+B_2(m,n)\|M_{\varepsilon_2}(T(\vec{f}))\|_{L^p(w)}\\
&\quad+\cdots+B_m(m,n)\|M_{\varepsilon_m}(T(\vec{f}))\|_{L^p(w)}\Big)\\
&\leqslant C\prod_{j=1}^{m}\|b_j\|_{\mathrm{BMO}}\Big(B_{m+1}(m,n)\Big\|\prod_{k=1}^{m}M_s(f_k)\Big\|_{L^p(w)}\\
&\quad+B_{m+2}(m,n)\Big\|\prod_{j=1}^{m}M_{s_0}(f_j)\Big\|_{L^p(w)}\Big)\\
&\leqslant C\prod_{j=1}^{m}\|b_j\|_{\mathrm{BMO}}\Big\|\prod_{j=1}^{m}M_s(f_j)\Big\|_{L^p(w)}\\
&\leqslant C\prod_{j=1}^{m}\|b_j\|_{\mathrm{BMO}}\prod_{j=1}^{m}\|M_s(f_j)\|_{L^{p_j}(w_j)}\\
&= C\prod_{j=1}^{m}\|b_j\|_{\mathrm{BMO}}\prod_{j=1}^{m}\|M(|f_j|^s)\|^{\frac{1}{s}}_{L^{\frac{p_j}{s}}(w_j)}\\
&\leqslant C\prod_{j=1}^{m}\|b_j\|_{\mathrm{BMO}}\prod_{j=1}^{m}\||f_j|^s\|^{\frac{1}{s}}_{L^{\frac{p_j}{s}}(w_j)}\\
&= C\prod_{j=1}^{m}\|b_j\|_{\mathrm{BMO}}\prod_{j=1}^{m}\|f_j\|_{L^{p_j}(w_j)},
\end{aligned}
$$

从而完成定理 2.2 的证明.

定理 2.3 的证明 设

$$q_0=\min_{1\leqslant j\leqslant m}q_0^j,$$

则 $s_0<q_0<\infty$. 由于 $p(\cdot)\in\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$, 根据引理 3.7, 存在 p_0, 满足 $1<p_0<p_-$, 且

$$\Big(\frac{p(\cdot)}{p_0}\Big)'\in\mathcal{B}(\mathbb{R}^n).$$

取 $\delta,\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_m$ 满足 $0<\delta<\varepsilon_1<\varepsilon_2<\cdots<\varepsilon_m<\frac{1}{m}$. 对任意的 $w\in A_1$, 根据引理 3.4 和引理 3.5, 有

$$
\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^n}|T_{\Pi\vec{b}}(\vec{f})(x)|^{p_0}w(x)\mathrm{d}x\\
&\leqslant\|M_\delta(T_{\Pi\vec{b}}(\vec{f}))\|^{p_0}_{L^{p_0}(w)}\\
&\leqslant C\|M^\sharp_\delta(T_{\Pi\vec{b}}(\vec{f}))\|^{p_0}_{L^{p_0}(w)}\\
&\leqslant C\Big(\prod_{j=1}^{m}\|b_j\|_{\mathrm{BMO}}\Big(B_{m+1}(m,n)\Big\|\prod_{j=1}^{m}M_{q_0}(f_j)\Big\|_{L^{p_0}(w)}\\
&\quad+B_1(m,n)\|M_{\varepsilon_1}(T(\vec{f}))\|_{L^{p_0}(w)}+B_2(m,n)\|M_{\varepsilon_2}(T(\vec{f}))\|_{L^{p_0}(w)}\\
&\quad+\cdots+B_m(m,n)\|M_{\varepsilon_m}(T(\vec{f}))\|_{L^{p_0}(w)}\Big)\Big)^{p_0}
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}
&\leqslant C\Big(\prod_{j=1}^m\|b_j\|_{\mathrm{BMO}}\Big(B_{m+1}(m,n)\Big\|\prod_{j=1}^m M_{q_0}(f_j)\Big\|_{L^{p_0}(w)}\\
&\quad+B_{m+2}(m,n)\Big\|\prod_{j=1}^m M_{s_0}(f_j)\Big\|_{L^{p_0}(w)}\Big)\Big)^{p_0}\\
&\leqslant C\Big(\prod_{j=1}^m\|b_j\|_{\mathrm{BMO}}\Big\|\prod_{j=1}^m M_{q_0^j}(f_j)\Big\|_{L^{p_0}(w)}\Big)^{p_0}\\
&=C\Big(\prod_{j=1}^m\|b_j\|_{\mathrm{BMO}}\Big)^{p_0}\int_{\mathbb{R}^n}\Big(\prod_{j=1}^m M_{q_0^j}(f_j)(x)\Big)^{p_0}w(x)\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

对于所有的具有紧支集 m 重有界可测函数 $\vec{f}=(f_1,\cdots,f_m)$ 成立, 其中 $B_1(m,n),B_2(m,n),\cdots,B_{m+2}(m,n)$ 是与 m 和 n 有关的有限实数.

应用引理 3.8 于

$$(T_{\Pi\vec{b}}(\vec{f}),\prod_{j=1}^m M_{q_0^j}(f_j))\in\mathcal{F},$$

可得

$$\|T_{\Pi\vec{b}}(\vec{f})\|_{L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}\leqslant C\Big\|\prod_{j=1}^m M_{q_0^j}(f_j)\Big\|_{L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}.$$

根据引理 3.9 和引理 3.10, 可得

$$\|T_{\Pi\vec{b}}(\vec{f})\|_{L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}\leqslant C\prod_{j=1}^m\|M_{q_0^j}(f_j)\|_{L^{p_j(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}\leqslant C\prod_{j=1}^m\|f_j\|_{L^{p_j(\cdot)}(\mathbb{R}^n)},$$

从而完成定理 2.3 的证明.

致谢 感谢审稿专家和编辑提出的宝贵意见.

参 考 文 献

[1] Alvarez J, Milman M. H^p continuous properties of Calderón-Zygmund-type operators [J]. *J Math Anal Appl*, 1986, 118:63–79.

[2] Alvarez J, Milman M. Vector valued inequalities for strongly singular Calderón-Zygmund operators [J]. *Rev Mat Iberamericana*, 1986, 2:405–426.

[3] Lin Y. Strongly singular Calderón-Zygmund operator and commutator on Morrey type spaces [J]. *Acta Math Sin*, 2007, 23:2097–2110.

[4] Lin Y, Lu S Z. Strongly singular Calderón-Zygmund operators and their commutators [J]. *Jordan J Math Stat*, 2008, 1:31–49.

[5] Grafakos L, Kalton N. Multilinear Calderón-Zygmund operators on Hardy spaces [J]. *Collect Math*, 2001, 52:169–179.

[6] Grafakos L, Torres R. Multilinear Calderón-Zygmund theory [J]. *Adv Math*, 2002, 165:124–164.

[7] Grafakos L, Torres R. Maximal operator and weighted norm inequalities for multilinear singular integrals [J]. *Indiana Univ Math J*, 2002, 51:1261–1276.

[8] Kenig C, Stein E M. Multilinear estimates and fractional integration [J]. *Math Res Lett*, 1999, 6:1–5.

[9] Duong X T, Grafakos L, Yan L. Multilinear operators with non-smooth kernels and commutators of singular integrals [J]. *Trans Amer Math Soc*, 2010, 362:2089–2113.

[10] Lian J L, Wu H X. A class of commutators for multilinear fractional integrals innon-homogeneous spaces [J]. *J Inequ Appl*, 2008, 2008:373050.

[11] Lin Y, Xiao Y Y. Multilinear singular integral operators with generalized kernels and their multilinear commutators [J]. *Acta Math Sin*, 2017, 33:1443–1462.

[12] Lu G Z, Zhang P. Multilinear Calderón-Zygmund operators with kernels of Dini type and applications [J]. *Nonlinear Anal TMA*, 2014, 107:92–117.

[13] Tang L. Weighed estimates for vector-valued commutators of multilinear operators [J]. *Proc Roy Soc Edinburgh Sect A*, 2008, 138:897–922.

[14] Xue Q. Weighed estimates for the iterated commutators of multilinear maximal and fractional type operators [J]. *Studia Math*, 2013, 217:97–122.

[15] Pérez C, Pradolini G, Torres R H, et al. Endpoint estimates for iterated commutators of multilinear singular integrals [J]. *Bull London Math Soc*, 2014, 46:26–42.

[16] Lin Y, Zhang N. Sharp maximal and weighted estimates for multilinear iterated commutators of multilinear integrals with generalized kernels [J]. *J Inequ Appl*, 2017, 2017:276.

[17] Garca-Cuerva J, Rubio de Francia J L. Weighted norm inequality and related topics [M]//North-Holland Math, Studies, 116. Amsterdam: North-Holland Publishing Co, 1985.

[18] Lerner A K, Ombrosi S, Pére C, et al. New maximal functions and multiple weights for the multilinear Calderón-Zygmund theory [J]. *Adv Math*, 2009, 220:1222–1264.

[19] Grafakos L, Martell J M. Extrapolation of weighted norm inequalities for multivariable operators and applications [J]. *J Geom Anal*, 2004, 14:19–46.

[20] Lin Y, Lu G Z. Sharp maximal and endpoint estimates for multilinear strongly singular Calderón-Zygmund operator and applications [J]. preprint.

[21] Lin Y, Lu G Z, Lu S Z. Sharp maximal estimates for multilinear commutators of multilinear strongly singular Calderón-Zygmund operators and applications [J]. *Forum Math*, 2019, 31:1–18.

[22] Diening L. Maximal function on Musielak-Orlicz spaces and generalaized Lebesgue space [J]. *Bull Sci Math*, 2005, 129:657–700.

[23] Diening L, Harjulehto P, Hästö P, et al. Lebesgue and Sobolev space with variable exponents [M]//Lectuer Notes in Math. Berlin: Springer-Verlag, 2011.

Sharp Maximal and Weighted Estimates for Multilinear Iterated Commutators of Multilinear Strongly Singular Calderón-Zygmund Operators

LIN Yan[1] HAN Yanyan[1]

[1]School of Science, China University of Mining and Technology, Beijing 100083, China. E-mail: linyan@cumtb.edu.cn; hanyanyan_bj@163.com

Abstract In this paper, the authors aim to establish the Sharp maximal estimates for the multilinear iterated commutators generated by BMO functions and multilinear strongly singular Calderón-Zygmund operators. As applications, the boundedness on product of weighted Lebesgue spaces and product of variable exponent Lebesgue spaces can be obtained, respectively.

Keywords Multilinear strongly singular Calderón-Zygmund operator, Multilinear iterated commutator, BMO function, Sharp maximal function

2000 MR Subject Classification 42B20, 42B35

The English translation of this paper will be published in

Chinese Journal of Contemporary Mathematics, Vol. 40 No. 4, 2019

by ALLERTON PRESS, INC., USA