数 学 年 刊 A 辑
2019, 40(4):417–426
DOI: 10.16205/j.cnki.cama.2019.0031

带跳线性随机微分方程的近似能控性

俞励超[1]

提要 研究了 Poisson 随机测度驱动的线性随机微分方程的近似能控性, 通过对偶方法, 得到了近似能控性的一个代数判据: 由方程系数决定的某种不变空间 $\mathbf{V}$ 是退化空间 $\{0\}$. 此外, 还给出了有限步计算验证该判据的程序算法.

关键词 能控性, Poisson 随机测度, 线性二次最优控制, Riccati 方程

MR (2000) 主题分类 60H10, 93B05, 93E03, 93E20

中图法分类 O211.6

文献标志码 A

文章编号 1000-8314(2019)04-0417-10

1 准备工作

设 $(\Omega,\mathcal{F},\{\mathcal{F}_t\}_{t\geqslant 0},P)$ 是完备的带流概率空间. 在这个概率空间中, 存在一个定义在可测集 $\mathcal{E}\subset\mathbb{R}^n$ 上的平稳 Poisson 点过程 $\{k_t\}_{t\geqslant 0}$. 记由点过程 $\{k_t\}_{t\geqslant 0}$ 引入的随机测度为 $\mu(\mathrm{d}t\mathrm{d}e)$, 记 $\lambda(\mathrm{d}e)$ 为相应的特征测度. 进一步, 假设 $\lambda(\mathcal{E})<\infty$, 那么补偿后的鞅测度定义为 $\widetilde{\mu}(\mathrm{d}t\mathrm{d}e):=\mu(\mathrm{d}t\mathrm{d}e)-\lambda(\mathrm{d}e)\mathrm{d}t$. 不妨设随机流 $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geqslant 0}$ 为点过程 $\{k_t\}_{t\geqslant 0}$ 生成自然流的 P-完备化. 有关 Poisson 点过程的定义和 Possion 随机测度的随机积分理论, 可以具体参照文 [1].

下面介绍本文出现的符号:

(1) H: 一个 Hilbert 空间, 其上的范数记为 $\|\cdot\|_H$, 内积记为 $\langle\cdot,\cdot\rangle_H$.

(2) S^n: 所有 $n\times n$ 维对称矩阵集合.

(3) S^n_+: S^n 中所有半正定矩阵组成的子集.

(4) M^*: 算子 M 的对偶算子, 当 M 为矩阵 (或向量) 时, 此记号也表示 M 的转置. 由于转置也能看作是一种对偶算子, 我们不特别区分地使用该记号.

(5) $S^2_{\mathcal{F}}(0,T;H)$: 所有满足 $\|f\|_{S^2_{\mathcal{F}}(0,T;H)}:=\sqrt{E\sup\limits_{0\leqslant t\leqslant T}\|f(t)\|^2_H\mathrm{d}t}<\infty$ 的 H-取值 $\mathcal{F}_t$-适应的 Càdlàg 过程 $f=\{f(t,\omega),(t,\omega)\in[0,T]\times\Omega\}$ 组成的空间.

(6) $L^2_{\mathcal{F}}(0,T;H)$: 所有满足 $\|f\|_{L^2_{\mathcal{F}}(0,T;H)}:=\sqrt{E\int_0^T\|f(t)\|^2_H\mathrm{d}t}<\infty$ 的 H-取值的 $\mathcal{F}_t$-适应的 Càdlàg 过程 $f=\{f(t,\omega),(t,\omega)\in[0,T]\times\Omega\}$ 组成的空间.

(7) $M^2_{\mathcal{F}}(0,T;H)$:$L^2_{\mathcal{F}}(0,T;H)$ 中可料过程组成的线性子空间.

(8) $L^2(\Omega,\mathcal{F}_T,H)$: 所有满足 $\|\xi\|_{L^2(\Omega,\mathcal{F}_T,H)}:=\sqrt{E\|\xi\|^2_H}<\infty$ 的 H-取值的 $\mathcal{F}_T$- 可测随机变量组成的空间.

(9) $L^2(\mathcal{E};H)$: 所有定义在可测空间 $(\mathcal{E},\mathcal{B}(\mathcal{E});\lambda)$ 上, 且满足

$$\|\alpha\|_{L^2(\mathcal{E};H)}:=\sqrt{\int_0^T\|\alpha(e)\|^2_H\lambda(\mathrm{d}e)}<\infty$$

本文 2018 年 3 月 4 日收到, 2019 年 2 月 18 日收到修改稿.

[1]复旦大学数学科学学院, 上海 200433. E-mail: 12110180057@fudan.edu.cn

的 H- 取值的可测函数 $\alpha=\{\alpha(e),e\in\mathcal{E}\}$ 组成的空间.

本文我们考虑如下受控系统:

$$\begin{cases}\mathrm{d}X_t=(AX_t+Bu_t)\mathrm{d}t+\displaystyle\int_{\mathcal{E}}[C(e)X_{t-}+D(e)u_t]\,\widetilde{\mu}(\mathrm{d}t\mathrm{d}e),\\ X_0=x\in\mathbb{R}^n,\end{cases}\tag{1.1}$$

其中 $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$, $B\in\mathbb{R}^{n\times m}$, $C\in L^2(\mathcal{E};\mathbb{R}^{n\times n})$, $D\in L^2(\mathcal{E};\mathbb{R}^{n\times m})$. 容许控制集 $\mathcal{U}_{ad}=M^2_{\mathcal{F}}(0,T;\mathbb{R}^m)$. 对于任一容许控制, 由文 [1] 知方程存在唯一解 $X\in S^2_{\mathcal{F}}(0,T;\mathbb{R}^n)$.

对于由 Brown 运动驱动的系统, Peng[2]刻画了精确能控性, 文 [2] 首先引入了精确终端能控的概念, 接着证明了精确终端能控的充要条件是扩散项中控制的系数 (矩阵 D) 是满秩的. 对于这一类系统的近似能控性, Buckdahn 等人[3](扩散项中不含控制的情形) 和 Goreac[4] (扩散项中含控制并由一维 Brown 运动驱动的情形) 给出了代数刻画. 而后, Goreac[5]研究了带跳情形 (扩散项中不含有控制). 本文将上述结果推广到更一般的情形: 系统由跳过程驱动并且扩散项中含有控制. 事实上, 通过本文类似的方法, 我们能进一步将结果推广到系统由半鞅过程驱动的情形.

在叙述本文主要结论之前, 先回顾近似能控和近似零能控的概念.

定义 1.1 称系统 (1.1) 是近似能控的, 当且仅当对于任意初始值 $x\in\mathbb{R}^n$, 任意给定的有限时间 $T>0$, 任意终端值 $\xi\in L^2(\Omega,\mathcal{F}_T,\mathbb{R}^n)$, 以及任意 $\varepsilon>0$, 存在一个容许控制 u, 使得 $E|X_T^{x,u}-\xi|^2\leqslant\varepsilon$; 若上述条件中的终端值特定地取为 $\xi=0$, 则称系统 (1.1) 是近似零能控的.

在确定情形下, 线性系统能控和零能控等价是一个众所周知的结论, 但在随机框架下, 这并不显然. 事实上, 系统 (1.1) 并不一定精确终端能控 (即对任意终端值 $\xi\in L^2(\Omega,\mathcal{F}_T,\mathbb{R}^n)$, 存在一个初值 $x\in\mathbb{R}^n$ 和一个容许控制 u, 使得 $X_T^{x,u}=\xi$, P-a.s.). 因此, 我们不能指望由简单叠加得到两者的等价性. 借助文 [3] 中发展起来的构造辅助 Riccati 方程的方法, 我们证明了系统 (1.1) 近似能控和近似零能控等价, 这是本文关键的一步. 本文构造的辅助 Riccati 方程与文 [3–4] 以及文 [5] 均有所不同. 进一步, 我们证明系统 (1.1) 的近似能控性有以下代数判据: 由方程系数决定的某个特殊定义的不变子空间 $\mathbf{V}$ 是退化空间 $\{0\}$. 更详细地, 本文的主要结论叙述如下.

定理 1.1 系统 (1.1) 的近似能控性与近似零能控性等价, 且进一步等价于以下代数判据, $\mathbb{R}^n$ 中满足下列条件

$$\begin{pmatrix}A^*\\B^*\end{pmatrix}V\subset\begin{pmatrix}V\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\mathcal{C}^*\\\mathcal{D}^*\end{pmatrix}L^2(\mathcal{E};V)\tag{1.2}$$

的最大线性子空间 V 为退化空间 $\{0\}$.

这里, 满足定理条件 (1.2) 的空间 V 能看做是某种特殊定义的不变空间. 我们对定理中出现的符号作以下解释. 给定方程中的系数 $D\in L^2(\mathcal{E};\mathbb{R}^{n\times m})$, 引入一个算子

$$\mathcal{D}:\mathbb{R}^m\to L^2(\mathcal{E};\mathbb{R}^n),\quad (\mathcal{D}\xi)(e)=D(e)\xi,\quad \forall\xi\in\mathbb{R}^m,$$

同时能得到对偶算子

$$\mathcal{D}^*:L^2(\mathcal{E};\mathbb{R}^n)\to\mathbb{R}^m,\quad \mathcal{D}^*\alpha=\int_{\mathcal{E}}D^*(e)\alpha(e)\lambda(\mathrm{d}e),\quad\forall\alpha\in L^2(\mathcal{E};\mathbb{R}^n).$$

(相应地, 给定 $C\in L^2(\mathcal{E};\mathbb{R}^{n\times n})$, 定义算子 $\mathcal{C}$ 和其对偶算子 $\mathcal{C}^*$:$(\mathcal{C}\xi)(e)=C(e)\xi$, $\forall\xi\in\mathbb{R}^n$, $\mathcal{C}^*\alpha=\int_{\mathcal{E}}C^*(e)\alpha(e)\lambda(\mathrm{d}e)$, $\forall\alpha\in L^2(\mathcal{E};\mathbb{R}^n)$).

条件 (1.2) 中的几个空间定义如下:

$$\begin{pmatrix} A^* \\ B^* \end{pmatrix} V := \left\{ \begin{pmatrix} A^*\xi \\ B^*\xi \end{pmatrix} \;\Big|\; \xi \in V \right\},$$

$$\begin{pmatrix} V \\ 0 \end{pmatrix} := \left\{ \begin{pmatrix} \xi \\ 0_{m\times 1} \end{pmatrix} \;\Big|\; \xi \in V \right\},$$

$$\begin{pmatrix} \mathcal{C}^* \\ \mathcal{D}^* \end{pmatrix} L^2(\mathcal{E}; V) := \left\{ \begin{pmatrix} \mathcal{C}^*\alpha \\ \mathcal{D}^*\alpha \end{pmatrix} \;\Big|\; \alpha \in L^2(\mathcal{E}; V) \right\},$$

其中 A^*, B^* 表示转置矩阵, $\mathcal{C}^*, \mathcal{D}^*$ 表示对偶算子.

根据以上定理, $\mathbb{R}^n$ 中满足条件 (1.2) 的最大子空间 $\mathbf{V}$ 与系统的近似能控性密切相关. 为了检验 $\mathbf{V}$ 是否为退化空间, 本文给出了有限步验证的程序算法. 在本文的结尾, 两个例子具体演示了该验证算法, 并借此讨论了扩散项中的控制对于系统 (1.1) 近似能控所起的作用.

2　对偶方程

考虑下列倒向方程

$$\begin{cases} \mathrm{d}Y_t = -(A^*Y_t + \mathcal{C}^*Z_t)\mathrm{d}t + \displaystyle\int_{\mathcal{E}} Z_t(e)\, \widetilde{\mu}(\mathrm{d}t\mathrm{d}e), \\ Y_T = \eta \in L^2(\Omega, \mathcal{F}_T, \mathbb{R}^n). \end{cases} \tag{2.1}$$

上述方程存在唯一解 $(Y, Z) \in S^2_{\mathcal{F}}(0, T; \mathbb{R}^n) \times M^2_{\mathcal{F}}(0, T; L^2(\mathcal{E}; \mathbb{R}^n))$. 关于由 Poisson 随机测度驱动的正向或倒向随机微分方程, 更多细节可以参照文 [6–7].

下列命题刻画了原方程 (1.1) 能控性和对偶方程 (2.1) 能观性间的关系.

命题 2.1　系统 (1.1) 是近似零能控的, 当且仅当对任意 $T > 0$, 方程 (2.1) 满足下列条件: 若 (Y, Z) 满足 $B^*Y_t + \mathcal{D}^*Z_t = 0$, a.e. $t \in [0, T]$, P-a.s., 则解的初值 $Y_0 = 0$.

系统 (1.1) 是近似能控的, 当且仅当对任意 $T > 0$, 方程 (2.1) 满足下列条件: 若 (Y, Z) 满足 $B^*Y_t + \mathcal{D}^*Z_t = 0$, a.e. $t \in [0, T]$, P-a.s., 则解为 0, 即 $Y_t = 0, P$-a.s., $\forall t \in [0, T]$.

证　由 Itô公式, 有

$$E\langle X_T^{x,u}, \eta\rangle = \langle x, Y_0\rangle + E\int_0^T \langle u_t, B^*Y_t + \mathcal{D}^*Z_t\rangle \mathrm{d}t. \tag{2.2}$$

上式对任意 $T > 0, \eta \in L^2(\Omega, \mathcal{F}_T, \mathbb{R}^n), x \in \mathbb{R}^n, u \in \mathcal{U}_{ad}$ 均成立. 记 Y 的左极限过程为 $\widetilde{Y}(\widetilde{Y}_t := Y_{t-})$, 易知 $Y = \widetilde{Y}$, a.e. $t \in [0, T]$, P-a.s.

我们引入两个连续线性算子:

$$M_T : \mathcal{U}_{ad} \to L^2(\Omega, \mathcal{F}_T, \mathbb{R}^n), \quad M_T(u) = X_T^{0,u}, \quad u \in \mathcal{U}_{ad},$$

$$L_T : \mathbb{R}^n \to L^2(\Omega, \mathcal{F}_T, \mathbb{R}^n), \quad L_T(x) = X_T^{x,0}, \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

那么, 系统 (1.1) 近似能控等价于对任意 $T > 0$, M_T 的像集 $\mathrm{Im}(M_T)$ 在 $L^2(\Omega, \mathcal{F}_T, \mathbb{R}^n)$ 中稠密, 或者等价地, $(\mathrm{Im}(M_T))^\perp = \mathrm{Ker}(M_T^*) = \{0\}$.　对关系式 (2.2) 取 $x = 0$, $Y_T = \eta \in L^2(\Omega, \mathcal{F}_T, \mathbb{R}^n)$, 有

$$\langle M_T(u), \eta\rangle_{L^2(\Omega,\mathcal{F}_T,\mathbb{R}^n)} = \langle u, B^*\widetilde{Y}_\cdot + \mathcal{D}^*Z_\cdot\rangle_{M^2_{\mathcal{F}}(0,T;L^2(\mathcal{E};\mathbb{R}^n))},$$

进而 $M_T^*\eta = B^*\widetilde{Y}_\cdot + \mathcal{D}^*Z_\cdot$. 那么,$\mathrm{Ker}(M_T^*) = \{0\}$ 等价于以下条件: 若 $B^*\widetilde{Y} + \mathcal{D}^*Z = 0$, a.e. $t \in [0,T]$, P-a.s., 则有 $\eta = 0 \Leftrightarrow Y_t^{T,\eta} = 0$, P-a.s. $\forall t \in [0,T]$. 定理第二部分得证.

注意到 $X_T^{x,u} = M_T(u) - L_T(-x)$, 系统 (1.1) 近似零能控等价于对任意 $T > 0$, $L_T[\mathbb{R}^n] \subset \overline{M_T(\mathcal{U}_{ad})}$, 或者等价地, $\mathrm{Ker}[M_T^*] \subset \mathrm{Ker}[L_T^*]$. 这次对关系式 (2.2) 取 $u = 0$, 则有 $L_T^*\eta = Y_0^{T,\eta}$. $\mathrm{Ker}[M_T^*] \subset \mathrm{Ker}[L_T^*]$ 等价于以下条件: 若 $B^*\widetilde{Y}_\cdot + \mathcal{D}^*Z_\cdot = 0$, a.e. $t \in [0,T]$, P-a.s.($M_T^*\eta = 0$), 则 $L_T^*\eta = Y_0^{T,\eta} = 0$, 定理的第一部分得证.

现在将 (2.1) 看成一个正向的受控系统:

$$\begin{cases} \mathrm{d}Y_t = -(A^*Y_t + \mathcal{C}^*Z_t)\mathrm{d}t + \displaystyle\int_{\mathcal{E}} Z_t(e)\widetilde{\mu}(\mathrm{d}t\mathrm{d}e), \\ Y_0 = \theta. \end{cases} \tag{2.3}$$

对任意 $T > 0, \theta \in \mathbb{R}^n, Z \in M_{\mathcal{F}}^2(0,T;L^2(\mathcal{E};\mathbb{R}^n))$, 上述正向方程存在唯一解 $Y, E\sup\limits_{t\in[0,T]}|Y_t|^2 < +\infty$. 记解为 $Y_\cdot^{\theta,Z}$.

由方程 (2.1) 解的存在唯一性可知, 对任意 $T > 0$, $\eta \in L^2(\Omega,\mathcal{F}_T,\mathbb{R}^n)$, 存在唯一 $\theta \in \mathbb{R}^n$ 和唯一 $Z \in M_{\mathcal{F}}^2(0,T;L^2(\mathcal{E};\mathbb{R}^n))$, 使得 $Y_T^{\theta,Z} = \eta$.

于是命题 2.1 可以重新叙述为以下形式.

推论 2.1 系统 (1.1) 是近似零能控的, 当且仅当对任意 $T > 0$, 若存在初值 $\theta \in \mathbb{R}^n$ 和控制 $Z \in M_{\mathcal{F}}^2(0,T;L^2(\mathcal{E};\mathbb{R}^n))$, 使方程 (2.3) 的解 $Y_\cdot^{\theta,Z}$ 满足 $B^*Y_t^{\theta,Z} + \mathcal{D}^*Z_t = 0$, a.e. $t \in [0,T]$, P-a.s., 则有 $\theta = 0$.

系统 (1.1) 是近似能控的, 当且仅当对任意 $T > 0$, 若存在初值 $\theta \in \mathbb{R}^n$ 和控制 $Z \in M_{\mathcal{F}}^2(0,T;L^2(\mathcal{E};\mathbb{R}^n))$, 使方程 (2.3) 的解 $Y_\cdot^{\theta,Z}$ 满足 $B^*Y_t^{\theta,Z} + \mathcal{D}^*Z_t = 0$, a.e. $t \in [0,T]$, P-a.s., 则有 $Y_t^{\theta,Z} = 0, P$-a.s.,$\forall t \in [0,T]$.

由上述推论的启发, 给定 $B \in \mathbb{R}^{n\times m}$, $D \in L^2(\mathcal{E};\mathbb{R}^{n\times m})$, 我们引入一个空间 $\mathbf{V}$.

$$\begin{aligned}\mathbf{V} \coloneqq \Big\{&\theta \in \mathbb{R}^n \mid \exists T > 0,\ Z \in M_{\mathcal{F}}^2(0,T;L^2(\mathcal{E};\mathbb{R}^n)),\\ &\text{s.t., } B^*Y_t^{\theta,Z} + \mathcal{D}^*Z_t = 0,\ \text{a.e. } t \in [0,T],\ P\text{-a.s.},\ \ Y_\cdot^{\theta,Z}\ \text{满足方程(2.3)}\Big\},\end{aligned} \tag{2.4}$$

易见 $\mathbf{V}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 的线性子空间. 由 $\mathbf{V}$ 的定义和推论 2.1 的第一条论述可知, 系统 (1.1) 是近似零能控的, 当且仅当 $\mathbf{V} = \{0\}$. 事实上, 由后文的论述可知, 上述条件进一步等价于系统 (1.1) 近似能控, 那么系统 (1.1) 的近似能控性完全由空间 $\mathbf{V}$ 表征. 下一小节, 我们将具体刻画空间 $\mathbf{V}$.

3 LQ 最优控制方法

我们将某个矩阵 $M \in \mathbb{R}^{n\times n}$ 看作 $L^2(\mathcal{E};\mathbb{R}^n)$ 到其自身的算子, 满足 $(M\alpha)(e) = M(\alpha(e))$, $\forall\alpha \in L^2(\mathcal{E};\mathbb{R}^n)$. 那么给定矩阵 $P \in S_+^n$ 和正整数 N, 我们可以引入两个算子.

从 $\mathbb{R}^n$ 映射到 $L^2(\mathcal{E};\mathbb{R}^n)$ 的算子 $H_{P,N} = -\mathcal{C}P + N\mathcal{D}B^*$, 和从 $L^2(\mathcal{E};\mathbb{R}^n)$ 到其自身的算子 $\Lambda_{P,N} = \mathrm{I} + P + N\mathcal{D}\mathcal{D}^*$.

于是我们得到其对偶算子:

从 $L^2(\mathcal{E};\mathbb{R}^n)$ 映射到 $\mathbb{R}^n$ 的算子 $H_{P,N}^* = -P\mathcal{C}^* + NB\mathcal{D}^*$, 和从 $L^2(\mathcal{E};\mathbb{R}^n)$ 到其自身的算子 $\Lambda_{P,N}^* = \Lambda_{P,N}$. 易见 $\Lambda_{P,N}$ 是可逆的.

为了刻画空间 $\mathbf{V}$, 我们考虑下列带有参数 N 的 Riccati 方程:

$$\begin{cases}\dot{P_N} = -P_N A^* - AP + NBB^* - H^*_{P_N,N}\Lambda^{-1}_{P_N,N}H_{P_N,N}, \\ P_N(0) = 0.\end{cases} \tag{3.1}$$

下面命题和 Brown 运动驱动的情形类似, 我们只给出证明主要思路, 其余细节可以参照文 [8] 中的方法.

命题 3.1 Riccati 方程 (3.1) 存在唯一解.

证 为了证明解存在, 我们构造以下迭代格式.

对于 $i = 0, 1, 2, \cdots$, 令

$$\begin{aligned}&\Phi_0 = 0, \\ &\Gamma_i = -\Lambda^{-1}_{\Phi_i,N}H_{\Phi_i,N}, \\ &\widehat{A}_i = -A^* - \mathcal{C}^*\Gamma_i, \qquad \widehat{C} = -\Gamma_i, \\ &\widehat{Q}_i = N(\Gamma_i^*\mathcal{D} + B)(B^* + \mathcal{D}^*\Gamma_i) + \Gamma_i^*\Gamma_i,\end{aligned}$$

并且令 Φ_{i+1} 是下列方程

$$\begin{cases}-\dot{\Phi}_{i+1} = \Phi_i\widehat{A}_i + \widehat{A}_i^*\Phi_{i+1} + \widehat{C}_i^*\Phi_{i+1}\widehat{C}_i + \widehat{Q}_i, \\ \Phi_{i+1}(T) = 0\end{cases} \tag{3.2}$$

的解.

由文 [8] 中第 6 章定理 7.2 相同的方法, $\{\Phi_i\}$ 是 $C([0,T]; S^n_+)$ 中的一列递减序列, 所以存在极限点, 记为 Φ. 最后, $\Phi(T-\cdot)$ 是方程 (3.1) 的解, 解的唯一性由对应 LQ 最优控制问题值函数的唯一性得到. 证毕.

在 $[t,T]$ 上对 $\langle P_N(T-\cdot)Y^{\theta,Z}_\cdot, Y^{\theta,Z}_\cdot\rangle$ 应用 Itô 公式, 有

$$\begin{aligned}&E\langle P_N(T-t)Y^{\theta,Z}_t, Y^{\theta,Z}_t\rangle \\ &= E\int_t^T\int_{\mathcal{E}}|Z_s(e)|^2\lambda(\mathrm{d}e)\mathrm{d}s + NE\int_t^T|B^*Y^{\theta,Z}_s + \mathcal{D}^*Z_s|^2\mathrm{d}s \\ &\quad - E\int_t^T\|\Lambda_s^{\frac{1}{2}}[\Lambda_s^{-1}(\mathcal{C}P_N(T-s) - N\mathcal{D}B^*)Y^{\theta,Z}_s - Z_s]\|^2_{L^2(\mathcal{E};\mathbb{R}^n)}\mathrm{d}s,\end{aligned} \tag{3.3}$$

其中 $\Lambda_s = \mathrm{I} + N\mathcal{D}\mathcal{D}^* + P_N(T-s)$.

由 (3.3) 知, 对任意 $\theta \in \mathbb{R}^n$ 和 $Z \in M^2_{\mathcal{F}}(0,T; L^2(\mathcal{E};\mathbb{R}^n))$, 有

$$\langle P_N(T)\theta,\theta\rangle \leqslant E\int_0^T\int_{\mathcal{E}}|Z_s(e)|^2\lambda(\mathrm{d}e)\mathrm{d}s + NE\int_0^T|B^*Y^{\theta,Z}_s + \mathcal{D}^*Z_s|^2\mathrm{d}s \tag{3.4}$$

成立, 并且对任意 $\theta \in \mathbb{R}^n$, 存在一个最优控制 $\overline{Z} \in M^2_{\mathcal{F}}(0,T; L^2(\mathcal{E};\mathbb{R}^n))$, 使得

$$\langle P_N(T)\theta,\theta\rangle = E\int_0^T\int_{\mathcal{E}}|\overline{Z}_s(e)|^2\lambda(\mathrm{d}e)\mathrm{d}s + NE\int_0^T|B^*Y^{\theta,\overline{Z}}_s + \mathcal{D}^*\overline{Z}_s|^2\mathrm{d}s$$

等号成立.

命题 3.2 空间 $\mathbf{V}$ 有如下表示:

$$\{\theta\in\mathbb{R}^n \mid \exists T > 0: \lim_{N\to\infty}\langle P_N(T)\theta,\theta\rangle < +\infty\}. \tag{3.5}$$

证 根据 $\mathbf{V}$ 的定义, 对于初值 $\theta\in\mathbf{V}$, 存在 $T>0$ 和容许控制 Z, 使得 $B^*Y_t^{\theta,Z}+\mathcal{D}^*Z_t=0$, a.e. $t\in[0,T]$, P-a.s., 则由式 (3.4), 有

$$\langle P_N(T)\theta,\theta\rangle\leqslant E\int_0^T\int_{\mathcal{E}}|Z_s(e)|^2\lambda(\mathrm{d}e)\mathrm{d}s,\quad \forall N>0.$$

另一方面, 假设 $\langle P_N(T)\theta,\theta\rangle\leqslant c<+\infty$, $\forall\ N\geqslant 1$. 对任意 $N\geqslant 1$, 取最优控制 $\overline{Z}_N$, 则有

$$\langle P_N(T)\theta,\theta\rangle=E\int_0^T\int_{\mathcal{E}}|(\overline{Z}_N)_s(e)|^2\lambda(\mathrm{d}e)\mathrm{d}s+NE\int_0^T|B^*Y_s^{\theta,\overline{Z}_N}+\mathcal{D}^*\overline{Z}_N(s)|^2\mathrm{d}s.$$

那么控制列 $\{\overline{Z}_N:N\in\mathbb{N}\}$ 在 $M_{\mathcal{F}}^2(0,T;L^2(\mathcal{E};\mathbb{R}^n))$ 中有界, 故在该空间中有弱收敛子列, 不妨将该子列仍记为 $\{\overline{Z}_N:N\in\mathbb{N}\}$. 设 $\overline{Z}_N$ 弱收敛于 $\overline{Z}$. 方程 (2.3) 关于 Z 是仿射的, 则 $Y_\cdot^{\overline{Z}_N,\theta}$ 弱收敛到 $Y_\cdot^{\overline{Z},\theta}$. 由上一步等式, 得

$$\langle P_N(T)\theta,\theta\rangle\geqslant NE\int_0^T|B^*Y_s^{\theta,\overline{Z}_N}+\mathcal{D}^*\overline{Z}_N(s)|^2\mathrm{d}s.$$

再由 $L_{\mathcal{F}}^2(0,T;\mathbb{R}^n)$-范数是关于弱拓扑下半连续的, 有

$$\begin{aligned}&E\int_0^T|B^*Y_s^{\theta,\overline{Z}}+D^*\overline{Z}_s|^2\mathrm{d}s\\&\leqslant\liminf_{N\to\infty}E\int_0^T|B^*Y_s^{\theta,\overline{Z}_N}+D^*\overline{Z}_N(s)|^2\mathrm{d}s\\&\leqslant\liminf_{N\to\infty}\frac{c}{N}=0.\end{aligned}$$

即有 $B^*Y_t^{\theta,\overline{Z}}+D^*\overline{Z}_t=0$, a.e. $t\in[0,T]$, P-a.s.

注 3.1 如果初值 θ 在 $\mathbf{V}$ 中, 则根据定义, 存在 $T>0$ 和控制 $Z\in M_{\mathcal{F}}^2(0,T;L^2(\mathcal{E};\mathbb{R}^n))$, 满足 $B^*Y_t^{\theta,Z}+\mathcal{D}^*Z_t=0$, a.e. $t\in[0,T]$, P-a.s. 由 (3.3), 有

$$E\langle P_N(T-t)Y_t^{\theta,Z},Y_t^{\theta,Z}\rangle\leqslant E\int_0^T\int_{\mathcal{E}}|Z_s(e)|^2\lambda(\mathrm{d}e)\mathrm{d}s,\quad \forall N\geqslant 1.$$

由单调收敛定理,

$$E\lim_{N\to\infty}\langle P_N(T-t)Y_t^{\theta,Z},Y_t^{\theta,Z}\rangle<+\infty.$$

那么, 由命题 3.2 知 $Y_t^{\theta,Z}\in\mathbf{V}$, a.e. $t\in[0,T]$, P-a.s..

下列定理说明了系统的近似能控性与空间 $\mathbf{V}$ 间的联系.

命题 3.3 下列 3 条论述等价:

(1) 系统 (1.1) 是近似能控的.

(2) 系统 (1.1) 是近似零能控的.

(3) 定义式 (2.4) 给出的空间 $\mathbf{V}$ 为 $\{0\}$.

证 由推论 2.1 和空间 $\mathbf{V}$ 的定义知, 后两条论述等价. 由能控性定义, 第一条论述自然蕴含第二条论述. 接下来只需证明第三条论述蕴含第一条论述即可.

假设第三条论述成立, 即 $\mathbf{V}=\{0\}$. 若有初值 θ 和控制 Z, 使得 $B^*Y_t^{\theta,Z}+\mathcal{D}^*Z_t=0$, a.e. $t\in[0,T]$, P-a.s., 则由 $\mathbf{V}$ 的定义有 $\theta\in\mathbf{V}$. 由注 3.1 知 $Y_t^{\theta,Z}\in\mathbf{V}$, P-a.s., $\forall t\in[0,T]$, 那么 $Y_t^{\theta,Z}=0$, P-a.s., $\forall t\in[0,T]$. 对照推论 2.1 马上可以得到系统是近似能控的, 即由第三条论述能推出第一条论述. 定理得证.

4 代数判据

有了先前的准备, 这一小节我们将得到系统近似能控的代数判据. 首先, 我们给出空间 $\mathbf{V}$ 的一个具体刻画.

命题 4.1 定义 (2.4) 中的空间 $\mathbf{V}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中满足以下关系

$$\begin{pmatrix} A^* \\ B^* \end{pmatrix} V \subset \begin{pmatrix} V \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathcal{C}^* \\ \mathcal{D}^* \end{pmatrix} L^2(\mathcal{E}; V) \tag{4.1}$$

的最大线性子空间.

注 4.1 容易验证上述命题中的条件 (4.1) 有以下两个等价论述:

(1) 对于任意的 $\theta \in V$, 存在一个元素 $\omega \in L^2(\mathcal{E}; V)$, 使得

$$A^*\theta + \mathcal{C}^*\omega \in V,$$
$$B^*\theta + \mathcal{D}^*\omega = 0.$$

(2) 存在一个从 $\mathbb{R}^n$ 到 $L^2(\mathcal{E}; V)$ 的算子 K, 使得 $KV \subset L^2(\mathcal{E}; V)$, 且

$$\begin{pmatrix} A^* + \mathcal{C}^*K \\ B^* + \mathcal{D}^*K \end{pmatrix} V \subset \begin{pmatrix} V \\ 0 \end{pmatrix}.$$

命题 4.1 的证明 假设 $\mathbb{R}^n$ 中某个线性子空间 $V \subset \mathbb{R}^n$ 满足条件 (4.1), 由注 4.1 的第二条论述, 存在一个算子 K, 使得 $KV \subset L^2(\mathcal{E}; V)$, 且

$$\begin{pmatrix} A^* + \mathcal{C}^*K \\ B^* + \mathcal{D}^*K \end{pmatrix} V \subset \begin{pmatrix} V \\ 0 \end{pmatrix}.$$

那么对于任意的 $\theta \in V$, 考虑以下方程

$$\begin{cases} \mathrm{d}\widetilde{Y}_t = -(A^* + \mathcal{C}^*K)\widetilde{Y}_t \mathrm{d}t + \int_{\mathcal{E}} (K\widetilde{Y}_{t-})(e)\widetilde{\mu}(\mathrm{d}t\mathrm{d}e), \\ \widetilde{Y}_0 = \theta, \end{cases}$$

易见解 $\widetilde{Y}$ 取值在空间 V 中. 如果对于方程 (2.3) 我们取反馈形式控制 $Z_t = K\widetilde{Y}_{t-}$, 则有 $Y_t^{\theta,Z} = \widetilde{Y}_t$ 且 $B^*Y_t^{\theta,Z} + \mathcal{D}^*Z_t = 0$, a.e. $t \in [0,T]$, P-a.s.. 那么 $\theta \in \mathbf{V}$, 进而 $\mathbb{R}^n$ 中任何满足定理代数条件的子空间 V 都是 $\mathbf{V}$ 的子空间.

另一方面, 对于任意的 $\theta \in \mathbf{V}$, 存在 $T > 0, Z \in M^2_{\mathcal{F}}(0,T; L^2(\mathcal{E}; \mathbb{R}^n))$, 满足 $B^*Y_t^{\theta,Z} + \mathcal{D}^*Z_t = 0$, a.e. $t \in [0,T]$, P-a.s. 由注 3.1, 得到 $Y_t^{\theta,Z} \in \mathbf{V}$, P-a.s. $\forall t \in [0,T]$.

记 $\Pi_{\mathbf{V}^\perp}$ 为对空间 $\mathbf{V}^\perp$ 的投影算子, 那么

$$\begin{cases} \mathrm{d}\Pi_{\mathbf{V}^\perp} Y_t^{\theta,Z} = -\Pi_{\mathbf{V}^\perp}(A^*Y_t^{\theta,Z} + \mathcal{C}^*Z_t)\mathrm{d}t + \Pi_{\mathbf{V}^\perp} \int_{\mathcal{E}} Z_t(e)\widetilde{\mu}(\mathrm{d}t\mathrm{d}e), \\ Y_0 = \theta \in \mathbf{V}. \end{cases}$$

由 $\Pi_{\mathbf{V}^\perp} Y_t^{\theta,Z} = 0, P$-a.s. $\forall t \in [0,T]$, 在 $[0,T]$ 上计算 $\Pi_{\mathbf{V}^\perp} Y_t^{\theta,Z}$ 的二次变差, 则有

$$E\int_0^T \int_{\mathcal{E}} |\Pi_{\mathbf{V}^\perp} Z_s(e)|^2 \lambda(\mathrm{d}e)\mathrm{d}s = 0,$$

那么 $Z_t \in L^2(\mathcal{E}; \mathbf{V})$, a.e. $t \in [0,T]$, P-a.s. 进一步得到 $\Pi_{\mathbf{V}^\perp}(A^*Y_t + \mathcal{C}^*Z_t) = 0$, 或者等价地, $A^*Y_t + \mathcal{C}^*Z_t \in \mathbf{V}$, a.e. $t \in [0,T]$, P-a.s.

若定义 $\mathbf{V}$ 的线性子空间 $\widetilde{V}$ 如下:

$$\widetilde{V} = \{\theta \in \mathbf{V} | \exists\ \alpha \in L^2(\mathcal{E}; \mathbf{V}) : A^*\theta + \mathcal{C}^*\alpha \in \mathbf{V}, B^*\theta + \mathcal{D}^*\alpha = 0\},$$

那么, $Y_t^{\theta,Z} \in \widetilde{V}$, a.e. $t \in [0,T]$, P-a.s. 由方程解 $Y^{\theta,Z}$ 的右连续性得到 $\theta \in \widetilde{V}$, 这说明 $\widetilde{V} = \mathbf{V}$. 最后, 根据注 4.1 的第一条论述, 证明完成.

有了之前结果的铺垫, 我们得到了本文的主要结果.

定理 4.1 方程 (1.1) 的近似能控性与近似零能控性等价, 且进一步等价于以下代数判据:$\mathbb{R}^n$ 中满足下列条件

$$\begin{pmatrix} A^* \\ B^* \end{pmatrix} V \subset \begin{pmatrix} V \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathcal{C}^* \\ \mathcal{D}^* \end{pmatrix} L^2(\mathcal{E};V) \tag{4.2}$$

的最大线性子空间 V 为退化空间 $\{0\}$.

注 4.2 上述定理不仅给出了简洁的代数判据, 更有意义的是, 判据中的代数条件是容易计算验证的. $\mathbb{R}^n$ 中满足条件 (4.2) 的最大子空间 V 可以由以下步骤得到:

令 $V_0 = \mathbb{R}^n$, 依次计算

$$V_{i+1} = \begin{pmatrix} A^* \\ B^* \end{pmatrix}^{-1} \left[\begin{pmatrix} \mathcal{C}^* \\ \mathcal{D}^* \end{pmatrix} L^2(\mathcal{E};V_i) + \begin{pmatrix} V_i \\ 0 \end{pmatrix} \right] \quad \cap \quad V_i.$$

若 $V_{i+1} = V_i$, 则返回 V_i 作为所求的空间 V. 由于初始空间 V_0 是 n- 维的, 上述迭代过程至多 n 步结束. 借助计算机编程可以迅速求出 V, 从而验证系统是否近似能控. 注意到对于任意 $e \in \mathcal{E}$, $\begin{pmatrix} C^*(e) \\ D^*(e) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(n+m)\times n}$, 所以存在至多 d 个点 $\{e_1, e_2, \cdots, e_d\} \subset \mathcal{E}$, $d \leqslant (n+m)n$, 使得

$$\mathrm{span}\Big\{ \begin{pmatrix} C^*(e) \\ D^*(e) \end{pmatrix},\ e \in \mathcal{E} \Big\} = \mathrm{span}\Big\{ \begin{pmatrix} C^*(e_1) \\ D^*(e_1) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} C^*(e_2) \\ D^*(e_2) \end{pmatrix}, \cdots, \begin{pmatrix} C^*(e_d) \\ D^*(e_d) \end{pmatrix} \Big\}.$$

那么对任意线性空间 V,

$$\begin{pmatrix} \mathcal{C}^* \\ \mathcal{D}^* \end{pmatrix} L^2(\mathcal{E};V) = \sum_{i=1}^{d} \Big(\begin{pmatrix} C^*(e_i) \\ D^*(e_i) \end{pmatrix} V \Big).$$

最后, 我们以两个具体例子展示上述计算步骤.

例 4.1 系统 (1.1) 对应的 Poisson 点过程定义在一个两点集合 $\mathcal{E} = \{e_1, e_2\} \subset \mathbb{R}^n$ 上, 系统各系数定义如下:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$C(e_1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad C(e_2) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$D(e_1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad D(e_2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

需要验证该系统是否近似能控. 根据步骤, 我们令 $V_0 = \mathbb{R}^2$, 那么

$$V_1 = \begin{pmatrix} A^* \\ B^* \end{pmatrix}^{-1} \left[\begin{pmatrix} C^*(e_1) \\ D^*(e_1) \end{pmatrix} V_0 + \begin{pmatrix} C^*(e_2) \\ D^*(e_2) \end{pmatrix} V_0 + \begin{pmatrix} V_0 \\ 0 \end{pmatrix} \right] \cap V_0 = \mathrm{span}\Big\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Big\},$$

$$V_2 = \begin{pmatrix} A^* \\ B^* \end{pmatrix}^{-1} \left[\begin{pmatrix} C^*(e_1) \\ D^*(e_1) \end{pmatrix} V_1 + \begin{pmatrix} C^*(e_2) \\ D^*(e_2) \end{pmatrix} V_1 + \begin{pmatrix} V_1 \\ 0 \end{pmatrix} \right] \cap V_1 = \{0\}.$$

那么, 空间 $\mathbf{V}$ 退化, 则系统是近似能控的.

此例中, 若取 $D = 0$ 并令其他系数保持不变, 通过相同的迭代步骤, 计算得 $\mathbf{V} = \mathrm{span}\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$. 那么, 改变后的系统不是近似能控的.

例 4.2 在这个例子中, 方程 (1.1) 对应的 Poisson 点过程同样为两点集合 $\mathcal{E} = \{e_1, e_2\} \subset \mathbb{R}^n$, 方程系数定义如下:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$
$$C(e_1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad C(e_2) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$
$$D(e_1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad D(e_2) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

根据步骤, 令 $V_0 = \mathbb{R}^2$, 那么

$$V_1 = \begin{pmatrix} A^* \\ B^* \end{pmatrix}^{-1} \left[\begin{pmatrix} C^*(e_1) \\ D^*(e_1) \end{pmatrix} V_0 + \begin{pmatrix} C^*(e_2) \\ D^*(e_2) \end{pmatrix} V_0 + \begin{pmatrix} V_0 \\ 0 \end{pmatrix} \right] \cap V_0 = \mathbb{R}^2 = V_0.$$

于是, 空间 $\mathbf{V}$ 是 $\mathbb{R}^2$, 系统不是近似能控的.

若我们另取 $D = 0$ 并令其他系数保持不变, 通过相同的迭代步骤, 我们计算得 $\mathbf{V} = \{0\}$. 那么, 此例中改变后的系统是近似能控的.

从上面的两个例子中, 我们看到一个有趣的现象: 在第一个例子中, 扩散项中的控制对系统的近似能控性起正面作用; 但在第二个例子中, 扩散项中的控制对系统能控性起负面作用.

参 考 文 献

[1] Ikeda N, Watanabe S. Stochastic differential equations and diffusion processes [M]. North Holland Publ Co, 1981.

[2] Peng S G. Backward stochastic differential equation and exact controllability of stochastic control systems [J]. *Progress in Natural Science: Materials International*, 1994, 4(3):274–284.

[3] Buckdahn R, Quincampoix M, Tessitore G. A characterization of approximately controllable linear stochastic differential equations [J]. *Stochastic Partial Differential Equations and Applications, Lecture Notes in Pure and Appl Math*, 2006, 245:253–260.

[4] Goreac D. A Kalman-type condition for stochastic approximate controllability [J]. *Comptes Rendus-Mathématique*, 2008, 346(3):183–188.

[5] Goreac D. A note on the controllability of jump diffusions with linear coefficients [J]. *Ima Journal of Mathematical Control and Information*, 2012, 29(3):427–435.

[6] Tang S J, Li X J. Necessary conditions for optimal control of stochastic systems with random jumps [J]. *Siam Journal on Control and Optimization*, 1994, 32(5):1447–1475.

[7] Barles G, Buckdahn R, Pardoux E. Backward stochastic differential equations and integral-partial differential equations [J]. *Stochastics-an International Journal of Probability and Stochastic Processes*, 1997, 60(1–2):57–83.

[8] Yong J M, Zhou X Y. Stochastic controls: Hamiltonian systems and HJB equations [M]. Berlin, New York: Springer-Verlag, 1999.

Approximate Controllability of Linear Stochastic Differential Equations with Random Jumps

YU Lichao[1]

[1]School of Mathematical Sciences, Fudan University, Shanghai 200433, China.
E-mail: 12110180057@fudan.edu.cn

Abstract The author investigate the approximate controllability of linear stochastic equations with control acting on the noise terms driven by Poisson random measures. By a dual approach, an algebraic criterion for approximate controllability is given: some invariant linear space $\mathbf{V}$ determined by the coefficients of the equation is the trivial space $\{0\}$. Furthermore, an iterative finite scheme to compute the space $\mathbf{V}$ is provided.

Keywords Controllability, Possion random measure, LQ optimal control, Riccati equations

2000 MR Subject Classification 60H10, 93B05, 93E03, 93E20

The English translation of this paper will be published in
Chinese Journal of Contemporary Mathematics, Vol. 40 No. 4, 2019
by ALLERTON PRESS, INC., USA