数 学 年 刊 A 辑
2019, 40(4):427–442
DOI: 10.16205/j.cnki.cama.2019.0032

一般无界区域中带有阻尼的三维可压缩欧拉方程

杨佳琪[1] 袁 萌[2]

提要 考虑在一般的三维无界区域中的具有滑移边界条件的带有阻尼的可压缩欧拉方程. 当初始值接近平衡态时, 获得了全局存在性和唯一性. 同时, 研究了在半空间情形下系统的衰减率. 证明了经典解的 L^2 范数以 $(1+t)^{-\frac{3}{4}}$ 衰减到常值背景解.

关键词 欧拉方程, 阻尼, 无界区域
MR (2000) 主题分类 35Q30
中图法分类 O175.29
文献标志码 A
文章编号 1000-8314(2019)04-0427-16

1 引 言

本文考虑如下的带阻尼的可压缩欧拉方程组:

$$\begin{cases}\partial_t\rho+\nabla\cdot(\rho\mathbf{v})=0,\\ \partial_t(\rho\mathbf{v})+\nabla\cdot(\rho\mathbf{v}\otimes\mathbf{v})+\nabla p(\rho)+a\rho\mathbf{v}=0,\end{cases}\tag{1.1}$$

这里 $\rho=\rho(t,x)$ 是流体密度; $\mathbf{v}=(v_1,v_2,v_3)^{\mathrm{T}}$ 是流体速度. 压力 p 满足 γ-律:

$$p(\rho)=A\rho^{\gamma},$$

这里 $\gamma>1$ 是绝热指数, $A>0$ 是常数; $a>0$ 是摩擦系数. 我们施加如下的初边值条件:

$$\begin{cases}(\rho,\mathbf{v})(x,0)=(\rho_0,\mathbf{v}_0), & x\in\Omega,\\ \mathbf{v}\cdot\mathbf{n}|_{\partial\Omega}=0, & t\geqslant 0,\end{cases}$$

这里 $\Omega\subset\mathbb{R}^3$ 是满足 C^4-正则性条件 (参见第 2 节) 的无界区域. $\mathbf{n}$ 表示区域 Ω 的边界外法向量.

系统 (1.1) 描述了可压缩气体流穿过多孔介质, 已经被许多数学家研究过. 当空间维数为一维时, Nishida[1−2]建立了小初值的全局经典解, Hsiao 和 Liu[3]首次建立了系统的大时间渐近行为. Nishihara[4]建立了解的最优收敛速度. 随后, Nishihara 和 Yang[5]研究了边界效应对解的渐近行为的影响. 对于高维情形, 通过对格林函数的仔细分析, Wang 和 Yang[6]建立了解的全局存在性和逐点估计. Sideris 等[7]证明了当初始值在适当的范数中很小时, 阻尼项可以阻止奇点发生, 并且证明了经典解以 $(1+t)^{-\frac{3}{4}}$ 的速率在 L^2-范数中衰减

本文 2017 年 11 月 22 日收到, 2018 年 11 月 4 日收到修改稿.
[1]中国科学院力学研究所, 流固耦合系统力学重点实验室, 北京 100190. E-mail: yjqmath@163.com
[2]南京大学数学系, 南京 210093. E-mail: DG1521016@smail.nju.edu.cn

到常值背景解. 最近, Hou 等[8−9]考虑了如下的具有时间依赖阻尼的多维可压缩欧拉方程:

$$\begin{cases}\partial_t\rho+\nabla\cdot(\rho\mathbf{v})=0,\\ \partial_t(\rho\mathbf{v})+\nabla\cdot(\rho\mathbf{v}\otimes\mathbf{v})+\nabla p(\rho)=-\frac{\mu}{(1+t)^\lambda}\rho\mathbf{v},\\ (\rho,\mathbf{v})(x,0)=(\rho_0,\mathbf{v}_0).\end{cases}\tag{1.2}$$

在这篇文章中, 作者证明了, 如果 $0\leqslant\lambda<1$, 或者 $\lambda=1,\mu>3-d$, 且 $\operatorname{curl}\mathbf{v}_0=0$, 那么方程组具有小初值的全局经典解; 如果 $\lambda>1$ 或者 $\lambda=1,0<\mu\leqslant 3-d$, 那么系统在有限时间内爆破, 其中 d 代表维数. 另一方面, 一些作者也考虑了初边值问题. 在文 [10], Pan 和 Zhao 证明了有界区域中的经典解的全局存在性和唯一性, 也证明了经典解以指数速度收敛到稳态. 后来, 在文 [11] 中, Zhang 和 Tan 考虑了具有阻尼和边界效应的 p-系统. 在文 [12] 中, 作者们还研究了具有非线性阻尼和固定边界效应的 p-系统. 然而, 据我们所知, 对于无界区域, 几乎没有任何结果. 此外, 在文 [13–14] 中, Zhang 和 Wu 研究了有界区域上的三维带阻尼的非等熵可压缩欧拉方程. 在文 [15] 中, 作者考虑了系统 (1.2) 在半空间的情形, 证明了当初始值接近其平衡状态时, 特别是当 $\lambda=0$ 时, 系统 (1.2) 约化为 (1.1), 存在一个全局光滑解.

本文将考虑系统在一般无界区域中的 (1.1). 我们将证明, 如果区域满足一致的 C^4-正则性条件, 并且初始值接近平衡态时, 则存在一个全局经典解. 另一方面, 也考虑了半空间中的时间渐近行为, 如文 [7], 我们将证明经典解在 L^2 范数下以 $(1+t)^{-\frac{3}{4}}$ 衰减到常值背景状态.

让我们评论一下我们的证明. 由于区域是无界的, 我们不能使用 poincaré 不等式, 也不能直接应用文 [10] 中的证明. 为了克服这一困难, 我们将定义一个新的不含低阶项的耗散项, 并通过仔细的计算, 证明非线性项可以被新的耗散项控制. 为了得到半空间中解的衰减, 我们将采用 Kagei 和 Kobayashi[16]的思想. 通过傅立叶余弦变换和正弦变换, 我们可以把半空间的证明约化到整个空间. 值得注意的是, 我们的证明只适用于低阶估计, 因为高阶估计需要一些相容性条件 (参见注 4.1). 同时, 利用系统的结构和 div-curl 引理 (参见引理 3.1), 我们也得到了 H^1 估计, 尽管结果似乎不是最佳的.

本文将如下组织. 在第 2 节中, 我们将重写系统 (1.1) 为对称双曲系统, 并给出局部存在定理. 在第 3 节中, 我们将证明全局存在定理. 在第 4 节中, 我们将研究系统 (1.1) 在半空间中的大时间行为.

2 重整化和局部存在性

在这部分中, 我们将重构系统 (1.1). 首先, 引入声速 $\sigma(\rho)=\sqrt{p'(\rho)}$, 让 $\overline{\sigma}=\sigma(\overline{\rho})$ 为背景密度 $\overline{\rho}>0$ 对应的声速. 定义

$$u=\frac{2}{\gamma-1}(\sigma(\rho)-\overline{\sigma}),$$

则对于 C^1 解, 欧拉方程组 (1.1) 化为如下系统:

$$\begin{cases}\partial_t u+\overline{\sigma}\nabla\cdot\mathbf{v}=-\mathbf{v}\cdot\nabla u-\dfrac{\gamma-1}{2}u\nabla\cdot\mathbf{v},\\ \partial_t\mathbf{v}+\overline{\sigma}\nabla u+a\mathbf{v}=-\mathbf{v}\cdot\nabla\mathbf{v}-\dfrac{\gamma-1}{2}u\nabla u.\end{cases}\tag{2.1}$$

初边值条件则变为

$$\begin{cases}(u_0, \mathbf{v}_0)|_{t=0} = (u_0, \mathbf{v}_0), \\ \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}|_{\partial\Omega} = 0,\end{cases} \tag{2.2}$$

这里 $u_0 = \frac{2}{\gamma-1}(\sigma(\rho_0) - \overline{\sigma})$, 并且 Ω 满足一致 C^4- 正则性条件 (参见文 [17] 中的段落 4.10). 首先, 有以下引理, 它告诉我们系统 (1.1) 和 (2.1) 是等价的.

引理 2.1 [7,10] 对任意 $T > 0$, 如果 $(\rho, \mathbf{v}) \in C^1(\overline{\Omega} \times [0,T])$ 是 (1.1) 的一个解, 且 $\rho > 0$, 则 $(u, \mathbf{v}) \in C^1(\overline{\Omega} \times [0,T])$ 是 (2.1) 的一个解, 且 $\big(\frac{\gamma-1}{2}\big)u + \overline{\sigma} > 0$. 反之, 如果 $(\sigma, \mathbf{v}) \in C^1(\overline{\Omega} \times [0,T])$ 是 (2.1) 的一个解, 且 $\big(\frac{\gamma-1}{2}\big)u + \overline{\sigma} > 0$ 以及 $\rho = \sigma^{-1}\big(\big(\frac{\gamma-1}{2}\big)u + \overline{\sigma}\big)$, 则 $(\rho, \mathbf{v}) \in C^1(\overline{\Omega} \times [0,T])$ 是 (1.1) 的一个解, 且 $\rho > 0$.

下面的引理确保了初始密度为正时密度的正性.

引理 2.2 [7,10] 如果 $(\rho, \mathbf{v}) \in C^1(\overline{\Omega} \times [0,T])$ 是 (1.1) 在 $\overline{\Omega} \times [0,T]$ 上的一个一致有界解, 且 $\rho(x,0) > 0$, 则在 $\overline{\Omega} \times [0,T]$ 上 $\rho(x,t) > 0$. 如果 $(\sigma, \mathbf{v}) \in C^1(\overline{\Omega} \times [0,T])$ 是 (2.1) 在 $\overline{\Omega} \times [0,T]$ 上的一个一致有界解, 且 $\big(\frac{\gamma-1}{2}\big)u(x,0) + \overline{\sigma} > 0$, 则在 $\overline{\Omega} \times [0,T]$ 上 $\big(\frac{\gamma-1}{2}\big)u(x,t) + \overline{\sigma} > 0$.

现在令

$$X_3([0,T],\Omega) \equiv \{F : \Omega \times [0,T] \to \mathbb{R}^3 \mid \partial_t^l F \in L^\infty([0,T]; H^3(\Omega)), l = 0,1,2,3\},$$

其具有范数

$$\|F\|_{3,T} \equiv \operatorname{ess}\sup_{0 \leqslant t \leqslant T} |\!|\!| F(\cdot,t) |\!|\!| = \operatorname{ess}\sup_{0 \leqslant t \leqslant T} \Big[\sum_{l=0}^{3} \|\partial_t F(\cdot,t)\|_{3-l}^2\Big]^{\frac{1}{2}},$$

则我们得到了下面的局部存在引理.

引理 2.3 [18] 如果 $(\sigma_0, \mathbf{v}_0) \in H^3(\Omega)$ 并且满足相容性条件, 即 $\partial_t \mathbf{v}(0) \cdot \mathbf{n}|_{\partial_t \Omega} = 0$, $0 \leqslant l \leqslant 2$, 则初边值问题 (2.1), (2.2), 存在一个唯一的局部解 $(\sigma, \mathbf{v}) \in C^1(\overline{\Omega} \times [0,T]) \cap X_3([0,T],\Omega)$, 这里 $T > 0$ 是一个有限常数.

3　全局估计

在这部分, 我们将证明 (2.1) 和 (2.2) 初边值条件的全局存在性. 在本文中, C 表示一个一般的正常数, $\|\cdot\|$, $\|\cdot\|_s$ 和 $\|\cdot\|_{s-\frac{1}{2}}$ 表示 $L^2(\Omega)$, $H^s(\Omega)$ 和 $H^{s-\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$. 定义

$$W(t) \equiv |\!|\!| u(t) |\!|\!|^2 + |\!|\!| \mathbf{v}(t) |\!|\!|^2 = \sum_{l=0}^{3}(\|\partial_t^l u(t)\|_{3-l}^2 + \|\partial_t^l \mathbf{v}(t)\|_{H^{3-l}}^2).$$

我们也引进接下来的量

$$E[u](t) = \sum_{l=0}^{3} \|\partial_t^l u(\cdot,t)\|_{3-l}^2;$$

$$E[\mathbf{v}](t) = \sum_{l=0}^{3} \|\partial_t^l \mathbf{v}(\cdot,t)\|_{3-l}^2;$$

$$\chi[u](t) = \sum_{l=0}^{3} \|\partial_t^l u(\cdot,t)\|_{3-l}^2 - \|u\|^2;$$

$$V(t)=\sum_{l=0}^{2}\|\partial_t^l\omega\|_{2-l}^2,\quad \omega=\nabla\times\mathbf{v};$$

$$E(t)=\sum_{l=0}^{3}(\|\partial_t^l u\|^2+\|\partial_t^l\mathbf{v}\|^2);$$

$$\widetilde{E}(t)=\sum_{l=1}^{3}\|\partial_t^l u\|^2+\sum_{l=0}^{3}\|\partial_t^l\mathbf{v}\|^2.$$

值得注意的是

$$W(t)=E[u](t)+E[\mathbf{v}](t).$$

首先给出几个引理, 用于计算能量估计. 由于滑移边界条件的存在, 边界上的空间导数是未知的. 证明将强烈依赖于下面的引理 3.1, 它表明 $\nabla\mathbf{U}$ 可以被 $\nabla\cdot\mathbf{U}$ 和 $\nabla\times\mathbf{U}$ 所估计. 我们采用文 [19] 的方法.

引理 3.1 假设区域 Ω 是一个满足一致 C^{m+1}-正则性条件的无界区域, 并且 $\mathbf{U}\in H^m(\Omega)$ 满足 $\mathbf{U}\cdot\mathbf{n}|_{\partial\Omega}=0$, 则

$$\|\mathbf{U}\|_m\leqslant C(\|\nabla\times\mathbf{U}\|_{m-1}+\|\nabla\cdot\mathbf{U}\|_{m-1}+\|\mathbf{U}\|_{m-1}),\tag{3.1}$$

这里 $m\geqslant 2$, 并且常数 C 仅依赖 m 和区域 Ω 的 C^{m+1}-范数.

证 首先, 我们有

$$-\Delta\mathbf{U}=\nabla\times\nabla\times\mathbf{U}-\nabla(\nabla\cdot\mathbf{U}).\tag{3.2}$$

从 ω 的假设中, 可以找到 $\boldsymbol{\nu}=(\nu_1,\nu_2,\nu_3)^{\mathrm{T}}\in C^m(\overline{\Omega};\mathbb{R}^3)$, 使得在 $\partial\Omega$ 上 $\boldsymbol{\nu}=\mathbf{n}$. 利用 (3.2), 我们有

$$-\Delta(\mathbf{U}\cdot\boldsymbol{\nu})=(\nabla\times\nabla\times\mathbf{U})\cdot\boldsymbol{\nu}-\nabla(\nabla\cdot\mathbf{U})\cdot\boldsymbol{\nu}-2\nabla\mathbf{U}\cdot\boldsymbol{\nu}-\mathbf{U}\cdot\Delta\boldsymbol{\nu}.$$

利用椭圆方程的正则性定理, 因为 Ω 满足一致 C^{m+1}-正则性条件并且 $\mathbf{U}\cdot\mathbf{n}|_{\partial\Omega}=0$, 我们有

$$\begin{aligned}\|\mathbf{U}\cdot\boldsymbol{\nu}\|_m&\leqslant C\|(\nabla\times\nabla\times\mathbf{U})\cdot\boldsymbol{\nu}-\nabla(\nabla\cdot\mathbf{U})\cdot\boldsymbol{\nu}-2\nabla\mathbf{U}\cdot\boldsymbol{\nu}-\mathbf{U}\cdot\Delta\boldsymbol{\nu}\|_{m-2}\\&\quad+C\|\mathbf{U}\cdot\mathbf{n}|_{\partial\Omega}\|_{m-\frac12}\\&\leqslant C(\|\nabla\times\mathbf{U}\|_{m-1}+\|\nabla\cdot\mathbf{U}\|_{m-1}+\|\mathbf{U}\|_{m-1}).\end{aligned}\tag{3.3}$$

另一方面, 对于任意的 $i=1,2,3$,

$$\boldsymbol{\nu}\cdot\nabla\mathbf{U}_i=\partial_i(\mathbf{U}\cdot\boldsymbol{\nu})-\mathbf{U}\cdot\partial_i\boldsymbol{\nu}+\sum_{j=1}^{3}\nu_j(\partial_jU_i-\partial_iU_j),$$

这表明

$$\Big\|\frac{\partial\mathbf{U}}{\partial\mathbf{n}}\Big|_{\partial\Omega}\Big\|_{m-\frac32}\leqslant C(\|\mathbf{U}\cdot\boldsymbol{\nu}\|_m+\|\mathbf{U}\|_{m-1}+\|\nabla\times\mathbf{U}\|_{m-1}).\tag{3.4}$$

根据椭圆方程的一个正则性定理, 我们有

$$\|\nabla\mathbf{U}\|_{m-1}\leqslant C\Big(\|\Delta\mathbf{U}\|_{m-2}+\Big\|\frac{\partial\mathbf{U}}{\partial\mathbf{n}}\Big|_{\partial\Omega}\Big\|_{m-\frac32}\Big).$$

因为 (3.2), 有

$$\|\nabla\mathbf{U}\|_{m-1}\leqslant C\Big(\|\nabla\times\mathbf{U}\|_{m-1}+\|\nabla\cdot\mathbf{U}\|_{m-1}+\Big\|\frac{\partial\mathbf{U}}{\partial\mathbf{n}}\Big|_{\partial\Omega}\Big\|_{m-\frac{3}{2}}\Big).\tag{3.5}$$

利用估计 (3.3)–(3.5), 可以得到 (3.1).

下面的引理对于证明全局存在性是至关重要的, 它给出了一个有用的能量和耗散的等价量.

引理 3.2　令 $(u,\mathbf{v})$ 是 (2.1) 的解, 则存在一个小常数 δ, 使得如果 $W(t)\leqslant\delta$, 则存在两个常数 $C_0>0$ 以及 $C_1>0$, 使得

$$W(t)\leqslant C_0(V(t)+E(t)),\tag{3.6}$$

以及

$$\chi[u](t)+E[\mathbf{v}](t)\leqslant C_1(\widetilde{E}(t)+V(t)).\tag{3.7}$$

证　利用引理 3.1, 使用文 [10] 引理 3.3 相同的方式, 可以证明 (3.6). 现在我们证明 (3.7). 首先, 因为

$$\nabla u=-\frac{1}{\overline{\sigma}+\frac{\gamma-1}{2}u}(\mathbf{v}_t+a\mathbf{v}+\mathbf{v}\cdot\nabla\mathbf{v}),\tag{3.8}$$

我们有

$$\begin{aligned}\|\nabla u\|^2&\leqslant C(\|\mathbf{v}_t\|^2+\|\mathbf{v}\|^2)+C(\|\mathbf{v}\|_{L^\infty}^2\|\nabla\mathbf{v}\|^2)\\&\leqslant C(\|\mathbf{v}_t\|^2+\|\mathbf{v}\|^2)+CE[\mathbf{v}]^2(t).\end{aligned}$$

另一方面,

$$\nabla\cdot\mathbf{v}=-\frac{1}{\overline{\sigma}+\frac{\gamma-1}{2}u}(u_t+\mathbf{v}\cdot\nabla u),\tag{3.9}$$

因此,

$$\|\nabla\cdot\mathbf{v}\|^2\leqslant C(\|u_t\|^2+\|\mathbf{v}\|_{L^\infty}^2\|\nabla u\|^2)\leqslant C(\|u_t\|^2+E[\mathbf{v}](t)\chi[u](t)).$$

由引理 3.1, 可得

$$\begin{aligned}\|\mathbf{v}\|_1^2&\leqslant C(\|\omega\|^2+\|\nabla\cdot\mathbf{v}\|^2+\|\mathbf{v}\|^2)\\&\leqslant C(\|\omega\|^2+\|u_t\|+\|\mathbf{v}\|+W(t)(\chi[u](t)+E[\mathbf{v}](t))).\end{aligned}$$

接下来, 我们取 (3.8) 和 (3.9) 的导数, 类似地, 有

$$\begin{aligned}\|\nabla u_t\|^2&\leqslant C(\|\mathbf{v}_t\|+\|\mathbf{v}_{tt}\|^2+W(t)(\chi[u](t)+\mathbf{v}\cdot\nabla u)),\\\|\nabla\cdot\mathbf{v}_t\|^2&\leqslant C(\|u_{tt}\|+W(t)(\chi[u](t)+E[\mathbf{v}](t))),\end{aligned}$$

以及

$$\begin{aligned}\|\nabla u_{tt}\|^2&\leqslant C(\|\mathbf{v}_{tt}\|+\|\mathbf{v}_{ttt}\|^2+W(t)(\chi[u](t)+E[\mathbf{v}](t))),\\\|\nabla\cdot\mathbf{v}_{tt}\|^2&\leqslant C(\|u_{ttt}\|+W(t)(\chi[u](t)+E[\mathbf{v}](t))).\end{aligned}$$

现在, 使用这些估计, 并取 (3.8) 和 (3.9) 的空间导数, 可得相同的结果对直到 ∇u 和 $\nabla\cdot\mathbf{v}$ 的二阶导数成立. 最后, 对于 $m=1,2,3$ 分别使用引理 3.1, 并收集这些估计, 可以证明 (3.7).

接下来, 我们将处理 $E(t)$ 和 $V(t)$ 的估计.

引理 3.3 存在常数 $C>0$, 使得

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}E(t)+\sum_{l=0}^{3}\|\partial_t^l\mathbf{v}\|^2\leqslant CW(t)^{\frac{1}{2}}(\chi[u](t)+E[\mathbf{v}](t)). \tag{3.10}$$

证 0 阶估计 $u(2.1)_1+\mathbf{v}\cdot(2.1)_2$ 并且得到

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(u^2+|\mathbf{v}|^2)+a|\mathbf{v}|^2\\&=-\overline{\sigma}\nabla\cdot(u\mathbf{v})-\frac{\gamma-1}{2}\nabla\cdot(u^2\mathbf{v})+\frac{\gamma-1}{2}u\mathbf{v}\cdot\nabla u-u\mathbf{v}\cdot\nabla u-(\mathbf{v}\cdot\nabla\mathbf{v})\cdot\mathbf{v}.\end{aligned} \tag{3.11}$$

在 Ω 上积分 (3.11), 得到

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\|u\|_{L^2}^2+\|\mathbf{v}\|_{L^2}^2)+a\|\mathbf{v}\|_{L^2}^2=-\int_\Omega\Big\{-\frac{\gamma-1}{2}u\mathbf{v}\cdot\nabla u+u\mathbf{v}\cdot\nabla u+(\mathbf{v}\cdot\nabla\mathbf{v})\cdot\mathbf{v}\Big\}\mathrm{d}x.$$

使用 Hölder 不等式, Sobolev 嵌入定理和 Young 不等式, 得到

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\|u\|_{L^2}^2+\|\mathbf{v}\|_{L^2}^2)+a\|\mathbf{v}\|_{L^2}^2\\&\leqslant C(\|u\|_{L^\infty}\|\mathbf{v}\|_{L^2}\|\nabla u\|_{L^2}+\|\mathbf{v}\|_{L^\infty}\|\mathbf{v}\|_{L^2}\|\nabla\mathbf{v}\|_{L^2})\\&\leqslant C(\|u\|_{H^2}\|\mathbf{v}\|_{L^2}\|\nabla u\|_{L^2}+\|\mathbf{v}\|_{H^2}\|\mathbf{v}\|_{L^2}\|\nabla\mathbf{v}\|_{L^2})\\&\leqslant CW(t)^{\frac{1}{2}}(\chi[u](t)+E[\mathbf{v}](t)).\end{aligned}$$

一阶估计 对 (2.1) 关于 t 求导, 两边同乘以 u_t, $\mathbf{v}_t$, 则有

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(u_t^2+|\mathbf{v}_t|^2)+a|\mathbf{v}_t|^2\\&=-\Big(\overline{\sigma}\nabla\cdot(u_t\mathbf{v}_t)+\frac{\gamma-1}{2}u_t^2\nabla\cdot\mathbf{v}+\frac{\gamma-1}{2}\nabla\cdot(uu_t\mathbf{v}_t)\\&\quad+u_t\mathbf{v}_t\cdot\nabla u+u_t\mathbf{v}\cdot\nabla u_t+\mathbf{v}_t\cdot(\mathbf{v}_t\cdot\nabla\mathbf{v})+\mathbf{v}_t\cdot(\mathbf{v}\cdot\nabla\mathbf{v}_t)\Big).\end{aligned} \tag{3.12}$$

在 Ω 上积分 (3.12), 利用边界条件, 得到

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\|u_t\|^2+\|\mathbf{v}_t\|^2)+a\|\mathbf{v}_t\|^2\\&\leqslant C[\|u_t\|_{L^\infty}\|u_t\|\|\nabla\cdot\mathbf{v}\|+\|u_t\|_{L^\infty}\|\nabla u\|\|\mathbf{v}_t\|+\|u_t\|_{L^\infty}\|\mathbf{v}\|\|\nabla u_t\|\\&\quad+\|\mathbf{v}_t\|_{L^\infty}\|\mathbf{v}_t\|\|\nabla\mathbf{v}\|+\|\mathbf{v}_t\|_{L^\infty}\|\mathbf{v}\|\|\nabla\mathbf{v}_t\|]\\&\leqslant CW(t)^{\frac{1}{2}}(\chi[u](t)+E[\mathbf{v}](t)).\end{aligned}$$

二阶估计 类似于上面的证明, 有

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\|u_{tt}\|^2+\|\mathbf{v}_{tt}\|^2)+a\|\mathbf{v}_{tt}\|^2\leqslant CW(t)^{\frac{1}{2}}(\chi[u](t)+E[\mathbf{v}](t)).$$

三阶估计

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(u_{ttt}^2+|\mathbf{v}_{ttt}|^2)+a|\mathbf{v}_{ttt}|^2\\&=\frac{2-\gamma}{2}|u_{ttt}|^2\nabla\cdot\mathbf{v}+\frac{1}{2}|\mathbf{v}_{ttt}|^2\nabla\cdot\mathbf{v}-\Big(\mathbf{v}_{ttt}\cdot\nabla u+3\mathbf{v}_t\cdot\nabla u_{tt}+\frac{3(\gamma-1)}{2}u_t\nabla\cdot\mathbf{v}_{tt}\Big)u_{ttt}\\&\quad-\Big(\mathbf{v}_{ttt}\cdot\nabla\mathbf{v}+3\mathbf{v}_t\cdot\nabla\mathbf{v}_{tt}+\frac{3(\gamma-1)}{2}u_t\nabla u_{tt}\Big)\cdot\mathbf{v}_{ttt}-3\Big(\mathbf{v}_{tt}\cdot\nabla u_t+\frac{\gamma-1}{2}u_{tt}\nabla\cdot\mathbf{v}_t\Big)u_{ttt}\end{aligned}$$

$$-3\Big(\mathbf{v}_{tt}\cdot\nabla\mathbf{v}_t+\frac{\gamma-1}{2}u_{tt}\nabla u_t\Big)\cdot\mathbf{v}_{ttt}-\nabla\cdot\Big(\frac{1}{2}|u_{ttt}|^2\mathbf{v}+\frac{1}{2}|\mathbf{v}_{ttt}|^2\mathbf{v}+\overline{\sigma}u_{ttt}\mathbf{v}_{ttt}\Big).$$

在 Ω 上积分, 有

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\|u_{ttt}\|^2+\|\mathbf{v}_{ttt}\|^2)+a\|\mathbf{v}_{ttt}\|^2\\ \leqslant{}& CW(t)^{\frac{1}{2}}(\chi[u](t)+E[\mathbf{v}](t))+3\Big|\int_\Omega\Big(\mathbf{v}_{tt}\cdot\nabla u_t+\frac{\gamma-1}{2}u_{tt}\nabla\cdot\mathbf{v}_t\Big)u_{ttt}\mathrm{d}x\Big|\\ &+3\Big|\int_\Omega\Big(\mathbf{v}_{tt}\cdot\nabla\mathbf{v}_t+\frac{\gamma-1}{2}u_{tt}\nabla u_t\Big)\cdot\mathbf{v}_{ttt}\mathrm{d}x\Big|.\end{aligned}$$

使用 Hölder 不等式和 Young 不等式, 有

$$\begin{aligned}&\Big|\int_\Omega\Big(\mathbf{v}_{tt}\cdot\nabla u_t+\frac{\gamma-1}{2}u_{tt}\nabla\cdot\mathbf{v}_t\Big)u_{ttt}\mathrm{d}x\Big|\\ \leqslant{}& C\|u_{ttt}\|(\|\mathbf{v}_{tt}\|_{L^4}\|\nabla u_t\|_{L^4}+\|\nabla\mathbf{v}_t\|_{L^4}\|u_{tt}\|_{L^4})\\ \leqslant{}& C\|u_{ttt}\|(\|\mathbf{v}_{tt}\|_{H^1}\|\nabla u_t\|_{H^1}+\|\mathbf{v}_t\|_{H^2}\|u_{tt}\|_{H^1})\\ \leqslant{}& CW(t)^{\frac{1}{2}}(\chi[u](t)+E[\mathbf{v}](t)).\end{aligned}$$

类似地, 有

$$\Big|\int_\Omega\Big(\mathbf{v}_{tt}\cdot\nabla\mathbf{v}_t+\frac{\gamma-1}{2}u_{tt}\nabla u_t\Big)\cdot\mathbf{v}_{ttt}\mathrm{d}x\Big|\leqslant CW(t)^{\frac{1}{2}}(\chi[u](t)+E[\mathbf{v}](t)).$$

联系这些估计, 我们就证明了引理.

速度耗散出现在引理 3.3 中. 接下来我们将探讨密度的耗散.

引理 3.4　存在常数 $c_0,C>0$, 使得

$$\begin{aligned}&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big(-\sum_{l=1}^{3}\int_\Omega\partial_t^{l-1}u\partial_t^l u\mathrm{d}x\Big)+\sum_{l=1}^{3}\|\partial_t^l u\|^2\\ \leqslant{}& CW(t)^{\frac{1}{2}}(\chi[u](t)+E[\mathbf{v}](t))+c_0\sum_{l=0}^{3}\|\partial_t^l\mathbf{v}\|^2.\end{aligned}\tag{3.13}$$

证　计算 $\partial_t(2.1)_1$, 有

$$u_{tt}+\overline{\sigma}\nabla\cdot\mathbf{v}_t+\mathbf{v}_t\cdot\nabla u+\mathbf{v}\cdot\nabla u_t+\frac{\gamma-1}{2}u\nabla\cdot\mathbf{v}_t+\frac{\gamma-1}{2}u_t\nabla\cdot\mathbf{v}=0.\tag{3.14}$$

对 (3.14) 乘以 u, 得到

$$\begin{aligned}&(uu_t)_t-u_t^2+\nabla\cdot\Big(\overline{\sigma}u\mathbf{v}_t+\frac{\gamma-1}{2}u^2\mathbf{v}_t\Big)-(\gamma-1)u\nabla u\cdot\mathbf{v}_t\\ &-\overline{\sigma}\nabla u\cdot\mathbf{v}_t+u\mathbf{v}_t\cdot\nabla u+u\mathbf{v}\cdot\nabla u_t+\frac{\gamma-1}{2}uu_t\nabla\cdot\mathbf{v}=0.\end{aligned}$$

在 Ω 上积分上面的方程, 可以得到

$$-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_\Omega uu_t\mathrm{d}x+\|u_t\|^2\leqslant CW(t)^{\frac{1}{2}}(\chi[u](t)+E[\mathbf{v}](t))+C(\|\nabla u\|^2+\|\mathbf{v}_t\|^2).$$

因为

$$\nabla u=-\frac{1}{\overline{\sigma}+\frac{\gamma-1}{2}u}(\mathbf{v}_t+\mathbf{v}+\mathbf{v}\cdot\nabla\mathbf{v}),$$

我们有

$$\|\nabla u\|^2 \leqslant C(\|\mathbf{v}\|^2 + \|\mathbf{v}_t^2\|) + C\|\mathbf{v}\|_{L^\infty}^2 \|\nabla \mathbf{v}\|^2 \leqslant C(\|\mathbf{v}\|^2 + \|\mathbf{v}_t\|^2) + CW(t)^{\frac{1}{2}} E[\mathbf{v}](t).$$

因此

$$-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_\Omega (uu_t)\mathrm{d}x + \|u_t\|^2 \leqslant CW(t)^{\frac{1}{2}}(\chi[u](t) + E[\mathbf{v}](t)) + C(\|\mathbf{v}\|^2 + \|\mathbf{v}_t\|^2).$$

计算 $\partial_{tt}(2.1)_1$, 并且乘以 u_t, 我们有

$$\begin{aligned}
&u_t u_{ttt} + u_t\Big[\Big(\overline{\sigma} + \frac{\gamma-1}{2}u\Big)\nabla\cdot\mathbf{v}\Big]_{tt} + u_t(\mathbf{v}\cdot\nabla u)_{tt}\\
=\ &(u_t u_{tt})_t - u_{tt}^2 + \overline{\sigma} u_t \nabla\cdot\mathbf{v}_{tt} + \frac{\gamma-1}{2}u_t u_{tt}\nabla\cdot\mathbf{v} + (\gamma-1)u_t^2\nabla\cdot\mathbf{v}_t + \frac{\gamma-1}{2}uu_t\nabla\cdot\mathbf{v}_{tt}\\
&+ u_t\mathbf{v}_{tt}\cdot\nabla u + 2\mathbf{v}_t u_t\cdot\nabla u_t + u_t\mathbf{v}\cdot\nabla u_{tt}\\
=\ &(u_t u_{tt})_t - u_{tt}^2 + \overline{\sigma}\nabla\cdot(u_t\mathbf{v}_{tt}) - \overline{\sigma}\nabla u_t\cdot\mathbf{v}_{tt} + \frac{\gamma-1}{2}u_t u_{tt}\nabla\cdot\mathbf{v} + (\gamma-1)u_t^2\nabla\cdot\mathbf{v}_t\\
&+ \frac{\gamma-1}{2}uu_t\nabla\cdot\mathbf{v}_{tt} + u_t\mathbf{v}_{tt}\cdot\nabla u + 2\mathbf{v}_t u_t\cdot\nabla u_t + u_t\mathbf{v}\cdot\nabla u_{tt} = 0.
\end{aligned}$$

让我们回忆一下边界条件, 并对上述方程在 Ω 上积分, 有

$$-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_\Omega u_t u_{tt}\mathrm{d}x + \|u_{tt}\|^2 \leqslant CW(t)^{\frac{1}{2}}(\chi[u](t) + E[\mathbf{v}](t)) + C(\|\nabla u_t\|^2 + \|\mathbf{v}_{tt}\|^2).$$

再一次使用关系式

$$\nabla u = -\frac{1}{\overline{\sigma} + \frac{\gamma-1}{2}u}(\mathbf{v}_t + \mathbf{v} + \mathbf{v}\cdot\nabla\mathbf{v}),$$

我们有

$$\|\nabla u_t\|_{L^2}^2 \leqslant CW(t)^{\frac{1}{2}}(\chi[u](t) + E[\mathbf{v}](t)) + C(\|\mathbf{v}_{tt}\|^2 + \|\mathbf{v}_t\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2).$$

重复上面的过程, 也可以得到

$$\begin{aligned}
&-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_\Omega (u_{tt}u_{ttt})\mathrm{d}x + \|u_{ttt}\|^2\\
&\leqslant C(W(t)^{\frac{1}{2}}(\chi[u](t) + E[\mathbf{v}](t))) + C(\|\mathbf{v}_{ttt}\|^2 + \|\mathbf{v}_{tt}\|^2 + \|\mathbf{v}_t\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2).
\end{aligned}$$

结合上面的的估计, 可以获得引理.

接下来的引理可以被证明通过使用文 [10] 中引理 3.7 类似的证明, 只需要注意在我们的引理中 $W(t)$ 被 $E[\mathbf{v}](t)$ 所替代.

引理 3.5 对于 $V(t)$, 存在一个常数 $C > 0$, 使得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}V(t) + 2aV(t) \leqslant CE[\mathbf{v}]^{\frac{3}{2}}. \tag{3.15}$$

现在, 我们给出全局存在性的定理.

定理 3.1 给定初始条件满足相容性条件, 即 $\partial_t^l \mathbf{U}(0)\cdot\mathbf{n}|_{\partial\Omega} = 0, 0 \leqslant l \leqslant 2$, 则存在一个常数 δ, 使得如果 $\mathbf{U}_0 \in H^3(\Omega)$ 以及 $W(0) < \delta$, 则初边值问题 (2.1) 以及 (2.2) 存在一个唯一的全局解 $\mathbf{U} = (u, \mathbf{v}) \in X_3([0,\infty),\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega}\times[0,\infty))$.

证　$C_1\times$(3.10)+(3.13)+(3.15), 可得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big(C_1E(t)-\sum_{l=1}^{3}\int_\Omega \partial_t^{l-1}u\partial_t^l u\mathrm{d}x+V(t)\Big)+(2C_1-c_0)\sum_{l=0}^{3}\|\partial_t^l\mathbf{v}\|^2+\sum_{l=1}^{3}\|\partial_t^l u\|+2aV(t)$$

$$\leqslant CW(t)^{\frac{1}{2}}(\chi[u](t)+E[\mathbf{v}](t)).$$

令

$$E_1(t)\equiv C_1E(t)-\sum_{l=1}^{3}\int_\Omega \partial_t^{l-1}u\partial_t^l u\mathrm{d}x,$$

则

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[E_1(t)+V(t)]+C(\widetilde{E}(t)+V(t))\leqslant CW(t)^{\frac{1}{2}}(\chi[u](t)+E[\mathbf{v}](t)). \tag{3.16}$$

利用 (3.7), 有

$$\chi[u](t)+E[\mathbf{v}](t)\leqslant C_1(\widetilde{E}(t)+V(t)),$$

因此

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[E_1(t)+V(t)]+C(\chi[u](t)+E[\mathbf{v}](t))\leqslant CW(t)^{\frac{1}{2}}(\chi[u](t)+E[\mathbf{v}](t)). \tag{3.17}$$

如果 $W(t)$ 是充分小的, 则有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[E_1(t)+V(t)]+C(\chi[u](t)+E[\mathbf{v}](t))\leqslant 0. \tag{3.18}$$

现在我们取 C_1 足够大, 则容易得到存在两个常数 c_1, $c_2>0$, 使得

$$c_1E_1(t)\leqslant E(t)\leqslant c_2E_1(t).$$

利用 (3.6), 对 (3.18) 在 Ω 上积分, 得到

$$W(t)+C\int_0^t(\chi[u](s)+E[\mathbf{v}](s))\mathrm{d}s\leqslant W(0).$$

利用这个估计和引理 2.3, 可以证明定理.

4　方程组 (2.1) 的解在半空间的衰减估计

在这部分中, 将获得方程组 (2.1) 在半空间, 即 $\Omega=R_+^3$ 的衰减估计. 为此, 我们引入文 [16] 中的一些定义. 定义 $\widehat{v}(\xi',x_3)(\xi'=(\xi_1,\xi_2))$ 为 $v(x',x_3)$ 在 $x'=(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2$ 上的傅里叶变换, 定义 $\mathcal{F}_c\widehat{v}(\xi',\xi_3)(=\widehat{v}_c(\xi',\xi_3))$ 和 $\mathcal{F}_s\widehat{v}(\xi',\xi_3)(=\widehat{v}_s(\xi',\xi_3))$ 为函数在 x_3 上的傅里叶余弦和正弦变换, 则

$$\widehat{v}(\xi',x_3)=\int_{\mathbb{R}^3}v(x',x_3)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi'\cdot x'}\mathrm{d}x,$$

$$\mathcal{F}_c\widehat{v}(\xi',\xi_3)=\widehat{v}_c(\xi',\xi_3)=\int_0^\infty\int_{\mathbb{R}^2}v(x',x_3)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi'\cdot x'}\cos(\xi_3x_3)\mathrm{d}x'\mathrm{d}x_3,$$

$$\mathcal{F}_s\widehat{v}(\xi',\xi_3)=\widehat{v}_s(\xi',\xi_3)=\int_0^\infty\int_{\mathbb{R}^2}v(x',x_3)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi'\cdot x'}\sin(\xi_3x_3)\mathrm{d}x'\mathrm{d}x_3.$$

定义 $\mathcal{F}\mathbf{U}$ 如下, 其中 $\mathbf{U}=\mathbf{U}(x',x_3)=(u(x',x_3),v_1(x',x_3),v_2(x',x_3),v_3(x',x_3))$,

$$\mathcal{F}\mathbf{U}(\xi',\xi_3)=\begin{pmatrix}\mathcal{F}_c\widehat{u}(\xi',\xi_3)\\ \mathcal{F}_c\widehat{v}_1(\xi',\xi_3)\\ \mathcal{F}_c\widehat{v}_2(\xi',\xi_3)\\ \mathcal{F}_s\widehat{v}_3(\xi',\xi_3)\end{pmatrix}.$$

利用傅里叶变换的性质, 有

$$\|v\|_2^2=(2\pi^3)^{-1}\|\widehat{v}_c\|_2^2=(2\pi^3)^{-1}\|\widehat{v}_s\|_2^2,\quad v\in L^2(\mathbb{R}_+^3),\tag{4.1}$$

$$\|\partial_{x'}v\|_2^2=(2\pi^3)^{-1}\|\widehat{(\partial_{x'}v)}_k\|_2^2=(2\pi^3)^{-1}\|\xi'\widehat{v}_k\|_2^2,\quad k=c,s,\tag{4.2}$$

$$\|\partial_{x_3}v\|_2^2=(2\pi^3)^{-1}\|\widehat{(\partial_{x_3}v)}_s\|_2^2=(2\pi^3)^{-1}\|\xi_3\widehat{v}_c\|_2^2,\quad v\in H^1(\mathbb{R}_+^3),\tag{4.3}$$

$$\|\partial_{x_3}v\|_2^2=(2\pi^3)^{-1}\|\widehat{(\partial_{x_3}v)}_c\|_2^2=(2\pi^3)^{-1}\|\xi_3\widehat{v}_s\|_2^2,\quad v\in H_0^1(\mathbb{R}_+^3).\tag{4.4}$$

同时, 也有

$$|\widehat{v}_c|_\infty\leqslant\|v\|_{L^1},\quad|\widehat{v}_s|\leqslant\|v\|_{L^1},\tag{4.5}$$

以及

$$\mathcal{F}_c(\partial_{x_3}w(x_3))=\xi_3w_s(\xi_3)-w(0),\quad\mathcal{F}_s(\partial_{x_3}w(x_3))=-\xi_3w_c(\xi_3),\quad w\in H^1(\mathbb{R}_+).\tag{4.6}$$

接下来, 为了得到衰减估计, 首先考虑接下面的线性系统

$$\begin{cases}\partial_tu+\nabla\cdot\mathbf{v}=0,\\ \partial_t\mathbf{v}+\nabla u+a\mathbf{v}=0,\\ \mathbf{v}\cdot\mathbf{n}|_{\partial\Omega}=0.\end{cases}\tag{4.7}$$

应用 $\mathcal{F}$ 到 (4.7), 使用 (4.6) 以及边界条件, 有

$$\partial_t\mathcal{F}U(\xi',\xi_3,t)=A(\xi',\xi_3)\mathcal{F}U(\xi',\xi_3,t),$$

这里

$$A(\xi',\xi_3)=\begin{pmatrix}0&-\mathrm{i}\xi_1&-\mathrm{i}\xi_2&\xi_3\\-\mathrm{i}\xi_1&-a&0&0\\-\mathrm{i}\xi_2&0&-a&0\\-\xi_3&0&0&-a\end{pmatrix}.$$

$A(\xi',\xi_3)$ 的特征值是: $-a,-a,-\lambda_1(\xi',\xi_3),-\lambda_2(\xi',\xi_3)$, 这里

$$-\lambda_1(\xi',\xi_3)=\frac{1}{2}(a+\Delta),\quad-\lambda_2(\xi',\xi_3)=\frac{1}{2}(a-\Delta),\quad\Delta=\sqrt{a^2-4|\xi'|^2-4\xi_3^2}.$$

令

$$\widetilde{A}(\xi)=\begin{pmatrix}0&-\mathrm{i}\xi_1&-\mathrm{i}\xi_2&-\mathrm{i}\xi_3\\-\mathrm{i}\xi_1&-a&0&0\\-\mathrm{i}\xi_2&0&-a&0\\-\mathrm{i}\xi_3&0&0&-a\end{pmatrix},$$

以及

$$B(\xi)=\begin{pmatrix}-a & 0 & 0 & 0\\ 0 & -a & 0 & 0\\ 0 & 0 & -\lambda_1 & z\\ 0 & 0 & 0 & -\lambda_2\end{pmatrix},$$

这里

$$z=\begin{cases}-a, & a^2-4|\xi|^2<0,\\ -2\lambda_1, & a^2-4|\xi|^2>0.\end{cases}$$

从文 [7] 中的第 807 页可知, 存在一个酉阵 $\widetilde{R}(\xi)$, 使得 $\widetilde{A}(\xi)\widetilde{R}(\xi)=\widetilde{R}(\xi)B(\xi)$. 现在取

$$R(\xi',\xi_3)=\begin{pmatrix}\widetilde{R}_{11}(\xi) & \widetilde{R}_{12}(\xi) & \widetilde{R}_{13}(\xi) & \widetilde{R}_{14}(\xi)\\ \widetilde{R}_{21}(\xi) & \widetilde{R}_{22}(\xi) & \widetilde{R}_{23}(\xi) & \widetilde{R}_{24}(\xi)\\ \widetilde{R}_{31}(\xi) & \widetilde{R}_{32}(\xi) & \widetilde{R}_{33}(\xi) & \widetilde{R}_{34}(\xi)\\ -\mathrm{i}\widetilde{R}_{41}(\xi) & -\mathrm{i}\widetilde{R}_{42}(\xi) & -\mathrm{i}\widetilde{R}_{43}(\xi) & -\mathrm{i}\widetilde{R}_{44}(\xi)\end{pmatrix},$$

则容易得到 $A(\xi',\xi_3)R(\xi',\xi_3)=R(\xi',\xi_3)B(\xi',\xi_3)$. 然而

$$\widehat{T}(t)=\begin{pmatrix}\mathrm{e}^{-at} & 0 & 0 & 0\\ 0 & \mathrm{e}^{-at} & 0 & 0\\ 0 & 0 & \mathrm{e}^{-at} & \frac{\mathrm{e}^{-\lambda_1 t}-\mathrm{e}^{-\lambda_2 t}}{\lambda_2-\lambda_1}z\\ 0 & 0 & 0 & \mathrm{e}^{-\lambda_2 t}\end{pmatrix}$$

满足 $\widehat{T}'(\xi',\xi_3,t)=B(\xi)\widehat{T}(t)$ 以及 $\widehat{T}(\xi',\xi_3,0)=\mathrm{I}$, 所以 $\widehat{T}(t)=\mathrm{e}^{tB(\xi)}$. 因此

$$\widehat{S}(t)=\mathrm{e}^{tA(\xi',\xi_3)}=R(\xi',\xi_3)\mathrm{e}^{tB(\xi',\xi_3)}R^*(\xi',\xi_3)=R(\xi',\xi_3)\widehat{T}(\xi',\xi_3,t)R^*(\xi',\xi_3).$$

引理 4.1　给定 $\mathbf{U}_0\in L^1(\mathbb{R}^2_+)\cap L^2(\mathbb{R}^2_+)$, 我们有估计

$$\|S(t)\mathbf{U}_0\|\leqslant C((1+t)^{-\frac{3}{4}}\|\mathbf{U}_0\|_{L^1}+\mathrm{e}^{-\beta t}\|\mathbf{U}_0\|).\tag{4.8}$$

如果更进一步假设 $\mathbf{U}_0\in W^{k,1}(\mathbb{R}^2_+)\cap H^k(\mathbb{R}^2_+)$, 则

$$\|\nabla^k S(t)\mathbf{U}_0\|\leqslant C((1+t)^{-\frac{3}{4}}\|\mathbf{U}_0\|_{W^{k,1}}+\mathrm{e}^{-\beta t}\|\mathbf{U}_0\|_{H^k}),\quad k=1,2,\tag{4.9}$$

这里常数 C 以及 $\beta>0$ 仅仅依赖于 a.

证　容易得到存在仅依赖于 a 的常数 $C>0$ 以及 $\beta>0$, 使得

$$\widehat{T}(t)\leqslant C\begin{cases}\mathrm{e}^{-t|\xi|^2}, & |\xi|<\dfrac{\sqrt{3}a}{4},\\ \mathrm{e}^{-\beta t}, & |\xi|>\dfrac{\sqrt{3}a}{4}.\end{cases}\tag{4.10}$$

利用 (4.10) 以及 (4.1) 和 (4.5), 有

$$\begin{aligned}\|\mathbf{U}\|^2&\leqslant\|S(t)\mathbf{U}_0\|^2=(2\pi^3)^{-1}\|\widehat{S}(t)\mathcal{F}\mathbf{U}_0\|^2\\&\leqslant C\int_{|\xi|<\frac{\sqrt{3}a}{4}}\mathrm{e}^{-2t|\xi|^2}|\mathcal{F}\mathbf{U}_0|^2\mathrm{d}\xi+C\int_{|\xi|>\frac{\sqrt{3}a}{4}}\mathrm{e}^{-2\beta t}|\mathcal{F}\mathbf{U}_0|^2\mathrm{d}\xi\\&\leqslant C|\mathcal{F}\mathbf{U}_0|^2_\infty\int_{|\xi|<\frac{\sqrt{3}a}{4}}|\mathrm{e}^{-2t|\xi|^2}|\mathrm{d}\xi+Ce^{-2\beta t}\int_{|\xi|>\frac{\sqrt{3}a}{4}}|\mathcal{F}\mathbf{U}_0|^2\mathrm{d}\xi\end{aligned}$$

$$\leqslant C(1+t)^{-\frac{3}{2}}\|\mathbf{U}_0\|_{L^1}^2+Ce^{-2\beta t}\|\mathbf{U}_0\|^2, \tag{4.11}$$

这给出了 (4.8) 的证明. 接下来证明 (4.9). 为此, 首先估计 $\partial_t\mathbf{U}$ 的 L^2-范数. 取 $\mathbf{U}_1(x)=(\partial_t u,\partial_t\mathbf{v})^{\mathrm{T}}|_{t=0}=(-\nabla\cdot\mathbf{v}_0,-\nabla u_0-a\mathbf{v}_0)$, 并且考虑系统 $\partial_t(4.7)$, 使用 (4.11) 相同的论证, 可以得到

$$\begin{aligned}\|\partial_t\mathbf{U}\|=\|S(t)\mathbf{U}_1\|&\leqslant C((1+t)^{-\frac{3}{4}}\|\mathbf{U}_1\|_{L^1}^2+\mathrm{e}^{-\beta t}\|\mathbf{U}_1\|)\\&\leqslant C((1+t)^{-\frac{3}{4}}\|\mathbf{U}_0\|_{W^{1,1}}+\mathrm{e}^{-\beta t}\|\mathbf{U}_0\|_{H^1}).\end{aligned}$$

接下来, 因为 $\nabla\cdot\mathbf{v}=-\partial_t u$ 以及 $\nabla u=-\partial_t\mathbf{v}-a\mathbf{v}$, 有

$$\|\nabla\cdot\mathbf{v}\|\leqslant\|\partial_t u\|\leqslant C((1+t)^{-\frac{3}{4}}\|\mathbf{U}_0\|_{W^{1,1}}+\mathrm{e}^{-\beta t}\|\mathbf{U}_0\|_{H^1}),$$

以及

$$\|\nabla u\|\leqslant\|\partial_t\mathbf{v}\|+\|a\mathbf{v}\|\leqslant C((1+t)^{-\frac{3}{4}}\|\mathbf{U}_0\|_{W^{1,1}}+\mathrm{e}^{-\beta t}\|\mathbf{U}_0\|_{H^1}).$$

另一方面, 考虑方程 $(4.7)_2$ 的旋度方程

$$\partial_t\omega+a\omega=0,$$

这表明 $\|\omega\|\leqslant\mathrm{e}^{-at}\|\omega_0\|$ 以及 $\|\omega\|_1\leqslant\mathrm{e}^{-at}\|\omega_0\|_1$. 所有的这些估计以及引理 3.1 表明

$$\|\nabla S(t)\mathbf{U}_0\|\leqslant\|\nabla\cdot\mathbf{v}\|+\|\nabla\times\mathbf{v}\|+\|\mathbf{v}\|+\|\nabla u\|\leqslant C((1+t)^{-\frac{3}{4}}\|\mathbf{U}_0\|_{W^{1,1}}+\mathrm{e}^{-\beta t}\|\mathbf{U}_0\|_{H^1}).$$

现在, 我们考虑系统 $\partial_t(4.7)$ 具有初值 $\mathbf{U}_1$, 类似于上面的论证表明

$$\|\nabla\partial_t(S(t)\mathbf{U}_0)\|\leqslant C((1+t)^{-\frac{3}{4}}\|\mathbf{U}_1\|_{W^{1,1}}+\mathrm{e}^{-\beta t}\|\mathbf{U}_1\|_{H^1}).$$

因为 $\nabla(\nabla\cdot\mathbf{v})=-\nabla(\partial_t u)$, 以及 $\nabla(\nabla u)=-\nabla(\partial_t\mathbf{v}+a\mathbf{v})$, 使用引理 3.1, 得到

$$\begin{aligned}\|\nabla^2 S(t)\mathbf{U}_0\|&\leqslant C((1+t)^{-\frac{3}{4}}\|\mathbf{U}_1\|_{W^{1,1}}+\mathrm{e}^{-\beta t}\|\mathbf{U}_1\|_{H^1})\\&\leqslant C((1+t)^{-\frac{3}{4}}\|\mathbf{U}_0\|_{W^{2,1}}+\mathrm{e}^{-\beta t}\|\mathbf{U}_0\|_{H^2}).\end{aligned}$$

这样就完成了引理的证明.

注 4.1 注意到, 如果对初始值施加一些相容性条件, 那么可以得到更好的衰减率. 事实上, 如果假设 $\mathbf{v}_0\cdot\mathbf{n}|_{\partial\Omega}=0$, 那么从引理的证明中可以发现, $\|\nabla S(t)\mathbf{U}_0\|$ 以 $(1+t)^{-\frac{5}{4}}$ 的速率衰减. 然而, 这个估计并不能帮助我们估计非线性系统的解, 因为我们不知道非线性项 $G(\mathbf{U},\nabla\mathbf{U})$ 是否也满足相容性条件, 或者说不能用 Duhamel 原理得到非线性解的衰减.

注 4.2 由于我们没有直接估计 $\|\nabla S(t)\mathbf{U}_0\|$ 的衰减, 因此 $\|\nabla S(t)\mathbf{U}_0\|$ 的衰减似乎不是最佳的. 首先估计 $\|\partial_t S(t)\mathbf{U}_0\|$, 然后通过系统的结构和 $\|\partial_t S(t)\mathbf{U}_0\|$ 的估计, 得到了 $\|\nabla S(t)\mathbf{U}_0\|$ 的估计. 同时, 我们发现 $\partial_t\mathbf{v}$ 和 $\mathbf{v}$ 是同阶的, 因此得出了 $\|S(t)\mathbf{U}_0\|$ 和 $\|\partial_t S(t)\mathbf{U}_0\|$ 的衰减率是相同的.

令

$$\begin{aligned}L_0(t)&=\sup_{0\leqslant s\leqslant t}(1+s)^{\frac{3}{4}}\|\mathbf{U}(\cdot,s)\|,\\L_1(t)&=\sup_{0\leqslant s\leqslant t}(1+s)^{\frac{3}{4}}\|\nabla\mathbf{U}(\cdot,s)\|,\\e(t)&=\sup_{0\leqslant s\leqslant t}\|\mathbf{U}(\cdot,s)\|_{H^3},\end{aligned}$$

则有接下来的引理.

引理 4.2　假设 $\|\mathbf{U}_0\|_{L^1}+\|\mathbf{U}_0\|_{H^3}<\delta$, 则

$$L_0(t)\leqslant C(\delta+\mathrm{e}^{\frac{1}{3}}(t)L_0^{\frac{5}{3}}(t)+L_0(t)e(t)). \tag{4.12}$$

如果更进一步, 假设 $\|\mathbf{U}_0\|_{W^{1,1}}+\|\mathbf{U}_0\|_{H^3}<\delta$, 则

$$\begin{aligned}L_1(t)\leqslant C(&\delta+\mathrm{e}^{\frac{1}{3}}(t)L_0^{\frac{5}{3}}(t)+L_0(t)L_1^{\frac{1}{2}}(t)\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}(t)+L_1^2(t)\\&+L_0(t)e(t)+L_0^{\frac{1}{2}}(t)L_1^{\frac{1}{2}}(t)e(t)+\mathrm{e}^{\frac{3}{4}}(t)L_1^{\frac{5}{4}}(t)).\end{aligned} \tag{4.13}$$

证　使用 Duhamel 原理,

$$\mathbf{U}(x,t)=S(t)\mathbf{U}_0(x)+\int_0^t S(t-s)G(\mathbf{U},\nabla\mathbf{U})(x,s)\mathrm{d}s,$$

这里 $G(\mathbf{U},\nabla\mathbf{U})=(-\mathbf{v}\cdot\nabla u-u\nabla\cdot\mathbf{v},-\mathbf{v}\cdot\nabla\mathbf{v}-u\nabla u)^{\mathrm{T}}$ 表示 (2.1) 的非线性项. 通过使用 Gagliado-Nirenberg 不等式, 有

$$\begin{aligned}\|G(\mathbf{U},\nabla\mathbf{U})(\cdot,s)\|_{L^1}&\leqslant\|\mathbf{U}(\cdot,s)\|\|\nabla\mathbf{U}(\cdot,s)\|\\&\leqslant\|\mathbf{U}(\cdot,s)\|\|\mathbf{U}(\cdot,s)\|^{\frac{2}{3}}\|\mathbf{U}(\cdot,s)\|_{H^3}^{\frac{1}{3}}\leqslant\mathrm{e}^{\frac{1}{3}}(t)L_0^{\frac{5}{3}}(t)(1+s)^{-\frac{5}{4}},\end{aligned} \tag{4.14}$$

$$\|G(\mathbf{U},\nabla\mathbf{U})(\cdot,s)\|\leqslant\|\mathbf{U}(\cdot,s)\||\nabla\mathbf{U}(\cdot,s)|\leqslant L_0(t)e(t)(1+s)^{-\frac{3}{4}}, \tag{4.15}$$

$$\begin{aligned}\|\nabla G(\mathbf{U},\nabla\mathbf{U})(\cdot,s)\|_{L^1}&\leqslant\|\mathbf{U}(\cdot,s)\|\|\nabla^2\mathbf{U}(\cdot,s)\|+\|\nabla\mathbf{U}(\cdot,s)\|^2\\&\leqslant\|\mathbf{U}(\cdot,s)\|\|\nabla\mathbf{U}(\cdot,s)\|^{\frac{1}{2}}\|\mathbf{U}(\cdot,s)\|_{H^3}^{\frac{1}{2}}+\|\nabla\mathbf{U}(\cdot,s)\|^2\\&\leqslant L_0(t)L_1^{\frac{1}{2}}(t)\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}(t)(1+s)^{-\frac{9}{8}}+L_1^2(t)(1+s)^{-\frac{3}{2}},\end{aligned} \tag{4.16}$$

$$\begin{aligned}\|\nabla G(\mathbf{U},\nabla\mathbf{U})(\cdot,s)\|&\leqslant\|\nabla^2\mathbf{U}(\cdot,s)\||\mathbf{U}(\cdot,s)|+\|\nabla\mathbf{U}(\cdot,s)\|_{L^4}\\&\leqslant\|\nabla\mathbf{U}(\cdot,s)\|^{\frac{1}{2}}\|\mathbf{U}(\cdot,s)\|_{H^3}^{\frac{1}{2}}\|\mathbf{U}(\cdot,s)\|^{\frac{1}{2}}\|\mathbf{U}(\cdot,s)\|_{H^3}^{\frac{1}{2}}+\|\nabla\mathbf{U}\|^{\frac{5}{4}}\|\mathbf{U}\|_{H^3}^{\frac{3}{4}}\\&\leqslant L_0^{\frac{1}{2}}(t)L_1^{\frac{1}{2}}(t)e(t)(1+s)^{-\frac{3}{4}}+\mathrm{e}^{\frac{3}{4}}(t)L_1^{\frac{5}{4}}(t)(1+s)^{-\frac{15}{16}}.\end{aligned} \tag{4.17}$$

使用 (4.8), (4.14) 以及 (4.15), 有

$$\begin{aligned}\|\mathbf{U}(\cdot,t)\|&\leqslant C(1+t)^{-\frac{3}{4}}\delta+C\int_0^t(1+t-s)^{-\frac{3}{4}}\|G(\mathbf{U},\nabla\mathbf{U})(\cdot,s)\|_{L^1}\mathrm{d}s\\&\quad+C\int_0^t\mathrm{e}^{-(t-s)}\|G(\mathbf{U},\nabla\mathbf{U})(\cdot,s)\|\mathrm{d}s\\&\leqslant C(1+t)^{-\frac{3}{4}}\delta+Ce^{\frac{1}{3}}(t)L^{\frac{5}{3}}(t)\int_0^t(1+t-s)^{-\frac{3}{4}}(1+s)^{-\frac{5}{4}}\mathrm{d}s\\&\quad+CL(t)e(t)\int_0^t\mathrm{e}^{-(t-s)}(1+s)^{-\frac{3}{4}}\mathrm{d}s\\&\leqslant C(1+t)^{-\frac{3}{4}}\delta+Ce^{\frac{1}{3}}(t)L^{\frac{5}{3}}(t)(1+t)^{-\frac{3}{4}}+CL(t)e(t)(1+t)^{-\frac{3}{4}}.\end{aligned}$$

这给出了 (4.2) 的证明. 接下来, 使用 (4.9), (4.14) – (4.17), 可以得到

$$\begin{aligned}\|\nabla\mathbf{U}(\cdot,t)\|&\leqslant C(1+t)^{-\frac{3}{4}}\delta+C\int_0^t(1+t-s)^{-\frac{3}{4}}\|G(\mathbf{U},\nabla\mathbf{U})(\cdot,s)\|_{W^{1,1}}\mathrm{d}s\\&\quad+C\int_0^t\mathrm{e}^{-(t-s)}\|G(\mathbf{U},\nabla\mathbf{U})(\cdot,s)\|_{H^1}\mathrm{d}s\\&\leqslant C(1+t)^{-\frac{3}{4}}\delta+Ce^{\frac{1}{3}}(t)L^{\frac{5}{3}}(t)\int_0^t(1+t-s)^{-\frac{3}{4}}(1+s)^{-\frac{5}{4}}\mathrm{d}s\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+CL_0(t)L_1^{\frac{1}{2}}(t)\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}(t)\int_0^t(1+t-s)^{-\frac{3}{4}}(1+s)^{-\frac{9}{8}}\mathrm{d}s\\
&+CL_1^2(t)\int_0^t(1+t-s)^{-\frac{3}{4}}(1+s)^{-\frac{3}{2}}\mathrm{d}s\\
&+CL_0(t)e(t)\int_0^t\mathrm{e}^{-(t-s)}(1+s)^{-\frac{3}{4}}\mathrm{d}s+CL_0^{\frac{1}{2}}(t)L_1^{\frac{1}{2}}(t)e(t)\int_0^t\mathrm{e}^{-(t-s)}(1+s)^{-\frac{3}{4}}\mathrm{d}s\\
&+Ce^{\frac{3}{4}}(t)L_1^{\frac{5}{4}}(t)\int_0^t\mathrm{e}^{-(t-s)}(1+s)^{-\frac{15}{16}}\mathrm{d}s\\
\leqslant{}& C(1+t)^{-\frac{3}{4}}\delta+C\Big(\mathrm{e}^{\frac{1}{3}}(t)L^{\frac{5}{3}}(t)+L_0(t)L_1^{\frac{1}{2}}(t)\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}(t)+L_1^2(t)L_0(t)e(t)\\
&+L_0^{\frac{1}{2}}(t)L_1^{\frac{1}{2}}(t)e(t)+\mathrm{e}^{\frac{3}{4}}(t)L_1^{\frac{5}{4}}(t)\Big)(1+t)^{-\frac{3}{4}}.
\end{aligned}
$$

这给出了 (4.13) 的证明.

定理 4.1 假设 $\|\mathbf{U}_0\|_{L^1}+\|\mathbf{U}_0\|_{H^3}<\delta$, 且 δ 是充分小的, 则 $L_0(t)$ 保持有界, 因此接下来的衰减估计保持

$$\|\mathbf{U}(t)\|\leqslant C(1+t)^{-\frac{3}{4}}.$$

更进一步, 如果 $\|\mathbf{U}_0\|_{W^{1,1}}+\|\mathbf{U}_0\|_{H^3}<\delta$, 则 $L_1(t)$ 保持有界, 且

$$\|\nabla\mathbf{U}(t)\|\leqslant C(1+t)^{-\frac{3}{4}}.$$

证 利用引理 4.2 以及 $e(t)$ 的小性可得 $L(t)\leqslant C\delta+CL(t)^{\frac{5}{3}}$. 如果 $\delta<\frac{2}{5c}(\frac{3}{5C})^{\frac{5}{3}}$, 则函数 $f(x)=C\delta-x-Cx^{\frac{5}{3}}$ 有正根 $0<r_1<r_2$. 然而 $L(0)<C\delta<r_1$, 因为 $f(L(t))\geqslant 0$ 以及 $L(t)$ 是连续的, 我们有对于所有的 $t>0$, $Q(t)\leqslant r_1$.

取 $Q(t)=L_0(t)+L_1(t)$. 利用引理 4.2, 有 $Q(t)\leqslant C\delta+C(Q^{\frac{5}{4}}(t)+Q^{\frac{5}{3}}(t)+Q^{\frac{3}{2}}(t)+Q^2(t))$. 正如上面的证明, 可以得到存在 r_3, 使得 $Q(t)\leqslant r_3$.

注 4.3 利用 Gagliado-Nirenberg 不等式, 我们有 $\|\mathbf{U}\|\leqslant C(1+t)^{-\frac{3}{4}}$ 蕴含着 $\|\nabla\mathbf{U}\|\leqslant C(1+t)^{-\frac{1}{2}}$. 事实上,

$$\|\nabla\mathbf{U}\|\leqslant\|\mathbf{U}\|^{\frac{2}{3}}\|\mathbf{U}\|_{H^3}^{\frac{1}{2}}\leqslant C(1+t)^{-\frac{1}{2}}.$$

因此, 我们的 $\nabla\mathbf{U}$ 的估计是有意义的, 尽管它似乎不是最优的.

参 考 文 献

[1] Nishida T. Global solution for an initial-boundary value problem of a quasilinear hyperbolic systems [J]. *Proc Japan Acad*, 1968, 44:642–646.

[2] Nishida T. Nonlinear hyperbolic equations and related topics in fluid dynamics, publications mathematiques D'Orsay 78–02 [M]. Orsay: Université de Paris-Sud, 1978.

[3] Hsiao L, Liu T-P. Convergence to nonlinear diffusion waves for solutions of a system of hyperbolic conservation laws with damping [J]. *Comm Math Phys*, 1992, 143:599–605.

[4] Nishihara K J. Convergence rates to nonlinear diffusion waves for solutions of system of hyperbolic conservation laws with damping [J]. *J Differential Equations*, 1996, 131:171–188.

[5] Nishihara K J, Yang T. Boundary effect on asymptotic behavior of solutions to the p-system with linear damping [J]. *J Differential Equations*, 1999, 156:439–458.

[6] Wang W, Yang T. The pointwise estimates of solutions for Euler equations with damping in multi-dimensions [J]. *J Differential Equations*, 2001, 173:410–450.

[7] Sideris T C, Thomases B, Wang D H. Long time behavior of solutions to the 3D compressible Euler equations with damping [J]. *Comm Partial Differential Equations*, 2003, 28:795–816.

[8] Hou F, Witt I, Yin H C. Global existence and blowup of smooth solutions of 3-D potential equations with time-dependent damping [J]. *Pacific Journal of Mathematics*, 2017, 292:389–426.

[9] Hou F, Yin H C. On the global existence and blowup of smooth solutions to the multi-dimensional compressible Euler equations with time-depending damping [J]. *Nonlinearity*, 2017, 30:2485.

[10] Pan R H, Zhao K. The 3D compressible Euler equations with damping in a bounded domain [J]. *J. Differential Equations*, 2009, 246:581–596.

[11] Zhang Y, Tan Z. Existence and asymptotic behavior of global smooth solution for p-system with damping and boundary effect [J]. *Nonlinear Analysis*, 2010, 72:2499–2513.

[12] Jiang M, Zhang Y. Existence and asymptotic behavior of global smooth solution for p-system with nonlinear damping and fixed boundary effect [J]. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 2014, 37:2585–2596.

[13] Zhang Y, Wu G. Global existence and asymptotic behavior for the 3D compressible non-isentropic Euler equations with damping [J]. *Acta Mathematica Scientia*, 2014, 34:424–434.

[14] Zhang Y, Wu G. The 3D non-isentropic compressible Euler equations with damping in a bounded domain [J]. *Chinese Annals of Mathematics, Series B*, 2016, 37:915–928.

[15] Hou F. On the global existence of smooth solutions to the multi-dimensional compressible Euler equations with time-depending damping in half space [J]. *Acta Mathematica Scientia*, 2017, 37:949–964.

[16] Kagei Y, Kobayashi T. On large-time behavior of solutions to the compressible Navier-Stokes equations in the half space in $\mathbb{R}^3$ [J]. *Arch Ration Mech Anal*, 2002, 165:89–159.

[17] Adams R A, Fournier J. Sobolev spaces, Second edition [M]//Pure and Applied Mathematics (Amsterdam), 140, Amsterdam: Elsevier/Academic Press, 2003.

[18] Schochet S. The compressible euler equations in a bounded domain: existence of solutions and the incompressible limit [J]. *Comm Math Phys*, 1986, 104:49–75.

[19] Bourguignon J P, Brezis H. Remarks on the Euler equation [J]. *J Functional Analysis*, 1974, 15:341–363.

The 3D Compressible Euler Equations with Damping in the General Unbounded Domain

YANG Jiaqi[1] YUAN Meng[2]

[1]Key Laboratory for Mechanics in Fluid Solid Coupling Systems, Institute of Mechanics, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100190, China.
E-mail: yjqmath@163.com

[2]Department of Mathematics, Nanjing University, Nanjing 210093, China.
E-mail: DG1521016@smail.nju.edu.cn

Abstract In this paper, the authors consider the 3D damped compressible Euler equations in the general unbounded domain with slip boundary condition. The authors obtain the global existence and uniqueness when the initial data is near its equilibrium. Meanwhile, they also investigate the decay rates of the system in the half space. The authors show that the classical solution decays in the L^2-norm to the constant background state at the rate of $(1+t)^{-\frac{3}{4}}$.

Keywords Euler equations, Damping, Unbounded domain
2000 MR Subject Classification 35Q30

The English translation of this paper will be published in
Chinese Journal of Contemporary Mathematics, Vol. 40 No. 4, 2019
by ALLERTON PRESS, INC., USA