数 学 年 刊 A 辑
2019, 40(4):443–448
DOI: 10.16205/j.cnki.cama.2019.0033

纽结的 n-Gordian 复形

张 恺[1] 杨志青[2]

提要 定义了纽结的 n-Gordian 复形, 这是纽结 Gordian 复形的一种推广, 并证明了当 n 为正偶数时, 对任意纽结 K 和任意正整数 r, 存在一个包含 K 且共含 r 个纽结的集合, 使得此集合中任意两个纽结的 n-Gordian 距离为 1.

关键词 纽结, n-Move, n-Gordian 距离, n-Gordian 复形
MR (2000) 主题分类 57M25
中图法分类 O189.3
文献标志码 A
文章编号 1000-8314(2019)04-0443-06

§1 引 言

n-move 是 crossing change 的自然推广. 如图 1 所示, 一次 n-move 是链环的一种局部变换. 特别地, 2-move 是 crossing change. 纽结理论中的基本问题之一是 Nakanishi 提出的 4-move 猜想. 1979 年, Nakanishi[1]猜想任意纽结都是 4-move 等价于平凡结的, 这个问题至今仍是公开问题. 我们称两个纽结或者链环 L_1, L_2 是 n-move 等价的, 如果 L_1 可由 L_2 经过有限次 n-move 和合痕得到.

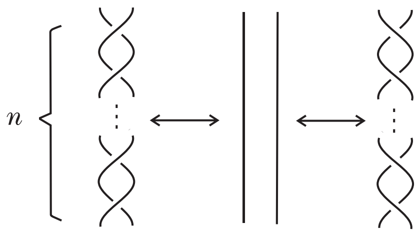

图 1 n-Move

两个 n-move 等价的纽结 K 和 K' 之间的 n-Gordian 距离是指, K 经过 n-move 变成 K' 所需要的 n-move 的最小次数, 记作 $d_n(K,K')$. 当 n 是奇数时, 一次 n-move 可能增加或者减少链环的分支数, 所以两个 n-move 等价的链环可能有不同的分支数. 例如, 右手三叶结是 3-move 等价于两个分支的平凡链环, 但不是 3-move 等价于平凡结的, 这是因为 3-move 不改变链环的三色性. 当 n 是偶数时, n-move 不改变链环的分支数, 所以两个 n-move 等价的链环具有相同的分支数.

两个纽结 K 和 K' 之间的 Gordian 距离 $d_G(K,K')$ 是指, K 通过 crossing change 变为 K' 所需要的 crossing change 的最小次数. 因为 2-move 是 crossing change, 所以 2-Gordian

本文 2017 年 11 月 21 日收到.
[1]江西财经大学统计学院, 南昌 330013. E-mail: A0721zhangkai@163.com
[2]大连理工大学数学科学学院, 辽宁 大连 116024. E-mail: yangzhiq@dlut.edu.cn

距离就是 Gordian 距离. Hirasawa 和 Uchida[2]研究了纽结的 Gordian 复形, 它的顶点是 $\mathbb{S}^3$ 中所有的纽结.

定义 1.1[2] 纽结的 Gordian 复形 $\mathcal{G}$ 是一个复形, 满足:

(1) $\mathcal{G}$ 的顶点是由 $\mathbb{S}^3$ 中的所有纽结组成;

(2) $n+1$ 个顶点 $\{K_0, K_1, \cdots, K_n\}$ 生成一个 n-单形, 当且仅当这 $n+1$ 个纽结中任意两个之间的 Gordian 距离等于 1.

Hirasawa 和 Uchida 证明了如下结论.

定理 1.1[2] 对 Gordian 复形中的任意 1- 单形 e, 都存在一个无限维的单形 σ, 使得 e 是 σ 的一个子复形.

推论 1.1[2] 对任意纽结 K_0, 都存在一族纽结 $K_0, K_1, K_2, \cdots$, 使得 $d_G(K_i, K_j) = 1$, 其中 $i \neq j$.

在 Hirasawa 和 Uchida 研究了 Gordian 复形之后, 纽结的一些其他局部变换的 Gordian 复形也被研究了. Ohyama[3]研究了纽结的 C_k-Gordian 复形. Horiuchi 等人[4]研究了虚拟纽结的 Gordian 复形. 本文作者[5]研究了纽结的 $H(n)$-Gordian 复形.

本文将纽结的 Gordian 复形推广到 n-Gordian 复形.

定义 1.2 设 $n \geqslant 1$, 定义纽结的 n-Gordian 复形 $\mathcal{G}_n$ 如下:

(1) $\mathcal{G}_n$ 的顶点是由 $\mathbb{S}^3$ 中的所有纽结组成;

(2) $r+1$ 个顶点 $\{K_0,\ K_1, \cdots, K_r\}$ 生成一个 r-单形, 当且仅当这 $r+1$ 个纽结中任意两个之间的 n-Gordian 距离等于 1.

以下我们只讨论 n 为偶数的情况, 并证明定理 1.2.

定理 1.2 若 n 为偶数, 则对 n-Gordian 复形 $\mathcal{G}_n$ 的任意 0-单形 p, 存在 $\mathcal{G}_n$ 的一个任意高维数的单形 σ, 使得 p 是 σ 的一个子复形.

推论 1.2 若 n 为偶数, 则对任意纽结 K_0, 存在一族纽结 $K_0,\ K_1, K_2, \cdots$, 使得 $d_n(K_i, K_j) = 1$, $i \neq j$.

§2 定理 1.2 的证明

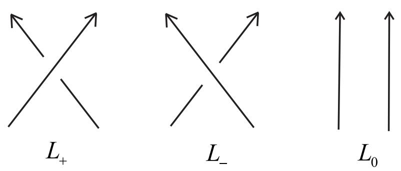

图 2 3 个拆接链环

本文将用 HOMFLY 多项式的系数多项式 (见 [2, 6]) 区分一族纽结.

引理 2.1[6] (1) HOMFLY 多项式的 n-系数多项式 $c_n(L; x)$ 由如下条件唯一确定:

(a) $c_0(\text{unknot}; x) = 1, \quad c_n(\text{unknot}; x) = 0,\ n \neq 0;$

(b) $xc_n(L_+; x) - c_n(L_-; x) = c_{n-\delta}(L_0; x)$, 其中 $\delta = \frac{1}{2}(r_+ - r_0 + 1)$, $L_+,\ L_-,\ L_0$ 是关系如图 2 所示的 3 个定向链环, r_+ 和 r_0 分别是 L_+ 和 L_0 的分支数.

(2) 设 K_i 是 L 的分支,$i=1,2,\cdots,r$, λ 是 L 的总环绕数, 即 $\lambda=\sum\limits_{i<j}\mathrm{Link}(K_i,K_j)$, 则

$$c_0(L;x)=(x-1)^{r-1}x^{-\lambda}c_0(K_1;x)c_0(K_2;x)\cdots c_0(K_r;x).$$

简记 $c_n(L;x)$ 为 $c_n(L)$, 则有如下推论.

推论 2.1 (1) 设 L_+, L_- 是纽结, 则

$$xc_0(L_+)-c_0(L_-)=c_0(L_0).$$

(2) 设 L 是分支数为 2 的链环且 $L=l_1\bigcup l_2$, 则

$$c_0(L)=(x-1)x^{-\lambda}c_0(l_1)c_0(l_2),$$

其中 $\lambda=\mathrm{Link}(l_1,l_2)$.

为证明定理 1.2, 只需对 0-单形 p 是平凡结进行证明即可, 这是因为如果对平凡结定理 1.2 成立, 那么对其他情况的证明就可以通过平凡结和 K_0 做连通和得以证明.

设 $n=2m$, 对任意非负整数 r, 在此借鉴文 [2] 中所采用的图, 设 K_r 是图 3 所示的纽结, K_0 是平凡结. 设 $0\leqslant a\leqslant r-1$, $1\leqslant b\leqslant r-a$. 在 K_{a+b} 交叉点 c_{a+1} 处实施一次 n-move, K_{a+b} 变成 K_a. 因此 $d_n(K_i,K_j)\leqslant 1$, $0\leqslant i,j\leqslant r$, $i\neq j$. 为了证明 $d_n(K_i,K_j)=1$, $0\leqslant i,j\leqslant r$, $i\neq j$, 只需证明 K_0, $K_1,\cdots,$ K_r 是不同的纽结. 下面将用纽结不变量 $c_0(L)$ 区分 K_i 和 K_j, $i\neq j$.

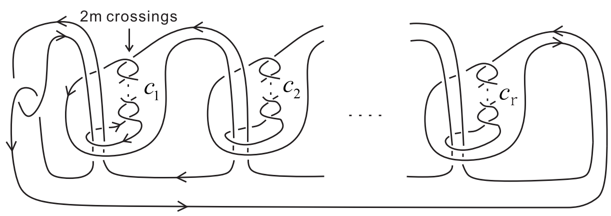

图 3 K_r

由推论 2.1 和图 4 中 K_r 的拆接树得如下关系:

$$c_0(K_r)=\frac{1}{x}(1+(x-1)c_0(L(2m,r)))=\frac{1}{x}+\Big(1-\frac{1}{x}\Big)c_0(L(2m,r)),$$

其中 $L(a,b)$ 是图 5 所示的纽结, $L(0,b)$ 是平凡结. 为完成证明, 只需证明 $c_0(K_i)$, $i=0,1,\cdots,r$ 不相等.

由拆接树, 得

$$\begin{aligned}c_0(L(2m,r))&=\frac{1}{x}c_0(L(2m-2,r))+(x-1)c_0(K_{r-1})\\&=\frac{1}{x}\Big(\frac{1}{x}c_0(L(2m-4,r))+(x-1)c_0(K_{r-1})\Big)+(x-1)c_0(K_{r-1})\\&=\frac{1}{x^2}c_0(L(2m-4,r))+\frac{1}{x}(x-1)c_0(K_{r-1})+(x-1)c_0(K_{r-1})\\&\ \vdots\\&=\frac{1}{x^m}c_0(L(0,r))+\Big(\frac{1}{x^{m-1}}+\frac{1}{x^{m-2}}+\cdots+1\Big)(x-1)c_0(K_{r-1})\end{aligned}$$

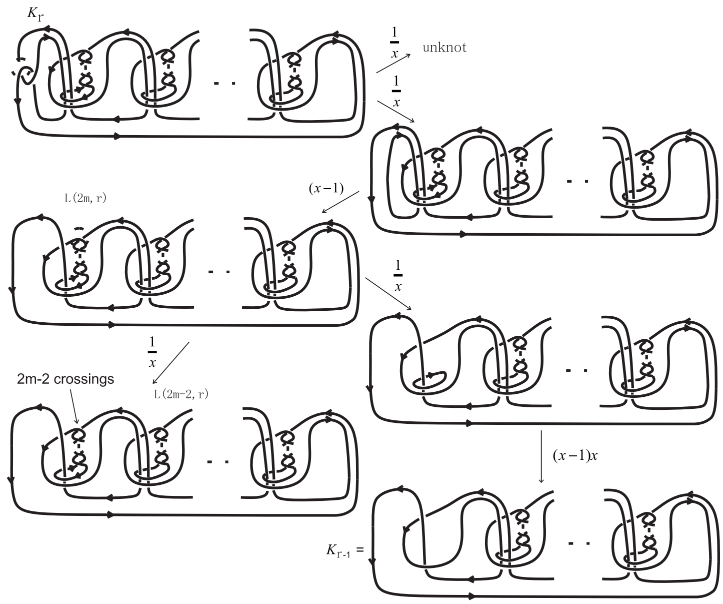

图 4 K_r 的拆接树

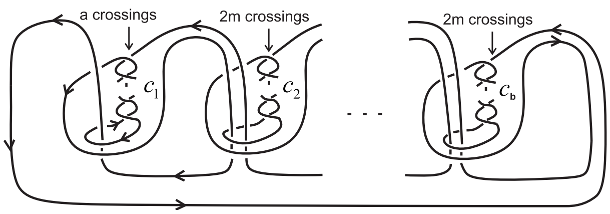

图 5 $L(a,b)$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{x^m} + \Big(\frac{1}{x^{m-1}} + \frac{1}{x^{m-2}} + \cdots + 1\Big)(x-1)c_0(K_{r-1})\\
&= \frac{1}{x^m} + \Big(x - \frac{1}{x^{m-1}}\Big)c_0(K_{r-1}).
\end{aligned}
$$

因此,

$$
\begin{aligned}
c_0(K_r) &= \frac{1}{x} + \Big(1 - \frac{1}{x}\Big)c_0(L(2m,r))\\
&= \frac{1}{x} + \Big(1 - \frac{1}{x}\Big)\Big(\frac{1}{x^m} + \Big(x - \frac{1}{x^{m-1}}\Big)c_0(K_{r-1})\Big)\\
&= \frac{1}{x} + \frac{1}{x^m} - \frac{1}{x^{m+1}} + \Big(1 - \frac{1}{x}\Big)\Big(x - \frac{1}{x^{m-1}}\Big)c_0(K_{r-1}).
\end{aligned}
$$

类似地, 有

$$c_0(K_i)=\frac{1}{x}+\frac{1}{x^m}-\frac{1}{x^{m+1}}+\Big(1-\frac{1}{x}\Big)\Big(x-\frac{1}{x^{m-1}}\Big)c_0(K_{i-1}),\quad i=1,\cdots,r.$$

注意到 K_0 是平凡结, 所以

$$c_0(K_0)=1,\quad c_0(K_1)=\frac{1}{x}+\frac{1}{x^m}-\frac{1}{x^{m+1}}+\Big(1-\frac{1}{x}\Big)\Big(x-\frac{1}{x^{m-1}}\Big).$$

因为

$$\max\deg c_0(K_0)=0,\quad \max\deg c_0(K_1)=1.$$

对 i 进行归纳, 易得

$$\max\deg c_0(K_i)=i,\quad i=0,1,\cdots,r.$$

因此 $c_0(K_i)$, $i=0,1,\cdots,r$ 不相等. 从而 K_i 和 K_j 不合痕, $i\neq j$, 得证.

§3　一个推论

1969 年, Erle[7]介绍了定向纽结和链环的一种局部变换. 1983 年, Kauffman[8]研究了纽结和链环在这种局部变换下的结构. 现在称这种变换为 pass-move, 如图 6 所示.

纽结 K 和 K' 之间的 pass-move-Gordian 距离是 K 通过 pass-move 变为 K' 需要 pass-move 的最小次数, 记作 $d_{\rm pass}(K,K')$. 设 $0\leqslant a\leqslant r-1$, $1\leqslant b\leqslant r-a$. 注意到在图 7 所示的纽结中的 d_{a+1} 交叉点处实施一次 pass-move, 就将 K_{a+b} 变为 K_a. 这表明 $d_{\rm pass}(K_i,K_j)\leqslant 1$, $0\leqslant i,j\leqslant r$, $i\neq j$. 因为 K_i 不合痕于 K_j $(i\neq j)$, $d_{\rm pass}(K_i,K_j)=1$. 因此有如下推论.

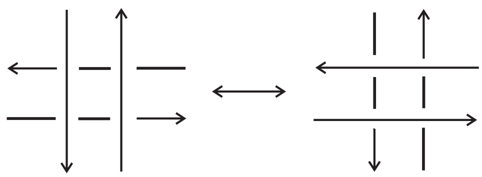

图 6　pass-move

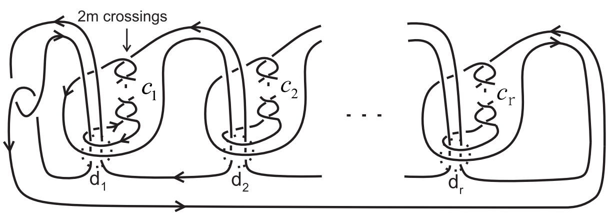

图 7　K_r

推论 3.1　若 n 是偶数, 则对任意纽结 K_0, 都存在一族纽结 $K_0,K_1,K_2,\cdots$, 使得 $d_n(K_i,K_j)=1$, $d_{\rm pass}(K_i,K_j)=1$, $i\neq j$.

参 考 文 献

[1] Nakanishi Y. On Fox's congruence classes of knots [J]. *Osaka J Math*, 1987, 24:217–225.

[2] Hirasawa M, Uchida Y. The gordian complex of knots [J]. *J Knot Theory Ramifications*, 2002, 11(3):363–368.

[3] Ohyama Y. The C_k-gordian complex of knots [J]. *J Knot Theory Ramifications*, 2006, 15(1):73–80.

[4] Horiuchi S, Komura K, Ohyama Y, et al. The Gordian complex of virtual knots [J]. *J Knot Theory Ramifications*, 2012, 21(14):1250122, 11 pp.

[5] Zhang K, Yang Z Q. The H_n-Gordian complex of knots [J]. *J Knot Theory Ramifications*, 2017, 26(13):7pages.

[6] Kawauchi A. On coefficient polynomials of the skein polynomial of an oriented link [J]. *Kobe J Math*, 1994, 11(1):49–68.

[7] Erle D. Die quadratische form eines knotten und ein Satz uber knotenmanningfaltigkeiten [J]. *J Reine Angrew Math*, 1969, 235:174–217.

[8] Kauffman L H. Formal knot theory [M]//Mathematical Notes, Vol 30, Princeton: Princeton University Press, 1983.

The n-Gordian Complex of Knots

ZHANG Kai[1] YANG Zhiqing[2]

[1]School of Statistics, Jiangxi University of Finance and Economics, Nanchang 330013, China. E-mail: A0721zhangkai@163.com

[2]School of Mathematical Sciences, Dalian University of Technology, Dalian 116024, Liaoning, China. E-mail: yangzhq@dlut.edu.cn

Abstract In this paper, the n-Gordian complex of knots is defined which is an extention of the Gordian complex of knots. The authors show that if $n \geqslant 2$ and n is even, then for any knot K and any positive integer r, there is a finite set of knots of size r containing K, such that the n-Gordian distance between any two knots in this set is 1.

Keywords Knot, n-Move, n-Gordian distance, n-Gordian complex

2000 MR Subject Classification 57M25

The English translation of this paper will be published in
Chinese Journal of Contemporary Mathematics, Vol. 40 No. 4, 2019
by ALLERTON PRESS, INC., USA