数 学 年 刊 A 辑
2019, 40(4):449–456
DOI: 10.16205/j.cnki.cama.2019.0034

辛对称 Hamilton 算子值域的闭性*

李政长[1] 黄俊杰[2] 阿拉坦仓[3]

提要 利用扰动理论和算子矩阵的因式分解, 研究了辛对称 Hamilton 算子值域的闭性. 针对对角占优、上行占优等情形, 在一定条件下给出了值域闭性的若干描述, 并得到了一般情形的结果.

关键词 辛对称 Hamilton 算子, 闭算子, 值域, 可逆性

MR (2000) 主题分类 47A10, 47A55, 47B99

中图法分类 O175.3

文献标志码 A

文章编号 1000-8314(2019)04-0449-08

1 引 言

1991 年以来, 钟万勰院士等将 Hamilton 系统引入到弹性力学中, 并采用辛 Fourier 级数展开方法研究了有关力学问题[1−4], 而相应的 Hamilton 算子是一类非自伴算子矩阵, 可定义为 Hilbert 空间 $X \oplus X$ 中的稠定线性算子:

$$\mathcal{H} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & -A^* \end{pmatrix} : \mathfrak{D}(\mathcal{H}) \subset X \oplus X \to X \oplus X,$$

其中 A 为 X 中的稠定算子, B, C 为 X 中的自伴算子, A^* 表示 A 的伴随算子. 若 B, C 为 X 中的对称算子, 我们称 $\mathcal{H}$ 为辛对称 Hamilton 算子, 易知 $\mathcal{H}$ 是 $\mathcal{J}$-对称算子[5], 其中 $\mathcal{J} = \left(\begin{smallmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{smallmatrix}\right)$.

值域的闭性是算子的重要性质之一, 从方程角度来看, 相应于具有闭值域的闭算子的微分方程的解是稳定的; 从算子本身来看, 值域的闭性是研究可逆性和广义逆等性质时需要讨论的问题.

本文主要利用扰动理论和算子矩阵因式分解方法研究辛对称 Hamilton 算子值域的闭性, 针对不同定义域分解出具有较好性质的算子矩阵, 借助其特性刻画原算子矩阵值域的闭性, 而这些分解出的算子矩阵也使得原算子矩阵的许多性质和几何结构变得简洁明了. 此外, 还讨论了辛对称 Hamilton 算子可逆的条件. 由于 Hamilton 算子的次对角元是自伴的, 当其在定义域的某个稠子空间上限制后并不能保证自伴性, 但它一定是对称的, 因此本文的研究对象是更为一般的辛对称 Hamilton 算子.

本文 2017 年 7 月 10 日收到, 2018 年 11 月 26 日收到修改稿.

[1]内蒙古大学数学科学学院, 呼和浩特 010021. E-mail: lizhengzh808@163.com

[2]通信作者. 内蒙古大学数学科学学院, 呼和浩特 010021. E-mail: huangjunjie@imu.edu.cn

[3]呼和浩特民族学院数学系, 呼和浩特 010051. E-mail: alatanca@imu.edu.cn

*本文受到国家自然科学基金 (No. 11461049, No. 11761029) 和内蒙古自治区自然科学基金 (No. 2017MS0118) 的资助.

2 预备知识

文中用 $\mathfrak{D}(T), \mathcal{R}(T), \mathcal{N}(T)$ 表示算子 T 的定义域、值域和零空间. 对于给定的闭子空间 $\mathcal{M}$, $P_{\mathcal{M}}$ 表示 $\mathcal{M}$ 上的正交投影, $T|_{\mathcal{M}}$ 表示算子 T 在 $\mathcal{M}$ 上的限制, $\overline{T}$ 表示算子 T 的闭包. 文中所述的某算子可逆是指该算子具有定义于全空间上的有界逆算子.

为证明本文的主要结论, 先给出如下定义及引理.

定义 2.1[6] 设 X_1, X_2, X_3 是 Hilbert 空间,

$$T:\mathfrak{D}(T)\subset X_1\to X_2,\ S:\mathfrak{D}(S)\subset X_1\to X_3$$

是线性算子, 如果 $\mathfrak{D}(T)\subset\mathfrak{D}(S)$ 且存在非负常数 a_s, b_s, 使得对任意的 $x\in\mathfrak{D}(T)$, 有

$$\| Sx \|_3\leqslant a_s \| x \|_1 +b_s \| Tx \|_2,$$

则称算子 S 相对于 T 有界, 其中 $\|\cdot\|_i$, $i=1,2,3$ 表示 X_i 中的范数. 使得上式成立的所有 b_s 的下确界称为算子 S 关于 T 的相对界, 简称 T-界.

注 2.1[6] 对于上述所定义的算子, 如果 T 是闭算子, S 是可闭算子, 则 S 相对于 T 有界, 当且仅当 $\mathfrak{D}(T)\subset\mathfrak{D}(S)$.

引理 2.1[6] 设 X,Y 是 Hilbert 空间, T, A 是从 X 到 Y 的线性算子, 如果算子 A 相对于 T 有界且 T-界小于 1, 则 $S=T+A$ 闭, 当且仅当 T 闭.

由引理 2.1 和文 [7, 命题 1], 有下面的引理.

引理 2.2 设 X_1, X_2, X_3 是 Hilbert 空间, $A:\mathfrak{D}(A)\subset X_1\to X_2$ 是线性算子, $B:X_2\to X_3$ 是有界线性算子, 如果存在 $\gamma>0$, 使得 $\|\gamma B-\mathrm{I}\|<1$, 则 BA 闭, 当且仅当 A 闭.

引理 2.3[8] 设 X 是 Hilbert 空间, T 是 X 中的对称线性算子且 $\mathfrak{D}(T)=X$, 则 T 是有界线性算子.

引理 2.4[9] 设 X,Y 是 Hilbert 空间, $T:\mathfrak{D}(T)\subset X\to Y$ 是闭算子, $S:\mathfrak{D}(S)\subset X\to Y$ 是 T-有界的且 $\dim(\mathcal{R}(S))<\infty$, 则 $\mathcal{R}(T+S)$ 是闭集, 当且仅当 $\mathcal{R}(T)$ 是闭集.

引理 2.5 设 X_1, X_2, X_3 是 Hilbert 空间,

$$T:\mathfrak{D}(T)\subset X_1\to X_3,\quad S:\mathfrak{D}(S)\subset X_1\to X_2,\quad G:\mathfrak{D}(G)\subset X_2\to X_3$$

都为线性算子, 若 $\mathfrak{D}(G)\subset\mathcal{R}(S)$ 且 $T=GS$, 则 $\mathcal{R}(T)$ 是闭的, 当且仅当 $\mathcal{R}(G)$ 是闭的.

证 因为 $T=GS$, 且 $\mathfrak{D}(G)\subset\mathcal{R}(S)$, 所以 $\mathcal{R}(T)=\mathcal{R}(G)$, 进而结论显然.

引理 2.6[5] 设 $\mathcal{H}$ 是辛对称 Hamilton 算子, 若 $\mathcal{H}$ 为闭算子, 则 $\mathcal{H}$ 可逆, 当且仅当 $\mathcal{H}$ 右可逆.

3 主要结论及其证明

先考虑上三角辛对称 Hamilton 算子值域的闭性. 对于对角占优情形, 我们有下面的定理.

定理 3.1 设 X 是 Hilbert 空间,

$$\mathcal{H}=\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & -A^* \end{pmatrix}:\mathfrak{D}(A)\oplus\mathfrak{D}(A^*)\to X\oplus X$$

是辛对称 Hamilton 算子, 若 $\mathcal{R}(A)$ 闭, 则 $\mathcal{H}$ 闭且 $\mathcal{R}(\mathcal{H})$ 闭, 当且仅当 A 闭且

$$P_{\mathcal{R}(A)^\perp}B:\mathcal{R}(A)^\perp\to\mathcal{R}(A)^\perp$$

具有闭值域.

证 先考虑算子的闭性. 若 $\mathcal{H}$ 是闭算子, 显然 A 是闭算子. 反之, 若 A 是闭算子, 设 $\left(\begin{smallmatrix} x_n \\ y_n \end{smallmatrix}\right)\in\mathfrak{D}(\mathcal{H})$, $\left(\begin{smallmatrix} x_n \\ y_n \end{smallmatrix}\right)\to\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right)$, $\mathcal{H}\left(\begin{smallmatrix} x_n \\ y_n \end{smallmatrix}\right)\to\left(\begin{smallmatrix} u \\ v \end{smallmatrix}\right)(n\to\infty)$, 即 $Ax_n+By_n\to u$ 且 $-A^*y_n\to v$. 由 A^* 的闭性知, $y\in\mathfrak{D}(A^*)$ 且 $-A^*y=v$. 又 $\mathfrak{D}(A^*)\subset\mathfrak{D}(B)$ 且 B 为对称算子, 由注 2.1 知 B 相对于 A^* 有界, 即存在非负常数 a_B,b_B, 使得对任意的 $y_n\in\mathfrak{D}(A^*)$, 有

$$\| By_n \|\leqslant a_B\| y_n \|+b_B\| A^*y_n \|,$$

因此 $\{y_n\}$ 和 $\{-A^*y_n\}$ 是 Cauchy 列蕴含 $\{By_n\}$ 为 Cauchy 列. 不妨假设 $By_n\to w$, 则 $B^*y_n\to w$, 故 $y\in\mathfrak{D}(B^*)$, $B^*y=w$, 又 $y\in D(A^*)\subset\mathfrak{D}(B)$, 故 $By=w$, 因此 $Ax_n\to u-w$. 注意到 A 的闭性, 有 $x\in\mathfrak{D}(A)$ 且 $Ax=u-w$, 即

$$Ax+By=Ax+w=u.$$

综上, $\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right)\in\mathfrak{D}(\mathcal{H})$ 且 $\mathcal{H}\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right)=\left(\begin{smallmatrix} u \\ v \end{smallmatrix}\right)$, 因此 $\mathcal{H}$ 是闭算子.

下面在 $\mathcal{H}$ 是闭算子的条件下考虑值域的闭性. 已知 $\mathcal{R}(A)$ 闭, 由 Banach 闭值域定理知 $\mathcal{R}(A^*)$ 闭, 所以 $\mathcal{H}$ 有如下分块表示:

$$\mathcal{H}=\begin{pmatrix} 0 & A_1 & B_1 & B_2 \\ 0 & 0 & B_3 & B_4 \\ 0 & 0 & 0 & -(A^*)_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}:\begin{pmatrix} \mathcal{N}(A) \\ \mathcal{N}(A)^\perp \\ \mathcal{N}(A^*) \\ \mathcal{N}(A^*)^\perp \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} \mathcal{R}(A) \\ \mathcal{R}(A)^\perp \\ \mathcal{R}(A^*) \\ \mathcal{R}(A^*)^\perp \end{pmatrix},$$

其中 $A_1=P_{\mathcal{R}(A)}A|_{\mathcal{N}(A)^\perp\cap\mathcal{D}(A)}$ 和 $(A^*)_1=P_{\mathcal{R}(A^*)}A^*|_{\mathcal{N}(A^*)^\perp\cap\mathcal{D}(A^*)}$ 分别在 $\mathcal{R}(A)$ 和 $\mathcal{R}(A^*)$ 上具有有界逆. 因此, $\mathcal{H}$ 有如下分解表示:

$$\mathcal{H}=M\widetilde{\mathcal{H}}N,$$

其中

$$\widetilde{\mathcal{H}}=\begin{pmatrix} 0 & A_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & B_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -(A^*)_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$M=\begin{pmatrix} \mathrm{I}_{\mathcal{R}(A)} & 0 & -B_2(A^*)_1^{-1} & 0 \\ 0 & \mathrm{I}_{\mathcal{R}(A)^\perp} & -B_4(A^*)_1^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & \mathrm{I}_{\mathcal{R}(A^*)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathrm{I}_{\mathcal{R}(A^*)^\perp} \end{pmatrix},\quad N=\begin{pmatrix} \mathrm{I}_{\mathcal{N}(A)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathrm{I}_{\mathcal{N}(A)^\perp} & A_1^{-1}B_1 & 0 \\ 0 & 0 & \mathrm{I}_{\mathcal{N}(A^*)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathrm{I}_{\mathcal{N}(A^*)^\perp} \end{pmatrix}.$$

显然 M 是有界可逆算子, 注意到 $\mathfrak{D}(\widetilde{\mathcal{H}})\subset\mathcal{R}(N)$, 由引理 2.5 知 $\mathcal{R}(\mathcal{H})$ 闭, 当且仅当 $\widetilde{\mathcal{H}}_0=\left(\begin{smallmatrix} A_1 & 0 & 0 \\ 0 & B_3 & 0 \\ 0 & 0 & -(A^*)_1 \end{smallmatrix}\right)$ 的值域闭, 进一步等价于 $B_3=P_{\mathcal{R}(A)^\perp}B|_{\mathcal{N}(A^*)}$ 具有闭值域, 即 $P_{\mathcal{R}(A)^\perp}B:\mathcal{R}(A)^\perp\to\mathcal{R}(A)^\perp$ 的值域闭. 结论证毕.

由定理 3.1 的证明易得如下推论.

推论 3.1 设 X 是 Hilbert 空间, $\mathcal{R}(A)$ 闭, 则存在对称算子 B, 使得辛对称 Hamilton 算子

$$\mathcal{H}_B = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & -A^* \end{pmatrix} : \mathfrak{D}(A) \oplus \mathfrak{D}(A^*) \to X \oplus X$$

为闭算子且值域闭, 当且仅当 A 是闭算子.

证 构造算子

$$B_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \mathrm{I}_{\mathcal{N}(A^*)} & 0 \end{pmatrix} : \mathcal{N}(A^*) \oplus \mathcal{N}(A^*)^{\perp} \to \mathcal{R}(A) \oplus \mathcal{R}(A)^{\perp},$$

显然 B_0 为对称算子且值域闭, 由定理 3.1 的证明易知 $\mathcal{H}_{B_0}$ 为闭算子且 $\mathcal{R}(\mathcal{H}_{B_0})$ 闭.

对于上行占优的情形, 我们有下面的定理.

定理 3.2 设 X 是 Hilbert 空间,

$$\mathcal{H} = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & -A^* \end{pmatrix} : \mathfrak{D}(A) \oplus \mathfrak{D}(B) \to X \oplus X$$

是辛对称 Hamilton 算子, $\mathcal{R}(B) = X$, 如果存在 $\gamma > 0$, 使得 $\|\gamma A^* B^{-1} - \mathrm{I}\| < 1$, 则 $\mathcal{H}$ 闭且 $\mathcal{R}(\mathcal{H})$ 闭, 当且仅当 A 闭且 $\mathcal{R}(A)$ 闭.

证 由 B 的对称性知 $B \subset B^*$, 所以 $\mathcal{R}(B) = X$ 也蕴含着

$$\mathcal{N}(B) \subset \mathcal{N}(B^*) = \mathcal{R}(B)^{\perp} = \{0\},$$

即 B 为单射. 因此, B 是具有定义在全空间上代数逆的对称算子, 从而对任意的 $x, y \in \mathfrak{D}(B^{-1}) = X$, 有

$$(B^{-1}x, y) = (B^{-1}x, BB^{-1}y) = (BB^{-1}x, B^{-1}y) = (x, B^{-1}y),$$

这表明 B^{-1} 为 X 上的对称算子, 由引理 2.3 知 B^{-1} 为 X 中的有界线性算子.

由于 $A^* |_{\mathfrak{D}(B)}$ 为可闭算子, 易得 A^*B^{-1} 是全空间 X 上定义的闭算子. 由闭图像定理可知 A^*B^{-1} 是 X 上的有界线性算子. 由于 $(A^*B^{-1})^* \supset B^{-1}A$, 故 $B^{-1}A$ 有界. 此时, 容易证明

$$\mathcal{H} = \begin{pmatrix} \mathrm{I} & 0 \\ -A^*B^{-1} & \mathrm{I} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & B \\ A^*B^{-1}A & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathrm{I} & 0 \\ B^{-1}A & \mathrm{I} \end{pmatrix} = E\widetilde{\mathcal{H}}F.$$

显然, E 是有界可逆算子, 注意到 $\mathcal{R}(B) = X$, 故 $\mathcal{H}$ 闭且 $\mathcal{R}(\mathcal{H})$ 闭, 当且仅当 $A^*B^{-1}A$ 闭且值域闭.

由于 $\|\gamma A^*B^{-1} - \mathrm{I}\| < 1$ 且 A^*B^{-1} 有界, 应用引理 2.2, $A^*B^{-1}A$ 闭等价于 A 是闭算子. 同时由 $\|\gamma A^*B^{-1} - \mathrm{I}\| < 1$ 易得 A^*B^{-1} 可逆, 故 $A^*B^{-1}A$ 值域闭等价于 $\mathcal{R}(A)$ 闭. 结论证毕.

注 3.1 因为对称算子在稠密子空间上的限制依然保持对称性, 所以对于定义在一般定义域上的辛对称 Hamilton 算子有如下推论.

推论 3.2 设 X 是 Hilbert 空间,

$$\mathcal{H} = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & -A^* \end{pmatrix} : \mathfrak{D}(A) \oplus (\mathfrak{D}(B) \cap \mathfrak{D}(A^*)) \to X \oplus X$$

是辛对称 Hamilton 算子, $\mathcal{R}(B_1)=X$, 如果存在 $\gamma>0$, 使得 $\|\gamma A^*B_1^{-1}-\mathrm{I}\|<1$, 则 $\mathcal{H}$ 闭且 $\mathcal{R}(\mathcal{H})$ 闭, 当且仅当 A 闭且 $\mathcal{R}(A)$ 闭, 其中 $B_1=B\mid_{\mathfrak{D}(B)\cap\mathfrak{D}(-A^*)}$.

推论 3.3 设 X 是 Hilbert 空间,

$$\mathcal{H}=\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & -A^* \end{pmatrix}:\mathfrak{D}(A)\oplus(\mathfrak{D}(B)\cap\mathfrak{D}(A^*))\to X\oplus X$$

是辛对称 Hamilton 算子, $\mathcal{R}(B_1)=X$, 如果存在 $\gamma>0$, 使得 $\|\gamma A^*B_1^{-1}-\mathrm{I}\|<1$, 则 $\mathcal{H}$ 可逆, 当且仅当 A 闭且 $\mathcal{R}(A)=X$, 其中 $B_1=B\mid_{\mathfrak{D}(B)\cap\mathfrak{D}(-A^*)}$.

证 $\mathcal{H}$ 的闭性显然. 由引理 2.6 知, 要说明 $\mathcal{H}$ 可逆只需要证明 $\mathcal{R}(\mathcal{H})=X$, 由定理 3.2 的证明过程, 我们只需说明 $\mathcal{R}(A^*B_1^{-1}A)=X$, 因而结论显然.

下面考虑一般辛对称 Hamilton 算子值域的闭性.

定理 3.3 设 X 是 Hilbert 空间,

$$\mathcal{H}=\begin{pmatrix} A & B \\ C & -A^* \end{pmatrix}:\mathfrak{D}(A)\oplus\mathfrak{D}(B)\to X\oplus X$$

是辛对称 Hamilton 算子, $\mathcal{R}(B)=X$, 如果存在 $\gamma>0$, 使得 $\|\gamma A^*B^{-1}-\mathrm{I}\|<1$, C 的 A-界 $\delta_C<\frac{1}{\|(A^*B^{-1})^{-1}\|}$ 且 $\dim(\mathcal{R}(C))<\infty$, 则 $\mathcal{H}$ 闭且 $\mathcal{R}(\mathcal{H})$ 闭, 当且仅当 A 闭且 $\mathcal{R}(A)$ 闭.

证 由 B 的对称性及 $\mathcal{R}(B)=X$, 再结合定理 3.2 的证明过程易知, B 是在全空间上有有界逆的对称算子, 进而 A^*B^{-1} 是全空间 X 上的有界线性算子. 注意到 $\mathfrak{D}(A^*)$ 在 X 中稠密, 有 $(A^*B^{-1})^*\supset B^{-1}A$, 容易证明

$$\mathcal{H}=\begin{pmatrix} \mathrm{I} & 0 \\ -A^*B^{-1} & \mathrm{I} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & B \\ C+A^*B^{-1}A & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mathrm{I} & 0 \\ B^{-1}A & \mathrm{I} \end{pmatrix},$$

类似定理 3.2 有, $\mathcal{H}$ 闭且 $\mathcal{R}(\mathcal{H})$ 闭, 当且仅当 $C+A^*B^{-1}A$ 闭且 $C+A^*B^{-1}A$ 值域闭.

由于 $\|\gamma A^*B^{-1}-\mathrm{I}\|<1$, 因此 A^*B^{-1} 可逆. 又 C 的 A-界为 δ_C, 故存在 $a_C>0$ 和 $b_C=\delta_C+\varepsilon<\frac{1}{\|(A^*B^{-1})^{-1}\|}$, 使得

$$\begin{aligned}\| Cx \| &\leqslant a_C \| x \| + b_C \| Ax \| \\ &= a_C \| x \| + (\delta_C+\varepsilon) \| (A^*B^{-1})^{-1}A^*B^{-1}Ax \| \\ &\leqslant a_C \| x \| + (\delta_C+\varepsilon) \| (A^*B^{-1})^{-1} \| \| A^*B^{-1}Ax \|,\end{aligned}$$

显然 C 相对 $A^*B^{-1}A$ 的界小于 1, 由引理 2.1 知 $C+A^*B^{-1}A$ 闭等价于 $A^*B^{-1}A$ 闭, 又 $\|\gamma A^*B^{-1}-\mathrm{I}\|<1$ 且 A^*B^{-1} 有界, 应用引理 2.2, $A^*B^{-1}A$ 闭等价于 A 闭.

由于 $\dim(\mathcal{R}(C))<\infty$, $A^*B^{-1}A$ 闭且 C 相对于 $A^*B^{-1}A$ 有界, 由引理 2.4 有 $C+A^*B^{-1}A$ 值域闭, 当且仅当 $A^*B^{-1}A$ 值域闭, 进一步等价于 A 值域闭. 结论证毕.

类似于上三角情形的处理, 有下面的推论.

推论 3.4 设 X 是 Hilbert 空间,

$$\mathcal{H}=\begin{pmatrix} A & B \\ C & -A^* \end{pmatrix}:\mathfrak{D}(A)\oplus(\mathfrak{D}(B)\cap\mathfrak{D}(A^*))\to X\oplus X$$

是辛对称 Hamilton 算子, $\mathcal{R}(B_1)=X$, 如果存在 $\gamma>0$, 使得 $\|\gamma A^*B_1^{-1}-\mathrm{I}\|<1$, C 的 A-界 $\delta_C<\frac{1}{\|(A^*B_1^{-1})^{-1}\|}$ 且 $\dim(\mathcal{R}(C))<\infty$, 则 $\mathcal{H}$ 闭且 $\mathcal{R}(\mathcal{H})$ 闭, 当且仅当 A 闭且 $\mathcal{R}(A)$ 闭, 其中 $B_1=B\,|_{\mathfrak{D}(B)\cap\mathfrak{D}(-A^*)}$.

定理 3.4 设 X 是 Hilbert 空间,

$$\mathcal{H}=\begin{pmatrix} A & B \\ C & -A^* \end{pmatrix}:\mathfrak{D}(C)\oplus\mathfrak{D}(B)\to X\oplus X$$

是辛对称 Hamilton 算子, 如果 A 闭且 $\mathcal{R}(B)=\mathcal{R}(C)=X$, 则 $\mathcal{H}$ 可逆, 当且仅当 F 闭且值域满, 其中 $F=\mathrm{I}+AC^{-1}A^*B^{-1}$.

证 容易证明 B 和 C 是在全空间上有有界逆的对称算子, 结合 A 闭, 易得 A^*B^{-1} 和 AC^{-1} 是全空间 X 上的有界线性算子. 此时 $\mathcal{H}$ 有如下分解:

$$\mathcal{H}=\begin{pmatrix} \mathrm{I} & AC^{-1} \\ 0 & \mathrm{I} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & F \\ \mathrm{I} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mathrm{I} & -A^*B^{-1} \\ 0 & \mathrm{I} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} C & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}=M\widetilde{\mathcal{H}}NQ,$$

易知 Q 在 $X\oplus X$ 上具有有界逆, 所以 $\mathcal{H}$ 的可逆性就等价于 $M\widetilde{\mathcal{H}}N$ 闭且值域满. 显然 M 和 N 在 $X\oplus X$ 上具有有界逆, 所以 $\mathcal{H}$ 的闭性及可逆性进一步等价于 $F=\mathrm{I}+AC^{-1}A^*B^{-1}$ 闭且值域满. 结论证毕.

推论 3.5 设 X 是 Hilbert 空间,

$$\mathcal{H}=\begin{pmatrix} A & B \\ C & -A^* \end{pmatrix}:\mathfrak{D}(C)\oplus\mathfrak{D}(B)\to X\oplus X$$

是辛对称 Hamilton 算子, 如果 A 闭且 $\mathcal{R}(B)=\mathcal{R}(C)=X$, 则 $\lambda\in\rho(\mathcal{H})$, 当且仅当 $-1\in\rho((A-\lambda)C^{-1}(A^*+\lambda)B^{-1})$.

证 由定理 3.4 的证明易知, $\mathcal{H}-\lambda$ 闭且有如下分解:

$$\mathcal{H}-\lambda=\begin{pmatrix} \mathrm{I} & (A-\lambda)C^{-1} \\ 0 & \mathrm{I} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & F(\lambda) \\ \mathrm{I} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mathrm{I} & -(A^*+\lambda)B^{-1} \\ 0 & \mathrm{I} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} C & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix},$$

其中 $F(\lambda)=\mathrm{I}+(A-\lambda)C^{-1}(A^*+\lambda)B^{-1}$, 结论自然成立.

注 3.2 由于自伴算子的限制是对称算子, 故文中得到的所有结论对于 Hamilton 算子同样适用.

4 例

记 $L^2[a,b]$ 为区间 $[a,b]$ 上所有 Lebesgue 平方可积的复函数构成的 Hilbert 空间, 并记 $AC[a,b]$ 为区间 $[a,b]$ 上所有绝对连续的复函数全体.

例 4.1 设 $X=L^2[0,1]$, $\mathcal{A}=AC[0,1]$, 考虑微分算子矩阵 $\mathcal{H}=\begin{pmatrix} -\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2} & \mathrm{i}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \\ 0 & \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2} \end{pmatrix}$ 在不同定义域上值域的闭性. 不妨记 $A=-\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}, B=\mathrm{i}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$.

情形 1 若

$$\mathfrak{D}(A)=\mathfrak{D}(A^*)=\{x\in X\mid x,x'\in\mathcal{A},x''\in X,x(0)=x(1)=0\},$$

$$\mathfrak{D}(B)=\{x\in X\mid x\in\mathcal{A},x'\in X,x(0)=x(1)=0\},$$

则 A 为闭算子且 $\mathcal{R}(A)=X$, B 为对称算子, 故 $\mathcal{H}$ 为辛对称 Hamilton 算子. 由定理 3.1 易知 $\mathcal{H}$ 为闭算子且 $\mathcal{H}$ 值域闭.

情形 2 若 $\mathfrak{D}(A)=\mathfrak{D}(A^*)$ 的定义同情形 1, 而

$$\mathfrak{D}(B)=\{x\in X\mid x\in\mathcal{A},x'\in X,x(0)=x(1)\},$$

则 B 为自伴算子, 并且 $\mathcal{H}$ 为 Hamilton 算子. 但若将 B 限制在 $\mathfrak{D}(B)\cap\mathfrak{D}(A^*)$ 上, 其自伴性便不再保持, 此时 $\mathcal{H}$ 为辛对称 Hamilton 算子. 无论如何, 类似情形 1, 同样可得 $\mathcal{H}$ 的值域闭.

例 4.2 设 $X=L^2[0,1]$, $\mathcal{A}=AC[0,1]$, 考虑微分算子矩阵

$$\mathcal{H}=\begin{pmatrix}\mathrm{i}\dfrac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2} & -\dfrac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\\ -\dfrac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2} & \mathrm{i}\dfrac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\end{pmatrix},$$

其中 $A=\mathrm{i}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}$, $B=C=-\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}$, $\mathfrak{D}(A)=\mathfrak{D}(B)=\mathfrak{D}(A^*)=\{x\in X\mid x,x'\in\mathcal{A},x''\in X,x(0)=x(1)=0\}$. 此时, $\mathrm{i}A$ 和 $B=C$ 均为自伴算子, $\mathcal{H}$ 为 Hamilton 算子且 $F=\mathrm{I}+AC^{-1}A^*B^{-1}=2\mathrm{I}$ 可逆. 由定理 3.4 可知 $\mathcal{H}$ 是可逆算子.

致谢 感谢审稿人提出的宝贵意见.

参 考 文 献

[1] 钟万勰. 分离变量法与哈密尔顿体系 [J]. *计算结构力学及其应用*, 1991, 8(3):229–240.

[2] Hu X, Bui T Q, Wang J, et al. A new cohesive crack tip symplectic analytical singular element involving plastic zone length for fatigue crack growth prediction under variable amplitude cyclic loading [J]. *Eur J Mech A/Solids* , 2017, 65:79–90.

[3] Xu C, Rong D, Zhou Z, et al. A novel Hamiltonian-based method for two-dimensional transient heat conduction in a rectangle with specific mixed boundary conditions [J]. *J Therm Sci & Tech*, 2017, 12(2):1–11.

[4] Wang H, Li L, Huang J, et al. Symplectic approach for the plane elasticity problem of quasicrystals with point group 10mm [J]. *Appl Math Model*, 2015, 39(12):3306–3316.

[5] 齐雅茹, 黄俊杰, 阿拉坦仓. 无界形式 Hamilton 算子的可逆性 [J]. *数学物理学报*, 2014, 31(5):1188–1195.

[6] Kato T. Perturabtion theroy for linear operators, 2nd ed. [M]. Berlin: Springer-Verlag, 1995.

[7] Mortad M H. On the closedness, the self-adjointness and the normality of the product of two unbounded operators [J]. *Demonstratio Mathematica*, 2012, 45(1):161–167.

[8] Taylor A E, Lay D C. Introduction to functional analysis, 2nd ed. [M]. New York: John Wiley & Sons, 1980.

[9] Chen A, Qi Y, Huang J. Left invertibility of formal Hamiltonian operators [J]. *Linear and Multilinear Algebra*, 2015, 63(2):235–243.

Closedness of Range of Symplectic Symmetric Hamiltonian Operators

LI Zhengzhang[1] HUANG Junjie[2] ALATANCANG[3]

[1]School of Mathematical Sciences, Inner Mongolia University, Hohhot 010021, China. E-mail: lizhengzh808@163.com

[2]Corresponding author. School of Mathematical Sciences, Inner Mongolia University, Hohhot 010021, China. E-mail: huangjunjie@imu.edu.cn

[3]Department of Mathematics, Hohhot Minzu College, Hohhot 010051, China. E-mail: alatanca@imu.edu.cn

Abstract Using the perturbation theory and the factorization of operator matrices, the authors investigate the closedness of range of symplectic symmetric Hamiltonian operators. Some descriptions on closedness of range are given for the cases such as diagonal dominant and upper dominant, and the results for the general case are actually presented.

Keywords Symplectic symmetric Hamiltonian operator, Closed operator, Range, Invertibility

2000 MR Subject Classification 47A10, 47A55, 47B99

The English translation of this paper will be published in
Chinese Journal of Contemporary Mathematics, Vol. 40 No. 4, 2019
by ALLERTON PRESS, INC., USA