数 学 年 刊 A 辑
2019, 40(4):457–466
DOI: 10.16205/j.cnki.cama.2019.0035

有限 $\mu_{M,D}$-正交指数函数系的一个充分条件*

李 娜[1] 李建林[1]

提要 设 $\mu_{M,D}$ 是由仿射迭代函数系 $\{\phi_d(x)=M^{-1}(x+d)\}_{d\in D}$ 唯一确定的自仿测度, 它的谱与非谱性质与 Hilbert 空间 $L^2(\mu_{M,D})$ 中正交指数函数系的有限性和无限性有着直接的关系. 本文将利用矩阵的初等变换给出 $\mu_{M,D}$ 正交指数函数系有限性的一个充分条件. 由于这个条件只与矩阵 M 的行列式有关, 因此, 它在 $\mu_{M,D}$ 的非谱性的判断方面便于直接验证.

关键词 自仿测度, 正交指数函数系, 非谱性, 行列式

MR (2000) 主题分类 28A80, 42C10

中图法分类 O174.2

文献标志码 A

文章编号 1000-8314(2019)04-0457-10

1 引 言

设 $M\in M_n(\mathbb{Z})$ 为整数扩张矩阵, $D\subset\mathbb{Z}^n$ 是一个有限数字集, 记它的基数为 $|D|$, 二者确定一个仿射迭代函数系 (IFS)$\{\phi_d(x)=M^{-1}(x+d)\}_{d\in D}$. 由 Hutchinson[1]的结果可知, 存在一个唯一的概率测度 $\mu:=\mu_{M,D}$, 满足 $\mu=\frac{1}{|D|}\sum\limits_{d\in D}\mu\circ\phi_d^{-1}$. 由于 μ 是由仿射迭代函数系产生的, 则称上述 $\mu_{M,D}$ 为自仿测度. 同时, 对于此迭代函数系还存在唯一一个非空紧集 $T:=T(M,D)$, 满足 $T=\bigcup\limits_{d\in D}\phi_d(T)$. 准确地来说, $T(M,D)$ 是仿射迭代函数系 $\{\phi_d(x)\}_{d\in D}$ 的吸引子或不变集, 而且自仿测度 $\mu_{M,D}$ 的支撑是 $T(M,D)$.

对于自仿测度 $\mu_{M,D}$, 如果存在集合 $\Lambda\subset\mathbb{R}^n$, 使得指数函数系 $E(\Lambda):=\{\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}\langle\lambda,x\rangle}:\lambda\in\Lambda\}$ 组成 Hilbert 空间 $L^2(\mu_{M,D})$ 的正交基 (Fourier 基), 则称 $\mu_{M,D}$ 为谱测度, 集合 Λ 称为 $\mu_{M,D}$ 的一个谱, 那么称 $(\mu_{M,D},\Lambda)$ 是一个谱对[2–3]. $L^2(\mu_{M,D})$ 中正交指数函数组成的集合 $E(\Lambda)$ 通常简称为 $\mu_{M,D}$-正交指数函数系. 自仿测度 $\mu_{M,D}$ 的谱性和非谱性与 $\mu_{M,D}$-正交指数函数系的有限性和无限性有着直接的联系. 近年来, 众多学者在探究 $\mu_{M,D}$ 的谱与非谱性质方面做出很多努力, 而如何确定 Hilbert 空间 $L^2(\mu_{M,D})$ 中有有限或无限正交指数函数系也成为一个研究的重点问题.

自仿测度的非谱问题由以下两类组成[4–5]:

(i) $L^2(\mu_{M,D})$ 中至多含有有限个正交指数函数;

(ii) $L^2(\mu_{M,D})$ 中有无限正交指数函数系, 但不完备, 即不能组成正交基.

每一类中都有相应的问题有待解决.

关于 $L^2(\mu_{M,D})$ 空间中只有有限正交指数函数系的判断条件已经有一些结果. 为了方便叙述这些条件, 我们先来回顾以下的定义: 对于有限数字集 $D\subset\mathbb{Z}^n$, 定义函数 $m_D(x):=\frac{1}{|D|}\sum\limits_{d\in D}\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}\langle d,x\rangle}$, $x\in\mathbb{R}^n$. 用 M^* 表示矩阵 M 的共轭转置, 事实上, 这里 $M^*=M^{\mathrm{T}}$. 用 $Z(m_D)$ 表示 $m_D(x)$ 的零点集, 即 $Z(m_D):=\{x\in\mathbb{R}^n:m_D(x)=0\}$. 定义集合 $Z:=\{x\in[0,1)^n:m_D(x)=0\}$.

本文 2015 年 7 月 14 日收到, 2015 年 12 月 29 日收到修改稿.

[1]陕西师范大学数学与信息科学学院, 陕西 西安 710119. E-mail: jllimath10@snnu.edu.com

*本文受到国家自然科学基金 (No. 11171201, No. 11571214) 的资助.

Dutkay 和 Jorgensen 在文 [4] 中得到了 $\mu_{M,D}$ 为非谱测度的一个充分条件.

定理 A[4] 设 $M \in M_n(\mathbb{Z})$ 是一个整数扩张矩阵, $D \subset \mathbb{Z}^n$ 是一个有限数字集, $0 \in D$, Z 为函数 $m_D(x)$ 在 $[0,1)^n$ 中的零点集. 若 Z 包含在一个有限集 $Z' \subset [0,1)^n$ 中, 且满足:

$$M^*(Z'+\mathbb{Z}^n) \subseteq Z'+\mathbb{Z}^n \quad 且 \quad 0 \notin Z', \tag{1.1}$$

则 $L^2(\mu_{M,D})$ 中至多存在 $|Z'|+1$ 个互相正交的指数函数, 这里 $|Z'|$ 表示 Z' 的基数. 特别地, $\mu_{M,D}$ 不是谱测度.

文 [6] 将上述条件推广到更一般的形式.

定理 B[6] 设 $M \in M_n(\mathbb{Z})$ 是一个整数扩张矩阵, $D \subset \mathbb{Z}^n$ 是一个有限数字集, $0 \in D$, Z 为函数 $m_D(x)$ 在 $[0,1)^n$ 中的零点集. 若 Z 包含在一个有限集 $Z' \subset [0,1)^n$ 中, 且满足以下性质:

(i) 存在 $l \in \mathbb{N}$, 使得 $M^{*l}(Z'+\mathbb{Z}^n) \subseteq Z'+\mathbb{Z}^n$;

(ii) 对于任意的 $j \in \{0,1,\cdots,l-1\}$, 都有 $M^{*j}(Z') \cap \mathbb{Z}^n = \varnothing$,

则 $L^2(\mu_{M,D})$ 中至多存在 $l|Z'|+1$ 个互相正交的指数函数, 特别地, $\mu_{M,D}$ 不是谱测度.

作为定理 A 和定理 B 在二维空间中的一个应用, 文 [7] 得到了以下两个命题.

命题 A 设 $D \subset \mathbb{Z}^2$ 为有限数字集, 满足

$$\left\{\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\ 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\ \frac{1}{2}\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2}\end{pmatrix}\right\} = \{x \in [0,1)^2 : m_D(x)=0\},$$

则 $|D|$ 是偶数. 进一步, 若 $M \in M_2(\mathbb{Z})$ 是一个整数扩张矩阵, 满足 $\det(M) \notin 2\mathbb{Z} \setminus \{0\}$, 则 $L^2(\mu_{M,D})$ 中至多存在 4 个互相正交的指数函数, 特别地, $\mu_{M,D}$ 是非谱测度.

命题 B 设 $M \in M_2(\mathbb{Z})$ 是一个整数扩张矩阵, 满足 $\det(M) \notin 2\mathbb{Z} \setminus \{0\}$. 若 $D \subset \mathbb{Z}^2$ 为有限数字集, 使得集合 $Z = \{x \in [0,1)^2 : m_D(x)=0\}$ 是以下 6 个集合其中之一:

$$\left\{\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2}\end{pmatrix}\right\}, \quad \left\{\begin{pmatrix}0\\ \frac{1}{2}\end{pmatrix}\right\}, \quad \left\{\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\ 0\end{pmatrix}\right\}, \quad \left\{\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\ 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\ \frac{1}{2}\end{pmatrix}\right\},$$

$$\left\{\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\ 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2}\end{pmatrix}\right\}, \quad \left\{\begin{pmatrix}0\\ \frac{1}{2}\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2}\end{pmatrix}\right\},$$

则 $|D|$ 是偶数, 且 $L^2(\mu_{M,D})$ 中至多存在 4 个互相正交的指数函数, 特别地, $\mu_{M,D}$ 是非谱测度.

最近, 文 [8] 考虑了零点集 $Z \subset \mathbb{Q}^n$ 为有限集的情形, 得到了关于 $L^2(\mu_{M,D})$ 中只有有限正交指数函数系的一个充分必要条件.

定理 C[8] 设 $M \in M_n(\mathbb{Z})$ 是一个整数扩张矩阵, $D \subset \mathbb{Z}^n$ 是一个有限数字集, $0 \in D$, Z 为函数 $m_D(x)$ 在 $[0,1)^n$ 中的零点集. 若 $Z \subset \mathbb{Q}^n$ 为有限集, 则 $L^2(\mu_{M,D})$ 中至多存在有限个互相正交的指数函数的充要条件是, 对于任意的 $j \in \mathbb{N}$, 都有

$$M^{*j}(Z) \cap \mathbb{Z}^n = \varnothing. \tag{1.2}$$

上述定理的逆否命题也是 $L^2(\mu_{M,D})$ 中存在无限正交指数函数系的充分必要条件, 其充分性在文 [6] 中已经建立起来, 并且有许多应用[7, 9]. 虽然 (1.2) 给出了判断 $L^2(\mu_{M,D})$

中只有有限正交指数函数系的充分必要条件, 但充分性条件验证起来不是很方便. 由于零点集 $Z \subset \mathbb{Q}^n$ 为有限集, 我们可将 Z 的简化形式记为 $Z = \frac{1}{h}\{\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_m\}$, 其中 $\beta_i \in \mathbb{Z}^n (i = 1, 2, \cdots, m)$, $h \in \mathbb{N}$. 本文利用矩阵的初等变换以及定理 A 或定理 B, 在 $\det(M)$ 与零点集合 Z 表示中的 h 互素的情形下, 为定理 C 提供了一个便于验证的充分条件, 这个条件只需计算矩阵的行列式 $\det(M)$.

2 主要定理及其证明

定理 2.1 设 $M \in M_n(\mathbb{Z})$ 是一个整数扩张矩阵, $D \subset \mathbb{Z}^n$ 是一个有限数字集,$0 \in D$, Z 为函数 $m_D(x)$ 在 $[0,1)^n$ 中的零点集合. 假设 $Z \subset \mathbb{Q}^n$ 是有限集且简化形式为 $Z = \frac{1}{h}\{\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_m\}$, $\beta_i \in \mathbb{Z}^n$ $(i = 1, 2, \cdots, m)$, $h \in \mathbb{N}$. 若 $(\det(M), h) = 1$, 即 $\det(M)$ 与 h 互素, 则 $L^2(\mu_{M,D})$ 中至多包含 h^n 个互相正交的指数函数, 特别地,$\mu_{M,D}$ 不是谱测度.

证 我们先证明, 对于任意的扩张矩阵 $M \in M_n(\mathbb{Z})$, M 总等价于一个对角阵 M_0. 这里只需要给出求 M_0 的一个方法 (见文 [10, pp. 330–334]) 以及所需要的初等变换. 设 $M = (m_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$.

(i) 若 $m_{11} \neq 0$, 则保持矩阵不变; 若 $m_{11} = 0$, 由于 $\det(M) \neq 0$, 因而存在 $i_0 \in \{2, 3, \cdots, n\}$, 使得 $m_{i_01} \neq 0$. 将第 1 行和第 i_0 行互换, 变换后的矩阵左上角元素不为 0. 对应的变换用矩阵乘法表示为

$$\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 1 & & \\ & \ddots & & & \\ 1 & \cdots & 0 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m_{11} & \cdots & m_{1i_0} & \cdots & m_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ m_{i_01} & \cdots & m_{i_0i_0} & \cdots & m_{i_0n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ m_{n1} & \cdots & m_{ni_0} & \cdots & m_{nn} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} m_{i_01} & \cdots & m_{i_0i_0} & \cdots & m_{i_0n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ m_{11} & \cdots & m_{1i_0} & \cdots & m_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ m_{n1} & \cdots & m_{ni_0} & \cdots & m_{nn} \end{pmatrix}. \tag{2.1}$$

(ii) 经过第 (i)步后, 得到的矩阵是一个左上角元素不为 0 的矩阵, 记为 $A := (a_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$, 其中, $a_{11} \neq 0$. 若 $a_{21} \neq 0$, 比较 $|a_{11}|$ 和 $|a_{21}|$ 的大小, 不失一般性, 假设 $|a_{21}| > |a_{11}|$, 一定存在 q_1, $r_1 \in \mathbb{Z}$, 使得 $a_{21} = q_1a_{11} + r_1$, $0 \leqslant r_1 < |a_{11}|$. 若 $r_1 \neq 0$, 则用第 2 行减去第 1 行的 q_1 倍. 用矩阵乘法表示为

$$\begin{pmatrix} 1 & & & \\ -q_1 & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ r_1 & a_{22} - q_1a_{12} & \cdots & a_{2n} - q_1a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}. \tag{2.2}$$

接下来用 r_1 除 a_{11}, 得到 $a_{11}=q_2r_1+r_2$, 若 $r_2\neq 0$, 再将矩阵的第 1 行减去第 2 行的 q_2 倍, $\cdots$, 根据辗转相除法, 进行有限步后, 总能得到 $r_{n_0-1}=q_{n_0+1}r_{n_0}+r_{n_0+1}$, 其中, r_{n_0+1} 能将 r_{n_0} 整除, 则 r_{n_0+1} 是 a_{11} 和 a_{21} 的最大公因数. 上述有限步变换均类似于 (2.2). 最终可得如下形式矩阵:

$$\widehat{A}=\begin{pmatrix}\widehat{a}_{11} & \widehat{a}_{12} & \widehat{a}_{13} & \cdots & \widehat{a}_{1n}\\ \widehat{a}_{21} & \widehat{a}_{22} & \widehat{a}_{23} & \cdots & \widehat{a}_{2n}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n}\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn}\end{pmatrix}.$$

这里, $\widehat{a}_{11}$ 能将 $\widehat{a}_{21}$ 整除, 或 $\widehat{a}_{21}$ 能将 $\widehat{a}_{11}$ 整除. 假设 $\widehat{a}_{11}$ 能将 $\widehat{a}_{21}$ 整除, 则 $\widehat{a}_{11}$ 是 a_{11} 和 a_{21} 的最大公因数. 用辗转相除法又可以得到 $\widehat{a}_{11}$ 和 a_{31} 的最大公因数 d, 同时, d 也是 a_{11}, a_{21}, a_{31} 的最大公因数. 用同样的方法依次向后, 最终可求得 a_{11}, a_{21}, $\cdots$, a_{n1} 的最大公因数. 不失一般性, 假设 $(a_{11},a_{21},\cdots,a_{n1})=b_{11}$(若最大公因数的位置不在左上角, 可利用两行互换, 将其调到左上角的位置, 矩阵所作变换和 (2.1) 类型相同), 而此时的矩阵变为 $B:=(b_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$. 由辗转相除法知, b_{11} 可以整除任意的 $b_{k1}(k=1,2,\cdots,n)$, 且 $b_{11}\leqslant|a_{11}|$.

(iii) 在步骤 (ii) 中求出了原矩阵第 1 列元素的最大公因数, 并将其放在矩阵的左上角的位置. 接下来用同样的方法, 求出 $b_{11},b_{12},\cdots,b_{1n}$ 的最大公因数, 即矩阵 B 中第 1 行元素的最大公因数 c_{11}, 并将其调到矩阵左上角的位置, $c_{11}\leqslant b_{11}$. 此过程中矩阵所作的变换仅为以下 3 种列变换:

$$\begin{aligned}&\begin{pmatrix}c_{11} & \cdots & c_{1i} & \cdots & c_{1j} & \cdots & c_{1n}\\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots\\ c_{i1} & \cdots & c_{ii} & \cdots & c_{ij} & \cdots & c_{in}\\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots\\ c_{j1} & \cdots & c_{ji} & \cdots & c_{jj} & \cdots & c_{jn}\\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots\\ c_{n1} & \cdots & c_{ni} & \cdots & c_{nj} & \cdots & c_{nn}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & \cdots & -q & & \\ & & & \ddots & \vdots & & \\ & & & & 1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1\end{pmatrix}\\ &=\begin{pmatrix}c_{11} & \cdots & c_{1i} & \cdots & c_{1j}-qc_{1i} & \cdots & c_{1n}\\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots\\ c_{i1} & \cdots & c_{ii} & \cdots & c_{ij}-qc_{ii} & \cdots & c_{in}\\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots\\ c_{j1} & \cdots & c_{ji} & \cdots & c_{jj}-qc_{ji} & \cdots & c_{jn}\\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots\\ c_{n1} & \cdots & c_{ni} & \cdots & c_{nj}-qc_{ni} & \cdots & c_{nn}\end{pmatrix},\end{aligned}\tag{2.3}$$

$$\begin{pmatrix}c_{11} & \cdots & c_{1i} & \cdots & c_{1j} & \cdots & c_{1n}\\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots\\ c_{i1} & \cdots & c_{ii} & \cdots & c_{ij} & \cdots & c_{in}\\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots\\ c_{j1} & \cdots & c_{ji} & \cdots & c_{jj} & \cdots & c_{jn}\\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots\\ c_{n1} & \cdots & c_{ni} & \cdots & c_{nj} & \cdots & c_{nn}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ & & \vdots & \ddots & & & \\ & & -q & \cdots & 1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1i}-qc_{1j} & \cdots & c_{1j} & \cdots & c_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ c_{i1} & \cdots & c_{ii}-qc_{ij} & \cdots & c_{ij} & \cdots & c_{in} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ c_{j1} & \cdots & c_{ji}-qc_{jj} & \cdots & c_{jj} & \cdots & c_{jn} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ c_{n1} & \cdots & c_{ni}-qc_{nj} & \cdots & c_{nj} & \cdots & c_{nn} \end{pmatrix}, \tag{2.4}$$

$$\begin{pmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1i} & \cdots & c_{1j} & \cdots & c_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ c_{i1} & \cdots & c_{ii} & \cdots & c_{ij} & \cdots & c_{in} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ c_{j1} & \cdots & c_{ji} & \cdots & c_{jj} & \cdots & c_{jn} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ c_{n1} & \cdots & c_{ni} & \cdots & c_{nj} & \cdots & c_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 0 & \cdots & 1 & & \\ & & \vdots & \ddots & \vdots & & \\ & & 1 & \cdots & 0 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1j} & \cdots & c_{1i} & \cdots & c_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ c_{i1} & \cdots & c_{ij} & \cdots & c_{ii} & \cdots & c_{in} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ c_{j1} & \cdots & c_{jj} & \cdots & c_{ji} & \cdots & c_{jn} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ c_{n1} & \cdots & c_{nj} & \cdots & c_{ni} & \cdots & c_{nn} \end{pmatrix}. \tag{2.5}$$

(iv) 经过步骤 (ii)–(iii), 矩阵左上角的元素在减小, 但始终为正整数. 重复进行 (ii)–(iii) 步, 经过有限次后, 总可以将矩阵左上角的元素化为一个可以整除第 1 行和第 1 列所有元素的数. 此时, 记矩阵为 $F := (f_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$. 假设 $f_{i1} = q_{i1}f_{11}$, $f_{1j} = q_{1j}f_{11}$ $(i, j = 2, 3, \cdots, n)$. 依次用第 i 行减去第 1 行的 q_{i1} 倍, 然后再依次用第 j 列减去第 1 列的 q_{1j} 倍. 此时矩阵变为如下形式:

$$G := \begin{pmatrix} g_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & H & \\ 0 & & & \end{pmatrix},$$

其中, H 为一个 $(n-1)$ 阶方阵, 可重复上述过程, 将矩阵化为

$$\begin{pmatrix} g_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & h_{11} & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & & \\ \vdots & \vdots & J & \\ 0 & 0 & & \end{pmatrix}.$$

如此下去, M 就化成了对角阵 $M_0 = \mathrm{diag}(m_1, m_2, \cdots, m_n)$.

其次, 由上面过程可知, 对于任意的扩张矩阵 $M\in M_n(\mathbb{Z})$, 总存在初等矩阵 $P_1,P_2,\cdots,P_r,Q_1,Q_2,\cdots,Q_s\in M_n(\mathbb{Z})$, 使得

$$P_rP_{r-1}\cdots P_1MQ_1Q_2\cdots Q_s=M_0,$$

其中, $M_0\in M_n(\mathbb{Z})$ 是一个对角阵, $P_i\ (i=1,2,\cdots,r)$, $Q_j\ (j=1,2,\cdots,s)$ 不外乎为以下 3 种形式的初等矩阵:

$$W_1=\left(\begin{array}{ccccccccccc}
1 \\
& \ddots \\
&& 1 \\
&&& 0 && \cdots && 1 \\
&&&& 1 \\
&&& \vdots && \ddots && \vdots \\
&&&&&& 1 \\
&&& 1 && \cdots && 0 \\
&&&&&&&& 1 \\
&&&&&&&&& \ddots \\
&&&&&&&&&& 1
\end{array}\right)\begin{array}{l}
\\ \\ \\ i\text{行} \\ \\ \\ \\ j\text{行} \\ \\ \\ \\
\end{array},$$

$$W_2=\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccccc} \quad & \quad & i\text{列} & \quad & j\text{列} & \quad & \quad \end{array} \\
\left(\begin{array}{ccccccc}
1 \\
& \ddots \\
&& 1 & \cdots & k \\
&&& \ddots & \vdots \\
&&&& 1 \\
&&&&& \ddots \\
&&&&&& 1
\end{array}\right)\begin{array}{l}
\\ \\ i\text{行} \\ \\ j\text{行} \\ \\ \\
\end{array}
\end{array},$$

以及矩阵 $W_3=W_2^{\mathrm{T}}$ (即变换 W_2 的转置).

上面将 M 化成对角阵的方法, 所作的变换都是在整数情形下进行的, 因此, $W_i\in M_n(\mathbb{Z})$, $i\in\{1,2,3\}$. 由 $\det(W_i)=\pm1\ (i=1,2,3)$ 知, $\det(M)$ 与 $\det(M_0)$ 只相差 ±1 倍. 从而当 $\det(M)$ 与 h 互素时, M_0 对角线上的所有元素都与 h 互素. 另外, 易知 $W_i^{-1}\ (i=1,2,3)$ 仍是这 3 种形式的初等矩阵.

设

$$Z'=\Big\{\Big(\frac{k_1}{h},\frac{k_2}{h},\cdots,\frac{k_n}{h}\Big)^{\mathrm{T}}:\ k_i\in\{0,1,2,\cdots,h-1\},\ i=1,2,\cdots,n\Big\}\setminus\{0\}.$$

我们可证明如下结果.

断言 2.1 $W_j(Z'+\mathbb{Z}^n)\subseteq Z'+\mathbb{Z}^n(j=1,2,3)$, $M_0(Z'+\mathbb{Z}^n)\subseteq Z'+\mathbb{Z}^n$.

事实上, 由 Z' 的构造特点, 若

$$x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}\in Z'+\mathbb{Z}^n,$$

则存在

$$x_{i_0}=\frac{y_{i_0}}{h},\quad y_{i_0}\not\equiv 0\ (\mathrm{mod}\ h),$$

即 $hx_{i_0}\not\equiv 0\ (\mathrm{mod}\ h)$. 对于任意的 $\xi\in Z'+\mathbb{Z}^n,\xi=\frac{1}{h}((k_1,k_2,\cdots,k_n)^{\mathrm{T}}+(l_1h,l_2h,\cdots,l_nh)^{\mathrm{T}})$, 其中 $l=(l_1,l_2,\cdots,l_n)^{\mathrm{T}}\in\mathbb{Z}^n$, 有

$$\begin{aligned}W_1(\xi)&=\frac{1}{h}\begin{pmatrix}1&&&&&&\\&\ddots&&&&&\\&&0&\cdots&1&&\\&&&\ddots&&&\\&&1&\cdots&0&&\\&&&&&\ddots&\\&&&&&&1\end{pmatrix}\begin{array}{c}\\ \\ a\text{行}\\ \\ b\text{行}\\ \\ \\ \end{array}\begin{pmatrix}k_1+l_1h\\ \vdots\\ k_a+l_ah\\ \vdots\\ k_b+l_bh\\ \vdots\\ k_n+l_nh\end{pmatrix}\\&=\frac{1}{h}(k_1+l_1h,\cdots,k_b+l_bh,\cdots,k_a+l_ah,\cdots,k_n+l_nh)^{\mathrm{T}},\end{aligned}\tag{2.6}$$

于是, $W_1(\xi)$ 只是将 ξ 的第 a, b 两个坐标互换位置, 故 $W_1(\xi)\in Z'+\mathbb{Z}^n$, 从而得到 $W_1(Z'+\mathbb{Z}^n)\subseteq Z'+\mathbb{Z}^n$.

对于变换 W_2, 类似地, 有

$$\begin{aligned}W_2(\xi)&=\frac{1}{h}\begin{array}{c}\begin{array}{ccccccc}&&a\text{列}&&b\text{列}&&\end{array}\\ \begin{pmatrix}1&&&&&&\\&\ddots&&&&&\\&&1&\cdots&t&&\\&&&\ddots&\vdots&&\\&&&&1&&\\&&&&&\ddots&\\&&&&&&1\end{pmatrix}\end{array}\begin{array}{c}\\ \\ a\text{行}\\ \\ b\text{行}\\ \\ \\ \end{array}\begin{pmatrix}k_1+l_1h\\ \vdots\\ k_a+l_ah\\ \vdots\\ k_b+l_bh\\ \vdots\\ k_n+l_nh\end{pmatrix}\\&=\frac{1}{h}\begin{pmatrix}k_1+l_1h\\ \vdots\\ k_a+l_ah+t(k_b+l_bh)\\ \vdots\\ k_b+l_bh\\ \vdots\\ k_n+l_nh\end{pmatrix}.\end{aligned}\tag{2.7}$$

在 (2.7) 中, 若 $k_a+l_ah\equiv 0\ (\mathrm{mod}\ h)$, $k_b+l_bh\equiv 0\ (\mathrm{mod}\ h)$, 则存在 $j_0\neq a,b$, 使得 $k_{j_0}+l_{j_0}h\not\equiv 0\ (\mathrm{mod}\ h)$, 那么 $hW_2(\xi)$ 的第 j_0 个坐标仍为 $k_{j_0}+l_{j_0}h$, 不能被 h 整除.

若 $k_a+l_ah\not\equiv 0\ (\mathrm{mod}\ h)$, $k_b+l_bh\equiv 0\ (\mathrm{mod}\ h)$, 则 $hW_2(\xi)$ 的第 a 个坐标为 $k_a+l_ah+t(k_b+l_bh)$, 不能被 h 整除.

若 $k_a+l_ah\equiv 0\ (\mathrm{mod}\ h)$, $k_b+l_bh\not\equiv 0\ (\mathrm{mod}\ h)$, 则 $hW_2(\xi)$ 的第 b 个坐标为 k_b+l_bh, h 不能将其整除.

若 $k_a+l_ah\not\equiv 0\ (\mathrm{mod}\ h)$, $k_b+l_bh\not\equiv 0\ (\mathrm{mod}\ h)$, 同上, h 不能整除 $hW_2(\xi)$ 的第 b 个坐标 k_b+l_bh.

这说明 $W_2(\xi)\in Z'+\mathbb{Z}^n$, 从而得到 $W_2(Z'+\mathbb{Z}^n)\subseteq Z'+\mathbb{Z}^n$.

同理, 对于变换 W_3,

$$W_3(\xi)=\frac{1}{h}\begin{array}{c}\begin{array}{ccccccc} & & a\text{列} & & b\text{列} & & \end{array}\\ \begin{pmatrix}1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ & & \vdots & \ddots & & & \\ & & t & \cdots & 1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1\end{pmatrix}\begin{array}{c} \\ \\ a\text{行} \\ \\ b\text{行} \\ \\ \\ \end{array}\end{array}\begin{pmatrix}k_1+l_1h\\ \vdots\\ k_a+l_ah\\ \vdots\\ k_b+l_bh\\ \vdots\\ k_n+l_nh\end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{h}\begin{pmatrix}k_{i_1}+l_1h\\ \vdots\\ k_a+l_ah\\ \vdots\\ t(k_a+l_ah)+k_b+l_bh\\ \vdots\\ k_n+l_nh\end{pmatrix}, \tag{2.8}$$

可得到 $W_3(\xi)\in Z'+\mathbb{Z}^n$, 即有 $W_3(Z'+\mathbb{Z}^n)\subseteq Z'+\mathbb{Z}^n$.

对于矩阵 M_0, 可验证

$$M_0(\xi)=\frac{1}{h}\begin{pmatrix}m_1 & & & \\ & m_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & m_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}k_1+l_1h\\ k_2+l_2h\\ \vdots\\ k_n+l_nh\end{pmatrix}=\frac{1}{h}\begin{pmatrix}m_1(k_1+l_1h)\\ m_2(k_2+l_2h)\\ \vdots\\ m_n(k_n+l_nh)\end{pmatrix}. \tag{2.9}$$

由于 $\xi\in Z'+\mathbb{Z}^n$, 故存在 $j_0\in\{1,2,\cdots,n\}$, 使得 $k_{j_0}+l_{j_0}h\not\equiv 0\ (\mathrm{mod}\ h)$, 由 h 与 $m_j\ (j=1,2,\cdots,n)$ 互素可得, $m_{j_0}(k_{j_0}+l_{j_0}h)\not\equiv 0\ (\mathrm{mod}\ h)$, 从而

$$M_0(\xi)\in Z'+\mathbb{Z}^n.$$

综合上面的结果, 我们有 $W_j(Z'+\mathbb{Z}^n)\subseteq Z'+\mathbb{Z}^n (j=1,2,3)$, $M_0(Z'+\mathbb{Z}^n)\subseteq Z'+\mathbb{Z}^n$. 于是, 对于任意的 $\xi\in Z'+\mathbb{Z}^n$,

$$M^*(\xi)=P_1^{-1}P_2^{-1}\cdots P_r^{-1}M_0Q_s^{-1}Q_{s-1}^{-1}\cdots Q_1^{-1}(\xi),$$

其中 $P_i^{-1}\ (i=1,2,\cdots,r)$, $Q_j^{-1}\ (j=1,2,\cdots,s)$ 均为 W_1, W_2, W_3 这 3 种形式的矩阵. 结合断言 2.1 可得,

$$M^*(Z'+\mathbb{Z}^n)\subseteq Z'+\mathbb{Z}^n.$$

从而, 由定理 A 可得, $L^2(\mu_{M,D})$ 中至多包含 $|Z'|+1$ 即 h^n 个互相正交的指数函数, 并且 $\mu_{M,D}$ 不是谱测度. 定理得证.

由上述定理, 我们可以直接得到引言中命题 A 和命题 B 关于 $L^2(\mu_{M,D})$ 中正交指数函数系个数的结论. 其次, 利用这个定理可以很方便地得到一些自仿测度 $\mu_{M,D}$ 的非谱性,

例如, 若 $M \in M_2(\mathbb{Z})$ 为任意的整数扩张矩阵, 有限数字集 D 为

$$D = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}.$$

由于 $m_D(x)$ 在 $[0,1)^2$ 中的零点集为

$$\begin{aligned} Z &= \left\{ \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{1}{8} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{3}{8} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{5}{8} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{7}{8} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} \right\} \\ &= \frac{1}{8} \left\{ \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \end{pmatrix} \right\}, \end{aligned}$$

相当于 $h = 8 = 2^3$, 由本文定理可得, 只要 $\det(M) \notin 2\mathbb{Z}$, Hilbert 空间 $L^2(\mu_{M,D})$ 中就只有有限的正交指数函数系, 并且 $\mu_{M,D}$ 为非谱测度.

最后, 我们给出上述定理的两点补充说明:

(i) 上述定理只给出正交指数函数系有限的一个充分条件, 并不是必要的. 例如, 对于如下给出的矩阵 M 和数字集 D:

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad D = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

由于 $m_D(x)$ 在 $[0,1)^2$ 中的零点集为

$$Z = \left\{ \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = \frac{1}{3} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}, \quad h = 3,$$

可以验证 $M^*(Z + \mathbb{Z}^2) \subseteq Z + \mathbb{Z}^2$. 从而, 由定理 A 可得 Hilbert 空间 $L^2(\mu_{M,D})$ 中正交指数函数至多只有 3 个, 但 $\det(M) = 6$ 不与 $h = 3$ 互素.

(ii) 上述定理只提供一个判断 $\mu_{M,D}$ 不是谱测度的简洁方法, 说明空间 $L^2(\mu_{M,D})$ 中正交指数函数系至多有有限个, 但此个数的精确上界还是未知的. 想要进一步确定 Hilbert 空间 $L^2(\mu_{M,D})$ 中正交指数函数系的个数, 可参见文 [6] 中第 4 部分的方法.

参　考　文　献

[1] Hutchinson J E. Fractals and self-similarity [J]. *India Univ Math J,* 1981, 30:713–747.

[2] Jorgensen P E T, Pedersen S. Dense analytic subspaces in fractal L^2-spaces [J]. *J Anal Math,* 1998, 75:185–228.

[3] Jorgensen P E T, Pedersen S. Spectral pairs in Cartesian coordinates [J]. *J Fourier Anal Appl,* 1999, 5:285–302.

[4] Dutkay D E, Jorgensen P E T. Analysis of orthogonality and of orbits in affine iterated function systems [J]. *Math Z,* 2007, 256:801–823.

[5] Li J L. Non-spectrality of planar self-affine measures with three-element digit set [J]. *J Funct Anal,* 2009, 257:537–552.

[6] Li J L. On the $\mu_{M,D}$-orthogonal exponentials [J]. *Nonlinear Analysis,* 2010, 73:940–951.

[7] Li J L. Analysis of $\mu_{M,D}$-orthogonal exponentials for the planar four-element digit sets [J]. *Math Nachr,* 2014, 287:297–312.

[8] Li J L. A necessary and sufficient condition for the finite $\mu_{M,D}$-orthogonality [J]. *Sci China Math,* 2015, 58(12):2541–2548.

[9] 李 敏, 李建林. 空间自仿测度下无限正交指数函数系存在的条件 [J]. 数学进展, 2016, 45(3):332–342.

[10] 王萼芳, 石生明 (修订), 北京大学数学系几何与代数教研室前代数小组编. 高等代数 (第三版) [M]. 北京: 高等教育出版社, 2003.

A Sufficient Condition for the Finite $\mu_{M,D}$-Orthogonal Exponentials Function System

LI Na[1] LI Jianlin[1]

[1]College of Mathematics and Information Science, Shaanxi Normal University, Xi'an 710119, Shaanxi, China. E-mail: jllimath10@snnu.edu.cn

Abstract Let $\mu_{M,D}$ be a self-affine measure uniquely determined by the iterated function system $\{\phi_d(x) = M^{-1}(x + d)\}_{d\in D}$. The spectrality or non-spectrality of $\mu_{M,D}$ is directly connected with the finiteness or infiniteness of orthogonal exponentials in the Hilbert space $L^2(\mu_{M,D})$. In this paper, the authors provide a sufficient condition for the finite $\mu_{M,D}$-orthogonal exponentials by applying the elementary matrix transformations. This sufficient condition depends only upon the determinant of the matrix M, and is easy to use in the research of non-spectrality of $\mu_{M,D}$.

Keywords Self-affine measures, Orthogonal exponential function system, Non-spectrality, Determinant

2010 MR Subject Classification 28A80, 42C10