数 学 年 刊 A 辑
2024, 45(2):123–140
DOI: 10.16205/j.cnki.cama.2024.0009

范数可微性和 Banach 空间的一致球覆盖性质*

商绍强[1]

提要 在这篇文章中, 作者首先给出了范数在集合上一致光滑的定义, 而且证明了存在一个 l^∞ 的一致球覆盖, 使得 l^∞ 的范数在球覆盖点是一致光滑的. 其次, 作者证明了如果 $(\prod\limits_{i=1}^{2} X_i, \|\cdot\|_p)$ 是一个乘积空间, 这里 $p\in[1,+\infty]$, 则存在 $(\prod\limits_{i=1}^{2} X_i, \|\cdot\|_p)$ 的一个一致球覆盖, 使得 $(\prod\limits_{i=1}^{2} X_i, \|\cdot\|_p)$ 的范数在球覆盖点是一致光滑的当且仅当存在 X_i 的一个一致球覆盖, 使得 X_i 的范数在球覆盖点是一致光滑的. 最后, 作者证明了如果 X 是一致光滑空间且可分, 则存在两个序列 $\{x_n\}_{n=1}^\infty\subset X$ 和 $\{r_n\}_{n=1}^\infty\subset R$, 使得: (1) 存在 $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ 的一个子序列 $\{x_j\}_{j=1}^\infty$, 使得 $\{\|x_j\|^{-1}x_j\}_{j=1}^\infty$ 上的每一点都是 $B(X)$ 的强暴露点; (2) 对每个 $n\in N$, $\|x_n\|^{-1}x_n$ 是 $B(X)$ 的端点; (3) 集序列 $\{B(x_n,r_n)\}_{n=1}^\infty$ 是 X 的一个一致球覆盖.

关键词 一致光滑集, 一致球覆盖, 一致光滑空间, 乘积空间
MR (2000) 主题分类 46B20
中图法分类 O177.2
文献标志码 A
文章编号 1000-8314(2024)02-0123-18

§1 引 言

令 $(X,\|\cdot\|)$ 表示实 Banach 空间. $S(X)$ 和 $B(X)$ 分别表示 X 的单位球面和单位球. 令 X^* 表示 X 的对偶空间. 令 $B(x,r)$ 表示以 x 为球心, r 为半径的闭球. 令 N, R 和 R^+ 分别表示自然数集, 实数集和非负实数集. 如何用不同形状的集合覆盖 Banach 空间的子集是 Banach 空间分析性质和几何性质中的一个重要问题. 这个问题的起源可以追溯到数学分析中的经典定理, 即有限覆盖定理. 2006 年, 为了 Banach 空间粗嵌入研究的需要, 程立新引入了球覆盖性的概念 [1].

定义 1.1[1] 如果 Banach 空间的单位球面可以包含在不含原点可数个球的并集中, 则称其具有球覆盖性质. 在这种情况下, 我们也说范数具有球覆盖性质.

上述可数个球的球的中心被称为 X 的球覆盖点. 在研究球的覆盖特性时, 我们自然需要确保球覆盖点具有良好的几何性质. 这一思想将球覆盖与 Banach 空间的其他几何性质联系起来, 扩大了球覆盖性质的研究范围. 例如, 众所周知, 可分空间具有球覆盖性质. 然而在引入球覆盖点之后, 在可分空间中, 还有许多与球覆盖有关的问题值得研究. 2015 年, 商绍强和崔云安证明了在 2- 局部一致凸空间 X^* 中存在球覆盖, 使得 X^* 的球覆盖点是强端点 [2].

令 $\{B_n\}_{n=1}^\infty$ 为 X 的球覆盖. 众所周知, 球覆盖点的序列不一定有界且 $0\notin\overline{\bigcup\limits_{n\in N}B_n}$ 也不一定成立. 在文 [3] 中, Luo 和 Zheng 定义了一致球覆盖性质. 称 X 的球覆盖 $\{B_n(x_n,r_n)\}_{n=1}^\infty$

本文 2023 年 10 月 20 日收到, 2024 年 3 月 13 日收到修改稿.

[1]哈尔滨工程大学数学科学学院, 哈尔滨 150001. E-mail: sqshang@163.com

*本文受到国家自然科学基金 (No. 12271121) 的资助.

是 X 的一致球覆盖, 如果 $\sup\limits_{n\in N}\|x_n\|<+\infty$ 且 $\inf\limits_{n\in N}(\|x_n\|-r_n)>0$. 在文 [4] 中, 程立新等构造 l^∞ 上的等价范数 $\|\cdot\|_1$, 证明了 Banach 空间 $(l^\infty,\|\cdot\|_1)$ 不具有球覆盖特性. 由于两个空间的乘积空间可以定义不同的范数, 因此乘积空间的球覆盖性质的稳定性的重要性引起了数学家的注意. 在文 [5] 中, Luo 和 Liu 证明了对于 $p\in[1,+\infty]$, 乘积空间 $(X\times Y,\|\cdot\|_p)$ 具有球覆盖性质当且仅当 X 和 Y 具有球覆盖性质. 在文 [6] 中, Luo 和 Zheng 证明了如果 (Ω,Σ,μ) 是可分的测度空间, 则 Bochner 函数空间 $L_p(\mu,X)$ 具有球覆盖性质当且仅当 X 具有球覆盖性质. 球覆盖性质的其它研究见文 [7–13]. 在这篇文章中, 我们首先给出了范数在集合上一致可微的定义, 而且我们证明了存在一个 l^∞ 的一致球覆盖, 使得 l^∞ 的范数在球覆盖点是一致光滑的. 其次, 我们证明了如果 $(\prod\limits_{i=1}^{2}X_i,\|\cdot\|_p)$ 是一个乘积空间, 这里 $p\in[1,+\infty]$, 则存在 $(\prod\limits_{i=1}^{2}X_i,\|\cdot\|_p)$ 的一个一致球覆盖使得 $(\prod\limits_{i=1}^{2}X_i,\|\cdot\|_p)$ 的范数在球覆盖点是一致 Frechet 可微的当且仅当存在 X_i 的一个一致球覆盖, 使得 X_i 的范数在球覆盖点是一致光滑的. 最后, 我们证明了如果 X 是一致光滑空间且可分, 则存在两个序列 $\{x_n\}_{n=1}^\infty\subset X$ 和 $\{r_n\}_{n=1}^\infty\subset R$, 使得: (1) 存在 $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ 的一个子序列 $\{x_j\}_{j=1}^\infty$, 使得 $\{\|x_j\|^{-1}x_j\}_{j=1}^\infty$ 上的每一点都是 $B(X)$ 的强暴露点; (2) 对每个 $n\in N$, $\|x_n\|^{-1}x_n$ 是 $B(X)$ 的端点; (3) 集序列 $\{B(x_n,r_n)\}_{n=1}^\infty$ 是 X 的一个一致球覆盖. 令 C 是 Banach 空间 X 的一个凸子集. 首先我们回忆一些概念.

定义 1.2[14] 点 $x_0\in C$ 称为 C 的强暴露点, 如果存在一个泛函 $x^*\in X^*$, 使得 $\|x_n-x_0\|\to 0$, 这里 $x^*(x_n)\to\sup\{x^*(x):x\in C\}$ 且 $\{x_n\}_{n=1}^\infty\subset C$.

定义 1.3[15] 点 $x_0\in C$ 称为集合 C 的端点, 如果 $2x_0=x_1+x_2$, $x_1,x_2\in C$, 则 $x_1=x_2$.

容易看到如果 x_0 是集合 C 的强暴露点, 则 x_0 是集合 C 的端点.

定义 1.4[14] 令 D 是 X 的一个开凸子集. 一个连续凸函数 f 在点 $x\in D$ 称为 Frechet 可微的, 如果存在一个泛函 $d_Ff(x)\in X^*$, 使得

$$\lim_{t\to 0}\sup_{y\in B(X)}\left|\frac{f(x+ty)-f(x)}{t}-\langle d_Ff(x),y\rangle\right|=0.$$

此外, f 在点 $x\in D$ 称为 Gâteaux 可微的, 如果存在一个泛函 $d_Gf(x)\in X^*$, 使得对每个 $y\in Y$, 有

$$\lim_{t\to 0}\frac{f(x+ty)-f(x)}{t}=\langle d_Gf(x),y\rangle.$$

显然如果凸函数 f 在点 x 是 Frechet 可微的, 则凸函数 f 在点 x 是 Gâteaux 可微的.

定义 1.5[15] 一个 Banach 空间 X 称为一致光滑的, 如果对任意 $\varepsilon>0$, 存在 $\delta>0$, 使得

$$\sup_{x\in S(X),y\in B(X),0<|t|<\delta}\frac{1}{t}\left[\|x+ty\|+\|x-ty\|-2\|x\|\right]<\varepsilon.$$

众所周知, 如果 Banach 空间 X 是一致光滑空间, 则 X 的范数在 $X\backslash\{0\}$ 是 Frechet 可微的. 下面我们引入一个新的定义.

定义 1.6 称 Banach 空间 X 的范数在集合 A 上是一致光滑的, 如果对任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta \in (0, +\infty)$, 使得

$$\sup_{x\in A, y\in B(X), 0<|t|<\delta} \frac{1}{t}[\|x+ty\| + \|x-ty\| - 2\|x\|] < \varepsilon.$$

显然, 如果 X 是一致光滑空间, 则 X 的范数在集合 $S(X)$ 上是一致光滑的.

命题 1.1 令 $X = l^\infty$, 则存在 X 的一个一致球覆盖, 使得 X 的范数在球覆盖点是一致光滑的.

证 对每个自然数 n, 取一点 $x_n = \{\xi_i^n\}_{i=1}^\infty \in l^\infty$, 这里

$$x_n = \{\xi_i^n\}_{i=1}^\infty = \begin{cases} 1, & i = n, \\ 0, & i \neq n. \end{cases} \tag{1.1}$$

我们知道对任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta \in (0, \frac{1}{4})$, 使得如果 $0 < |t| < \delta$, 则

$$\frac{1}{t}[|1+t| + |1-t| - 2] < \varepsilon, \tag{1.2}$$

因此, 由 (1.1) 和 (1.2), 我们得到如果 $0 < |t| < \delta$, 则如下不等式:

$$\begin{aligned} &\sup_{y\in S(l^\infty), n\in N} \frac{1}{t}[\|x_n+ty\| + \|x_n-ty\| - 2\|x_n\|] \\ &= \sup_{y\in S(l^\infty), n\in N} \frac{1}{t}\Big[\sup_{i\in N}|\xi_i^n + t\eta_i| + \sup_{i\in N}|\xi_i^n - t\eta_i| - 2\sup_{i\in N}|\xi_i^n|\Big] \\ &= \sup_{y\in S(l^\infty), n\in N} \frac{1}{t}[|\xi_n^n + t\eta_n| + |\xi_n^n - t\eta_n| - 2|\xi_n^n|] \\ &= \sup_{y\in S(l^\infty), n\in N} |\eta_n|\Big(\frac{1}{t|\eta_n|}[|1+t\eta_n| + |1-t\eta_n| - 2]\Big) \\ &\leqslant |\eta_n|\cdot\varepsilon < \varepsilon \end{aligned}$$

成立. 因此 l^∞ 的范数在 $\{2x_n\}_{n=1}^\infty \cup \{-2x_n\}_{n=1}^\infty$ 是一致光滑的. 令 B_n 和 $-B_n$ 是两个球, 这里

$$B_n = B\Big(2x_n, \frac{3}{2}\Big), \quad -B_n = B\Big(-2x_n, \frac{3}{2}\Big), \quad n = 1, 2, \cdots.$$

取一点 $y = \{\eta_i\}_{i=1}^\infty \in S(l^\infty)$, 则存在自然数 i_0, 使得 $|\eta_{i_0}| > \frac{3}{4}$. 因此, 我们可以认为 $\eta_{i_0} > \frac{3}{4}$. 因此, 由 $y = \{\eta_i\}_{i=1}^\infty \in S(l^\infty)$ 和 $|\eta_{i_0}| > \frac{3}{4}$, 可得

$$\begin{aligned} \|x_{n_0} - y\| = \sup_{i\in N}|\xi_i^{n_0} - \eta_i| &= \max\Big\{|\xi_{n_0}^{n_0} - \eta_{n_0}|, \sup_{i\in N, i\neq n_0}|\xi_i^{n_0} - \eta_i|\Big\} \\ &\leqslant \max\Big\{|2 - \eta_{n_0}|, \sup_{i\in N, i\neq n_0}|\eta_i|\Big\} < \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

因此, 由 B_{n_0} 的定义, 我们有 $y \in B_{n_0}$. 因此存在 l^∞ 的一致球覆盖, 使得 l^∞ 的范数在球覆盖点是一致光滑的.

命题 1.2 $X = c_0$, 则存在 X 的一个球覆盖, 使得 X 的范数在球覆盖点是一致光滑的.

证 由命题 1.1, 我们得到命题 1.2 成立.

命题 1.3 令 $X = l^p$, 这里 $p \in (1,+\infty)$, 则存在 X 的一个球覆盖, 使得 X 的范数在球覆盖点是一致光滑的.

证 因为 l^p 是一致光滑且可分, 存在 l^p 的一个一致球覆盖, 使得 l^p 的范数在球覆盖点是一致光滑的.

例 1.1 令 $X = l^\infty$. 定义 $\|x\|_0 = \sup\limits_{i\in N}|\xi_i| + 8^{-1}\limsup\limits_{i\to\infty}|\xi_i|$, 这里 $x = \{\xi_i\}_{i=1}^\infty \in l^\infty$, 则 $\|\cdot\|_0$ 是 l^∞ 的一个范数. 我们知道凸函数 $f(x) = \limsup\limits_{n\to\infty}|\xi_i|$ 在 l^∞ 上无处 Gâteaux 可微 [14]. 这表明 $g(x) = \|x\|_0$ 在 l^∞ 上无处 Gâteaux 可微. 此外, 对每个 n, 取一点 $x_n = \{\xi_i^n\}_{i=1}^\infty \in (l^\infty, \|\cdot\|_0)$, 这里

$$x_n = \{\xi_i^n\}_{i=1}^\infty = \begin{cases} 1, & i = n, \\ 0, & i \neq n. \end{cases}$$

令 B_n 和 $-B_n$ 是两个闭球, 这里

$$B_n = B\Big(2x_n, \frac{3}{2}\Big), \quad -B_n = B\Big(-2x_n, \frac{3}{2}\Big), \quad n = 1,2,\cdots.$$

取一点 $y = \{\eta_i\}_{i=1}^\infty \in S(l^\infty, \|\cdot\|_0)$, 则 $\limsup\limits_{i\to\infty}|\eta_i| < 1$. 我们断言 $\sup\limits_{i\in N}|\eta_i| > \frac{7}{8}$. 否则, 有 $\sup\limits_{i\in N}|\eta_i| \leqslant \frac{7}{8}$. 则

$$1 = \|y\|_0 = \sup_{i\in N}|\eta_i| + \frac{1}{8}\limsup_{i\to\infty}|\eta_i| \leqslant \frac{7}{8} + \frac{1}{8}\cdot\frac{7}{8} < 1,$$

矛盾. 因此存在 $i_0 \in N$, 使得 $|\eta_{i_0}| > \frac{7}{8}$. 因此可以认为 $\eta_{i_0} > \frac{7}{8}$. 因此, 由 $\sup\limits_{i\in N}|\eta_i| \leqslant \frac{7}{8}$ 和 $y = \{\eta_i\}_{i=1}^\infty \in S(l^\infty, \|\cdot\|_0)$, 可得

$$\begin{aligned} \|x_{n_0} - y\|_0 &= \sup_{i\in N}|\xi_i^{n_0} - \eta_i| + \frac{1}{8}\limsup_{i\to\infty}|\xi_i^{n_0} - \eta_i| \\ &\leqslant \max\Big\{|2-\eta_{n_0}|, \sup_{i\in N, i\neq n_0}|\eta_i|\Big\} + \frac{1}{8}\limsup_{i\to\infty}|\eta_i| \\ &\leqslant \frac{9}{8} + \frac{1}{8}\limsup_{i\to\infty}|\eta_i| \leqslant \frac{9}{8} + \frac{1}{8} = \frac{5}{4}. \end{aligned}$$

则由 B_{n_0} 的定义, 有 $y \in B_{n_0}$. 因此 $(l^\infty, \|\cdot\|_0)$ 有一致球覆盖性质.

§2 一致球覆盖性质在乘积空间

定理 2.1 令 $\Big(\prod\limits_{i=1}^{2} X_i, \|\cdot\|_p\Big)$ 是一个乘积空间, 这里 $p \in [1,+\infty]$, 则下述论断等价:

(1) 存在 $(\prod\limits_{i=1}^{2} X_i, \|\cdot\|_p)$ 的一个一致球覆盖, 使得 $(\prod\limits_{i=1}^{2} X_i, \|\cdot\|_p)$ 的范数在球覆盖点是一致光滑的;

(2) 存在 X_i 的一个一致球覆盖, 使得 X_i 的范数在球覆盖点是一致光滑的.

为了证明这个定理, 我们首先给出一个引理.

引理 2.1 令 X 是一个 Banach 空间. 则下述论断等价:

(1) 集序列 $\{B(x_n, r_n)\}_{n=1}^{\infty}$ 是 X 的一个一致球覆盖, 且 X 的范数在序列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是一致光滑的;

(2) 存在一个有界序列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X$, 使得 X 的范数在序列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是一致光滑的且

$$\inf_{x\in S(X)}\left(\sup_{n\in N}\langle d_F\|x_n\|, x\rangle\right) > 0.$$

证 (2)⇒(1). 由条件 (2), 存在一个有界序列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X$, 使得 X 的范数在 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是一致光滑且

$$\inf_{x\in S(X)}\left(\sup_{n\in N}\langle d_F\|x_n\|, x\rangle\right) > 0. \tag{2.1}$$

因为 X 的范数在序列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是一致光滑, 我们有

$$\lim_{t\to 0}\left(\sup_{n\in N, y\in S(X)}\frac{1}{t}[\|x_n+ty\|+\|x_n-ty\|-2\|x_n\|]\right)=0.$$

因此, 由 (2.1), 存在 $k\in(0,+\infty)$, 使得 $\inf\limits_{x\in S(X)}\sup\limits_{n\in N}\langle d_F\|x_n\|, x\rangle > k$. 此外, 由 $k>0$, 存在一个实数 $\delta\in(0,\frac{1}{4})$, 使得如果 $0<|t|<\delta$, 则

$$\sup_{n\in N, y\in S(X)}\left(\frac{1}{t}[\|x_n+ty\|+\|x_n-ty\|-2\|x_n\|]\right)<\frac{k}{16}. \tag{2.2}$$

因为 X 的范数在 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是一致光滑, 我们得到对每个 $n\in N$, X 的范数在点 x_n 是 Frechet 可微的. 因此存在一个泛函 $x_n^*=d_F\|x_n\|\in S(X^*)$, 使得

$$\lim_{t\to 0}\frac{\|x_n+ty\|-\|x_n\|}{t}=\langle d_F\|x_n\|, y\rangle,\quad \lim_{t\to 0}\frac{\|x_n-ty\|-\|x_n\|}{t}=-\langle d_F\|x_n\|, y\rangle, \tag{2.3}$$

对每个 $n\in N$ 成立. 我们断言对每个 $n\in N$ 和 $y\in S(X)$, 下述不等式

$$\left|\frac{\|x_n+ty\|-\|x_n\|}{t}-\langle d_F\|x_n\|, y\rangle\right|<\frac{k}{16},$$

对每个 $0<|t|<\delta$ 成立. 事实上, 因为 X 的范数在 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是一致光滑且 $f(t)=\|x+ty\|$ 在 R 上是一个凸函数, 由 (2.3), 我们得到如果 $0<t<\delta$, 则

$$\frac{\|x_n+ty\|-\|x_n\|}{t}\geqslant\langle d_F\|x_n\|, y\rangle,\quad \frac{\|x_n-ty\|-\|x_n\|}{-t}\leqslant\langle d_F\|x_n\|, y\rangle,$$

对每个 $n\in N$ 成立. 因此, 由上述不等式, 我们有

$$-\frac{\|x_n-ty\|-\|x_n\|}{t}\leqslant\langle d_F\|x_n\|, y\rangle\leqslant\frac{\|x_n+ty\|-\|x_n\|}{t}, \tag{2.4}$$

对每个 $n\in N$ 成立. 此外, 由 (2.3), 我们得到如果 $0>t>-\delta$, 则

$$\frac{\|x_n+ty\|-\|x_n\|}{t}\leqslant\langle d_F\|x_n\|, y\rangle,\quad \frac{\|x_n-ty\|-\|x_n\|}{-t}\geqslant\langle d_F\|x_n\|, y\rangle,$$

对每个 $n\in N$ 成立. 因此, 由上述不等式, 我们有

$$\frac{\|x_n-ty\|-\|x_n\|}{t}\leqslant\langle d_F\|x_n\|, y\rangle\leqslant-\frac{\|x_n+ty\|-\|x_n\|}{t}, \tag{2.5}$$

对每个 $n\in N$ 成立. 注意 (2.2) 和 (2.4)–(2.5), 我们得到对每个 $n\in N$ 和 $y\in S(X)$, 如果 $0<|t|<\delta$, 则

$$\left|\frac{\|x_n+ty\|-\|x_n\|}{t}-\langle d_F\|x_n\|, y\rangle\right|<\frac{k}{16}. \tag{2.6}$$

取 $h\in(2,+\infty)$, 使得 $h\frac{k}{16}$ 和 $h\delta>4$. 此外, 取 $r\in(0,\frac{k}{64})$. 对每一个 $1\leqslant n<\infty$, 我们定义闭球 B_n, 这里

$$B_n=B\Big((h+r)x_n,h-\frac{1}{h}\Big),\quad n=1,2,\cdots.$$

显然, 每个闭球 B_n 到原点的距离不超过 $\frac{1}{h}+r$. 我们断言

$$S(X)\subset\bigcup_{n=1}^{\infty}B\Big((h+r)x_n,h-\frac{1}{h}\Big).$$

事实上, 因为 $\inf\limits_{x\in S(X)}\sup\limits_{n\in N}\langle d_F\|x_n\|,x\rangle>k$, 我们得到对每个 $y\in S(X)$, 存在 $x^*\in\{d_F\|x_n\|\}_{n=1}^{\infty}$, 使得 $x^*(y)\geqslant\frac{k}{4}>0$. 我们可以认为 $x^*=d_F\|x_j\|$ 对某个 $1\leqslant j<\infty$ 成立. 因此存在 $\beta_1\in R$ 和一点 $u_j\in H_j=\{x\in X:\langle d_F\|x_j\|,x_j\rangle=0\}$, 使得 $y=\beta_1x_j+u_j$. 则 $\frac{k}{4}\leqslant\beta_1\leqslant1$. 下面证明 $y\in B\Big((h+r)x_j,h-\frac{1}{h}\Big)$. 否则, 我们有

$$h-\frac{1}{h}<\|(h+r)x_j-y\|=\|(h+r-\beta_1)x_j-u_j\|.$$

因此, 由上述不等式, 我们有如下不等式:

$$\begin{aligned}-\frac{1}{h}&<\|(h+r-\beta_1)x_j-u_j\|-h\\&=\|(h+r-\beta_1)x_j-u_j\|-h\|x_j\|\\&\leqslant\|(h-\beta_1)x_j-u_j\|-h\|x_j\|+r\|x_j\|\\&=(h-\beta_1)\Big\|x_j-\frac{1}{h-\beta_1}u_j\Big\|-(h-r)\|x_j\|\\&=(h-\beta_1)\Big\{\Big\|x_j-\frac{1}{h-\beta_1}u_j\Big\|-\|x_j\|\Big\}-(\beta_1-r)\|x_j\|.\end{aligned}\tag{2.7}$$

因为 $r\in(0,\frac{k}{64})$ 和 $\frac{k}{4}\leqslant\beta_1\leqslant1$, 我们有 $\beta_1-r>\frac{k}{6}$. 此外, 因为 $\frac{k}{4}\leqslant\beta_1\leqslant1$ 和 $h\delta>4$, 由 $\delta\in(0,\frac{1}{4})$, 我们有 $(h-\beta_1)\delta>1$. 因此, 由 (2.6), 我们有

$$\Big|(h-\beta_1)\Big\{\Big\|x_j-\frac{1}{h-\beta_1}u_j\Big\|-\|x_j\|\Big\}-\langle d_F\|x_j\|,-u_j\rangle\Big|<\frac{k}{16}.$$

此外, 因为 $\langle d_F\|x_j\|,-u_j\rangle=0$, 由上述不等式, 我们有

$$\Big|(h-\beta_1)\Big\{\Big\|x_j-\frac{1}{h-\beta_1}u_j\Big\|-\|x_j\|\Big\}\Big|<\frac{k}{16}.$$

因此, 由 $h\frac{k}{16}$ 和 $\beta_1-r>\frac{k}{6}$, 我们有

$$\begin{aligned}-\frac{k}{16}\leqslant-\frac{1}{h}&\leqslant(h-\beta_1)\Big\{\Big\|x_j-\frac{1}{h-\beta_1}u_j\Big\|-\|x_j\|\Big\}-(\beta_1-r)\|x_j\|\\&\leqslant\frac{k}{16}-(\beta_1-r)\leqslant\frac{k}{16}-\frac{k}{6}<-\frac{k}{12},\end{aligned}$$

矛盾. 因此

$$S(X)\subset\bigcup_{n=1}^{\infty}B\Big((h+r)x_n,h-\frac{1}{h}\Big).$$

这表明集序列 $\{B(x_n,r_n)\}_{n=1}^{\infty}$ 是 X 的一个一致球覆盖且 X 的范数在 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是一致 Frechet 可微的.

(1)⇒(2). 由条件 (1), 存在一个集序列 $\{B(x_n,r_n)\}_{n=1}^{\infty}$ 是 X 的一个一致球覆盖, 且 X 的范数在 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是一致 Frechet 可微的. 我们可以认为 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}=\{x_n\}_{n=1}^{\infty}\cup\{-x_n\}_{n=1}^{\infty}$. 因此存在两个实数 $\alpha>0$ 和 $\beta>0$, 使得 $\sup\limits_{n\in N}\|x_n\|<\beta$ 和 $\inf\limits_{n\in N}(\|x_n\|-r_n)>\alpha$. 因此 $\mathfrak{B}_1=\{B(x_n,r_n+\frac{\alpha}{4})\}_{n=1}^{\infty}$ 是一个球覆盖, 满足 $\inf\limits_{n\in N}(\|x_n\|-r_n)>(\frac{3}{4})\cdot\alpha$. 下面证明存在 $k\in(0,+\infty)$, 使得

$$\inf_{x\in S(X)}\left(\sup_{n\in N}\langle d_F\|x_n\|,x\rangle\right)>k. \tag{2.8}$$

事实上, 假设 (2.8) 不成立. 则存在一个序列 $\{z_i\}_{i=1}^{\infty}\subset S(X)$, 使得 $\sup\limits_{n\in N}\langle d_F\|x_n\|,z_i\rangle\to 0$, $i\to\infty$. 因此可以认为 $\langle d_F\|x_n\|,z_i\rangle<\frac{\alpha}{8}$ 对每个 $n\in N$ 和 $i\in N$ 成立. 因此, 由 $S(X)\subset\{B(x_n,r_n+\frac{\alpha}{4})\}_{n=1}^{\infty}$, 可得对每个 $z_i\in S(X)$, 存在 $j\in N$, 使得 $z_i\in B(x_j,r_j+\frac{\alpha}{4})$. 这表明

$$\frac{\alpha}{4}+r_j\geqslant\|x_j-z_i\|\geqslant\langle d_F\|x_j\|,x_j-z_i\rangle\geqslant\|x_j\|-\langle d_F\|x_n\|,z_i\rangle\geqslant\|x_j\|-\frac{\alpha}{8}.$$

因此 $\frac{\alpha}{4}+r_j+\frac{\alpha}{8}\geqslant\|x_j\|$. 然而, 我们已经证明了 $\inf\limits_{n\in N}(\|x_n\|-r_n)>(\frac{3}{4})\alpha$, 矛盾.

下面证明定理 2.1.

证 (1)⇒(2). 因为存在 $\left(\prod\limits_{i=1}^{2}X_i,\|\cdot\|_p\right)$ 的一个一致球覆盖, 使得 $\left(\prod\limits_{i=1}^{2}X_i,\|\cdot\|_p\right)$ 的范数在球覆盖点是一致光滑的, 由引理 2.1, 存在一个有界序列 $\{(x_{1,n},x_{2,n})\}_{n=1}^{\infty}$, 使得 $(\prod\limits_{i=1}^{2}X_i,\|\cdot\|_p)$ 的范数在 $\{(x_{1,n},x_{2,n})\}_{n=1}^{\infty}$ 是一致光滑的且

$$\inf_{(x_1,x_2)\in S(X_1\times X_2)}\left(\sup_{n\in N}\langle d_F\|(x_{1,n},x_{2,n})\|_p,(x_1,x_2)\rangle\right)=4r\in(0,1]. \tag{2.9}$$

此外, 可以认为 $\{(x_{1,n},x_{2,n})\}_{n=1}^{\infty}\subset S(X_1\times X_2)$. 进一步, 可得

$$\begin{aligned}\{(x_{1,n},x_{2,n})\}_{n=1}^{\infty}=&\{(x_{1,n},-x_{2,n})\}_{n=1}^{\infty}\cup\{(-x_{1,n},x_{2,n})\}_{n=1}^{\infty}\\&\cup\{(x_{1,n},x_{2,n})\}_{n=1}^{\infty}\cup\{(-x_{1,n},-x_{2,n})\}_{n=1}^{\infty}.\end{aligned} \tag{2.10}$$

因为 $(\prod\limits_{i=1}^{2}X_i,\|\cdot\|_p)$ 的范数在 $\{(x_{1,n},x_{2,n})\}_{n=1}^{\infty}$ 是一致光滑的, 我们得到对每个 $\varepsilon\in(0,1)$, 存在 $\delta\in(0,\min\{\frac{\varepsilon}{4},r\})$, 使得

(1) $|t_1^{p-1}-t_2^{p-1}|<\varepsilon$ 和 $|t_1^{1-\frac{1}{p}}-t_2^{1-\frac{1}{p}}|<\varepsilon$ 对每个满足 $|t_1|\leqslant 4$, $|t_2|\leqslant 4$, $|t_1-t_2|<2\delta+2(1+\delta)^p-2(1-\delta)^p$, $p\neq+\infty$ 成立;

(2)
$$\begin{aligned}\sup_{(y_1,y_2)\in S(X_1\times X_2),n\in N}\frac{1}{t}[&\|(x_{1,n},x_{2,n})+t(y_1,y_2)\|_p+\|(x_{1,n},x_{2,n})-t(y_1,y_2)\|_p\\&+2\|(x_{1,n},x_{2,n})\|_p]<\varepsilon,\end{aligned} \tag{2.11}$$

对每个 $0<|t|<\delta$ 成立. 为叙述清楚, 我们将 (1)⇒(2) 的证明分成下面三种情况.

情况 I 令 $p=1$. 则由 (2.9), 我们可以认为 $\|x_{1,n}\|>r$ 和 $\|x_{2,n}\|>r$ 对每个 $n\in N$ 成立. 因此, 由 (2.11), 可得

$$\begin{aligned}&\sup_{y_1\in S(X_1),n\in N}\frac{1}{t}[\|x_{1,n}+ty_1\|+\|x_{1,n}-ty_1\|-2\|x_{1,n}\|]\\&\leqslant\sup_{(y_1,0)\in S(X_1\times X_2),n\in N}\frac{1}{t}[\|(x_{1,n},x_{2,n})+t(y_1,0)\|_1+\|(x_{1,n},x_{2,n})-t(y_1,0)\|_1\end{aligned}$$

$$+2\|(x_{1,n},x_{2,n})\|_1]<\varepsilon,$$

对每个 $0<|t|<\delta$ 成立. 因此 X_1 的范数在集合 $\{x_{1,n}\}_{n=1}^{\infty}$ 是一致光滑的. 此外, 我们有 $(d_F\|x_{1,n}\|,\, d_F\|x_{2,n}\|)\in S((X_1\times X_2)^*)$ 和

$$\begin{aligned}\langle(d_F\|x_{1,n}\|,d_F\|x_{2,n}\|),(x_{1,n},x_{2,n})\rangle&=\langle d_F\|x_{1,n}\|,x_{1,n}\rangle+\langle d_F\|x_{2,n}\|,x_{2,n}\rangle\\&=\|x_{1,n}\|+\|x_{2,n}\|=\|(x_{1,n},x_{2,n})\|_1,\end{aligned}$$

对每个 $n\in N$ 成立. 这表明 $(d_F\|x_{1,n}\|,d_F\|x_{2,n}\|)=d_F\|(x_{1,n},x_{2,n})\|_1$ 对每个 $n\in N$ 成立. 因此, 由 (2.9) 和 (2.10), 可得如下不等式:

$$\begin{aligned}&\inf_{x_1\in S(X_1)}\Big(\sup_{n\in N}\langle d_F\|x_{1,n}\|,x_1\rangle\Big)\\&=\inf_{(x_1,0)\in S(X_1\times X_2)}\Big(\sup_{n\in N}\langle(d_F\|x_{1,n}\|,d_F\|x_{2,n}\|),(x_1,0)\rangle\Big)\\&\geqslant\inf_{(x_1,x_2)\in S(X_1\times X_2)}\Big(\sup_{n\in N}\langle d_F\|(x_{1,n},x_{2,n})\|_1,(x_1,x_2)\rangle\Big)>0.\end{aligned}$$

因此, 由引理 2.1, 存在 X_1 的一个一致球覆盖, 使得 X_1 的范数在球覆盖点是一致光滑的.

类似可得存在 X_2 的一个一致球覆盖, 使得 X_2 的范数在球覆盖点是一致光滑的.

情况 II 令 $p\in(0,+\infty)$. 则由 Hahn-Banach 定理, 存在两个泛函 $x_{1,n}^*\in S(X_1^*)$ 和 $x_{2,n}^*\in S(X_2^*)$, 使得 $x_{1,n}^*(x_{1,n})=\|x_{1,n}\|$ 和 $x_{2,n}^*(x_{2,n})=\|x_{2,n}\|$. 因此存在 $\lambda_{1,n}\in(0,+\infty)$ 和 $\lambda_{2,n}\in(0,+\infty)$, 使得 $(\lambda_{1,n}x_{1,n}^*,\lambda_{2,n}x_{2,n}^*)\in S((X_1\times X_2)^*)$ 和 $\langle(\lambda_{1,n}x_{1,n}^*,\lambda_{2,n}x_{2,n}^*),(x_{1,n},x_{2,n})\rangle=1$ 对每个 $n\in N$ 成立. 则 $d_F\|(x_{1,n},x_{2,n})\|_p=(\lambda_{1,n}x_{1,n}^*,\lambda_{2,n}x_{2,n}^*)$. 我们断言存在两个 $\{n\}$ 的子序列 $\{n_i\}$ 和 $\{n_j\}$, 使得 $\{n_i\}\cup\{n_j\}=\{n\}$ 且 $\lambda_{1,n_i}>r\geqslant\lambda_{1,n_j}$. 否则, 我们有 $\lambda_{1,n}\to0$, $n\to\infty$. 因此, 由 $\lambda_{1,n}\to0$, 可得对每个 $\varepsilon>0$, 存在 $n_\varepsilon\in N$, 使得 $\lambda_{1,n}<\frac{\varepsilon}{2}$ 对每个 $n\geqslant n_\varepsilon$ 成立. 因此, 由 Hahn-Banach 定理, 存在一个泛函 $x_\varepsilon^{**}\in X^{**}$, 使得 $\langle x_{1,n}^*,x_\varepsilon^{**}\rangle=0$ 对每个 $n\leqslant n_0$ 成立. 因此, 由 Goldstine 定理, 存在一点 $x_\varepsilon\in S(X_1)$, 使得 $|\lambda_{1,n}\langle x_{1,n}^*,x_\varepsilon\rangle|<\varepsilon$ 对每个 $n\leqslant n_0$ 成立. 这表明 $\sup\limits_{n\in N}|\lambda_{1,n}\langle x_{1,n}^*,x_\varepsilon\rangle|<\varepsilon$. 则

$$\inf_{(x_1,0)\in S(X_1\times X_2)}\Big(\sup_{n\in N}\langle(\lambda_{1,n}x_{1,n}^*,\lambda_{2,n}x_{2,n}^*),(x_1,0)\rangle\Big)=0,$$

这表明 (2.9) 不成立, 矛盾. 我们断言

$$\inf_{x_1\in S(X_1)}\Big(\sup_{i\in N}\langle\lambda_{1,n_i}x_{1,n_i}^*,x_1\rangle\Big)\geqslant r\in\Big(0,\frac{1}{4}\Big).$$

事实上, 假设这个公式不成立. 则由 $d_F\|(x_{1,n},x_{2,n})\|_p=(\lambda_{1,n}x_{1,n}^*,\lambda_{2,n}x_{2,n}^*)$, 可得如下等式:

$$\begin{aligned}&\inf_{x_1\in S(X_1)}\Big(\sup_{i\in N}\langle\lambda_{1,n_i}x_{1,n_i}^*,x_1\rangle\Big)\\&=\inf_{(x_1,0)\in S(X_1\times X_2)}\Big(\sup_{i\in N}\langle(\lambda_{1,n_i}x_{1,n_i}^*,\lambda_{2,n_i}x_{2,n_i}^*),(x_1,0)\rangle\Big)\\&=\inf_{(x_1,0)\in S(X_1\times X_2)}\Big(\sup_{i\in N}\langle(d_F\|(x_{1,n_i},x_{2,n_i})\|_p,(x_1,0)\rangle\Big)<r.\end{aligned}$$

因此, 由 (2.9) 和 $\{n_i\}\cup\{n_j\}=\{n\}$, 存在一个自然数 $n_{j_0}\in\{n_j\}$ 和一点 $z_1\in S(X_1)$, 使得

$$\langle(\lambda_{1,n_{j_0}}x_{1,n_{j_0}}^*,\lambda_{2,n_{j_0}}x_{2,n_{j_0}}^*),(z_1,0)\rangle>2r.$$

注意 $n_{j_0}\in\{n_j\}$, 由 $\lambda_{1,n_i}>r\geqslant\lambda_{1,n_j}$ 和 $x_{1,n}^*\in S(X_1^*)$, 可得

$$r\geqslant\lambda_{1,n_{j_0}}\geqslant\langle\lambda_{1,n_{j_0}}x_{1,n_{j_0}}^*,z_1\rangle=\langle(\lambda_{1,n_{j_0}}x_{1,n_{j_0}}^*,\lambda_{2,n_{j_0}}x_{2,n_{j_0}}^*),(z_1,0)\rangle>2r,$$

矛盾. 为了方便书写, 我们将 $\{n_i\}$ 写成 $\{n\}$. 则

$$\inf_{x_1\in S(X_1)}\Big(\sup_{n\in N}\langle d_F\|x_{1,n}\|,x_1\rangle\Big)=\inf_{x_1\in S(X_1)}\Big(\sup_{n\in N}\langle x_{1,n}^*,x_1\rangle\Big)>0.$$

我们下面证明 X_1 的范数在 $\{x_{1,n}\}_{n=1}^{\infty}$ 上是一致光滑的. 因此, 由 $r\geqslant\lambda_{1,n}$, 存在 $\mu_p\in(0,1)$, 使得 $\inf\limits_{n\in N}\|x_{1,n}\|=2\mu_p>0$ 对每个 $n\in N$ 成立, 则 $\mu_p>2\delta$. 此外, 由 (2.11) 和引理 2.1 的证明, 可得

$$\begin{aligned}\sup_{(y_1,y_2)\in S(X_1\times X_2),n\in N}\Big|&\frac{1}{t}[\|(x_{1,n},x_{2,n})+t(y_1,y_2)\|_p-\|(x_{1,n},x_{2,n})\|_p]\\&-\langle d_F\|(x_{1,n},x_{2,n})\|_p,(y_1,y_2)\rangle\Big|<\varepsilon\end{aligned}$$

和

$$\begin{aligned}\sup_{(y_1,y_2)\in S(X_1\times X_2),n\in N}\Big|&\frac{1}{t}[\|(x_{1,n},x_{2,n})-t(y_1,y_2)\|_p-\|(x_{1,n},x_{2,n})\|_p]\\&-\langle d_F\|(x_{1,n},x_{2,n})\|_p,(y_1,y_2)\rangle\Big|<\varepsilon,\end{aligned}$$

对每个 $0<|t|<\delta$ 成立. 因为 $y=t^{\frac{1}{p}}$ 在 $R\backslash\{0\}$ 是可微的, 由 Lagrange 中值定理, 存在一个实数 $\eta_{1,n}\in R$, 在 $\|x_{1,n}\|^p+\|x_{2,n}\|^p$ 和 $\|x_{1,n}+ty_1\|^p+\|x_{2,n}+ty_2\|^p$ 之间, 使得

$$\begin{aligned}&\|(x_{1,n},x_{2,n})+t(y_1,y_2)\|_p-\|(x_{1,n},x_{2,n})\|_p\\&=\frac{1}{p}\eta_{1,n}^{\frac{1}{p}-1}[\|x_{1,n}+ty_1\|^p+\|x_{2,n}+ty_2\|^p-\|x_{1,n}\|^p-\|x_{2,n}\|^p].\end{aligned}$$

因此, 由 $\|(x_{1,n},x_{2,n})+t(y_1,y_2)\|_p-\|(x_{1,n},x_{2,n})\|_p<\delta$ 和 $\|(x_{1,n},x_{2,n})\|_p=1$, 可得

$$\|x_{1,n}+ty_1\|^p+\|x_{2,n}+ty_2\|^p\leqslant(\|(x_{1,n},x_{2,n})\|_p+\delta)^p=(1+\delta)^p$$

和

$$\|x_{1,n}+ty_1\|^p+\|x_{2,n}+ty_2\|^p\geqslant(\|(x_{1,n},x_{2,n})\|_p-\delta)^p=(1-\delta)^p.$$

此外, 不失一般性, 我们可以认为 $(1+\delta)^{p-1}<2$. 此外, 由 $\|(x_{1,n},x_{2,n})\|_p=1$ 和 $\eta_{1,n}$ 的定义, 可得 $\eta_{1,n}\leqslant(1+\delta)^p$. 因此, 由 $\eta_{1,n}\leqslant(1+\delta)^p$ 和 $(1+\delta)^{p-1}<2$, 可得

$$\eta_{1,n}^{1-\frac{1}{p}}\leqslant((1+\delta)^p)^{1-\frac{1}{p}}=(1+\delta)^{p-1}<2.$$

此外, 由 $\|(x_{1,n},x_{2,n})\|_p=1$ 和前面的证明, 有

$$\begin{aligned}\sup_{(y_1,y_2)\in S(X_1\times X_2),n\in N}\Big|&\Big(\frac{1}{p}\eta_{1,n}^{\frac{1}{p}-1}\frac{1}{t}\big[\|x_{1,n}+ty_1\|^p+\|x_{2,n}+ty_2\|^p-\|x_{1,n}\|^p-\|x_{2,n}\|^p\big]\Big)\\&-\langle d_F\|(x_{1,n},x_{2,n})\|_p,(y_1,y_2)\rangle\Big|<\varepsilon,\end{aligned}$$

对每个 $0<|t|<\delta$ 成立. 因此, 由上述不等式和 $\eta_{1,n}^{1-\frac{1}{p}}<2$, 有

$$\begin{aligned}\sup_{(y_1,y_2)\in S(X_1\times X_2),n\in N}\Big|&\Big(\frac{1}{t}[\|x_{1,n}+ty_1\|^p+\|x_{2,n}+ty_2\|^p-\|x_{1,n}\|^p-\|x_{2,n}\|^p]\Big)\\&-p\eta_{1,n}^{1-\frac{1}{p}}\langle d_F\|(x_{1,n},x_{2,n})\|,(y_1,y_2)\rangle\Big|<p\eta_{1,n}^{1-\frac{1}{p}}\varepsilon<2p\varepsilon,\end{aligned}$$

对每个 $0<|t|<\delta$ 成立. 类似地, 可得存在 $\eta_{2,n}\in R$ 在 $\|x_{1,n}\|^p+\|x_{2,n}\|^p$ 和 $\|x_{1,n}-ty_1\|^p+\|x_{2,n}-ty_2\|^p$ 之间, 使得 $\eta_{2,n}^{1-\frac{1}{p}}<2$ 和

$$\sup_{(y_1,y_2)\in S(X_1\times X_2),n\in N}\Big|\Big(\frac{1}{t}[\|x_{1,n}-ty_1\|^p+\|x_{2,n}-ty_2\|^p-\|x_{1,n}\|^p-\|x_{2,n}\|^p]\Big)\\ -p\eta_2^{1-\frac{1}{p}}\langle d_F\|(x_{1,n},x_{2,n})\|_p,(y_1,y_2)\rangle\Big|<p\eta_2^{1-\frac{1}{p}}\varepsilon<2p\varepsilon,$$

对每个 $0<|t|<\delta$ 成立. 则我们得到 $|\eta_{1,n}-\eta_{2,n}|<2(1+\delta)^p-2(1-\delta)^p$. 因为 $\|(x_{1,n},x_{2,n})\|_p=1$, 由 $\delta\in(0,\frac{\varepsilon}{4})$ 和 $\|(y_1,y_2)\|_p=1$, 有

$$|p\eta_{1,n}^{1-\frac{1}{p}}\langle d_F\|(x_{1,n},x_{2,n})\|,(y_1,y_2)\rangle-p\eta_{2,n}^{1-\frac{1}{p}}\langle d_F\|(x_{1,n},x_{2,n})\|,(y_1,y_2)\rangle|\\ \leqslant p|\eta_{1,n}^{1-\frac{1}{p}}-\eta_{2,n}^{1-\frac{1}{p}}|\cdot\|d_F\|(x_{1,n},x_{2,n})\|_p\|\cdot\|(y_1,y_2)\|_p\leqslant 2p\varepsilon,$$

对每个 $0<|t|<\delta$ 成立. 因此, 由上述不等式, 有

$$\sup_{(y_1,y_2)\in S(X_1\times X_2),n\in N}\Big(\frac{1}{t}[\|x_{1,n}+ty_1\|^p+\|x_{1,n}-ty_1\|^p+\|x_{2,n}+ty_2\|^p\\ +\|x_{2,n}-ty_2\|^p-2\|x_{1,n}\|^p-2\|x_{2,n}\|^p]\Big)\\ \leqslant\sup_{(y_1,y_2)\in S(X_1\times X_2),n\in N}\Big|\Big(\frac{1}{t}[\|x_{1,n}+ty_1\|^p+\|x_{2,n}+ty_2\|^p-\|x_{1,n}\|^p-\|x_{2,n}\|^p]\Big)\\ -p\eta_{1,n}^{1-\frac{1}{p}}\langle d_F\|(x_{1,n},x_{2,n})\|,(y_1,y_2)\rangle\Big|\\ +\sup_{(y_1,y_2)\in S(X_1\times X_2),n\in N}\Big|\Big(\frac{1}{t}[\|x_{1,n}-ty_1\|^p+\|x_{2,n}-ty_2\|^p-\|x_{1,n}\|^p-\|x_{2,n}\|^p]\Big)\\ -p\eta_2^{1-\frac{1}{p}}\langle d_F\|(x_{1,n},x_{2,n})\|_p,(y_1,y_2)\rangle\Big|\\ +\Big|p\eta_{1,n}^{1-\frac{1}{p}}\langle d_F\|(x_{1,n},x_{2,n})\|,(y_1,y_2)\rangle-p\eta_{2,n}^{1-\frac{1}{p}}\langle d_F\|(x_{1,n},x_{2,n})\|,(y_1,y_2)\rangle\Big|\\ \leqslant 2p\varepsilon+2p\varepsilon+2p\varepsilon=6p\varepsilon,$$

对每个 $0<|t|<\delta$ 成立. 因为这个函数 $f(x)=\|x\|^p$ 是一个凸函数, 由上述不等式, 有

$$\sup_{y_1\in S(X_1),n\in N}\frac{1}{t}\Big[\|x_{1,n}+ty_1\|^p+\|x_{1,n}-ty_1\|^p-2\|x_{1,n}\|^p\Big]<6p\varepsilon,$$

对每个 $0<|t|<\delta$ 成立. 类似引理 2.1 的证明, 存在一个泛函 $d_F\|x_{1,n}\|^p\in X^*$, 使得

$$\sup_{y_1\in S(X_1),n\in N}\Big|\frac{1}{t}[\|x_{1,n}+ty_1\|^p-\|x_{1,n}\|^p]-\langle d_F\|x_{1,n}\|^p,y_1\rangle\Big|<6p\varepsilon$$

和

$$\sup_{y_1\in S(X_1),n\in N}\Big|\frac{1}{t}[\|x_{1,n}-ty_1\|^p-\|x_{1,n}\|^p]-\langle d_F\|x_{1,n}\|^p,y_1\rangle\Big|<6p\varepsilon,$$

对每个 $0<|t|<\delta$ 成立. 因此, 由 Lagrange 中值定理, 存在一点 $\xi_{1,n}\in R$ 在 $\|x_{1,n}\|$ 和 $\|x_{1,n}+ty_1\|$ 之间, 使得

$$\|x_{1,n}+ty_1\|^p-\|x_{1,n}\|^p=p\xi_{1,n}^{p-1}\Big(\|x_{1,n}+ty_1\|-\|x_{1,n}\|\Big).$$

此外, 由 $\inf\limits_{n\in N}\|x_{1,n}\|=2\mu_p>4\delta$, 可得 $\mu_p\leqslant\xi_{1,n}$, 则

$$\begin{aligned}&\sup_{y_1\in S(X_1),n\in N}\left|\frac{1}{t}p\xi_1^{p-1}\Big[\|x_{1,n}+ty_1\|-\|x_{1,n}\|\Big]-\langle d_F\|x_{1,n}\|^p,y_1\rangle\right|\\&=\sup_{y_1\in S(X_1),n\in N}\left|\frac{1}{t}\Big[\|x_{1,n}+ty_1\|^p-\|x_{1,n}\|^p\Big]-\langle d_F\|x_{1,n}\|^p,y_1\rangle\right|<6p\varepsilon,\end{aligned}$$

对每个 $0<|t|<\delta$ 成立. 因此, 由 $\mu_p\leqslant\xi_{1,n}$, 有

$$\sup_{y_1\in S(X_1),n\in N}\left|\frac{1}{t}\Big[\|x_{1,n}+ty_1\|-\|x_{1,n}\|\Big]-\left\langle\frac{1}{p\xi_{1,n}^{p-1}}d_F\|x_{1,n}\|^p,y_1\right\rangle\right|<\frac{1}{p\mu_p^{p-1}}6p\varepsilon,$$

对每个 $0<|t|<\delta$ 成立. 类似地, 存在 $\xi_{2,n}$ 在 $\|x_{1,n}\|$ 和 $\|x_{1,n}-ty_1\|$ 之间, 使得

$$\sup_{y_1\in S(X_1),n\in N}\left|\frac{1}{t}[\|x_{1,n}-ty_1\|-\|x_{1,n}\|]-\left\langle\frac{1}{p\xi_{2,n}^{p-1}}d_F\|x_{1,n}\|^p,y_1\right\rangle\right|<\frac{1}{p\mu_p^{p-1}}6p\varepsilon,$$

对每个 $0<|t|<\delta$ 成立. 因为 $\left|t_1^{p-1}-t_2^{p-1}\right|<\varepsilon$ 对每个满足 $|t_1-t_2|<2\delta$ 的 t_1 和 t_2 成立, 则

$$\begin{aligned}&\left|\left\langle\frac{1}{p\xi_{1,n}^{p-1}}d_F\|x_{1,n}\|^p,y_1\right\rangle-\left\langle\frac{1}{p\xi_{2,n}^{p-1}}d_F\|x_{1,n}\|^p,y_1\right\rangle\right|\\&\leqslant\frac{\left|\xi_{2,n}^{p-1}-\xi_{1,n}^{p-1}\right|}{p\xi_{1,n}^{p-1}\cdot\xi_{2,n}^{p-1}}\cdot\|d_F\|x_{1,n}\|^p\|\cdot\|y_1\|\leqslant\frac{|\xi_{2,n}^{p-1}-\xi_{1,n}^{p-1}|}{p\xi_{1,n}^{p-1}\cdot\xi_{2,n}^{p-1}}\cdot p\|y_1\|<\frac{2\varepsilon}{\mu_p^{2p-2}}.\end{aligned}$$

因此, 由上述三个不等式, 可得下述不等式:

$$\begin{aligned}&\sup_{y_1\in S(X_1),n\in N}\left|\frac{1}{t}[\|x_{1,n}+ty_1\|+\|x_{1,n}-ty_1\|-2\|x_{1,n}\|]\right|\\&\leqslant\sup_{y_1\in S(X_1),n\in N}\left|\frac{1}{t}[\|x_{1,n}+ty_1\|-\|x_{1,n}\|]-\left\langle\frac{1}{p\xi_{1,n}^{p-1}}d_F\|x_{1,n}\|^p,y_1\right\rangle\right|\\&\quad+\sup_{y_1\in S(X_1),n\in N}\left|\frac{1}{t}[\|x_{1,n}-ty_1\|-\|x_{1,n}\|]-\left\langle\frac{1}{p\xi_{2,n}^{p-1}}d_F\|x_{1,n}\|^p,y_1\right\rangle\right|\\&\quad+\left|\left\langle\frac{1}{p\xi_{1,n}^{p-1}}d_F\|x_{1,n}\|^p,y_1\right\rangle-\left\langle\frac{1}{p\xi_{2,n}^{p-1}}d_F\|x_{1,n}\|^p,y_1\right\rangle\right|\\&<\frac{2}{\mu_p^{p-1}}6\varepsilon+\frac{1}{\mu_p^{2p-2}}2\varepsilon,\end{aligned}$$

对每个 $0<|t|<\delta$ 成立. 因此 X_1 的范数在 $\{x_{1,n}\}_{n=1}^{\infty}$ 上是一致光滑的. 因此, 由引理 2.1, 存在 X_1 的一个一致球覆盖, 使得 X_1 的范数在球覆盖点是一致光滑的.

类似可得, 存在 X_2 的一个一致球覆盖, 使得 X_2 的范数在球覆盖点是一致光滑的.

情况 III 令 $p=+\infty$. 此外, 令 $d_F\|(x_{1,n},x_{2,n})\|_\infty=(y^*,z^*)$, 则 $\|y^*\|+\|z^*\|=1$. 因为

$$\begin{aligned}\|(x_{1,n},x_{2,n})\|_\infty&=\langle d_F\|(x_{1,n},x_{2,n})\|_\infty,(x_{1,n},x_{2,n})\rangle\\&\leqslant\|y^*\|\|x_{1,n}\|+\|z^*\|\|x_{2,n}\|\\&\leqslant\|x_{1,n}\|+\|x_{2,n}\|\leqslant\|(x_{1,n},x_{2,n})\|_\infty,\end{aligned}$$

可得 $\|x_{n,1}\|\neq\|x_{n,2}\|$ 和 $\max\{\|x_{n,1}\|,\|x_{n,2}\|\}=1$ 对每个 $n\in N$ 成立. 因此, 由 (2.9), 存在序列 $\{(x_{1,n},x_{2,n})\}_{n=1}^{\infty}$ 的一个子列 $\{(x_{1,n_i},x_{2,n_i})\}_{i=1}^{\infty}$, 使得 $\|x_{1,n_i}\|=1$ 和 $\|x_{1,n_i}\|>\|x_{2,n_i}\|$

对每个 $i\in N$ 成立. 我们断言 $\sup\limits_{i\in N}\|x_{2,n_i}\|=\rho\in(0,1)$. 否则, 我们可以认为 $\|x_{2,n_i}\|\to 1$, $i\to\infty$. 令 $\|x_{2,n_i}\|=\frac{2}{2+t_{n_i}}$ 对每个 $i\in N$ 成立, 则 $t_{n_i}>0$ 和 $t_{n_i}\to 0$, $i\to\infty$. 因此

$$\begin{aligned}&\frac{1}{t_{n_i}}[\|(x_{1,n_i},x_{2,n_i})+t_{n_i}(0,x_{2,n_i})\|+\|(x_{1,n_i},x_{2,n_i})-t_{n_i}(0,x_{2,n_i})\|-2\|(x_{1,n_i},x_{2,n_i})\|]\\ \geqslant{}&\frac{1}{t_{n_i}}[(1+t_{n_i})\|x_{2,n_i}\|+1-2]=\frac{1}{t_{n_i}}\Big[\frac{2+2t_{n_i}}{2+t_{n_i}}-1\Big]=\frac{2}{1+t_{n_i}}\to 2,\quad i\to\infty.\end{aligned}$$

然而, 因为 $\left(\prod\limits_{i=1}^{2}X_i,\|\cdot\|_\infty\right)$ 的范数在 $\{(x_{1,n},x_{2,n})\}_{n=1}^{\infty}$ 上是一致光滑的, 则

$$\begin{aligned}&\lim_{i\to\infty}\frac{1}{t_{n_i}}[\|(x_{1,n_i},x_{2,n_i})+t_{n_i}(0,x_{2,n_i})\|_\infty+\|(x_{1,n_i},x_{2,n_i})-t_{n_i}(0,x_{2,n_i})\|_\infty\\ &-2\|(x_{1,n_i},x_{2,n_i})\|_\infty]=0,\end{aligned}$$

矛盾. 令 $\delta_1=\min\{\delta,\frac{1-\rho}{4}\}$. 则由 (2.11) 和 $\sup\limits_{i\in N}\|x_{2,n_i}\|=\rho\in(0,1)$, 有

$$\begin{aligned}&\sup_{y_1\in S(X_1),i\in N}\frac{1}{t}[\|x_{1,n_i}+ty_1\|+\|x_{1,n_i}-ty_1\|-2\|x_{1,n_i}\|]\\ ={}&\sup_{(y_1,y_2)\in S(X_1\times X_2),i\in N}\frac{1}{t}[\|(x_{1,n_i},x_{2,n_i})+t(y_1,y_2)\|_\infty+\|(x_{1,n_i},x_{2,n_i})-t(y_1,y_2)\|_\infty\\ &+2\|(x_{1,n_i},x_{2,n_i})\|_\infty]<\varepsilon\end{aligned}$$

对每个 $0<|t|<\delta_1$ 成立. 因此 X_1 的范数在 $\{x_{1,n_i}\}_{i=1}^{\infty}$ 上是一致光滑的. 因为 $(\prod\limits_{i=1}^{2}X_i,\|\cdot\|_\infty)$ 的范数在 $\{(x_{1,n},x_{2,n})\}_{n=1}^{\infty}$ 上是一致光滑的, 我们得到:

(1) 如果 $\|x_{1,n}\|>\|x_{2,n}\|$, 则 $d_F\|(x_{1,n},x_{2,n})\|_\infty=(d_F\|x_{1,n}\|,0)$;

(2) 如果 $\|x_{1,n}\|<\|x_{2,n}\|$, 则 $d_F\|(x_{1,n},x_{2,n})\|_\infty=(0,d_F\|x_{2,n}\|)$. 此外, 我们可认为如果 $x_{1,n_0}\notin\{x_{1,n_i}\}_{i=1}^{\infty}$, 则 $\|x_{1,n_0}\|<\|x_{2,n_0}\|$. 因此, 由 (2.9)–(2.10) 和 $\|x_{1,n_i}\|>\|x_{2,n_i}\|$, 可得如下不等式:

$$\begin{aligned}&\inf_{x_1\in S(X_1)}\Big(\sup_{i\in N}\langle d_F\|x_{1,n_i}\|,x_1\rangle\Big)\\ ={}&\inf_{(x_1,0)\in S(X_1\times X_2)}\Big(\sup_{i\in N}\langle(d_F\|x_{1,n_i}\|,0),(x_1,0)\rangle\Big)\\ \geqslant{}&\inf_{(x_1,0)\in S(X_1\times X_2)}\Big(\sup_{i\in N}\langle d_F\|(x_{1,n_i},x_{2,n_i})\|_\infty,(x_1,0)\rangle\Big)\\ ={}&\inf_{(x_1,0)\in S(X_1\times X_2)}\Big(\sup_{n\in N}\langle d_F\|(x_{1,n},x_{2,n})\|_\infty,(x_1,0)\rangle\Big)>0.\end{aligned}$$

因此, 由引理 2.1, 存在 X_1 的一个一致球覆盖, 使得 X_1 的范数在球覆盖点是一致光滑的.

类似可得, 存在 X_2 的一个一致球覆盖, 使得 X_2 的范数在球覆盖点是一致光滑的.

(2)⇒(1). 因为存在两个 X_1 和 X_2 的一致球覆盖, 使得 X_1 和 X_2 的范数在球覆盖点是一致光滑的, 由引理 2.1, 存在一个有界序列 $\{x_{1,n}\}_{n=1}^{\infty}\subset X_1$ 和 $\{x_{2,n}\}_{n=1}^{\infty}\subset X_2$, 使得 X_1 的范数在序列 $\{x_{1,n}\}_{n=1}^{\infty}$ 是一致光滑的, X_2 的范数在序列 $\{x_{2,n}\}_{n=1}^{\infty}$ 是一致光滑的, 而且

$$\inf_{x_1\in S(X_1)}\Big(\sup_{n\in N}\langle d_F\|x_{1,n}\|,x_1\rangle\Big)>0,\quad \inf_{x_2\in S(X_2)}\Big(\sup_{n\in N}\langle d_F\|x_{2,n}\|,x_2\rangle\Big)>0.\tag{2.12}$$

不失一般性, 我们可以认为 $\{x_{1,n}\}_{n=1}^{\infty}\subset S(X_1)$ 和 $\{x_{2,n}\}_{n=1}^{\infty}\subset S(X_2)$. 此外, 我们可以认为

$$\{x_{1,n}\}_{n=1}^{\infty}=\{x_{1,n}\}_{n=1}^{\infty}\cup\{-x_{1,n}\}_{n=1}^{\infty},\quad \{x_{2,n}\}_{n=1}^{\infty}=\{x_{2,n}\}_{n=1}^{\infty}\cup\{-x_{2,n}\}_{n=1}^{\infty}. \tag{2.13}$$

此外, 我们得到对每个 $\varepsilon\in(0,1)$, 存在 $\delta_1,\delta_2\in(0,\frac{\varepsilon}{4})$, 使得 (1) $|pt_1^{p-1}-pt_2^{p-1}|<\varepsilon$ 对每个 $|t_1|,|t_2|<4$ 成立, 而且 $|t_1-t_2|<4\min\{\delta_1,\delta_2\}$; (2)

$$\sup_{y_1\in B(X_1),n\in N}\frac{1}{t}\Big[\|x_{1,n}+ty_1\|+\|x_{1,n}-ty_1\|-2\|x_{1,n}\|\Big]<\frac{1}{2}\varepsilon, \tag{2.14}$$

对每个 $0<|t|<\delta_1$ 成立而且

$$\sup_{y_2\in B(X_2),n\in N}\frac{1}{t}\Big[\|x_{2,n}+ty_2\|+\|x_{2,n}-ty_2\|-2\|x_{2,n}\|\Big]<\frac{1}{2}\varepsilon, \tag{2.15}$$

对每个 $0<|t|<\delta_2$ 成立. 取一个实数 $\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}$. 为叙述清楚, 我们将 (2)⇒(1) 的证明分成下面三种情况.

情况 I 令 $p=1$, 定义这个序列 $\{(x_{1,n},x_{2,m})\}_{n=1,m=1}^{\infty}\subset(\prod\limits_{i=1}^{2}X_i,\|\cdot\|_1)$, 则由 (2.14)–(2.15) 和 $\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}\in(0,+\infty)$, 可得

$$\begin{aligned}&\sup_{(y_1,y_2)\in S(X_1\times X_2),n,m\in N}\frac{1}{t}[\|(x_{1,n},x_{2,m})+t(y_1,y_2)\|_1+\|(x_{1,n},x_{2,m})-t(y_1,y_2)\|_1\\&\quad+2\|(x_{1,n},x_{2,m})\|_1]\\&\leqslant\sup_{y_1\in B(X_1),n\in N}\frac{1}{t}[\|x_{1,n}+ty_1\|+\|x_{1,n}-ty_1\|-2\|x_{1,n}\|]\\&\quad+\sup_{y_2\in B(X_2),m\in N}\frac{1}{t}[\|x_{2,m}+ty_2\|+\|x_{2,m}-ty_2\|-2\|x_{2,m}\|]\leqslant\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.\end{aligned}$$

对每个 $0<|t|<\delta$ 成立. 这表明 $(\prod\limits_{i=1}^{2}X_i,\|\cdot\|_1)$ 的范数在 $\{(x_{1,n},x_{2,m})\}_{n=1,m=1}^{\infty}$ 是一致光滑的. 此外, 由 (2.13) , 可得

$$\begin{aligned}&\inf_{(x_1,x_2)\in S(X_1\times X_2)}\Big(\sup_{n,m\in N}\langle d_F\|(x_{1,n},x_{2,m})\|_1,(x_1,x_2)\rangle\Big)\\&=\inf_{(x_1,x_2)\in S(X_1\times X_2)}\Big(\sup_{n,m\in N}\langle(d_F\|x_{1,n}\|,d_F\|x_{2,m}\|),(x_1,x_2)\rangle\Big)\\&=\inf_{(x_1,x_2)\in S(X_1\times X_2)}\Big(\sup_{n,m\in N}[\langle d_F\|x_{1,n}\|,x_1\rangle+\langle d_F\|x_{2,m}\|,x_2\rangle]\Big)\\&=\inf_{(x_1,x_2)\in S(X_1\times X_2)}\Big(\sup_{n\in N}\langle d_F\|x_{1,n}\|,x_1\rangle+\sup_{m\in N}\langle d_F\|x_{2,m}\|,x_2\rangle\Big)\\&\geqslant\frac{1}{2}\min\Big\{\inf_{x_1\in S(X_1)}\Big(\sup_{n\in N}\langle d_F\|x_{1,n}\|,x_1\rangle\Big),\inf_{x_2\in S(X_2)}\Big(\sup_{m\in N}\langle d_F\|x_{2,m}\|,x_2\rangle\Big)\Big\}>0.\end{aligned}$$

因此, 由引理 2.1, 可得存在 $(\prod\limits_{i=1}^{2}X_i,\|\cdot\|_1)$ 的一个一致球覆盖, 使得 $(\prod\limits_{i=1}^{2}X_i,\|\cdot\|_1)$ 的范数在球覆盖点是一致光滑的.

情况 II 令 $p\in(1,+\infty)$, 则由 $\{x_{1,n}\}_{n=1}^{\infty}\subset S(X_1)$ 和 $\{x_{2,n}\}_{n=1}^{\infty}\subset S(X_2)$, 存在 $\lambda\in(0,+\infty)$, 使得 $\lambda(x_{1,n},x_{2,m})=(z_{1,n},z_{2,m})$ 和 $\|\lambda(x_{1,n},x_{2,m})\|_p=\|(z_{1,n},z_{2,m})\|_p=1$. 取

$\eta=\min\{\frac{1}{4},\lambda\}\in(0,1)$. 则由引理 2.1 的证明和 (2.12), 可得

$$\sup_{y_1\in B(X_1),n\in N}\left|\frac{1}{t}\Big[\|z_{1,n}+ty_1\|-\|z_{1,n}\|\Big]-\langle d_F\|z_{1,n}\|,y_1\rangle\right|<\frac{1}{2}\varepsilon \tag{2.16}$$

和

$$\sup_{y_1\in B(X_1),n\in N}\left|\frac{1}{t}[\|z_{1,n}-y_1\|-\|z_{1,n}\|]-\langle d_F\|z_{1,n}\|,y_1\rangle\right|<\frac{1}{2}\varepsilon, \tag{2.17}$$

对每个 $0<|t|<\eta\delta$ 成立. 因此, 由 Lagrange 中值定理, 存在 $\xi_{1,n}\in R$ 在 $\|z_{1,n}+ty_1\|$ 和 $\|z_{1,n}\|$ 之间, 使得

$$\|z_{1,n}+ty_1\|^p-\|z_{1,n}\|^p=p\xi_{1,n}^{p-1}[\|z_{1,n}+ty_1\|-\|z_{1,n}\|].$$

因此, 由上述等式, 我们有如下不等式:

$$\begin{aligned}&\sup_{y_1\in B(X_1),n\in N}\left|\frac{1}{t}[\|z_{1,n}+ty_1\|^p-\|z_{1,n}\|^p]-p\xi_{1,n}^{p-1}\langle d_F\|z_{1,n}\|,y_1\rangle\right|\\&=\sup_{y_1\in B(X_1),n\in N}\left|p\xi_{1,n}^{p-1}\frac{1}{t}[\|z_{1,n}+ty_1\|-\|z_{1,n}\|]-p\xi_{1,n}^{p-1}\langle d_F\|z_{1,n}\|,y_1\rangle\right|\\&<p\xi_{1,n}^{p-1}\cdot\frac{1}{2}\varepsilon\\&\leqslant p(\lambda+1)^{p-1}\cdot\frac{1}{2}\varepsilon,\end{aligned}$$

对每个 $0<|t|<\eta\delta$ 成立. 类似地, 存在 $\xi_{2,n}\in R$ 在 $\|z_{1,n}-ty_1\|$ 和 $\|z_{1,n}\|$ 之间, 使得

$$\sup_{y_1\in B(X_1),n\in N}\left|\frac{1}{t}[\|z_{1,n}-ty_1\|^p-\|z_{1,n}\|^p]-p\xi_{2,n}^{p-1}\langle d_F\|z_{1,n}\|,y_1\rangle\right|\leqslant p(\lambda+1)^{p-1}\cdot\frac{1}{2}\varepsilon,$$

对每个 $0<|t|<\eta\delta$ 成立. 因为 $|pt_1^{p-1}-pt_2^{p-1}|<\varepsilon$ 对 $|t_1|<4$, $|t_2|<4$ 和 $|t_1-t_2|<4\min\{\delta_1,\delta_2\}=4\delta$ 成立, 由 $|\langle d_F\|z_{1,n}\|,y_1\rangle|\leqslant 1$, 可得

$$|p\xi_{1,n}^{p-1}\langle d_F\|z_{1,n}\|,y_1\rangle-p\xi_{2,n}^{p-1}\langle d_F\|z_{1,n}\|,y_1\rangle|<\varepsilon.$$

因此, 由上述三个不等式, 可得如下不等式:

$$\begin{aligned}&\sup_{y_1\in B(X_1),n\in N}\frac{1}{t}[\|z_{1,n}+ty_1\|^p+\|z_{1,n}-ty_1\|^p-2\|z_{1,n}\|^p]\\&\leqslant\sup_{y_1\in B(X_1),n\in N}\left|\frac{1}{t}[\|z_{1,n}+ty_1\|^p-\|z_{1,n}\|^p]-p\xi_{1,n}^{p-1}\langle d_F\|z_{1,n}\|,y_1\rangle\right|\\&\quad+\sup_{y_1\in B(X_1),n\in N}\left|\frac{1}{t}[\|z_{1,n}-ty_1\|^p-\|z_{1,n}\|^p]-p\xi_{2,n}^{p-1}\langle d_F\|z_{1,n}\|,y_1\rangle\right|\\&\quad+|p\xi_{1,n}^{p-1}\langle d_F\|z_{1,n}\|,y_1\rangle-p\xi_{2,n}^{p-1}\langle d_F\|z_{1,n}\|,y_1\rangle|\\&\leqslant p(\lambda+1)^{p-1}\cdot\varepsilon+\varepsilon,\end{aligned}$$

对每个 $0<|t|<\eta\delta$ 成立. 类似地, 可得

$$\sup_{y_2\in B(X_2),m\in N}\frac{1}{t}\Big[\|z_{2,m}+ty_2\|^p+\|z_{2,m}-ty_2\|^p-2\|z_{2,m}\|^p\Big]\leqslant p(\lambda+1)^{p-1}\cdot\varepsilon+\varepsilon,$$

对每个 $0<|t|<\eta\delta$ 成立. 因为 $\|(z_{1,n},z_{2,m})\|_p=1$, 则 $\|z_{1,n}\|^p+\|z_{2,m}\|^p=1$. 因此, 由等式 $\|(z_{1,n},z_{2,m})\|_p=\|z_{1,n}\|^p+\|z_{2,m}\|^p=1$, 可得

$$\sup_{(y_1,y_2)\in B(X_1)\times B(X_2),n,m\in N}\frac{1}{t}[\|(z_{1,n},z_{2,m})+t(y_1,y_2)\|_p+\|(z_{1,n},z_{2,m})-t(y_1,y_2)\|_p$$

$$+2\|(z_{1,n},z_{2,m})\|_p]$$

$$=\sup_{y_1\in B(X_1),y_2\in B(X_2),n,m\in N}\frac{1}{t}[(\|z_{1,n}+ty_1\|^p+\|z_{2,m}+ty_2\|^p)^{\frac{1}{p}}$$

$$+(\|z_{1,n}-ty_1\|^p+\|z_{2,m}-ty_2\|^p)^{\frac{1}{p}}-2\|z_{1,n}\|^p-2\|z_{2,m}\|^p]$$

$$\leqslant\sup_{y_1\in B(X_1),y_2\in B(X_2),n,m\in N}\frac{1}{t}[\|z_{1,n}+ty_1\|^p+\|z_{2,m}+ty_2\|^p+\|z_{1,n}-ty_1\|^p$$

$$+\|z_{2,m}-ty_2\|^p-2\|z_{1,n}\|^p-2\|z_{2,m}\|^p]$$

$$\leqslant\sup_{y_1\in B(X_1),n\in N}\frac{1}{t}[\|z_{1,n}+ty_1\|^p+\|z_{1,n}-ty_1\|^p-2\|z_{1,n}\|^p]$$

$$+\sup_{y_2\in B(X_2),m\in N}\frac{1}{t}[\|z_{2,m}+ty_2\|^p+\|z_{2,m}-ty_2\|^p-2\|z_{2,m}\|^p]$$

$$\leqslant 2p(\lambda+1)^{p-1}\cdot\varepsilon+2\varepsilon,$$

对每个 $0<|t|<\eta\delta$ 成立. 因此, 由 $\lambda\cdot(x_{1,n},x_{2,m})=(z_{1,n},z_{2,m})$, 可得 $(\prod_{i=1}^{2}X_i,\|\cdot\|_p)$ 的范数在 $\{(x_{1,n},x_{2,n})\}_{n=1}^{\infty}$ 是一致光滑的. 此外, 因为 $\{x_{1,n}\}_{n=1}^{\infty}\subset S(X_1)$ 和 $\{x_{2,n}\}_{n=1}^{\infty}\subset S(X_2)$, 由 $p\in(0,1)$, 存在两个实数 $\mu_1\in(0,+\infty)$ 和 $\mu_2\in(0,+\infty)$, 使得

$$(\mu_1 d_F\|x_{1,n}\|,\mu_2 d_F\|x_{2,m}\|)=d_F\|(x_{1,n},x_{2,m})\|_p\in S((X_1\times X_2)^*),$$

对每个 $n,m\in N$ 成立. 这表明 $h=\min\{\mu_1,\mu_2\}>0$. 因此, 由 (2.13) 和 $h=\min\{\mu_1,\mu_2\}$, 有

$$\inf_{(x_1,x_2)\in S(X_1\times X_2)}\Big(\sup_{n,m\in N}\langle d_F\|(x_{1,n},x_{2,m})\|_p,(x_1,x_2)\rangle\Big)$$

$$=\inf_{(x_1,x_2)\in S(X_1\times X_2)}\Big(\sup_{n,m\in N}\langle(\mu_1 d_F\|x_{1,n}\|,\mu_2 d_F\|x_{2,m}\|),(x_1,x_2)\rangle\Big)$$

$$=\inf_{(x_1,x_2)\in S(X_1\times X_2)}\Big(\sup_{n,m\in N}[\langle\mu_1 d_F\|x_{1,n}\|,x_1\rangle+\langle\mu_2 d_F\|x_{2,n}\|,x_2\rangle]\Big)$$

$$=\inf_{(x_1,x_2)\in S(X_1\times X_2)}\Big(\sup_{n\in N}\langle\mu_1 d_F\|x_{1,n}\|,x_1\rangle+\sup_{m\in N}\langle\mu_2 d_F\|x_{2,m}\|,x_2\rangle\Big)$$

$$\geqslant h\inf_{(x_1,x_2)\in S(X_1\times X_2)}\Big(\sup_{n\in N}\langle d_F\|x_{1,n}\|,x_1\rangle+\sup_{m\in N}\langle d_F\|x_{2,m}\|,x_2\rangle\Big)$$

$$\geqslant\frac{h}{2^{\frac{1}{p}}}\min\Big\{\inf_{x_1\in S(X_1)}\Big(\sup_{n\in N}\langle d_F\|x_{1,n}\|,x_1\rangle\Big),\inf_{x_2\in S(X_2)}\Big(\sup_{m\in N}\langle d_F\|x_{2,m}\|,x_2\rangle\Big)\Big\}>0.$$

因此, 由引理 2.1, 可得存在 $(\prod_{i=1}^{2}X_i,\|\cdot\|_p)$ 的一个一致球覆盖, 使得 $(\prod_{i=1}^{2}X_i,\|\cdot\|_p)$ 的范数在球覆盖点是一致光滑的.

情况 III 令 $p=+\infty$, 则 $\{(x_{1,n},0)\}_{n=1}^{\infty}\cup\{(0,x_{2,m})\}_{m=1}^{\infty}$ 是一个有界序列. 此外, 由 (2.14)–(2.15) 和 $\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}$, 可得

$$\sup_{(y_1,y_2)\in B(X_1)\times B(X_2),n,m\in N}\frac{1}{t}[\|(x_{1,n},0)+t(y_1,y_2)\|_\infty+\|(x_{1,n},0)-t(y_1,y_2)\|_\infty$$

$$+2\|(x_{1,n},0)\|_\infty]$$

$$= \sup_{y_1\in B(X_1),n\in N} \frac{1}{t}[\|x_{1,n}+ty_1\|+\|x_{1,n}-ty_1\|+2\|x_{1,n}\|] < \frac{1}{2}\varepsilon$$

和

$$\sup_{(y_1,y_2)\in B(X_1)\times B(X_2),n,m\in N} \frac{1}{t}[\|(0,x_{2,m})+t(y_1,y_2)\|_\infty+\|(0,x_{2,m})-t(y_1,y_2)\|_\infty$$
$$+2\,\|(0,x_{2,m})\|_\infty]$$
$$= \sup_{y_1\in B(X_1),n\in N} \frac{1}{t}[\|x_{2,m}+ty_2\|+\|x_{2,m}-ty_2\|+2\|x_{2,m}\|] < \frac{1}{2}\varepsilon,$$

对每个 $0<|t|<\delta$ 成立. 因此 $(\prod\limits_{i=1}^{2} X_i, \|\cdot\|_\infty)$ 的范数在序列 $\{(x_{1,n},0)\}_{n=1}^\infty \cup \{(0,x_{2,m})\}_{m=1}^\infty$ 是一致光滑的. 此外, 我们有

$$\inf_{(x_1,x_2)\in S(X_1\times X_2)} \Big(\sup_{n,m\in N} \{\langle d_F\|(x_{1,n},0)\|_\infty,(x_1,x_2)\rangle, \langle d_F\|(0,x_{2,m})\|_\infty,(x_1,x_2)\rangle\} \Big)$$
$$= \inf_{(x_1,x_2)\in S(X_1\times X_2)} \Big(\sup_{n,m\in N} \{\langle (d_F\|x_{1,n}\|,0),(x_1,x_2)\rangle, \langle (0,d_F\|x_{2,m}\|),(x_1,x_2)\rangle\} \Big)$$
$$\geqslant \min\Big\{ \inf_{x_1\in S(X_1)} \Big(\sup_{n\in N} \langle d_F\|x_{1,n}\|,x_1\rangle \Big), \inf_{x_2\in S(X_2)} \Big(\sup_{m\in N} \langle d_F\|x_{2,m}\|,x_2\rangle \Big) \Big\} > 0.$$

因此, 由引理 2.1 可得存在 $(\prod\limits_{i=1}^{2} X_i, \|\cdot\|_\infty)$ 的一个一致球覆盖, 使得 $(\prod\limits_{i=1}^{2} X_i, \|\cdot\|_\infty)$ 的范数在球覆盖点是一致光滑的.

§3 一致球覆盖性质在一致光滑空间

定理 3.1 令 X 是一致光滑空间且可分, 则存在两个序列 $\{x_n\}_{n=1}^\infty \subset X$ 和 $\{r_n\}_{n=1}^\infty \subset R$, 使得:

(1) 存在 $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ 的一个子序列 $\{x_j\}_{j=1}^\infty$, 使得 $\{\|x_j\|^{-1}x_j\}_{j=1}^\infty$ 上的每一点都是 $B(X)$ 的强暴露点;

(2) 对每个 $n\in N$, $\|x_n\|^{-1}x_n$ 是 $B(X)$ 的端点;

(3) 集序列 $\{B(x_n,r_n)\}_{n=1}^\infty$ 是 X 的一个一致球覆盖.

证 因为 X 是一致光滑空间, 我们得到 X 是自反空间. 因此 X 的每个有界闭凸集是它的强暴露点的闭凸包. 令 E 为 $B(X)$ 强暴露点构成的集合. 因为 X 是可分空间, 存在 E 的一个稠子集 $\{y_n\}_{n=1}^\infty$, 使得 $\overline{\{y_n\}_{n=1}^\infty}=\overline{E}$. 定义一个序列 $\{d_F\|y_n\|\}_{n=1}^\infty \subset X^*$. 因为 X 是自反空间且可分, 我们得到 X^* 是可分空间. 因此存在一个序列 $\{z_n^*\}_{n=1}^\infty \subset X^*$, 使得

$$\overline{\{d_F\|y_n\|\}_{n=1}^\infty \cup \{z_n^*\}_{n=1}^\infty} = X^*. \tag{3.1}$$

因为 X 是自反空间, 我们得到对每个 $n\in N$, 集合 $\{z\in S(X): z_n^*(z)=\|z_n^*\|\}\neq\emptyset$ 是非空有界闭凸集. 因此, 由 Krein-Milman 定理, 可得

$$\mathrm{Ext}\{z\in S(X): z_n^*(z)=\|z_n^*\|\}\neq\emptyset.$$

对每个 $n\in N$, 取一点 $z_n\in \mathrm{Ext}\{z\in S(X): z_n^*(z)=\|z_n^*\|\}$. 我们断言 z_n 是 $B(X)$ 的端点. 事实上, 令 $2z_n=z_{1,n}+z_{1,n}$, 这里 $z_{1,n}\in B(X)$ 和 $z_{2,n}\in B(X)$, 则

$$2=2z_n^*(z_n)=z_n^*(z_{1,n})+z_n^*(z_{2,n}).$$

这表明 $z_n^*(z_{1,n}) = z_n^*(z_{2,n}) = 1$. 因此

$$z_{1,n} \in \{z \in S(X) : z_n^*(z) = \|z_n^*\|\}, \quad z_{2,n} \in \{z \in S(X) : z_n^*(z) = \|z_n^*\|\}.$$

因为 z_n 是 $\{z \in S(X) : z_n^*(z) = \|z_n^*\|\}$ 的一个端点, 我们得到 $z_{1,n} = z_{2,n}$ 对每个 $n \in N$ 成立. 因此, 对每个 $n \in N$, 可得 z_n 是 $B(X)$ 的一个端点.

我们知道 $\{y_n\}_{n=1}^\infty$ 和 $\{z_n\}_{n=1}^\infty$ 是两个有界序列. 定义 $\{w_n\}_{n=1}^\infty = \{y_n\}_{n=1}^\infty \cup \{z_n\}_{n=1}^\infty$, 则 $\{w_n\}_{n=1}^\infty$ 是一个有界序列. 因为 X 是一致光滑空间, 我们得到 X 的范数在 $\{w_n\}_{n=1}^\infty$ 是一致光滑的. 此外, 因为 $z_n \in \{z \in S(X) : z_n^*(z) = \|z_n^*\|\}$, 由 (3.1), 可得

$$\inf_{x \in S(X)} \left(\sup_{n \in N} \langle d_F \|w_n\|, x \right) > 0. \tag{3.2}$$

因此, 由引理 2.1 的证明, 存在 $h \in (0, +\infty)$, 使得 $\{B(x_n, r_n)\}_{n=1}^\infty$ 是 X 的一个一致球覆盖, 这里 $x_n = hw_n$.

此外, 由前面的证明和 $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ 的定义, 容易看到 (1) 存在 $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ 的一个子序列 $\{x_j\}_{j=1}^\infty$, 使得 $\{\|x_j\|^{-1}x_j\}_{j=1}^\infty$ 上的每一点都是 $B(X)$ 的强暴露点; (2) 对每个 $n \in N$, $\|x_n\|^{-1}x_n$ 是 $B(X)$ 的端点. 因此我们得到定理 3.1 成立.

参　考　文　献

[1] Cheng L. Ball-covering property of Banach spaces [J]. *Isr J Math*, 2006, 156:111–123.

[2] Shang S, Cui Y. Locally 2-uniform convexity and ball-covering property in Banach space [J]. *Banach J Math Anal*, 2015, 9:42–53.

[3] Luo Z, Zheng B. The strong and uniform ball covering properties [J]. *J Math Anal Appl*, 2021, 499:125034.

[4] Cheng L, Cheng Q, Liu X. Ball-covering property of Banach spaces that is not preserved under linear isomorphisms [J]. *Sci China Ser A*, 2008, 51:143–147.

[5] Luo Z, Liu J, Wang B. A remark on the ball-covering property of product spaces [J]. *Filomat*, 2017, 31:3905–3908.

[6] Luo Z, Zheng B. Stability of ball covering property [J]. *Stud Math*, 2020, 250:19–34.

[7] Shang S, Cui Y. Dentable point and ball-covering property in Banach spaces [J]. *J Convex Anal*, 2018, 25:1045–1058.

[8] Liu M, Liu R, Lu J, Zheng B. Ball covering property from commutative function spaces to non-commutative spaces of operators [J]. *J Funct Anal*, 2022, 283:109502.

[9] Cheng L, Cheng Q, Shi H. Minimal ball-covering in Banach spaces and their application [J]. *Studia Math*, 2009, 192 (1):15–27.

[10] Preiss D. Differentiability of Lipschitz functions on Banach spaces [J]. *J Funct Anal*, 1990, 91:312–345.

[11] Cheng L, Wang B, Zhang W, Zhou Y. Some geometric and topological properties of Banach spaces via ball coverings [J]. *J Math Anal Appl*, 2011, 377:874–880.

[12] Fonf V P, Zanco C. Covering spheres of Banach spaces by balls [J]. *Math Ann*, 2009, 344:939–945.

[13] Zalinescu C. Convex analysis in general vector spaces [M]. River Edge, NJ: World Sci Publ, 2002.

[14] Phelps R R. Convex functions, monotone operators and differentiability [M]. Lecture Notes in Math, vol 1364, New York: Springer-Verlag, 1989.

[15] Chen S T. Geometry of Orlicz spaces [M]. Warszawa: Dissertations Math, 1996.

Differentiability of Norm and Uniform Ball-Covering Property in Banach Space

SHANG Shaoqiang[1]

[1]School of Mathematical Sciences, Harbin Engineering University, Harbin 150001, China. E-mail: sqshang@163.com

Abstract In this paper, the author first gives the definition which norm uniformly smooth on a set, and proves that there exists a uniformly ball-covering of l^∞ such that the norm of l^∞ is uniformly smooth on ball-covering points. Secondly, the author proves that if $(\prod\limits_{i=1}^{2} X_i, \|\cdot\|_p)$ is a product space, where $p \in [1, +\infty]$, then there exists a uniformly ball-covering of $(\prod\limits_{i=1}^{2} X_i, \|\cdot\|_p)$ such that the norm of $(\prod\limits_{i=1}^{2} X_i, \|\cdot\|_p)$ is uniformly smooth on ball-covering points if and only if there exists a uniformly ball-covering of X_i such that the norm of X_i is uniformly smooth on ball-covering points. Finally, it is proved that X is a uniformly smooth space and separable, then there exist two sequences $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X$ and $\{r_n\}_{n=1}^{\infty} \subset R$ such that (1) There exists a subsequence $\{x_j\}_{j=1}^{\infty}$ of $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ such that $\{\|x_j\|^{-1}x_j\}_{j=1}^{\infty}$ is a sequence of strongly exposed points of $B(X)$; (2) For each $n \in N$, the point $\|x_n\|^{-1}x_n$ is an extreme point of $B(X)$; (3) The set sequence $\{B(x_n, r_n)\}_{n=1}^{\infty}$ is a uniformly ball-covering of X.

Keywords Uniformly smooth set, Uniformly ball-covering, Uniformly smooth space, Product space

2000 MR Subject Classification 46B20

The English translation of this paper will be published in
Chinese Journal of Contemporary Mathematics, Vol. 45 No. 2, 2024
by ALLERTON PRESS, INC., USA