数 学 年 刊 A 辑
2024, 45(2):141–154
DOI: 10.16205/j.cnki.cama.2024.0010

与欧氏空间共形的背景空间中的 Minkowski 问题*

蔡梦凡[1] 李春和[2]

提要 作者研究了与欧氏空间共形的背景空间中的 Minkowski 问题, 并利用连续性方法证明了该背景空间下 Minkowski 问题的可解性.

关键词 Minkowski 问题, 变分, 先验估计, 连续性方法
MR (2000) 主题分类 53C24, 35J17
中图法分类 O186.1
文献标志码 A
文章编号 1000-8314(2024)02-0141-14

§1 引 言

给定欧氏空间 R^{n+1} 中一个闭合的严格凸超曲面 M, M 的高斯映射定义了 M 和单位球面 S^n 之间的同胚. 因此 M 的高斯曲率 K 可以通过高斯映射到单位球上, 那么球上的函数满足

$$\int_{S^n} x_i K^{-1} = 0,$$

其中 x_i 是 S^n 上的坐标函数.

Minkowski 接着反过来问了这个问题: 给定一个定义在 S^n 上满足上述积分条件的正函数 K, 能否找到曲率函数由 K 给定的闭严格凸超曲面? 此即欧氏空间中经典的 Minkowski 问题.

当维数 $n \geqslant 2$ 时, 郑绍远和丘成桐 [1] 证明了 Minkowski 问题可转化为曲面支撑函数的完全非线性方程

$$\det(u_{ij} + \delta_{ij} u) = \frac{1}{K},$$

其中 u 为闭凸超曲面 M 的支撑函数.

令 $\widetilde{\sigma} = \mathrm{e}^{2\psi(\rho)}\sigma$, 其中 σ 是标准的欧氏度量. 此时外围空间不再是欧氏空间 R^{n+1}, $\widetilde{\sigma}$ 与 σ 共形, $\mathrm{e}^{2\psi(\rho)}$ 为共形因子.

本文 2023 年 6 月 19 日收到, 2024 年 1 月 10 日收到修改稿.
[1]电子科技大学数学科学学院, 成都 611731. E-mail: 1490363424@qq.com
[2]通信作者. 电子科技大学数学科学学院, 成都 611731. E-mail: chli@uestc.edu.cn
*本文受到国家自然科学基金 (No.12071059) 和四川省中央引导地方科技发展专项 (No.2021ZYD0014) 的资助.

中国知网 https://www.cnki.net

本文主要结果如下.

在这个新的与欧氏空间共形的背景空间下, 考虑 2 维的情况,Minkowski 问题可转化为如下完全非线性方程

$$3\mathrm{e}^{3\psi(\rho)}\det(w)=f, \tag{1.1}$$

其中 $w=(u_{ij}+\delta_{ij}u)$, $\rho=\frac{u^2+|\nabla u|^2}{2}$, f 为给定的某个正函数.

定理 1.1 对于任何正函数 f, $f\in C^k(S^2)(k\geqslant 2)$, $\psi(\rho)$ 满足如下条件:

(1) $\psi(\rho)>-A$, 其中 A 为某个正常数;

(2) $\psi'(\rho)<-\frac{1}{3\rho}-\varepsilon$, 其中 ε 是某个固定的小正常数, 则方程 (1.1) 存在唯一允许正解 u, 满足

$$\|u\|_{C^{k+1,\alpha}(S^2)}\leqslant C,$$

其中 $0<\alpha<1$, 常数 C 只与 $\alpha,\min\limits_{S^2}f,\|f\|_{C^k(S^2)}$ 有关.

本文的组织结构如下: 第二节概述了一些本文所需的基础理论; 第三节叙述了方程 (1.1) 的导出; 第四节我们对方程 (1.1) 的允许正解作了先验估计, 这是我们证明定理 1.1 的基础; 第五节我们给出了定理 1.1 的证明.

§2 预备知识

命题 2.1 令 $w_{ij}=u_{ij}+\delta_{ij}u$, 则有

$$w_{ij,k}=w_{ik,j},$$

$$w_{ij}=w_{ji}.$$

即 w_{ij} 是 Codazzi 的, 进一步有 $\sum\limits_j\big(\frac{\partial\sigma_n(w)}{\partial w_{ij}}\big)_{,j}=0$.

证 $w_{ij}=w_{ji}$ 显然成立, 下证 $w_{ij,k}=w_{ik,j}$, 即要证 $u_{i,jk}+\delta_{ij}u_k-u_{i,kj}-\delta_{ik}u_j=0$. 由 Ricci 恒等式,

$$\begin{aligned}
&u_{i,jk}+\delta_{ij}u_k-u_{i,kj}-\delta_{ik}u_j\\
=&(u_{i,jk}-u_{i,kj})+(\delta_{ij}u_k-\delta_{ik}u_j)\\
=&-R_{jkil}u_l+(\delta_{ij}u_k-\delta_{ik}u_j)\\
=&-(\delta_{ji}\delta_k-\delta_{jl}\delta_{ki})\,u_l+(\delta_{ij}u_k-\delta_{ik}u_j)\\
=&-\delta_{ji}u_k+\delta_{ik}u_j+\delta_{ij}u_k-\delta_{ik}u_j\\
=&0,
\end{aligned}$$

$$\Big(\frac{\partial\sigma_n(w)^2}{\partial w_{ij}}\Big)_{,j}=(\sigma_n(w)\cdot w^{ij})_{,j}$$

中国知网 https://www.cnki.net

$$
\begin{aligned}
&= \frac{\partial \sigma_n(w)}{\partial w_{kj}} w_{k,j} w^{ij} + \sigma_n(w) w^{ij}, j \\
&= \sigma_n(w) w^{kd} w_{kl,j} w^{ij} - \sigma_n(w) w^{ik} w^{jl} w_{kt,j} \\
&= \sigma_n(w) w^{kd} w_{kl,j} w^{ij} - \sigma_n(w) w^{kd} w_{jl,k} w^{ij} \\
&= 0.
\end{aligned}
$$

命题 2.2　设 $F(W) = (\sigma_k)^{\frac{1}{k}}$, 其中 $W = \{W_{ij}\}$ 为对称矩阵, 若 W 的特征值在 Γ_k 内, 则矩阵 $\{\frac{\partial F}{\partial W_{ij}}\}$ 正定且

$$
\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial W_{ii}} \geqslant 1.
$$

此外,F 在凸锥 Γ_k 上是凹的, 即 $\forall (\eta_{ij}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$,

$$
\sum_{i,j,k,l=1}^{n} \frac{\partial^2 F}{\partial W_{ij} \partial W_{kl}} (W) \eta_{ij} \eta_{kl} \leqslant 0.
$$

定理 2.1　(Evans-Krylov 定理 [2]) 假设二阶完全非线性方程

$$
F(\nabla^2 u, \nabla u, u, x) = 0, \quad x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n \tag{2.1}
$$

满足:

(1) (2.1) 是一致椭圆的, 即对某正常数 $\lambda \leqslant \Lambda$,

$$
\lambda |\xi|^2 \leqslant F_{ij}(A) \xi_i \xi_j \leqslant \Lambda |\xi|^2, \quad \forall A \in S' \subset S, \quad \xi \in \mathbb{R}^n,
$$

其中记 $F(A, \cdot, \cdot, \cdot), A = \{a_{ij}\} \in S^{n\times n}, S^{n\times n}$ 表示 n 阶对称矩阵,

$$
F^{ij}(A) = \frac{\partial F(A)}{\partial a_{ij}}.
$$

(2) F 关于 $\nabla^2 u$ 是凹函数,

则当 $|u|_{C^2(\overline{\Omega})} \leqslant C$ 时, 有

$$
|u|_{C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})} \leqslant C, \quad 0 < \alpha < 1,
$$

其中 C 依赖于 $n, \lambda, \Lambda, F, \Omega$.

§3　方程 (1.1) 的导出

3 维欧氏空间中, 对于闭凸超曲面 M, $u = \vec{r} \cdot \vec{e}$ 为支撑函数, 位置向量 $\vec{r} = u_i e_i + ue$, 记 $w_{ij} = u_{ij} + \delta_{ij} u$, 则有 Minkowski 问题方程: $\det(w) = \frac{1}{K} \triangleq f$, 两端乘以 u 并在 S^2 上积分:

$$
\int_{S^2} u \det(w) = \int_{S^2} fu.
$$

令泛函

$$
Lu = \int_{S^2} (u \det(w) - fu).
$$

中国知网　https://www.cnki.net

对 Lu 求变分, 可得

$$\dot{L}u=\int_{S^2}(\dot{u}\det(w)+u\dot{\det}(w)-f\dot{u}),$$

其中

$$\begin{aligned}
&\int_{S^2}u\dot{\det}(w)\\
&=\int_{S^2}u\frac{\partial\det(w)}{\partial w_{ij}}(\varphi_{ij}+\delta_{ij}\varphi)\\
&=\int_{S^2}\Big[\Big(u\frac{\partial\det(w)}{\partial w_{ij}}\Big)_{i,j}\varphi+\delta_{ij}u\frac{\partial\det(w)}{\partial w_{ij}}\varphi\Big]\\
&=\int_{S^2}\Big[u_{ij}\frac{\partial\det(w)}{\partial w_{ij}}\varphi+u_i\Big(\frac{\partial\det(w)}{\partial w_{ij}}\Big)_{,j}\varphi+u_j\Big(\frac{\partial\det(w)}{\partial w_{ij}}\Big)_{i,}\varphi\\
&\quad+u\Big(\frac{\partial\det(w)}{\partial w_{ij}}\Big)_{i,j}\varphi+\delta_{ij}u\frac{\partial\det(w)}{\partial w_{ij}}\varphi\Big]\\
&=\int_{S^2}\varphi\Big(\frac{\partial\det(w)}{\partial w_{ij}}w_{ij}\Big)\\
&=\int_{S^2}2\varphi\det(w).
\end{aligned}$$

这里第二个等号用了分部积分, 故

$$\dot{L}u=\int_{S^2}(3\varphi\det(w)-f\varphi).$$

若 $\dot{L}u=0$, 则

$$3\det(w)=f.$$

此即为 3 维欧氏空间中 Minkowski 问题的变分方程.

下面我们做进一步推广, 对于 $\widetilde{\sigma}=\mathrm{e}^{2\psi(\rho)}\sigma$, 其中 σ 是标准的欧氏度量. 此时外围空间不再是欧氏空间, $\widetilde{\sigma}$ 与 σ 共形,$\mathrm{e}^{2\psi(\rho)}$ 为共形因子.

$$\int_{S^2}u\det(w)=\frac{1}{3}\int_{\partial\Omega}x\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y,$$

$$\int_{S^2}h(\rho)u\det(w)=\frac{1}{3}\int_{\partial\Omega}h(\rho)\left[x\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y\right],$$

其中 $\rho=\frac{r^2}{2}=\frac{x^2+y^2+z^2}{2}=\frac{|\nabla u|^2+u^2}{2}$, Ω 是支撑函数 u 给定的凸体.

下面我们确定 $h(\rho)$.

令

$$\omega=h(\rho)x\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z+h(\rho)y\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x+h(\rho)z\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y,$$

则

$$d\omega=\frac{\partial(h(\rho)x)}{\partial x}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\frac{\partial(h(\rho)y)}{\partial y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\frac{\partial(h(\rho)z)}{\partial z}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z.$$

另一方面, 对于 $\widetilde{\sigma}=\mathrm{e}^{2\psi(\rho)}\sigma$, 有 $\mathrm{d}\widetilde{V}=\mathrm{e}^{n\psi}\mathrm{d}V$, 从而有

$$\int_{S^2}h(\rho)u\det(w)=\int_{\Omega}\mathrm{e}^{3\psi(\rho)}\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z.$$

中国知网 https://www.cnki.net

所以

$$\frac{1}{3}\Big[\frac{\partial(h(\rho)x)}{\partial x}+\frac{\partial(h(\rho)y)}{\partial y}+\frac{\partial(h(\rho)z)}{\partial z}\Big]=\mathrm{e}^{3\psi(\rho)},$$

即

$$\frac{1}{3}\left[2\rho h'(\rho)+3h(\rho)\right]=\mathrm{e}^{3\psi(\rho)}. \tag{3.1}$$

由常数变易法可进一步解出 $h(\rho)$.

下面把 $h(\rho)$ 看成已知函数, 令泛函

$$Lu=\int_{S^2}(h(\rho)u\det(w)-fu),$$

对 Lu 求变分, 可得

$$\begin{aligned}\dot{L}u&=\int_{S^2}\Big[h'(\rho)(u\varphi+\nabla u\cdot\nabla\varphi)u\det(w)+h(\rho)\varphi\det(w)+h(\rho)u\frac{\partial\det(w)}{\partial w_{ij}}\left(\varphi_{ij}+\delta_{ij}\varphi\right)-f\varphi\Big]\\&=\int_{S^2}\Big[-\nabla\cdot\left(h'(\rho)u\det(w)\nabla u\right)\varphi+\Big(h(\rho)u\frac{\partial\det(w)}{\partial w_{ij}}\Big)_{ij}\varphi+h(\rho)u\frac{\partial\det(w)}{\partial w_{ij}}\delta_{ij}\varphi\\&\quad+h'(\rho)u\varphi u\det(w)+h(\rho)\det(w)\varphi-f\varphi\Big],\end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned}-\nabla\cdot(h'(\rho)u\det(w)\nabla u)&=-h''(\rho)\nabla\rho\nabla u(u\det(w))-h'(\rho)|\nabla u|^2\det(w)\\&\quad-h'(\rho)u\Big(\frac{\partial\det(w)}{\partial w_{ij}}\Big)w_{ij,k}u_k-h'(\rho)u\det(w)\Delta u,\\\Big(h(\rho)u\frac{\partial\det(w)}{\partial w_{ij}}\Big)_{ij}&=\Big[h'(\rho)\rho_i u\frac{\partial\det(w)}{\partial w_{ij}}+h(\rho)u_i\frac{\partial\det(w)}{\partial w_{ij}}\Big]_j\\&=h''(\rho)\rho_j\rho_i u\frac{\partial\det(w)}{\partial w_{ij}}+h'(\rho)\rho_{ij}u\frac{\partial\det(w)}{\partial w_{ij}}\\&\quad+h'(\rho)\rho_i u_j\frac{\partial\det(w)}{\partial w_{ij}}+h'(\rho)\rho_j u_i\frac{\partial\det(w)}{\partial w_{ij}}+h(\rho)u_{ij}\frac{\partial\det(w)}{\partial w_{ij}}.\end{aligned}$$

从而

$$\begin{aligned}\dot{L}u=\int_{S^2}\Big[&-h''(\rho)\nabla\rho\nabla u(u\det(w))\varphi-h'(\rho)|\nabla u|^2\det(w)\varphi-h'(\rho)u\Big(\frac{\partial\det(w)}{\partial w_{ij}}\Big)w_{ij,k}u_k\varphi\\&-h'(\rho)u\det(w)\Delta u\cdot\varphi+h''(\rho)\rho_j\rho_i u\frac{\partial\det(w)}{\partial w_{ij}}\varphi+h'(\rho)\rho_{ij}u\frac{\partial\det(w)}{\partial w_{ij}}\varphi\\&+h'(\rho)\rho_i u_j\frac{\partial\det(w)}{\partial w_{ij}}\varphi+h'(\rho)\rho_j u_i\frac{\partial\det(w)}{\partial w_{ij}}\varphi+h'(\rho)u^2\det(w)\varphi\\&+3h(\rho)\det(w)\varphi-f\varphi\Big].\end{aligned}$$

在进一步化简 $\dot{L}u$ 之前, 做如下准备工作.

取单位正交坐标系 $\{e_1,e_2\}$, 使得 $w_{11}=u_{11}+u, w_{22}=u_{22}+u, w_{12}=w_{21}=0, \rho=\frac{|\nabla u|^2+u^2}{2}$, 则

$$\rho_i=u_iu+u_ku_{ki}=u_iu+u_k\left(w_{ki}-\delta_{ki}u\right)=u_kw_{ki},$$

中国知网　https://www.cnki.net

$$\rho_{i,j} = u_{kj}w_{ki} + u_k w_{ki,j} = (w_{kj} - \delta_{kj}u)\, w_{ki} + u_k w_{ki,j} = w_{kj}w_{ki} - w_{ij}u + u_k w_{ki,j}$$

下面分项对 $\dot{L}u$ 进行化简:

$$\begin{aligned}
&h''(\rho)\rho_j\rho_i u\frac{\partial\det(w)}{\partial w_{ij}} - h'(\rho)\nabla\rho\nabla u(u\det(w))\\
=\;& h'(\rho)u\left[\rho_j\rho_i\frac{\partial\det(w)}{\partial w_{jj}} - \rho_i u_j\det(w)\right]\\
=\;& h'(\rho)u\rho_i\left[\rho_j\frac{\partial\det(w)}{\partial w_j} - u_j\det(w)\right]\\
=\;& h'(\rho)u\rho_i\left[u_k w_{kj}\frac{\partial\det(w)}{\partial w_{ij}} - u_i\det(w)\right]\\
=\;& h'(\rho)u\rho_i\left[u_k\delta_{ik}\det(w) - u_{ij}\det(w)\right]\\
=\;& 0,\\
&h'(\rho)\rho_{ij}u\frac{\partial\det(w)}{\partial w_{ij}} - h'(\rho)u\left(\frac{\partial\det(w)}{\partial w_{ij}}\right)w_{j,k}u_k\\
=\;& h'(\rho)u\left[(w_{kj}w_{ki} - w_{ij}u + u_k w_{kij})\,\frac{\partial\det(w)}{\partial w_{ij}} - \left(\frac{\partial\det(w)}{\partial w_{jj}}\right)w_{j,k}u_k\right]\\
=\;& h'(\rho)u\left[(w_{kj}w_{ki} - w_{ij}u)\,\frac{\partial\det(w)}{\partial w_{ij}}\right]\\
=\;& h'(\rho)u\left[w_{kj}\delta_{kj}\det(w) - 2u\det(w)\right]\\
=\;& h'(\rho)u\det(w)\Delta u,\\
&-h'(\rho)|\nabla u|^2\det(w) + h'(\rho)\rho_i u_j\frac{\partial\det(w)}{\partial w_j} + h'(\rho)\rho_j u_i\frac{\partial\det(w)}{\partial w_{ij}}\\
=\;& -h'(\rho)|\nabla u|^2\det(w) + 2h'(\rho)\rho_i u_j\frac{\partial\det(w)}{\partial w_{ij}}\\
=\;& -h'(\rho)|\nabla u|^2\det(w) + 2h'(\rho)u_k w_{kj}u_j\frac{\partial\det(w)}{\partial w_{jj}}\\
=\;& -h'(\rho)|\nabla u|^2\det(w) + 2h'(\rho)u_k u_j\delta_{kj}\det(w)\\
=\;& -h'(\rho)|\nabla u|^2\det(w) + 2h'(\rho)|\nabla u|^2\det(w)\\
=\;& h'(\rho)|\nabla u|^2\det(w).
\end{aligned}$$

故

$$\begin{aligned}
\dot{L}u &= \int_{S^2}\left[h'(\rho)|\nabla u|^2\det(w)\varphi + h'(\rho)u^2\det(w)\varphi + 3h(\rho)\det(w)\varphi - f\varphi\right]\\
&= \int_{S^2}\left[2\rho h'(\rho)\det(w)\varphi + 3h(\rho)\det(w)\varphi - f\varphi\right].
\end{aligned}$$

若 $\dot{L}u = 0$, 有

$$2\rho h'(\rho)\det(w) + 3h(\rho)\det(w) - f = 0.$$

中国知网 https://www.cnki.net

将 (3.1) 代入上式, 有

$$3e^{3\psi(\rho)}\det(w)-f=0.$$

这就得到了方程 (1.1).

§4　先验估计

§4.1　C^0, C^1 估计

引理 4.1　若 $u>0$ 是方程 (1.1) 的允许解,$\psi'(\rho)<-\frac{1}{3\rho}-\varepsilon$, ε 为某一小正常数, 则存在一个只与 $\max\limits_{S^2}\frac{|\nabla f|}{f}$ 有关的正常数 C, 使得

$$\max_{S^2}|\nabla\ln u|\leqslant C.$$

证　首先将方程 (1.1) 改写为

$$\det(u_{ij}+\delta_{ij}u)=\frac{1}{3}e^{-3\psi(\rho)}f. \tag{4.1}$$

令 $v=\ln u$, 即 $u=e^v$, 从而

$$\begin{aligned}u_i&=e^v v_i,\\ u_{ij}&=e^v\left(v_{ij}+v_iv_j\right),\\ u^2+|\nabla u|^2&=e^{2v}\left(1+|\nabla v|^2\right),\end{aligned}$$

则 (4.1) 化为

$$\det(v_{ij}+v_iv_j+\delta_{ij})=\frac{1}{3}e^{-3\psi(\widetilde{\rho})-2v}f, \tag{4.2}$$

其中 $\widetilde{\rho}=\frac{e^{2v}\left(1+|\nabla v|^2\right)}{2}$.

令 $P=\frac{|\nabla v|^2}{2}$, 设 P 在 x_0 处取最大值, 在 x_0 处建立局部单位标准正交系 $\{e_i\}$, 可选取 e_1, 使得

$$v_1(x_0)=|\nabla v(x_0)|,\quad v_2(x_0)=0.$$

又在 x_0 处,$P_i=0, P_{ii}\leqslant 0$, 即

$$\sum_{j=1}^{2}v_jv_{ji}=0,\quad \text{即 } v_{1i}=0,\ \forall i.$$

$$P_{ii}=\sum_{j=1}^{2}v_{ji}^2+\sum_{j=1}^{2}v_jv_{jii}\leqslant 0. \tag{4.3}$$

由 (4.3), 我们有

$$(a_{ij})=v_{ij}+v_iv_j+\delta_{ij}=\mathrm{diag}(1+v_1^2, 1+v_{22}).$$

中国知网　https://www.cnki.net

令 $F^{ij}=\frac{\partial\det(a_{ij})}{\partial a_{ij}}$, 可知 (F^{ij}) 在 x_0 处也为对角阵, 根据最大值原理, 可得

$$\begin{aligned}0&\geqslant\sum_{i,j=1}^{2}F^{ij}P_{ij}\\&=\sum_{i=1}^{2}F^{ii}P_{ii}\\&=\sum_{i,j=1}^{2}F^{ij}{v_{ji}}^2+\sum_{i,j=1}^{2}F^{ij}v_jv_{jii}\\&=F^{22}{v_{22}}^2+\sum_{i,j=1}^{2}F^{ii}v_j\left(v_{ijj}+v_j-v_i\delta_{ij}\right)\\&=F^{22}{v_{22}}^2+v_1\sum_{i=1}^{2}F^{ii}v_{ii1}+{v_1}^2\sum_{i=1}^{2}F^{ii}-v_1^2F^{11}\\&=F^{22}\left({v_{22}}^2+{v_1}^2\right)+v_1\sum_{i=1}^{2}F^{ii}v_{ii1},\end{aligned}\tag{4.4}$$

其中第四个等号用了如下 Ricci 恒等式:

$$v_{jii}=v_{iji}=v_{iij}+v_sR_{siji}=v_{iij}+v_s(\delta_{sj}\delta_{ii}-\delta_{si}\delta_{ij})=v_{iij}+v_j-v_i\delta_{ij}.$$

通过 (4.2),

$$\begin{aligned}\frac{\partial\det(a_{ij})}{\partial a_{ij}}a_{ij1}&=F^{jj}[v_{i1}v_j+v_iv_{j1}+v_{ij1}]=F^{ij}v_{i11},\\\frac{\partial\det(a_{ij})}{\partial a_{ij}}a_{ji1}&=\frac{1}{3}[(-3\psi'(\widetilde{\rho})\widetilde{\rho}_1-2v_1)\mathrm{e}^{-3\psi(\rho)-2v}f+\mathrm{e}^{-3\psi(p)-2v}f_1]\\&=\frac{1}{3}\mathrm{e}^{-3\psi(\widetilde{\rho})-2v}\Big[-3\psi'(\widetilde{\rho})\frac{\mathrm{e}^{2v}2v_1+\mathrm{e}^{2v}2v_1|\nabla v|^2+\mathrm{e}^{2v}2v_1v_{11}}{2}f-2f_1+f_1\Big],\end{aligned}$$

于是

$$F^{ii}v_{ii1}=\frac{1}{3}\mathrm{e}^{-3\psi(\widetilde{\rho})-2v}\Big[-3\psi'(\widetilde{\rho})\frac{\mathrm{e}^{2v}2v_1+\mathrm{e}^{2v}2v_1|\nabla v|^2}{2}f-2fv_1+f_1\Big].\tag{4.5}$$

将 (4.5) 代入 (4.4), 有

$$0\geqslant F^{22}(v_{22}^2+v_1^2)+\frac{1}{3}\mathrm{e}^{-3\psi(\widetilde{\rho})-2v}[-3\psi'(\widetilde{\rho})\mathrm{e}^{2v}v_1^2(1+|\nabla v|^2)f-2f_1^2+f_1v_1].$$

又因为

$$F^{22}({v_{22}}^2+{v_1}^2)\geqslant 0,$$

所以

$$0\geqslant\frac{1}{3}\mathrm{e}^{-3\psi(\widetilde{\rho})-2v}[-3\psi'(\widetilde{\rho})\mathrm{e}^{2v}v_1^2(1+|\nabla v|^2)f-2fv_1^2+f_1v_1],$$

即

$$0\geqslant[-3\psi'(\widetilde{\rho})\mathrm{e}^{2v}(1+|\nabla v|^2)-2]v_1^2+\frac{f_1}{f}v_1\geqslant[-3\psi'(\widetilde{\rho})\mathrm{e}^{2v}(1+|\nabla v|^2)-2]v_1^2-\frac{f_1}{f}v_1.$$

中国知网 https://www.cnki.net

当 $-3\psi'(\widetilde{\rho})e^{2v}(1+|\nabla v|^2)-2>0$ 且 $\frac{1}{-3\psi'(\widetilde{\rho})e^{2v}\left(1+|\nabla v|^2\right)-2}<1$ 时, 有

$$v_1 \leqslant \frac{1}{-3\psi'(\widetilde{\rho})e^{2v}\left(1+|\nabla v|^2\right)-2}\cdot\frac{f_1}{f}<\frac{f_1}{f}.$$

事实上,

$$-3\psi'(\widetilde{\rho})e^{2v}(1+|\nabla v|^2)-2=-3\psi'(\widetilde{\rho})2\widetilde{\rho}-2>-3\cdot\left(-\frac{1}{3\widetilde{\rho}}-\varepsilon\right)\cdot 2\widetilde{\rho}-2>0,$$

$$\frac{1}{-3\psi'(\widetilde{\rho})e^{2v}\left(1+|\nabla v|^2\right)-2}=\frac{1}{6\widetilde{\rho}\varepsilon}<1,$$

其中, 为了使第二个不等式成立, 这里让 $\varepsilon>\frac{1}{6\widetilde{\rho}}$.

综上, 当 $\psi'(\rho)<-\frac{1}{3\rho}-\varepsilon$, ε 为某一小正常数时, 有 $v_1\leqslant C$ 成立, 其中 C 依赖于 $\max\limits_{S^2}\frac{|\nabla f|}{f}$, 故

$$|\nabla \ln u|\leqslant C.$$

推论 4.1 存在一个只与 $\max\limits_{S^2}\frac{|\nabla f|}{f}$ 有关的正常数 C, 使得

$$\frac{\max\limits_{S^2}u}{\min\limits_{S^2}u}\leqslant C.$$

证 因为

$$\ln(\max_{S^2}u)-\ln(\min_{S^2}u)\leqslant C_1\int_{S^2}|\nabla \ln u|\mathrm{d}x,$$

且 $|\nabla \ln u|\leqslant C$, 故有

$$\ln(\max_{s^2}u)-\ln(\min_{s^2}u)\leqslant C_2,$$

即

$$\ln\frac{\max\limits_{S^2}u}{\min\limits_{S^2}u}\leqslant C_2.$$

故关于解 u 的 Harnack 不等式成立, 即 $\frac{\max\limits_{S^2}u}{\min\limits_{S^2}u}\leqslant C_3$, 其中 C,C_1,C_2,C_3 均为任一常数.

引理 4.2 若 $u>0$ 是方程 (1.1) 的允许解, $\psi(\rho)>-A$, 其中 A 是正常数, 则存在一个只与 $\max\limits_{S^2}\frac{|\nabla f|}{f}$ 有关的正常数 C, 使得

$$\max_{S^2}u^2\leqslant C\max_{S^2}f.$$

证 设 x_0 为 u 的最小值点, 选取一个局部单位正交坐标系 $\{e_i\}$, 使得 (u_{ij}) 在 x_0 处为对角阵, 即

$$(u_{ij}+\delta_{ij}u)=\mathrm{diag}(u_{11}+u,u_{22}+u),$$

且在 x_0 处, $u_i=0,u_{ii}\geqslant 0,i=1,2$, 又 ${\sigma_1}^2\geqslant 4\sigma_2$, 则

$$\min_{S^2}u^2\leqslant\frac{1}{3}\max_{S^2}(e^{-3\psi(\rho)}f)\leqslant\max_{S^2}f,$$

中国知网 https://www.cnki.net

其中第二个不等式成立用到了 $\psi(\rho) > -A$, 其中 A 为正常数.

从而由推论 4.1, 有

$$\max_{S^2} u^2 \leqslant C \min_{S^2} u^2 \leqslant C \max_{S^2} f.$$

§4.2 C^2 估计

我们采用文 [3] 中的方法, 记

$$H := \mathrm{trace}\,(u_{ij} + \delta_{ij} u) = \Delta u + 2u.$$

由引理 4.2, 我们获得了解 u 的 C^0 估计, 所以 $|u_{ij}|$ 被 H 控制, 因此要想得到 u 的 C^2 估计, 只需要得到 H 的上界.

引理 4.3 若 $u > 0$ 是方程 (1.1) 的允许解, $H := \mathrm{trace}(u_{ij} + \delta_{ij} u) = \Delta u + 2u$, 则

$$\max_{s^2} H \leqslant \max_{S^2} (2\widetilde{h} - \Delta \widetilde{h}),$$

其中 $\widetilde{h} = \frac{1}{\sqrt{3}} \mathrm{e}^{-\frac{3}{2}\psi(\rho)} f^{\frac{1}{2}}$.

证 设 H 在 x_0 处取最大值, 则有 $(H_{ij}) \leqslant 0$, 在 x_0 附近选取一个局部单位正交坐标系 $\{e_i\}$, 使得在 x_0 处为对角阵, 令 $F(W) = (\det(W))^{\frac{1}{2}}$, 则方程 (1.1) 变为

$$F(W) = \frac{1}{\sqrt{3}} \mathrm{e}^{-\frac{3}{2}\psi(\rho)} \widetilde{f}, \tag{4.6}$$

其中 $\widetilde{f} = f^{\frac{1}{2}}$.

因为 $(\Delta u)_{ii} = \Delta(u_{ii}) + 2\Delta u - 2n u_{ii}$, 这里 $n = 2$, 所以

$$H_{ii} = (\Delta u)_{ii} + 2u_{ii} = \Delta(W_{ii}) - 2W_{ii} + H.$$

令 $F^{ij} = \frac{\partial F}{\partial W_{ij}}$, 则 (F^{ij}) 在 x_0 处为对角矩阵. 因为 $W \in \Gamma_k$, 所以 (F^{ij}) 正定, 从而

$$0 \geqslant F^{ij} H_{ij} = F^{ii} H_{ii} = F^{ii} \Delta\,(W_{ii}) - 2F^{ii} W_{ii} + H \sum_{i=1}^{2} F^{ii}, \tag{4.7}$$

其中

$$F^{ii} W_{ii} = \frac{1}{\sqrt{3}} \mathrm{e}^{\frac{3}{2}\psi(\rho)} \widetilde{f}. \tag{4.8}$$

对 (4.6) 沿 e_s 方向微分两次, 我们有

$$F^{ij} W_{ijs} = \Big[\frac{1}{\sqrt{3}} \mathrm{e}^{-\frac{3}{2}\psi(\rho)} \widetilde{f}\Big]_s,$$

$$F^{ij,pq} W_{ijs} W_{pqs} + F^{ij} \Delta\,(W_{ij}) = \Delta \Big[\frac{1}{\sqrt{3}} \mathrm{e}^{-\frac{3}{2}\psi(\rho)} \widetilde{f}\Big].$$

因为 F 在 x_0 处是凹的, 所以有

$$F^{ii} \Delta(W_{ii}) \geqslant \Delta \Big[\frac{1}{\sqrt{3}} \mathrm{e}^{-\frac{3}{2}\psi(\rho)} \widetilde{f}\Big]. \tag{4.9}$$

中国知网 https://www.cnki.net

比较 (4.7)–(4.9), 有

$$0 \geqslant \Delta\left[\frac{1}{\sqrt{3}}\mathrm{e}^{\frac{3}{2}\psi(\rho)}\widetilde{f}\right]-\frac{2}{\sqrt{3}}\mathrm{e}^{\frac{3}{2}\psi(\rho)}\widetilde{f}+H\sum_{i=1}^{2}F^{ii}, \tag{4.10}$$

而

$$\sum_{i=1}^{2}F^{ii}=\sum_{i=1}^{2}\frac{1}{2}(\sigma_2(W))^{\frac{1}{2}-1}\sigma_1(W\mid i)=\frac{1}{2}(\sigma_2(W))^{-\frac{1}{2}}\sigma_1(W)\geqslant 1,$$

由 (4.10), 我们有

$$H \leqslant 2\left[\frac{1}{\sqrt{3}}\mathrm{e}^{-\frac{3}{2}\psi(\rho)}\widetilde{f}\right]-\Delta\left[\frac{1}{\sqrt{3}}\mathrm{e}^{-\frac{3}{2}\psi(\rho)}\widetilde{f}\right].$$

证毕.

§5 定理 1.1 的证明

我们使用连续性方法[4] 来证明定理 1.1.

对于 $t\in[0,1]$, 为了叙述方便起见, 不妨令 $t=0$ 时, $u=1$, 考虑方程

$$3\det(w)\mathrm{e}^{3\psi(\rho)}=f_t, \tag{5.1}$$

其中 $f_t=tf+(1-t)f_0$, $f_0=3\mathrm{e}^{3\psi(\frac{1}{2})}$, 令

$$S=\{t\in[0,1]\mid \text{方程 (5.1) 有允许正解}\}.$$

若 $1\in S$, 则方程 (5.1) 有解, 故只需证明非空集合 S 开且闭 (因为 $0\in S$).

§5.1 开性

直接计算可得, 方程 (1.1) 的线性化算子为

$$L(\varphi)=\frac{\partial\det(w)}{\partial w_{ij}}(\varphi_{ij}+\delta_{ij}\varphi)+f\mathrm{e}^{-3\psi(\rho)}\psi'(\rho)(u\varphi+\nabla u\nabla\varphi). \tag{5.2}$$

为了说明 L 是可逆的, 还需证明 $\ker L=\{0\}$.

引理 5.1 若 $\psi'(\rho)<-\frac{1}{3\rho}-\varepsilon$, 其中 ε 为某一正常数, 则 $\ker L=\{0\}$.

证 记 $F^{ij}=\frac{\partial\det(w)}{\partial w_{ij}}$, 易知矩阵 $(F_{ij})>0$, 令 $\varphi=uv$, 则 (5.2) 可以写成

$$\begin{aligned}L(\varphi)&=F^{ij}(u_{ij}v+u_iv_j+u_jv_i+uv_{ij}+\delta_{ij}uv)+f\mathrm{e}^{-3\psi(\rho)}\psi'(\rho)\left(u^2v+|\nabla u|^2v+u\nabla u\cdot\nabla v\right)\\&=2F^{ij}u_iv_j+uF^{ij}v_{ij}+\frac{2}{3}v\mathrm{e}^{-3\psi(\rho)}f+f\mathrm{e}^{-3\psi(\rho)}\psi'(\rho)u^2v+f\mathrm{e}^{-3\psi(\rho)}\psi'(\rho)|\nabla u|^2v\\&\quad+f\mathrm{e}^{-3\psi(\rho)}\psi'(\rho)u\nabla u\nabla v.\end{aligned}$$

假设 $L(\varphi)=0$, x_0 为 v 的最大值点, 则在 x_0 处, $v_i=0, v_{ij}\leqslant 0$,

$$0\geqslant uF^{ij}v_{ij}=-\frac{2}{3}v\mathrm{e}^{-3\psi(\rho)}f-f\mathrm{e}^{-3\psi(\rho)}\psi'(\rho)u^2v-f\mathrm{e}^{-3\psi(\rho)}\psi'(\rho)|\nabla u|^2v,$$

中国知网 https://www.cnki.net

即

$$-\frac{2}{3}v-\psi'(\rho)\cdot 2\rho v\leqslant 0.$$

又 $\psi'(\rho)<-\frac{1}{3\rho}-\varepsilon$, 所以 $\max\limits_{S^2}v\leqslant 0$. 在最小值点处, 同理可得 $\min\limits_{S^2}v\geqslant 0$, 所以在 S^2 上, $v\equiv 0$, 即 $\varphi\equiv 0$, 这就证得了 $\ker L=\{0\}$.

由 Fredholm 的二择一定理可知, 线性化算子 $L(\varphi)$ 可逆.

根据引理 5.1 可知 S 是开集, 通过引理 4.1– 引理 4.3 我们获得了方程 (5.1) 的允许正解的一致 C^2 估计, 从而方程 (5.1) 是一致椭圆的. 利用 Evans-Krylov 理论, 我们可以获得解的更高阶导数估计, 也就得到了 S 是闭集的结论. 特别地, $1\in S$, 方程 (5.1) 有解, 至此定理 1.1 的存在性部分证明完毕.

下面我们证明定理 1.1 中解的唯一性部分.

§5.2 解的唯一性

假设 $u,v>0$ 是方程 (1.1) 的两个允许解, 把方程 (1.1) 写成 (4.6) 的形式, 我们不妨假设 $\max\limits_{S^2}\frac{v}{u}=\zeta$, ζ 为某一正常数, 且在点 x_0 处取得最大值, 则有 $\zeta u\geqslant v$ 和 $\zeta u(x_0)=v(x_0)$ 成立.

令 $s=\zeta u$, 则 $s-v\geqslant 0$, 且 $(s-v)(x_0)=0$.

我们断言 $\zeta\leqslant 1$.

否则, 若 $\zeta>1$, 定义

$$u^t=(1-t)v+ts,$$

$$U^t=({u_{ij}}^t+\delta_{ij}u^t)=(1-t)V+tS,$$

其中 $V=(v_{ij}+\delta_{ij}v)$, $S=(s_{ij}+\delta_{ij}s)$. 因为 u,v 都是方程 (1.1) 的允许解, 所以 $V\in\Gamma_2$, $S\in\Gamma_2$, 由于 Γ_2 是凸锥, 因而 $U^t\in\Gamma_2$, 所以

$$(F^{ij}(U^t))>0,$$

其中 $(F^{ij}(U^t))=\frac{\partial {\sigma_2}^{\frac{1}{2}}}{\partial U^t_{ij}}$. 令 $\eta(t)=F(U^t)$, 则

$$F(S)-F(V)=\int_0^1\eta'(t)\mathrm{d}t=\sum_{i,j=1}^{2}\Big(\int_0^1F^{ij}(U^t)\mathrm{d}t\Big)[(s_{ij}-v_{ij})+\delta_{ij}(s-v)].\tag{5.3}$$

另一方面, 由 (4.6) 有

$$F(S)-F(V)=\frac{\zeta}{\sqrt{3}}\mathrm{e}^{\frac{3}{2}\psi(\rho_1)}\widetilde{f}-\frac{1}{\sqrt{3}}\mathrm{e}^{-\frac{3}{2}\psi(\rho_2)}\widetilde{f},\tag{5.4}$$

其中 $\rho_1=\frac{1}{\zeta^2}\cdot\frac{s^2+|\nabla s|^2}{2}$, $\rho_2=\frac{v^2+|\nabla v|^2}{2}$.

令

$$c_{ij}=\int_0^1F^{ij}(U^t)\mathrm{d}t,$$

中国知网 https://www.cnki.net

则 $(c_{ij})>0$, 由 (5.3)–(5.4), 我们有

$$\frac{\zeta}{\sqrt{3}}\mathrm{e}^{-\frac{3}{2}\psi(\rho_1)}\widetilde{f}-\frac{1}{\sqrt{3}}\mathrm{e}^{\frac{3}{2}\psi(\rho_2)}\widetilde{f}=\sum_{i,j=1}^{2}c_{ij}\cdot(s_{ij}-v_{ij})+\Big(\sum_{i=1}^{2}c_{ii}\Big)\cdot(s-v). \tag{5.5}$$

因为在 O 内 $s-v\geqslant 0$ 且, 所以 x_0 是 $s-v$ 的最小值点, 从而在 x_0 处,

$$s_{ij}-v_{ij}\geqslant 0.$$

因此 (5.5) 的右侧在 x_0 处是非负的, 即在 x_0 处,

$$F(S)-F(V)=\frac{\zeta}{\sqrt{3}}\mathrm{e}^{\frac{3}{2}\psi(\rho_1)}\widetilde{f}-\frac{1}{\sqrt{3}}\mathrm{e}^{-\frac{3}{2}\psi(\rho_2)}\widetilde{f}\geqslant 0. \tag{5.6}$$

在 x_0 处, 由于

$$(s^2+|\nabla s|^2)-(v^2+|\nabla v|^2)=(s+v)(s-v)-\nabla(s+v)\nabla(s-v)=0,$$

不妨令

$$\rho=\frac{s^2+|\nabla s|^2}{2}=\frac{v^2+|\nabla v|^2}{2}=1,$$

此时

$$F(S)-F(V)=\frac{1}{\sqrt{3}}[\zeta\mathrm{e}^{-\frac{3}{2}\psi(\frac{1}{\zeta^2})}-\mathrm{e}^{-\frac{3}{2}\psi(1)}]\widetilde{f}. \tag{5.7}$$

令 $\frac{1}{\zeta^2}=t, t<1, \zeta=t^{-\frac{1}{2}}, g(t)=t^{-\frac{1}{2}}\mathrm{e}^{-\frac{3}{2}\psi(t)}$, 由于 $\psi'(\rho)<-\frac{1}{3\rho}-\varepsilon$, 所以

$$g'(t)=-\frac{1}{2}t^{-\frac{3}{2}}\mathrm{e}^{-\frac{3}{2}\psi(t)}\,(1+3t\psi'(t))>0,$$

从而 $g(t)-g(1)<0$, 即 (5.7) 是负的, 这与 (5.6) 矛盾.

综上 $\zeta\leqslant 1$, 即 $\max_{S^2}\frac{v}{u}\leqslant 1$. 同理有 $\max_{S^2}\frac{u}{v}\leqslant 1$, 即 $\min_{S^2}\frac{v}{u}\geqslant 1$, 故 $u=v$, 这就证得了解的唯一性.

参　考　文　献

[1] Cheng S Y, Yau S T. On the regularity of the solution of the n-dimensional Minkowski problem [J]. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, 1976, 29(5):495–516.

[2] Evans L C. Classical solutions of fully nonlinear, convex, second-order elliptic equations [J]. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, 1982, 35(3):333–363.

[3] Guan P. The Weyl and Minkowski Problems, Revisited [C]. Nonlinear Analysis in Geometry and Applied Mathematics, Part 2, Harvard CMSA Ser Math 2, International Press, 2018:51–75.

[4] Nirenberg L. The Weyl and Minkowski problems in differential geometry in the large [J]. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, 1953, 6(3):337–394.

中国知网　https://www.cnki.net

Minkowski Problem in Ambient Space Conformal with Euclidean Space

CAI Mengfan[1] LI Chunhe[2]

[1]School of Mathematical Sciences, University of Electronic Science and Technology of China, Chengdu 611731, Sichuan, China. E-mail: 1490363424@qq.com

[2]Corresponding author. School of Mathematical Sciences, University of Electronic Science and Technology of China, Chengdu 611731, Sichuan, China. E-mail: chli@uestc.edu.cn.

Abstract In this paper, the Minkowski problem in the ambient space conformal with the Euclidean space is studied, and the continuity method is used to prove the solvability of the Minkowski problem in this ambient space.

Keywords Minkowski problem, Variation, A priori estimate, Continuity method

2000 MR Subject Classification 53C24, 35J17

The English translation of this paper will be published in

Chinese Journal of Contemporary Mathematics, Vol. 45 No. 2, 2024

by ALLERTON PRESS, INC., USA

中国知网 https://www.cnki.net