数 学 年 刊 A 辑
2024, 45(2):185–204
DOI: 10.16205/j.cnki.cama.2024.0013

关于 Seksenbaev-Robinson 定理*

刘合国[1] 张继平[2] 赵 静[3] 徐行忠[4] 廖 军[4]

提要 剩余有限群也被称为是可以有限逼近的群, 其特性常常由它的有限商群的性质决定. Seksenbaev 定理断言: 若对无限多个素数 p, 多重循环群 G 都是剩余有限 p- 群, 则 G 是有限生成的无挠幂零群. Robinson 把该定理推广为: 设 G 是有限秩的可解群, 若对无限多个素数 p, G 都是剩余有限 p- 群, 则 G 是有限秩的无挠幂零群. 这是无限可解群里的两个经典结果. 本文证明了有关无限可解群的两个剩余有限性定理. 本文的结果完善了 Seksenbaev-Robinson 定理.

关键词 可解群, 剩余有限性, 不可约多项式, 整群环, 下中心列
MR (2000) 主题分类 20E26, 20F14, 20F16
中图法分类 O152
文献标志码 A
文章编号 1000-8314(2024)02-0185-20

§1 引 言

本文采用的符号和术语是标准的, 按照文 [1–2].

在无限群论里, 剩余有限性是最基本的研究对象之一, 具有根本的重要性. Robinson 关于无限群的两卷本经典著作 [2] 一共 10 章, 其中第 9 章 “Residually Finite Groups” 专门处理剩余有限群. Lennox 和 Robinson 在集无限可解群研究之大成的牛津数学专著 [3] 之第 18 页明确写道: “ Among the most important finiteness conditions is residual finiteness.” 剩余有限性在无限群研究里的重要性由此可见一斑.

设 G 是群, 若对于 G 的任意元素 $g \neq 1$, 均存在 $g \notin N_g \lhd G$, 使得 G/N_g 是有限群, 则称 G 是剩余有限群. 特别地, 设 π 是某些素数的集合, 若对于群 G 的任意元素 $h \neq 1$, 均存在 $h \notin N_h \lhd G$, 使得 G/N_h 是有限 π- 群, 则称 G 是剩余有限 π- 群. 在剩余有限 π- 群里, 最重要的是 $\pi = \{p\}$ 的情形. 若对于群 G 的任意元素 $x \neq 1$, 均存在 $x \notin N_x \lhd G$, 使得 G/N_x 是有限 p- 群, 则称 G 是剩余有限 p- 群.

熟知有限 p- 群具有非平凡的中心. 当自由群 F 的秩超过 1 时, F 的中心是平凡的, 并且 F 是剩余有限 p- 群 (p 是任意素数), 这表明剩余有限 p- 群是一个非常复杂的研究对

本文 2023 年 2 月 12 日收到, 2024 年 3 月 25 日收到修改稿.
[1]海南大学数学与统计学院, 海口 570228. E-mail: ghliu@hainanu.edu.cn
[2]北京大学数学科学学院, 北京 100871. E-mail: jzhang@pku.edu.cn
[3]通信作者. 海南大学数学与统计学院, 海口 570228; 海南省工程建模与统计计算重点实验室, 海口 570228. E-mail: jzhao0@163.com
[4]湖北大学数学与统计学学院, 武汉 430062. E-mail: xuxingzhong407@126.com; jliao@hubu.edu.cn
*本文受到国家自然科学基金 (No. 11131001, No. 11971155, No. 12071117, No. 12171142) 和湖北省自然科学基金 (No. 2021CFB479) 的资助.

象, 它与有限 p- 群具有根本性的区别.

在无限可解群里, 研究最深入、成果最丰富的部分当是对多重循环群的研究 (见 [4]). 把关于多重循环群的结果推广到更一般的可解群, 是一条行之有效的学术思路. 多重循环群是剩余有限的, 这是多重循环群的一个基本特征. 更一般地, Malcev 证明多重循环群的每个子群在 Profinite 拓扑下都是闭子群, 由此出发也衍生出许多深入的研究. 就无限可解群的剩余有限性而言, Robinson 在文 [5] 里证明了一个十分整齐的一般性结果: $\mathfrak{S}_0$- 群 G 是剩余有限的当且仅当 G 的 Fitting 子群的中心是既约的. 对 $\mathfrak{S}_1$- 群和 $\mathfrak{S}_2$- 群, Robinson 也得到了相应的剩余有限性定理. 我们在文 [6] 里证明: 若 $\mathfrak{S}_1$- 群 G 的 Fitting 子群的中心是既约的, 则其全形 $\mathrm{Hol}(G)$ 是剩余有限 π- 群, 这里 π 是有限个素数的集合. 借助 Profinite 拓扑, 我们在文 [7] 里证明了 $\mathfrak{S}_0$- 群是强剩余有限的当且仅当 G 的谱是空集. 沿着文 [7] 的思路, 文 [8–9] 进行了更进一步的研究. (注: 文 [8–9] 用术语 "extended residually finite" 替代了文 [7] 里 "强剩余有限性" 的英译 "strongly residually finite", 或许是前者比后者在修辞上规范.) 在 Hall 关于无限可解群的开创性研究 [10] 里, 他用群环等工具证明每个有限生成的 abelian-by-nilpotent 群一定是剩余有限的, 文 [11–12] 把这个结果推广到有限生成的 abelian-by-polycyclic 群, 这是无限可解群里最深刻的剩余有限性定理. 文 [1] 之第 473 页在提及文 [11–12] 所取得的成就时, 感叹:"The proof is significantly harder".

剩余有限群有时也被称为是可以有限逼近的群, 因为对于这类群来说, 其特性常常可以由它的有限商群的性质决定. 例如, Baer 在文 [13] 里证明: 若多重循环群 G 的每个有限商群都是超可解的, 则 G 也是超可解的. 这个结果建立在一条代数数论的定理之上, 这样它在本质上是一个数论定理. Robinson 在文 [14] 里证明: 若有限生成的可解群 G 的每个有限商群都是幂零的, 则 G 也是幂零的. 另一方面, Seksenbaev 在文 [15] 里证明: 若对无限多个素数 p, 多重循环群 G 都是剩余有限 p- 群, 则 G 是有限生成的无挠幂零群. Robinson 在文 [16] 里把这个结果推广到有限秩的可解群. 在文 [17–18] 里, 我们从一类不可约多项式出发, 证明: 对任意有限个素数的集合 π, 存在多重循环群 $G(\pi)$, 使得 $G(\pi)$ 是剩余有限 p- 群当且仅当 $p \in \pi$. 在文 [19] 里, 我们推广了文 [17–18] 的结果, 得到了下面这个有些出人意料之外的定理.

设 A 是秩为 n 的自由 Abel 群, 它的自同构群 $\mathrm{Aut}A = \mathrm{GL}(n, \mathbb{Z})$. 设 $f(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0$ 是整系数不可约多项式, 其中 $a_0 = \pm 1$. 记

$$\alpha = \begin{pmatrix} 0 & & & & -a_0 \\ 1 & 0 & & & -a_1 \\ & \ddots & \ddots & & \vdots \\ & & \ddots & 0 & -a_{n-2} \\ & & & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix} \in \mathrm{Aut}\, A.$$

构造群 $G = A \rtimes \langle \alpha \rangle$, 则 G 是剩余有限 p- 群当且仅当 p 整除 $f(1)$.

当然, 判断一个整系数多项式是否在整数环上可约, 不是一件轻松的事, 文 [20] 给出了一系列判别准则. 还是从不可约多项式出发, 文 [21] 把文 [17] 的主要结果推广到有限秩的可解群, 本文的第一个目的是把文 [19] 的结果推广到有限秩的可解群, 证明下面的定理.

定理 1.1 设 X 是有理数加群 $\mathbb{Q}$ 的非平凡子群, π 是 X 的谱, 即 $\pi=\{p \mid pX=X\}$, $A=\underbrace{X\oplus X\oplus\cdots\oplus X}_{n}$, A 的自同构群 $\mathrm{Aut}A=\mathrm{GL}(n,\mathbb{Q}_\pi)$, 其中 $\mathbb{Q}_\pi=\{\frac{n}{m}\mid n\in\mathbb{Z}, m是\pi\text{-}数\}$. 设 $p(\lambda)=\lambda^n+a_{n-1}\lambda^{n-1}+\cdots+a_1\lambda+a_0\in\mathbb{Q}_\pi[\lambda]$ 在 $\mathbb{Q}$ 上不可约, a_0 是环 $\mathbb{Q}_\pi$ 的单位, 设 $p(1)=um$, 其中 u 是环 $\mathbb{Q}_\pi$ 的单位, m 是 π'- 数, 记

$$\alpha=\begin{pmatrix}0 & & & & -a_0\\ 1 & 0 & & & -a_1\\ & \ddots & \ddots & & \vdots\\ & & \ddots & 0 & -a_{n-2}\\ & & & 1 & -a_{n-1}\end{pmatrix}\in\mathrm{GL}(n,\mathbb{Q}_\pi)=\mathrm{Aut}\,A.$$

构造群 $G=A\rtimes\langle\alpha\rangle$, 则 G 是剩余有限 p- 群当且仅当 p 整除 m.

这个定理把文 [17–19,21] 的相关工作自然地统一起来了.

在一般群论里, 子群与正规子群存在严格的区别. 这样在非 Abel 群里很少存在严格的对偶现象. 从直观上看, 剩余有限性与可除性是近似对偶的概念, Robinson 在文 [22] 里处理了文 [21] 的一个近似对偶问题.

在通常情况下, 无限可解群的研究多集中在有限秩的可解群. 在文 [23] 里, 我们从无限循环群上的整群环入手, 研究了这个环上的两个矩阵群的剩余有限性质, 其中处理了一种无限秩的可解群. 本文的第二个主要目的是继承文 [23] 的思路, 证明下面的定理.

定理 1.2 设 $C=\langle c\rangle$ 是无限循环群, $R=\mathbb{Z}C$ 是 C 上的整群环. 记

$$G=\left\{\begin{pmatrix}1 & u(c) & w(c)\\ & c^i & v(c)\\ & & 1\end{pmatrix}\ \middle|\ i\in\mathbb{Z},\ u(c),v(c),w(c)\in R\right\},$$

则 G 是 3- 生成的 centre-by-metabelian 群. 对每个素数 p, G 和 $G/\zeta G$ 均是剩余有限 p-群, 这里 ζG 是 G 的中心. 进一步地, 设 π 是任意多个素数的集合, 存在 G 的商群 $G(\pi)$, 使得 $G(\pi)$ 是剩余有限 p- 群当且仅当 $p\in\pi$.

定理 1.1 与定理 1.2 之间存在天然的联系. 按照定理 1.1, 对任意有限个素数 $\{p_1,p_2,\cdots,p_n\}$, 我们都可以构造出有限秩的可解群 G, 使得 G 是剩余有限 p- 群当且仅当 $p\in\{p_1,p_2,\cdots,p_n\}$. 当然这个事实也可由定理 1.2 得到. 反过来, 定理 1.2 能够处理 π 是无限集的情况, 这是定理 1.1 无能为力的. 定理 1.2 构造的群 G, $G/\zeta G$, 以及 $G(\pi)$ 都是无限秩的可解群. 按照 Robinson [16] 的结论, 我们只有在无限秩的可解群里, 才能处理 π 是无限集的问题, 得到定理 1.2 这样的结论.

也许, 无限循环群的整群环 $R=\mathbb{Z}C$ 上的矩阵群是一个非常值得关注的研究课题.

§2 定理 1.1 的证明

下面的引理在处理有限生成的幂零群的剩余有限性质时是有用的, 见文 [24, 定理 2.1].

引理 2.1 设 G 是有限生成的幂零群, 它的挠元都是 p- 元, 则 G 是剩余有限 p- 群.

熟知, 当 $0<X\leqslant(\mathbb{Q},+)$ 时, X 的自同态环 $\mathrm{End}X=\mathbb{Q}_\pi$, 这里 π 是 X 的谱, 即 $\pi=\{p\mid pX=X\}$. 这样对 Abel 群 $A=\underbrace{X\oplus X\oplus\cdots\oplus X}_{n}$ 而言, 其自同态环

$$\mathrm{End}A=\begin{pmatrix}\mathrm{Hom}(X,X)&\mathrm{Hom}(X,X)&\ldots&\mathrm{Hom}(X,X)\\ \mathrm{Hom}(X,X)&\mathrm{Hom}(X,X)&\cdots&\mathrm{Hom}(X,X)\\ \vdots&\vdots&\vdots&\vdots\\ \mathrm{Hom}(X,X)&\mathrm{Hom}(X,X)&\cdots&\mathrm{Hom}(X,X)\end{pmatrix}_{n\times n}=\mathrm{Mat}(n,\mathbb{Q}_\pi),$$

进而 A 的自同构群 $\mathrm{Aut}A=\mathrm{GL}(n,\mathbb{Q}_\pi)$.

定理 1.1 的证明 假设 $p(1)=1+a_{n-1}+a_{n-2}+\cdots+a_1+a_0=um$, u 属于 $\mathbb{Q}_\pi$ 的单位群, m 是 π'- 数并且 $p\mid m$. 显然 $\alpha-I$ 是 A 的一个自同态, 这里 I 是 A 的恒等自同态. 对矩阵

$$\alpha-I=\begin{pmatrix}-1&&&&-a_0\\ 1&-1&&&-a_1\\ &\ddots&\ddots&&\vdots\\ &&\ddots&-1&-a_{n-2}\\ &&&1&-1-a_{n-1}\end{pmatrix}.$$

进行 $\mathbb{Q}_\pi$ 上如下形式的幺模变换 (仿照文 [25]):

(i) 互换矩阵的两行 (列);

(ii) 用 $\mathbb{Q}_\pi$ 的单位乘以矩阵的某行 (列);

(iii) 把矩阵的某行 (列) 乘以 $\mathbb{Q}_\pi$ 的某个元加到另一行 (列),

$\alpha-I$ 可以化为其 Smith 标准形. 由此不难得到 $\mathrm{Aut}A=GL(n,\mathbb{Q}_\pi)$ 的两个元 β 和 γ,

$$\beta=\begin{pmatrix}1&&&&\\ 1&1&&&\\ 1&1&1&&\\ \vdots&\vdots&&\ddots&\\ 1&1&1&\cdots&1\end{pmatrix},\quad \gamma=\begin{pmatrix}-1&&&&a_0\\ &-1&&&a_1+a_0\\ &&\ddots&&\vdots\\ &&&-1&\sum\limits_{i=0}^{n-2}a_i\\ &&&&-1\end{pmatrix}.$$

满足 $\beta(\alpha-I)\gamma=\mathrm{diag}(1,1,\cdots,1,p(1))$. 因 $|\beta|=1$, $|\gamma|=(-1)^n$, 故 $|\alpha-I|=(-1)^np(1)$.

记 $\varepsilon=\mathrm{diag}(1,1,\cdots,1,p(1))$, 则 $\varepsilon\in\mathrm{End}A$ 具有如下形式:

$$\varepsilon: X\oplus X\oplus\cdots\oplus X\to X\oplus X\oplus\cdots\oplus X,$$
$$(x_1,x_2,\cdots,x_n)\to(x_1,x_2,\cdots,p(1)x_n),$$

这样

$$\begin{aligned}A/(\alpha-I)A&=A/\beta^{-1}\varepsilon\gamma^{-1}A=\beta A/\varepsilon(\gamma^{-1}A)\\&=A/\varepsilon A=\frac{X\oplus X\oplus\cdots\oplus X}{X\oplus X\oplus\cdots\oplus p(1)X}\\&=X/p(1)X=X/m(uX)=X/mX\\&=\mathbb{Z}_m,\end{aligned}$$

因此, $|A/(\alpha-I)A|=m$.

注意到 $G=A\rtimes\langle\alpha\rangle$, 对每个正整数 k, 显然 $(\alpha-I)^kA$ 是 A 的一个子群, 并且

$$(\alpha-I)^kA=[A,\underbrace{\alpha,\cdots,\alpha}_{k}]=[A,\ _k\alpha],$$

这样 $(\alpha-I)^kA$ 是 G 的正规子群.

因 $|\alpha-I|=(-1)^np(1)\neq0$, $\alpha-I$ 是 A 的一个单同态, 故 $\alpha-I$ 自然地诱导出群同构

$$(\alpha-I)A/(\alpha-I)^2A\cong A/(\alpha-I)A,$$

进一步地,

$$(\alpha-I)^kA/(\alpha-I)^{k+1}A\cong(\alpha-I)^{k-1}A/(\alpha-I)^kA,$$

从而对每个正整数 k, $|(\alpha-I)^{k-1}A/(\alpha-I)^kA|=m$.

记 $m=p^el$, $p\nmid l$. 设 $B_1\leqslant A$, 使得 $B_1/(\alpha-I)\alpha=O_{p'}(A/(\alpha-I)A)$ 是有限 Abel 群 $A/(\alpha-I)A$ 的 Hall p'- 子群, 则有 $|A:B_1|=p^e$. 类似地, 对每个正整数 i, 取 $B_i\leqslant A$, 使得 $B_i/(\alpha-I)^iA=O_{p'}(A/(\alpha-I)^iA)$ 是 $A/(\alpha-I)^iA$ 的 Hall p'- 子群. 此时 $|A:B_i|=p^{ei}$, 由此我们得到一个子群降链

$$B_1>B_2>\cdots>B_i>\cdots,$$

从 $B_i/(\alpha-I)^iA$ char $A/(\alpha-I)^iA$ 知 $B_i\lhd G$, $\bigcap\limits_{r=1}^{\infty}B_r\lhd G$. 对每个 i, 因 $|A:\bigcap\limits_{r=1}^{\infty}B_r|>|A:B_i|=p^{ei}$, 故 $A/\bigcap\limits_{r=1}^{\infty}B_r$ 是无限 Abel 群.

设 $T/\bigcap\limits_{r=1}^{\infty}B_r$ 是 $A/\bigcap\limits_{r=1}^{\infty}B_r$ 的挠子群. 由 $A/\bigcap\limits_{r=1}^{\infty}B_r\leqslant\prod\limits_{r=1}^{\infty}A/B_r$ 知 $T/\bigcap\limits_{r=1}^{\infty}B_r$ 是 Abel p-群. 注意到 $A=\underbrace{X\oplus X\oplus\cdots\oplus X}_{n}$ 是秩为 n 的 Abel 群. $T/\bigcap\limits_{r=1}^{\infty}B_r$ 是秩不超过 n 的 Abel p- 群, 它满足子群的极小条件. 这样 $T/\bigcap\limits_{r=1}^{\infty}B_r$ 可以分解为有限个循环 p- 群与有限个拟循环 p- 群的直和. 注意到 π 是 A 的谱, m 是 π'- 数, 以及 $p\mid m$, 可知 $p\notin\pi$, 从而 A 与拟循

环 p- 群无关, $T/\bigcap_{r=1}^{\infty} B_r$ 没有拟循环 p- 子群, $T/\bigcap_{r=1}^{\infty} B_r$ 是有限个有限 p- 群的直和, 它是有限群, 这样 $A/T = \big(A/\bigcap_{r=1}^{\infty} B_r\big)/\big(T/\bigcap_{r=1}^{\infty} B_r\big)$ 是无限的无挠 Abel 群.

设 T 和 A/T 的秩分别为 s 和 $t, t \geqslant 1$. 当 $\bigcap_{r=1}^{\infty} B_r \neq 1$ 时, $s \geqslant 1$. 于是 $\mathrm{Aut}T \leqslant \mathrm{GL}(s,\mathbb{Q})$, $\mathrm{Aut}(A/T) \leqslant \mathrm{GL}(t,\mathbb{Q})$, 其中 $s+t=\mathrm{rank}(A)=n$. 注意到 $T/\bigcap_{r=1}^{\infty} B_r$ char $A/\bigcap_{r=1}^{\infty} B_r$, T 和 A 都是 G 的正规子群. 当 α 作用在 $1<T<A$ 上时, α 自然地作用在 $1<T\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Q}<A\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Q}$ 上, $A\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Q}$ 是 $\mathbb{Q}$ 上的 n 维向量空间, $T\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Q}$ 是 $A\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Q}$ 的 s 维不变子空间. 由此 α 自然地对应于一个 n 阶分块矩阵 $\left(\begin{smallmatrix} U & W \\ & V \end{smallmatrix}\right)$, 其中 U 是 s 阶矩阵. 显然 $p(\lambda)=|\lambda I-\alpha|=|\lambda I_s-U|\cdot|\lambda I_t-V|$ 是可约的, 这是不可能的, 因此 $\bigcap_{r=1}^{\infty} B_r=1$.

现在能够证明 G 是剩余有限 p- 群, 分两种情况讨论.

(i) 当 α 是 $GL(n,\mathbb{Q}_\pi)$ 的无限阶元时.

对于任意的 $1\neq g\in G$, 当 $g\notin A$ 时, 因 $G/A\cong\langle\alpha\rangle$ 是无限循环群, 显然存在 $A<N_g\lhd G$, 使得 $g\notin N_g$ 且 G/N_g 是有限 p- 群. 当 $g\in A$ 时, 因 $\bigcap_{r=1}^{\infty} B_r=1$, 存在正整数 i, 使 $g\notin B_i$. 注意到

$$(\alpha-I)^iA=[A,\underbrace{\alpha,\alpha,\cdots,\alpha}_{i}]\lhd G,$$

$G/(\alpha-I)^iA$ 是幂零群, 于是 G/B_i 是幂零群. 因 A/B_i 是有限 Abel p- 群, 它是 G/B_i 的挠子群, 故根据引理 2.1 知存在 $B_i<M_g\lhd G$, 使得 $g\notin M_g$ 且 G/M_g 是有限 p- 群. 因此 G 是剩余有限 p- 群.

反过来, 假设 G 是剩余有限 p- 群, 我们断言 $p\mid m$.

取 $\mathrm{GL}(n,\mathbb{Q}_\pi)$ 的元素

$$P=\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} & 1 \\ a_2 & \cdots & a_{n-1} & 1 & \\ \vdots & \iddots & \iddots & & \\ a_{n-1} & \iddots & & & \\ 1 & & & & \end{bmatrix}\in\mathrm{GL}(n,\mathbb{Q}_\pi).$$

可以直接验证 $P^{-1}\alpha P=\alpha'$, 其中 α' 是 α 的转置矩阵.

对 $A=X\oplus X\oplus\cdots\oplus X$ 的任意元素 $(x_1,x_2,\cdots,x_n)$, 记 $(y_1,y_2,\cdots,y_n)=(x_1,x_2,\cdots,x_n)P$, 则有

$$\alpha(y_1,y_2,\cdots,y_n)=(y_1,y_2,\cdots,y_n)\cdot P^{-1}\alpha P=(y_1,y_2,\cdots,y_n)\alpha',$$

即

$$\alpha(y_1, y_2, \cdots, y_n) = (y_1, y_2, \cdots, y_n)\begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & 0 & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \cdots & -a_{n-1} \end{pmatrix}.$$

由 G 是剩余有限 p- 群可知, 对于任意 $1 \neq y_1 \in G$, 存在 $y_1 \notin N \lhd G$, 使得 G/N 是有限 p- 群. 记 $\overline{G} = G/N$, 此时

$$\begin{aligned} \overline{y_1}^{\overline{\alpha}} &= \overline{y_n}^{-a_0}, \\ \overline{y_2}^{\overline{\alpha}} &= \overline{y}_1\overline{y_n}^{-a_1}, \\ &\vdots \\ \overline{y}_{n-1}^{\overline{\alpha}} &= \overline{y}_{n-2}\overline{y_n}^{-a_{n-2}}, \\ \overline{y_n}^{\overline{\alpha}} &= \overline{y}_{n-1}\overline{y_n}^{-a_{n-1}}, \end{aligned}$$

这样 $[\overline{y}_1\overline{y}_2\cdots\overline{y}_n, \overline{\alpha}] = \overline{y_1}^{-1}\overline{y_1}^{\overline{\alpha}} \cdot \overline{y_2}^{-1}\overline{y_2}^{\overline{\alpha}} \cdot \cdots \cdot \overline{y_n}^{-1}\overline{y_n}^{\overline{\alpha}} = \overline{y_n}^{-p(1)}$, 注意到 $p(1) = um$, u 是 $\mathbb{Q}_\pi$ 的单位. 即 $u \in \{\pm 1\} \times \prod\limits_{q\in\pi}\langle q\rangle$, 可得 $\overline{y}_n^m \in \gamma_2\overline{G} \leqslant \mathrm{Frat}\overline{G}$.

如果 $p \nmid m$, 从 $\overline{y}_m$ 是 p- 元以及 $\overline{y}_n^m \in \mathrm{Frat}\overline{G}$ 知, $\overline{y}_m \in \mathrm{Frat}\overline{G}$, 进而 $\overline{y}_1, \overline{y}_2, \cdots, \overline{y}_{n-1}$ 都属于 $\mathrm{Frat}\overline{G}$. 根据 $y_1, y_2, \cdots, y_n$ 的任意性, 立即可得有限 p- 群 $\overline{G} = \langle\overline{\alpha}\rangle$ 是循环的, $\overline{y}_n^m \in \gamma_2\overline{G} = 1$, 必须 $\overline{y}_n = 1$. 从而 $\overline{y}_{n-1}, \overline{y}_{n-2}, \cdots, \overline{y}_2, \overline{y}_1$ 都等于 1, 这与 $y_1 \notin N$ 矛盾. 因此 $p \mid m$.

(ii) 当 α 是 $GL(n, \mathbb{Q}_\pi)$ 的有限阶元时.

设 $|\alpha| = l$, 则有 $\alpha^l = I$. 因 $p(\lambda)$ 在 $\mathbb{Q}$ 上是不可约的, α 的最小多项式等于 $p(\lambda)$, 故 $p(\lambda)|\lambda^l - 1$. $p(\lambda)$ 等于某个分圆多项式 $\Phi_r(\lambda)$. 根据文 [26, 命题 1.56] 知,

$$p(1) = \Phi_r(1) = \begin{cases} p, & \text{当} r = p^e, \quad e \geqslant 1 \text{时}, \\ 1, & \text{其他}. \end{cases}$$

因此, 当 $p \mid m$ 时, 必有 $p(1) = p$. 这时 $p(\lambda) = \Phi_{p^e}(\lambda)$, α 是一个 p- 元, 仿照情形 (i) 的推理, 可以验证 G 是剩余有限 p- 群.

反过来, 当 G 是剩余有限 p- 群时, α 一定是一个 p- 元. 设 $|\alpha| = p^s$, $p(\lambda)|(\lambda^{p^s} - 1)$, $p(\lambda)$ 等于某个分圆多项式 $\Phi_{p^t}(\lambda)$, $1 \leqslant t \leqslant s$, 于是 $p = p(1)$, 这自然意味着 $p \mid m$.

§3　定理 1.2 的证明

我们分两个部分来完成定理 1.2 的证明.

设 $C = \langle c\rangle$ 是无限循环群, $R = \mathbb{Z}C$ 是 C 上的整群环, R 的加群 $(R, +)$ 是以 $\{c^i \mid i \in \mathbb{Z}\}$ 为基的自由 Abel 群. 又设 I 是 R 的增广理想, $I = (c-1)R$. 对每个正整数 m,

$I^m = (c-1)^m R$. 文 [23] 已经证明了下面的引理.

引理 3.1 设 c 和 R 如上述, 则 $r_0, r_1, r_2, \cdots, r_{2j-1}, r_{2j}, \cdots$ 构成 $(R,+)$ 的一组基, 其中

$$\begin{aligned}
r_0 &= 1,\\
r_1 &= \frac{1}{c}(c-1),\\
r_2 &= \frac{1}{c}(c-1)^2,\\
&\ \vdots\\
r_{2j-1} &= \frac{1}{c^j}(c-1)^{2j-1},\\
r_{2j} &= \frac{1}{c^j}(c-1)^{2j},\\
&\ \vdots
\end{aligned}$$

并且对于每个正整数 m, 均有 $(R,+) = (\mathbb{Z}r_0 \oplus \mathbb{Z}r_1 \oplus \mathbb{Z}r_2 \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}r_m) \oplus I^{m+1}$.

设 $U(3,R)$ 是由 R 上对角线元素全是 1 的 3 阶上三角矩阵构成的幂零群, $T(3,R)$ 是由 R 上可逆的 3 阶上三角矩阵构成的可解群, 现在考虑介于 $U(3,R)$ 与 $T(3,R)$ 之间的群

$$G = \left\{ \left.\begin{bmatrix} 1 & u(c) & w(c) \\ & c^i & v(c) \\ & & 1 \end{bmatrix} \right| i \in \mathbb{Z}, u(c), v(c), w(c) \in R \right\},$$

我们首先证明下面的定理.

定理 3.1 设 G 如上述, 则有

(i) $G = \left\langle \begin{bmatrix} 1 & & \\ & c & \\ & & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & 1 \\ & & 1 \end{bmatrix} \right\rangle$;

(ii) G 的中心 $\zeta G = \left\{ \left.\begin{bmatrix} 1 & 0 & r \\ & 1 & 0 \\ & & 1 \end{bmatrix} \right| r \in R \right\} \cong (R,+)$, 它是秩为可数无限的自由 Abel 群;

(iii) $\zeta(G/\zeta G) = 1$;

(iv) 对每个正整数 m, 均有

$$\gamma_{m+1} G = \left\{ \left.\begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_3 \\ & 1 & x_2 \\ & & 1 \end{bmatrix} \right| x_1, x_2 \in I^m, \quad x_3 \in I^{m-1} \right\},$$

从而 $\bigcap\limits_{m=1}^{\infty} \gamma_m G = 1$;

(v) $d(G) = 3$, 即生成 G 所需的最少生成元的个数等于 3;

(vi) 对于每个素数 p, G 是剩余有限 p- 群;

(vii) 记 $\overline{G} = G/\zeta G$, 对每个正整数 m, 均有 $\gamma_{m+1}\overline{G} = \overline{\gamma_{m+1} G}$, 从而 $\bigcap\limits_{m=1}^{\infty} \gamma_m \overline{G} = 1$;

(viii) 对每个素数 p, $\overline{G} = G/\zeta G$ 是剩余有限 p- 群;

(ix) $U(3,R)$ 是 G 的 Fitting 子群;

(x) G 是导长等于 3 的 centre-by-metabelian 群.

证 记 $\alpha=\begin{bmatrix}1&&\\&c&\\&&1\end{bmatrix}$, 注意到 $U(3,R)\lhd G$, 那么 G 可以表示为 $G=\langle\alpha\rangle\ltimes U(3,R)$.

(i) $U(3,R)$ 是幂零类为 2 的幂零群, 其任意元素

$$\begin{bmatrix}1&u(c)&w(c)\\&1&v(c)\\&&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0\\&1&v(c)\\&&1\end{bmatrix}\left[\begin{bmatrix}1&1&0\\&1&0\\&&1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1&0&0\\&1&w(c)\\&&1\end{bmatrix}\right]\begin{bmatrix}1&u(c)&0\\&1&0\\&&1\end{bmatrix}.$$

这样 $U(3,R)$ 可由形如 $\begin{bmatrix}1&u(c)&0\\&1&0\\&&1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1&0&0\\&1&v(c)\\&&1\end{bmatrix}$ 的所有元素生成.

记 $u(c)=a_sc^s+a_{s+1}c^{s+1}+\cdots+a_{s+t}c^{s+t}$, 其中 $a_i\in\mathbb{Z}$, $s\leqslant i\leqslant s+t$, $s,t\in\mathbb{Z}$, $t\geqslant0$; $v(c)=b_xc^x+b_{x+1}c^{x+1}+\cdots+b_{x+y}c^{x+y}$, 其中 $b_j\in\mathbb{Z}$, $x\leqslant j\leqslant x+y$, $x,y\in\mathbb{Z}$, $y\geqslant0$. 容易验证

$$\begin{bmatrix}1&u(c)&0\\&1&0\\&&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&c^s&0\\&1&0\\&&1\end{bmatrix}^{a_s}\begin{bmatrix}1&c^{s+1}&0\\&1&0\\&&1\end{bmatrix}^{a_{s+1}}\cdots\begin{bmatrix}1&c^{s+t}&0\\&1&0\\&&1\end{bmatrix}^{a_{s+t}},$$

$$\begin{bmatrix}1&0&0\\&1&v(c)\\&&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0\\&1&c^x\\&&1\end{bmatrix}^{b_x}\begin{bmatrix}1&0&0\\&1&c^{x+1}\\&&1\end{bmatrix}^{b_{x+1}}\cdots\begin{bmatrix}1&0&0\\&1&c^{x+y}\\&&1\end{bmatrix}^{b_{x+y}},$$

因此,$U(3,R)=\left\langle\begin{bmatrix}1&c^i&0\\&1&0\\&&1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1&0&0\\&1&c^j\\&&1\end{bmatrix}\,\middle|\, i,j\in\mathbb{Z}\right\rangle$.

验证下面的关系式:

$$\begin{bmatrix}1&&\\&c&\\&&1\end{bmatrix}^{-i}\begin{bmatrix}1&1&0\\&1&0\\&&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&&\\&c&\\&&1\end{bmatrix}^{i}=\begin{bmatrix}1&c^i&0\\&1&0\\&&1\end{bmatrix},\quad\forall\, i\in\mathbb{Z},$$

$$\begin{bmatrix}1&&\\&c&\\&&1\end{bmatrix}^{j}\begin{bmatrix}1&0&0\\&1&1\\&&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&&\\&c&\\&&1\end{bmatrix}^{-j}=\begin{bmatrix}1&0&0\\&1&c^j\\&&1\end{bmatrix},\quad\forall\, j\in\mathbb{Z},$$

即可得到 $G=\left\langle\begin{bmatrix}1&&\\&c&\\&&1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1&1&0\\&1&0\\&&1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1&0&0\\&1&1\\&&1\end{bmatrix}\right\rangle$.

(ii) 任取 $g\in G$, 设 $g=\begin{bmatrix}1&u(c)&w(c)\\&c^k&v(c)\\&&1\end{bmatrix}$, 其中 $k\in\mathbb{Z}$, $u(c)$, $v(c)$, $w(c)\in R$. 运用 (i) 可知 $g\in\zeta G$ 当且仅当下列等式成立:

$$\begin{bmatrix}1&&\\&c&\\&&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&u(c)&w(c)\\&c^k&v(c)\\&&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&u(c)&w(c)\\&c^k&v(c)\\&&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&&\\&c&\\&&1\end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix}1&1&0\\&1&0\\&&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&u(c)&w(c)\\&c^k&v(c)\\&&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&u(c)&w(c)\\&c^k&v(c)\\&&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1&0\\&1&0\\&&1\end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix}1&0&0\\&1&1\\&&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&u(c)&w(c)\\&c^k&v(c)\\&&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&u(c)&w(c)\\&c^k&v(c)\\&&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\&1&1\\&&1\end{bmatrix},$$

亦即当且仅当 $k=0$ 且 $u(c)=v(c)=0$, 从而

$$\zeta G=\left\{\begin{bmatrix}1&0&w(c)\\&1&0\\&&1\end{bmatrix}\,\middle|\, w(c)\in R\right\}\cong(R,+).$$

(iii) 任取 $h\zeta G\in\zeta(G/\zeta G)$, 其中 $h\in G$, 则 $[h,G]\in\zeta G$. 设 $h=\begin{bmatrix}1&x(c)&z(c)\\&c^l&y(c)\\&&1\end{bmatrix}$, 其中 $l\in\mathbb{Z}$, $x(c),\ y(c),\ z(c)\in R$. 从下式

$$\left[\begin{bmatrix}1&&\\&c&\\&&1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1&x(c)&z(c)\\&c^l&y(c)\\&&1\end{bmatrix}\right]=\begin{bmatrix}1&x(c)-cx(c)&c^{-l}x(c)y(c)-c^{1-l}x(c)y(c)\\&1&c^{-l}y(c)-c^{-1-l}y(c)\\&&1\end{bmatrix}\in\zeta G,$$

知 $x(c)=y(c)=0$. 又

$$\left[\begin{bmatrix}1&1&0\\&1&0\\&&1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1&0&z(c)\\&c^l&0\\&&1\end{bmatrix}\right]=\begin{bmatrix}1&c^l-1&0\\&1&0\\&&1\end{bmatrix}\in\zeta G,$$

故 $c^l-1=0$, 即 $l=0$. 这意味着

$$h=\begin{bmatrix}1&0&z(c)\\&1&0\\&&1\end{bmatrix}\in\zeta G.$$

因此 $\zeta(G/\zeta G)=1$.

(iv) 任取 $i,j\in\mathbb{Z},u,v,w,x,y,z\in R$, 根据基本的换位子公式:

$$\begin{aligned}&\left[\begin{bmatrix}1&u&w\\&c^i&v\\&&1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1&x&z\\&c^j&y\\&&1\end{bmatrix}\right]\\&=\begin{bmatrix}1&x(1-c^i)+u(c^j-1)&\begin{array}{c}uy(1-c^{-j}+c^{-i-j})+c^{-j}xy(1-c^i)\\+c^{-i}uv(1-c^{-j})-c^{-j}xv\end{array}\\&1&c^{-j}y(1-c^{-i})+c^{-i}v(c^{-j}-1)\\&&1\end{bmatrix},\end{aligned}$$

可得

$$\gamma_2 G \leqslant \left\{ \begin{bmatrix} 1 & (c-1)r_1 & r_3 \\ & 1 & (c-1)r_2 \\ & & 1 \end{bmatrix} \middle| r_1, r_2, r_3 \in R \right\}.$$

反过来, 注意到

$$\begin{bmatrix} 1 & (c-1)r_1 & r_3 \\ & 1 & (c-1)r_2 \\ & & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ & 1 & (c-1)r_2 \\ & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & (c-1)r_1 & 0 \\ & 1 & 0 \\ & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & r_3 \\ & 1 & 0 \\ & & 1 \end{bmatrix},$$

$$\left[\begin{bmatrix} 1 & r_3 & 0 \\ & 1 & 0 \\ & & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ & 1 & 1 \\ & & 1 \end{bmatrix} \right] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & r_3 \\ & 1 & 0 \\ & & 1 \end{bmatrix},$$

$$\left[\begin{bmatrix} 1 & & \\ & c & \\ & & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & -r_1 & 0 \\ & 1 & 0 \\ & & 1 \end{bmatrix} \right] = \begin{bmatrix} 1 & (c-1)r_1 & 0 \\ & 1 & 0 \\ & & 1 \end{bmatrix},$$

$$\left[\begin{bmatrix} 1 & & \\ & c^{-1} & \\ & & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ & 1 & -r_2 \\ & & 1 \end{bmatrix} \right] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ & 1 & (c-1)r_2 \\ & & 1 \end{bmatrix},$$

于是

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 & (c-1)r_1 & r_3 \\ & 1 & (c-1)r_2 \\ & & 1 \end{bmatrix} \middle| r_1, r_2, r_3 \in R \right\} \leqslant \gamma_2 G.$$

这就证明了

$$\gamma_2 G = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & (c-1)r_1 & r_3 \\ & 1 & (c-1)r_2 \\ & & 1 \end{bmatrix} \middle| r_1, r_2, r_3 \in R \right\}.$$

归纳假设 $\gamma_{m+1} G = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & (c-1)^m r_1 & (c-1)^{m-1} r_3 \\ & 1 & (c-1)^m r_2 \\ & & 1 \end{bmatrix} \middle| r_1, r_2, r_3 \in R \right\}$. 由于

$$\left[\begin{bmatrix} 1 & (c-1)^m r_1 & (c-1)^{m-1} r_3 \\ & 1 & (c-1)^m r_2 \\ & & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ & 1 & 0 \\ & & 1 \end{bmatrix} \right] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -(c-1)^m r_2 \\ & 1 & 0 \\ & & 1 \end{bmatrix},$$

$$\left[\begin{bmatrix} 1 & (c-1)^m r_1 & (c-1)^{m-1} r_3 \\ & 1 & (c-1)^m r_2 \\ & & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ & 1 & 1 \\ & & 1 \end{bmatrix} \right] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & (c-1)^m r_1 \\ & 1 & 0 \\ & & 1 \end{bmatrix},$$

$$\left[\begin{bmatrix}1 & (c-1)^m r_1 & (c-1)^{m-1}r_3\\ & 1 & (c-1)^m r_2\\ & & 1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ & c & 0\\ & & 1\end{bmatrix}\right]$$

$$=\begin{bmatrix}1 & (c-1)^{m+1}r_1 & (c-1)^{2m+1}(-c^{-1}r_1r_2)\\ & 1 & (c-1)^{m+1}(-c^{-1}r_2)\\ & & 1\end{bmatrix},$$

故 $\gamma_{m+2}G\leqslant\left\{\begin{bmatrix}1 & (c-1)^{m+1}x_1 & (c-1)^m x_3\\ & 1 & (c-1)^{m+1}x_2\\ & & 1\end{bmatrix}\middle| x_1,x_2,x_3\in R\right\}$.

另一方面, 从

$$\left[\begin{bmatrix}1 & (c-1)^m x_3 & 0\\ & 1 & 0\\ & & 1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ & 1 & 1\\ & & 1\end{bmatrix}\right]=\begin{bmatrix}1 & 0 & (c-1)^m x_3\\ & 1 & 0\\ & & 1\end{bmatrix},$$

$$\left[\begin{bmatrix}1 & & \\ & c & \\ & & 1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1 & -(c-1)^m x_1 & 0\\ & 1 & 0\\ & & 1\end{bmatrix}\right]=\begin{bmatrix}1 & (c-1)^{m+1}x_1 & 0\\ & 1 & 0\\ & & 1\end{bmatrix},$$

$$\left[\begin{bmatrix}1 & & \\ & c^{-1} & \\ & & 1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ & 1 & -(c-1)^m x_2\\ & & 1\end{bmatrix}\right]=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ & 1 & (c-1)^{m+1}x_2\\ & & 1\end{bmatrix},$$

可得 $\left\{\begin{bmatrix}1 & (c-1)^{m+1}x_1 & (c-1)^m x_3\\ & 1 & (c-1)^{m+1}x_2\\ & & 1\end{bmatrix}\middle| x_1,x_2,x_3\in R\right\}\leqslant\gamma_{m+2}G$. 因此

$$\gamma_{m+2}G=\left\{\begin{bmatrix}1 & (c-1)^{m+1}x_1 & (c-1)^m x_3\\ & 1 & (c-1)^{m+1}x_2\\ & & 1\end{bmatrix}\middle| x_1,x_2,x_3\in R\right\}.$$

这表明对正整数 m, 均有

$$\gamma_{m+1}G=\left\{\begin{bmatrix}1 & (c-1)^m x_1 & (c-1)^{m-1}x_3\\ & 1 & (c-1)^m x_2\\ & & 1\end{bmatrix}\middle| x_1,x_2,x_3\in R\right\}.$$

进一步地, $\bigcap\limits_{m=1}^{\infty}\gamma_m G=1$.

(v) 根据 (iv) 易知 $G/\gamma_2G\cong\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}$, 再根据 (i) 可得 $d(G)=3$.

(vi) 任取 $1\neq g\in G$, 存在正整数 m, 使得 $g\notin\gamma_{m+1}G$. 我们断言 $\overline{G}=G/\gamma_{m+1}G$ 的中心

$$\zeta\overline{G}=\left\{\begin{bmatrix}1 & 0 & \overline{r}\\ & 1 & 0\\ & & 1\end{bmatrix}\middle|\overline{r}\in R/I^{m-1}\right\}\cong(R/I^{m-1},+)=\mathbb{Z}r_0\oplus\mathbb{Z}r_1\oplus\cdots\oplus\mathbb{Z}r_{m-2},$$

是秩等于 $m-1$ 的自由 Abel 群.

事实上, 任取 $h \in \overline{G}$, 记 $h = \begin{bmatrix} 1 & \overline{x(c)} & \overline{z(c)} \\ & c^k & \overline{y(c)} \\ & & 1 \end{bmatrix}$, 其中 $k \in \mathbb{Z}$, $\overline{x(c)}$, $\overline{y(c)} \in R/I^m, \overline{z(c)} \in R/I^{m-1}$, 注意到 $\overline{G}$ 可由 $\begin{bmatrix} 1 & & \\ & c & \\ & & 1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1 & 1 & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{bmatrix}$, 和 $\begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & 1 \\ & & 1 \end{bmatrix}$ 的同态像生成, $h \in \zeta\overline{G}$ 当且仅当下列等式成立:

$$\begin{bmatrix} 1 & & \\ & c & \\ & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \overline{x(c)} & \overline{z(c)} \\ & c^k & \overline{y(c)} \\ & & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \overline{x(c)} & \overline{z(c)} \\ & c^k & \overline{y(c)} \\ & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & & \\ & c & \\ & & 1 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ & 1 & 0 \\ & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \overline{x(c)} & \overline{z(c)} \\ & c^k & \overline{y(c)} \\ & & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \overline{x(c)} & \overline{z(c)} \\ & c^k & \overline{y(c)} \\ & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ & 1 & 0 \\ & & 1 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ & 1 & 1 \\ & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \overline{x(c)} & \overline{z(c)} \\ & c^k & \overline{y(c)} \\ & & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \overline{x(c)} & \overline{z(c)} \\ & c^k & \overline{y(c)} \\ & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ & 1 & 1 \\ & & 1 \end{bmatrix},$$

亦即当且仅当 $k = 0$ 且 $\overline{x(c)} = \overline{y(c)} = 0$. 于是

$$\zeta\overline{G} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 & \overline{z(c)} \\ & 1 & 0 \\ & & 1 \end{bmatrix} \middle| \overline{z(c)} \in R/I^{m-1} \right\}.$$

因此 $\overline{G}$ 一定是无挠的. 这样 $\overline{G}$ 是 3 元生成的无挠幂零群. 根据引理 2.1 可知它是剩余有限 p- 群, 故存在 $g\gamma_{m+1} \notin N/\gamma_{m+1}G \lhd G/\gamma_{m+1}G$, 使得 $(G/\gamma_{m+1}G)/(N/\gamma_{m+1}G) \cong G/N$ 是有限 p- 群, 此时显然 $g \notin N$. 故 G 是剩余有限 p- 群.

(vii) 对于任意的 $\overline{g_1}, \overline{g_2} \in \overline{G} = G/\zeta G$, 根据 $[\overline{g_1}, \overline{g_2}] = \overline{[g_1, g_2]}$ 可知 $\gamma_2\overline{G} = \overline{\gamma_2 G}$. 归纳假设 $\gamma_m\overline{G} = \overline{\gamma_m G}$. 又 $\gamma_{m+1}\overline{G} = [\gamma_m\overline{G}, \overline{G}] = [\overline{\gamma_m G}, \overline{G}] = \overline{[\gamma_m G, G]} = \overline{\gamma_{m+1} G}$, 因此 $\gamma_{m+1}\overline{G} = \overline{\gamma_{m+1}G}$. 进一步地, 根据 (vi) 知 $\bigcap\limits_{m=1}^{\infty} \gamma_m\overline{G} = 1$.

(viii) 任取 $\overline{1} \neq \overline{g} \in \overline{G}$, 存在正整数 m, 使得 $\overline{g} \notin \gamma_{m+1}\overline{G} = \overline{\gamma_{m+1}G}$. 记 $\widetilde{G} = \overline{G}/\gamma_{m+1}\overline{G}$. 我们断言

$$\zeta\widetilde{G} = \zeta(\overline{G}/\gamma_{m+1}\overline{G}) = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & \widetilde{x_1} & 0 \\ & 1 & \widetilde{x_2} \\ & & 1 \end{bmatrix} \middle| \widetilde{x_1}, \widetilde{x_2} \in I^{m-1}/I^m \right\} \cong (I^{m-1}/I^m) \oplus (I^{m-1}/I^m).$$

事实上, 任取 $\widetilde{h} \in \widetilde{G}$, 记 $\widetilde{h} = \widetilde{\begin{bmatrix} 1 & x(c) & 0 \\ & c^k & y(c) \\ & & 1 \end{bmatrix}}$, 其中 $k \in \mathbb{Z}$, $x(c)$, $y(c) \in R$, 注意到 $\widetilde{G}$ 可由 $\widetilde{\begin{bmatrix} 1 & & \\ & c & \\ & & 1 \end{bmatrix}}$, $\widetilde{\begin{bmatrix} 1 & 1 & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{bmatrix}}$, $\widetilde{\begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & 1 \\ & & 1 \end{bmatrix}}$ 生成, $\widetilde{h} \in \zeta\widetilde{G}$ 当且仅当下列等式成立:

$$\widetilde{\begin{bmatrix} 1 & & \\ & c & \\ & & 1 \end{bmatrix}} \widetilde{\begin{bmatrix} 1 & x(c) & 0 \\ & c^k & y(c) \\ & & 1 \end{bmatrix}} = \widetilde{\begin{bmatrix} 1 & x(c) & 0 \\ & c^k & y(c) \\ & & 1 \end{bmatrix}} \widetilde{\begin{bmatrix} 1 & & \\ & c & \\ & & 1 \end{bmatrix}},$$

$$\widetilde{\begin{bmatrix}1&1&0\\&1&0\\&&1\end{bmatrix}}\widetilde{\begin{bmatrix}1&x(c)&0\\&c^k&y(c)\\&&1\end{bmatrix}}=\widetilde{\begin{bmatrix}1&x(c)&0\\&c^k&y(c)\\&&1\end{bmatrix}}\widetilde{\begin{bmatrix}1&1&0\\&1&0\\&&1\end{bmatrix}},$$

$$\widetilde{\begin{bmatrix}1&0&0\\&1&1\\&&1\end{bmatrix}}\widetilde{\begin{bmatrix}1&x(c)&0\\&c^k&y(c)\\&&1\end{bmatrix}}=\widetilde{\begin{bmatrix}1&x(c)&0\\&c^k&y(c)\\&&1\end{bmatrix}}\widetilde{\begin{bmatrix}1&0&0\\&1&1\\&&1\end{bmatrix}},$$

亦即当且仅当 $k=0$ 且 $x(c),y(c)\in(c-1)^{m-1}R$. 于是

$$\begin{aligned}\zeta\widetilde{G}&=\zeta(\overline{G}/\gamma_{m+1}\overline{G})\\&=\left\{\widetilde{\begin{bmatrix}1&(c-1)^{m-1}r_1&0\\&1&(c-1)^{m-1}r_2\\&&1\end{bmatrix}}\middle| r_1,r_2\in R\right\}\\&=\left\{\begin{bmatrix}1&\widetilde{x_1}&0\\&1&\widetilde{x_2}\\&&1\end{bmatrix}\middle|\widetilde{x_1},\widetilde{x_2}\in I^{m-1}/I^m\right\}\\&\cong(I^{m-1}/I^m)\oplus(I^{m-1}/I^m).\end{aligned}$$

根据引理 3.1 知 $\zeta\widetilde{G}$ 是秩为 2 的自由 Abel 群, 因此 $\widetilde{G}$ 一定是无挠的. 这样 $\widetilde{G}$ 是 3 元生成的无挠幂零群, 由引理 2.1 知 $\overline{G}$ 是剩余有限 p- 群.

(ix) 把 G 的 Fitting 子群记为 F. 显然 $U(3,R)\leqslant F$. 如果 $U(3,R)<F$, 由

$$F/U(3,R)\leqslant G/U(3,R)=\overline{\langle\alpha\rangle}$$

可知, 存在正整数 l, 使得

$$F=\langle\alpha^l,U(3,R)\rangle=\langle\alpha^l\rangle\ltimes U(3,R).$$

因 F 是 G 的所有幂零正规子群之积, 其元素 α^l 包含在 G 的有限个幂零正规子群的乘积里, 从而 F 是有限个幂零正规子群之积, 即 F 是幂零的.

对任意正整数 m, 通过计算可知,

$$\begin{aligned}\left[\begin{bmatrix}1&1&0\\&1&0\\&&1\end{bmatrix},{}_m\begin{bmatrix}1&&\\&c^l&\\&&1\end{bmatrix}\right]&=\left[\begin{bmatrix}1&c^l-1&0\\&1&0\\&&1\end{bmatrix},{}_{m-1}\begin{bmatrix}1&&\\&c^l&\\&&1\end{bmatrix}\right]\\&=\left[\begin{bmatrix}1&(c^l-1)^2&0\\&1&0\\&&1\end{bmatrix},{}_{m-2}\begin{bmatrix}1&&\\&c^l&\\&&1\end{bmatrix}\right]\\&=\cdots\cdots\end{aligned}$$

$$=\begin{bmatrix}1 & (c^l-1)^m & 0\\ & 1 & 0\\ & & 1\end{bmatrix}\neq 1,$$

矛盾. 因此 $F=U(3,R)$.

(x) 因 $G=\langle\alpha\rangle\ltimes U(3,R)$, $U(3,R)$ 是幂零类为 2 的幂零群, 故 G 的导长 $\leqslant 3$. 又 G 的下面两个换位子是不交换的:

$$\left[\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ & c & 0\\ & & 1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1 & 1 & 0\\ & 1 & 0\\ & & 1\end{bmatrix}\right]=\begin{bmatrix}1 & 1-c & 0\\ & 1 & 0\\ & & 1\end{bmatrix},$$

$$\left[\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ & c & 0\\ & & 1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ & 1 & 1\\ & & 1\end{bmatrix}\right]=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ & 1 & 1-c^{-1}\\ & & 1\end{bmatrix}.$$

因此 G 的导长等于 3.

在 $U(3,R)$ 里, 其中心与换位子群是重合的. 记 $\overline{G}=G/\zeta G$, $\overline{G}$ 的换位子群包含在 $U(3,R)/\zeta G$ 里, 它是 Abel 群, 于是 $\overline{G}$ 是亚 Abel 群, 因此 G 是 centre-by-metabelian 群. 证毕.

为了构造定理 1.2 的群例, 我们需要准确地找出有理数加群 $(\mathbb{Q},+)$ 的某类特殊子群的具有良好特征的生成元集合.

设 P 是全部素数的集合, π 是 P 的一个子集, π' 是 π 的补子集, 记

$$\mathbb{Q}_{\pi'}=\left\{\frac{n}{m}\,\middle|\, n\in\mathbb{Z}, m\text{是}\pi'-\text{数}\right\},$$

显然 $\mathbb{Q}_{\pi'}$ 是 π'- 可除的, 即对任意 $q\in\pi'$, $qQ_{\pi'}=Q_{\pi'}$, 这样 $Q_{\pi'}$ 肯定不是剩余有限 $q-$ 群. 另一方面, 对任意 $p\in\pi$, $Q_{\pi'}$ 肯定是剩余有限 p- 群.

引理 3.2 设 $Q_{\pi'}$ 如上述, 进一步地, 设 $\pi=\{p_1,p_2,p_3,\cdots\}$, $\pi'=\{q_1,q_2,q_3,\cdots\}$, 则有

(i) 当 π 和 π' 都是无限集时, $\mathbb{Q}_{\pi'}$ 由 $a_0=1, a_1=\frac{p_1}{q_1}, a_2=(\frac{p_1p_2}{q_1q_2})^2,\cdots,a_n=(\frac{p_1p_2\cdots p_n}{q_1q_2\cdots q_n})^n$, $\cdots$ 生成;

(ii) 当 $\pi=\{p_1,p_2,\cdots,p_u\}$ 时, 记 $k=p_1p_2\cdots p_u$, $\mathbb{Q}_{\pi'}$ 由 $a_0=1$, $a_1=\frac{k}{q_1}$, $a_2=(\frac{k}{q_1q_2})^2$, $\cdots$, $a_n=(\frac{k}{q_1q_2\cdots q_n})^n$, $\cdots$ 生成;

(iii) 当 $\pi'=\{q_1,q_2,\cdots,q_v\}$ 时, 记 $l=q_1q_2\cdots q_v$, $\mathbb{Q}_{\pi'}$ 由 $a_0=1$, $a_1=\frac{p_1}{l}$, $a_2=(\frac{p_1p_2}{l})^2$, $\cdots$, $a_n=(\frac{p_1p_2\cdots p_n}{l})^n$, $\cdots$ 生成;

(iv) 当 π 是空集时, $\mathbb{Q}_{\pi'}$ 由 $a_0=1$, $a_1=\frac{1}{q_1}$, $a_2=(\frac{1}{q_1q_2})^2$, $\cdots$, $a_n=(\frac{1}{q_1q_2\cdots q_n})^n$, $\cdots$ 生成;

(v) 当 π' 是空集时, 此时 $\mathbb{Q}_{\pi'}=\mathbb{Z}$, 它由 $a_0=1, a_1=a_2=\cdots=0$ 生成.

引理 3.2 的证明是容易的, 在此略去.

定理 3.2 设 $C=\langle c\rangle$ 是无限循环群, $R=\mathbb{Z}C$ 是 C 上的整群环, 以及 R 上的线性群

$$G=\left\{\begin{bmatrix}1 & u(c) & w(c)\\ & c^i & v(c)\\ & & 1\end{bmatrix}\ \middle|\ i\in\mathbb{Z},u(c),v(c),w(c)\in R\right\}.$$

设 π 是任意多个素数的集合, K 是下列满同态

$$\varepsilon:(R,+)\longrightarrow(\mathbb{Q}_{\pi'},+),$$
$$r_i\longrightarrow a_i,\quad 其中\ i\geqslant 0$$

的核, r_i 和 a_i 的意义分别按照引理 3.1 和引理 3.2, 即 $K=\mathrm{Ker}\varepsilon$, $R/K\cong\mathbb{Q}_{\pi'}$. 记

$$N=\left\{\begin{bmatrix}1 & 0 & x\\ & 1 & 0\\ & & 1\end{bmatrix}\middle| x\in K\right\},$$

N 是 G 的中心子群. 构造商群 $G(\pi)=G/N$, 则有

(i) $\zeta G(\pi)=\left\{\left[\begin{smallmatrix}1 & 0 & \omega\\ & 1 & 0\\ & & 1\end{smallmatrix}\right]\middle|\omega\in\mathbb{Q}_{\pi'}\right\}\cong\mathbb{Q}_{\pi'}$;

(ii) $\zeta(G(\pi)/\zeta G(\pi))=1$;

(iii) $G(\pi)$ 是 3 元生成的 centre-by-matabelian 群;

(iv) $G(\pi)$ 是剩余有限 p- 群当且仅当 $p\in\pi$.

证 沿着前面的思路, 我们仍然通过矩阵计算来完成证明.

(i) 任取 $\overline{g}\in G(\pi)$, 设 $\overline{g}=\overline{\left[\begin{smallmatrix}1 & u(c) & w(c)\\ & c^i & v(c)\\ & & 1\end{smallmatrix}\right]}$, 其中 $i\in\mathbb{Z}$, $u(c)$, $v(c)$, $w(c)\in R$. 那么 $g\in\zeta G(\pi)$ 当且仅当下列等式成立:

$$\overline{\begin{bmatrix}1 & & \\ & c & \\ & & 1\end{bmatrix}}\cdot\overline{\begin{bmatrix}1 & u(c) & w(c)\\ & c^i & v(c)\\ & & 1\end{bmatrix}}=\overline{\begin{bmatrix}1 & u(c) & w(c)\\ & c^i & v(c)\\ & & 1\end{bmatrix}}\cdot\overline{\begin{bmatrix}1 & & \\ & c & \\ & & 1\end{bmatrix}},$$

$$\overline{\begin{bmatrix}1 & 1 & 0\\ & 1 & 0\\ & & 1\end{bmatrix}}\cdot\overline{\begin{bmatrix}1 & u(c) & w(c)\\ & c^i & v(c)\\ & & 1\end{bmatrix}}=\overline{\begin{bmatrix}1 & u(c) & w(c)\\ & c^i & v(c)\\ & & 1\end{bmatrix}}\cdot\overline{\begin{bmatrix}1 & 1 & 0\\ & 1 & 0\\ & & 1\end{bmatrix}},$$

$$\overline{\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ & 1 & 1\\ & & 1\end{bmatrix}}\cdot\overline{\begin{bmatrix}1 & u(c) & w(c)\\ & c^i & v(c)\\ & & 1\end{bmatrix}}=\overline{\begin{bmatrix}1 & u(c) & w(c)\\ & c^i & v(c)\\ & & 1\end{bmatrix}}\cdot\overline{\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ & 1 & 1\\ & & 1\end{bmatrix}},$$

亦即当且仅当 $i=0$ 且 $u(c)=v(c)=0$, 从而

$$\zeta\overline{G}=\left\{\begin{bmatrix}1 & 0 & \overline{w(c)}\\ & 1 & 0\\ & & 1\end{bmatrix}\middle|\ \overline{w(c)}\in\mathbb{Q}_{\pi'}\right\}\cong\mathbb{Q}_{\pi'}.$$

(ii) 注意到 $G(\pi)/\zeta G(\pi)\cong G/\zeta G$. 根据定理 3.1 (iii) 可知 $\zeta(G(\pi)/\zeta G(\pi))=1$.

(iii) 又注意到 $N \leqslant \gamma_2 G$, $\gamma_2 G(\pi) \leqslant \overline{\gamma_2 G}$. 由于

$$G(\pi)/\gamma_2 G(\pi) \cong G/\gamma_2 G \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z},$$

故 $d(G(\pi)) = 3$, 于是 $G(\pi)$ 是 3 元生成的. 根据 (ii) 以及定理 3.1(x) 可知 $G(\pi)/\zeta G(\pi)$ 是亚 Abel 群, 因此 $G(\pi)$ 是 3 元生成的 centre-by-matabelian 群.

(iv) 注意到 $\zeta G(\pi)$ 同构于 $\mathbb{Q}_{\pi'}$, 这样当 $p \notin \pi$, 即 $p \in \pi'$ 时, $\zeta G(\pi)$ 肯定不是剩余有限 p- 群, 随之 $G(\pi)$ 也不是剩余有限 p- 群.

当 $p \in \pi$ 时, 任取 $1 \neq \overline{g} = \overline{\left[\begin{smallmatrix} 1 & u & w \\ & c^i & v \\ & & 1 \end{smallmatrix}\right]} \in G(\pi)$, 若 $\overline{g} \notin \zeta G(\pi)$, 则 $\overline{g}$ 在 $G(\pi)/\zeta G(\pi) = G/\zeta G$ 下的像不是平凡的, 根据定理 3.1 知 $G/\zeta G$ 是剩余有限 p- 群, 于是存在 $M \lhd G(\pi)$, 使得 $\overline{g} \notin M$, 并且 $G(\pi)/M$ 是有限 p- 群.

若 $1 \neq \overline{g} \in \zeta G(\pi)$, 此时存在 $0 \neq w \in \mathbb{Q}_{\pi'}$, 使得 $\overline{g} = \left[\begin{smallmatrix} 1 & 0 & w \\ & 1 & 0 \\ & & 1 \end{smallmatrix}\right]$. 注意到 $\mathbb{Q}_{\pi'}$ 是剩余有限 p- 群, 存在正整数 n, 使得 $w \notin p^n \mathbb{Q}_{\pi'}$, 从而 $\overline{g} \notin \left\{ \left[\begin{smallmatrix} 1 & 0 & p^n u \\ & 1 & 0 \\ & & 1 \end{smallmatrix}\right] \middle| u \in \mathbb{Q}_{\pi'} \right\}$.

记 $Z = \left\{ \left[\begin{smallmatrix} 1 & 0 & p^n u \\ & 1 & 0 \\ & & 1 \end{smallmatrix}\right] \middle| u \in \mathbb{Q}_{\pi'} \right\}$, 它是 $G(\pi)$ 的中心子群, 并且 $\zeta G(\pi)/Z \cong \mathbb{Q}_{\pi'}/p^n \mathbb{Q}_{\pi'} = \mathbb{Z}_{p^n}$.

现在回到满同态 ε, 对上述给定的素数 p 和正整数 n, p 在 $\pi = \{p_1, p_2, p_3, \cdots\}$ 里具有一个固定的位置, 这样对充分大的 k, $\varepsilon(r_k) = a_k$, $\varepsilon(r_{k+1}) = a_{k+1}$, $\varepsilon(r_{k+2}) = a_{k+2}$, $\cdots$ 都属于 $p^n \mathbb{Q}_{\pi'}$. 根据定理 3.1,

$$\gamma_{k+2} G = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_3 \\ & 1 & x_2 \\ & & 1 \end{bmatrix} \middle| x_1, x_2 \in I^{k+1}, x_3 \in I^k \right\},$$

并且 $\gamma_{k+2} G$ 在 $G(\pi)$ 里的像为

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 & x_1 & \varepsilon(x_3) \\ & 1 & x_2 \\ & & 1 \end{bmatrix} \middle| x_1, x_2 \in I^{k+1}, x_3 \in I^k \right\}.$$

显然

$$L = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & x_1 & p^n u \\ & 1 & x_2 \\ & & 1 \end{bmatrix} \middle| x_1, x_2 \in I^{k+1}, u \in \mathbb{Q}_{\pi'} \right\}$$

是 $G(\pi)$ 的正规子群, 且 $G(\pi)/L$ 是 3 元生成的幂零群, 其挠子群是 p^n 阶循环群. 注意到 $\overline{g}$ 在 $G(\pi)/L$ 里的像是一个非平凡 p- 元. 根据引理 2.1 知, 存在 $\overline{g}L \notin K/L \lhd G(\pi)/L$, 使得 $(G(\pi)/L)/(K/L) = G(\pi)/K$ 是有限 p- 群. 此时显然 $\overline{g} \notin K$, 这样 $G(\pi)$ 是剩余有限 p- 群. 证毕.

综合定理 3.1 和定理 3.2, 我们完成了定理 1.2 的证明.

参 考 文 献

[1] Robinson D J S. A course in the theory of groups (Second Edition) [M]. New York: Springer-Verlay, 1996.

[2] Robinson D J S. Finiteness conditions and generalized soluble groups, 2 vols [M]. New York: Springer-Verlag, 1972.

[3] Lennox J C, Robinson D J S. The theory of infinite soluble groups [M]. New York: Oxford University Press, 2004.

[4] Segal D. Polycyclic groups [M]. New York: Cambridge University Press, 1983.

[5] Robinson D J S. Residual properties of some classes of infinite soluble groups [J]. *Proc LMS*, 1968, 18(3):495–520.

[6] 刘合国. 无限可解群全形的剩余有限性质 [J]. 中国科学, 2002, 32(7):650–656.

[7] 刘合国. 无限可解群的强剩余有限性 [J]. 数学年刊 A 辑, 2002, 23(3):321–324.

[8] Robinson D J S, Russo A, Vincenzi G. On groups whose sungroups are closed in the profinite topology [J]. *J Pure and Appl Algebra*, 2009, 213:421–429.

[9] Robinson D J S, Russo A, Vincenzi G. On the theory of generalized FC-groups [J]. *J Algebra*, 2011, 326:218–226.

[10] Hall P. On the finiteness of certain soluble groups [J]. *Proc LMS*, 1959, 9(3):595–622.

[11] Roseblade J E. Group rings of polycyclic groups [J]. *J Pure Appl Algebra*, 1973, 3(4):307–328.

[12] Jategaonkar A V. Integral group rings of polycyclic-by-finite groups [J]. *J Pure Appl Algebra*, 1974, 4(3):337–343.

[13] Baer R. Uberauflosbare gruppen [J]. *Abh Math Sem Univ Hamburg*, 1959, 23:11–28.

[14] Robinson D J S. A theorem on finitely generated hyperabelian groups [J]. *Invent Math*, 1970, 10(1):38–43.

[15] Seksenbaev K. On the theory of polycyclic groups [J]. *Algebra I Logika Sem*, 1965, 4(3):79–83.

[16] Robinson D J S. Intersections of primary powers of a groups [J]. *Mathematische Zeitschrift*, 1972, 124(2):119–132.

[17] 雒晓良, 刘合国, 徐行忠等. 一类多重循环群的剩余有限性质 [J]. 数学年刊 A 辑, 2021, 42(1):33–46.

[18] Luo X L, Liu H G. On the residual finiteness of a class of polycyclic groups II [J]. *Front Math China*, 2023, 18(3):707–716.

[19] 刘合国, 张继平, 徐行忠等. 多重循环群的一个注记 [J]. 数学学报, 2023, 66(3):399–404.

[20] Prasolov V V. Polynomials [M]. Berlin: Springer-Verlag, 2004.

[21] Liao J, Liu H G, Luo X L, et al. On the residual finiteness of a class of infinte soluble groups [J]. *Algebra Colloquium*, 2023, 30(1):155–164.

[22] Robinson D J S. On infinte groups whose finite quotients have restricted prime divisors [J]. *Inter J Group Theory*, 2021, 10(2):75–88.

[23] 刘合国, 赵静. 无限循环群的整群环上的两个矩阵群 [J]. 数学学报, 2023, 66(4):629–642.

[24] Gruenberg K W. Residual properties of infinite soluble groups [J]. *Proc LMS*, 1957, 7(3):29–62.

[25] 华罗庚. 数论导引 [M]. 北京: 科学出版社, 1957.

[26] Broue M. Some topics in algebra [M]. Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 2014.

On Seksenbaev-Robinson Theorem

LIU Heguo[1] ZHANG Jiping[2] ZHAO Jing[3] XU Xingzhong[4] LIAO Jun[4]

[1]School of Mathematics and Statistics, Hainan University, Haikou 570228, China.
E-mail: ghliu@hainanu.edu.cn

[2]School of Mathematical Sciences, Peking University, Beijing 100871, China.
E-mail: jzhang@pku.edu.cn

[3]Corresponding author. School of Mathematics and Statistics, Hainan University, Haikou 570228, China; Key Laboratory of Engineering Modeling and Statistical Computation of Hainan Province, Hainan University, Haikou 570228, China.
E-mail: jzhao0@163.com

[4]School of Mathematics and Statistics, Hubei University, Wuhan 430062, China.
E-mail: xuxingzhong407@126.com; jliao@hubu.edu.cn

Abstract The residually finite group is also known as finitely approximable group, and its properties are often determined by the properties of its finite quotient groups. The Seksenbaev theorem states that if a polycyclic group G is a residually finite p-group for infinitely many primes p, then G is a finitely generated torsion-free nilpotent group. Robinson generalizes this theorem to solvable groups: If a solvable group G of finite rank is a residually finite

p-group for infinitely many primes p, then it is a torsion-free nilpotent group. These are two classical results in infinite solvable groups. This paper proves two residual finiteness theorems for infinite solvable groups. The results of this paper improve the Seksenbaev-Robinson theorem.

Keywords Solvable group, Residual finiteness, Irreducible polynomial, Integral group ring, Lower central series

2000 MR Subject Classification 20E26, 20F14, 20F16

The English translation of this paper will be published in

Chinese Journal of Contemporary Mathematics, Vol. 45 No. 2, 2024

by ALLERTON PRESS, INC., USA