数 学 年 刊 A 辑
2024, 45(2):205–214
DOI: 10.16205/j.cnki.cama.2024.0014

平坦环上受迫 Navier-Stokes 方程的几乎周期响应解*

李合朋[1]

提要 本文证明了平坦环 $\mathbb{T}_\Gamma^d$ 上几乎周期的小外力作用下的不可压 Navier-Stokes 方程存在小振幅的几乎周期响应解.

关键词 Navier-Stokes 方程, 几乎周期解, 不动点定理
MR (2000) 主题分类 37J40, 35Q30, 37C25
中图法分类 O175.29
文献标志码 A
文章编号 1000-8314(2024)02-0205-10

§1 引 言

考虑平坦环 $\mathbb{T}_\Gamma^d := \mathbb{R}^d/\Gamma$ 上不可压缩流体的 Navier-Stokes 方程:

$$\begin{cases}\partial_t u - \triangle u + u\cdot\nabla u + \nabla p = \varepsilon f(t,x),\\ \mathrm{div} u = 0\end{cases}\tag{1.1}$$

其中小参数 $\varepsilon\in(0,1)$, f 是一个关于时间解析的几乎周期强迫项, 并带有如定义 1.1 一样的频率的 $\omega\in l^\infty$, 所求未知量是速度场 $u=(u_1,\cdots,u_d):\mathbb{R}\times\mathbb{T}_\Gamma^d\to\mathbb{R}^d$ 和压力 $p:\mathbb{R}\times\mathbb{T}_\Gamma^d\to\mathbb{R}$, 这里 Γ 是 $\mathbb{R}^d$ 的一个格, 即

$$\Gamma := \Big\{\sum_{i=1}^{\mathrm{d}} a_i \mathrm{v}_i,\quad a_i\in\mathbb{Z}\Big\},\quad \mathrm{v}_1,\cdots,\mathrm{v}_d\in\mathbb{R}^d.$$

通过重新缩放空间变量, Navier-Stokes 方程 (1.1) 可化为 $\mathbb{T}^d$ 上的方程

$$\begin{cases}\partial_t u - \triangle_\Gamma u + u\cdot\nabla_\Gamma u + \nabla_\Gamma p = \varepsilon f(t,x),\\ \mathrm{div}_\Gamma u = 0,\end{cases}\tag{1.2}$$

此处 Δ_Γ 为标准环上的非迷向 Laplacian 算子

$$\Delta_\Gamma = \sum_{a,b=1}^{d}\partial_{x^a}[\mathrm{W}^{\mathrm{T}}\mathrm{W}]_{a,b}\partial_{x^b} = \sum_{a,b,s=1}^{d}\mathrm{W}_{s,a}\mathrm{W}_{s,b}\partial_{x^a x^b},$$

其中 $\mathrm{W}:=\mathrm{V}^{-\mathrm{T}}, \mathrm{V}=(\mathrm{v}_1,\cdots,\mathrm{v}_d)$, 算子 $-\Delta_\Gamma$ 的特征值为 $\chi_j = |\mathrm{W}j|^2\sim|j|^2, j\in\mathbb{Z}^d$, 而 $|\cdot|$ 表示 $\mathbb{R}^d$ 上的欧氏内积. 对于速度场 $u=(u_1,\cdots,u_d):\mathbb{R}\times\mathbb{T}^d\to\mathbb{R}^d$ 和压力 $p:\mathbb{R}\times\mathbb{T}^d\to\mathbb{R}$,

本文 2022 年 11 月 30 日收到, 2023 年 8 月 17 日收到修改稿.
[1]四川文理学院数学学院, 四川 达州 635000. E-mail:hpli15@fudan.edu.cn
*本文受到四川文理学院博士基金 (No.2019BS008Z) 的资助.

有

$$\nabla_\Gamma u = \mathrm{W}(\nabla u), \quad \nabla_\Gamma p = \mathrm{W}(\nabla p), \quad \mathrm{div}_\Gamma = \mathrm{div}(\mathrm{W}^{\mathrm{T}} u). \tag{1.3}$$

此外, 还假设 f 时空均值为零, 即

$$\int_{\mathbb{T}^\infty \times \mathbb{T}^d} f(\theta, x)\mathrm{d}\theta \mathrm{d}x = 0, \tag{1.4}$$

见引理 2.2.

本文目的是要证明方程 (1.2) 几乎周期解的存在性, 具体说来就是在 $\omega \in l^\infty$ 满足 diophantine 条件下, 对充分小的 ε, 方程 (1.2) 有解析的几乎周期解 $u_\omega(t,x) = U(\omega t, x)$, $p_\omega(t,x) = P(\omega t, x)$, 其中 $U: \mathbb{T}^\infty \times \mathbb{T}^d \to \mathbb{R}^n, P: \mathbb{T}^\infty \times \mathbb{T}^d \to \mathbb{R}$, $U = O(\varepsilon), P = O(\varepsilon)$.

探究无耗散项的偏微分方程的几乎周期解会遇到令人头痛的小分母现象, 而 KAM 理论是处理小分母问题的最有力工具, 其中 Kuksin [1], Wayne [2] 和 Bourgain [3] 的突破性工作对色散偏微分方程和双曲偏微分方程的几乎周期解的研究取得了丰硕的成果, 有关详细信息, 建议查看最近的评论 [4]. 在构造几乎周期性解时, KAM 方法变得更加复杂, 对于自治的偏微分方程可参见文 [5–10], 具有几乎周期性外力的偏微分方程可参见文 [11–13].

与上述方程不同的是不可压 Navier-Stokes 方程为一个抛物方程, 其耗散项的存在使得在构造几乎周期解时没有小分母困扰. Montalto 在文 [14] 中利用不动点定理阐明了受迫 Navier-Stokes 方程在 $\mathbb{T}^d$ 上有拟周期解. 值得一提的是, 许多学者研究了受迫 Navier-Stokes 方程分别在有界区域 [15–16] 和无界区域 [17–18] 上的时间周期解. 在本文中, 首先引入一个新的函数空间, 并重新考虑在平坦环上的 Leray 投射算子; 进而构造了压缩映射; 然后借助于不动点理论证明了在平坦环上受迫 Navier-Stokes 方程存在几乎周期解.

为更准确地阐述主要结果, 下面引入一些记号, 设 $u(x) = (u_1(x), \cdots, u_n(x))$ 是 $\mathbb{T}^d$ 上的光滑函数, 可表示为

$$u(x) = \sum_{j \in \mathbb{Z}^d} \widehat{u}(j)\mathrm{e}^{\mathrm{i}j\cdot x}, \quad \widehat{u}(j) = \frac{1}{(2\pi)^d}\int_{\mathbb{T}^d} u(x)\mathrm{e}^{\mathrm{i}j\cdot x}\mathrm{d}x. \tag{1.5}$$

对 $\forall s \geqslant 0$, $H^s(\mathbb{T}^d, \mathbb{R}^n)$ 表示关于函数 $u: \mathbb{T}^d \to \mathbb{R}^n$ 的标准 sobolev 空间, 其上的模为

$$\|u\|_s = \Big(\sum_{j \in \mathbb{Z}^d} |\widehat{u}(j)|\langle j\rangle^{2s}\Big)^{\frac{1}{2}}, \quad \langle j\rangle = \max\{1, |j|\}, \tag{1.6}$$

同时定义了零均值函数的 sobolev 空间

$$H_0^s(\mathbb{T}^d, \mathbb{R}^n) := \Big\{u \in H^s(\mathbb{T}^d, \mathbb{R}^n): \int_{\mathbb{T}^d} u(x)\mathrm{d}x = 0\Big\}. \tag{1.7}$$

对于 $\eta > 0$, 具有有限支集的无穷整数向量集合定义如下:

$$\mathbb{Z}_*^\infty := \Big\{\ell \in \mathbb{Z}^{\mathbb{N}}: |\ell|_\eta := \sum_{i \in \mathbb{Z}} i^\eta |\ell_i| < \infty\Big\}, \tag{1.8}$$

注意使得 $\ell_i \neq 0$ 的下标 $i \in \mathbb{N}$ 只有有限多个, 并且 $\mathbb{Z}_*^\infty$ 不依赖于 η.

定义 1.1 给定具有有理无关的分量 $\omega \in [1,2]^{\mathbb{N}}$ 和 Banach 空间 $(X, \|\cdot\|_X)$, 设 $F(t): \mathbb{R} \to \mathbb{X}$ 是频率为 ω 的时间上几乎周期的函数, 并且在带 $\sigma > 0$ 上解析, 即

$$F(t) = \sum_{\ell \in \mathbb{Z}_*^\infty} \widehat{F}(\ell)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\ell\cdot\omega t},$$

使得

$$\widehat{F}(\ell) \in X, \quad \forall \ell \in \mathbb{Z}_*^\infty$$

且

$$\|F\|_\sigma := \sum_{\ell \in \mathbb{Z}_*^\infty} \|\widehat{F}(\ell)\|_X \mathrm{e}^{\sigma|\ell|_\eta} < \infty.$$

为对频率参数施加一些限制, 参照文 [12, 19–20] 给出如下一些定义.

定义 1.2 给定 $\gamma \in (0,1)$, D_γ 为 Diophantine 频率的集合, 即

$$D_\gamma = \Big\{\omega \in [1,2]^{\mathbb{N}} : |\omega \cdot \ell| \geqslant \prod_{i \in \mathbb{N}} \frac{\gamma}{1+|\ell_i|^2 i^2}, \forall \ell \in \mathbb{Z}_*^\infty \backslash \{0\}\Big\}. \tag{1.9}$$

注 1.1 由文 [19] 中的引理 4.1, 可知存在一常数 C_γ, 使得

$$\mathbb{P}([1,2]^{\mathbb{N}} \backslash D_\gamma) \leqslant C_\gamma.$$

在加厚无穷环 $\mathbb{T}_\sigma^\infty$ 上的解析函数的基础上研究几乎周期函数是一种很自然的方法, 其中

$$\theta = (\theta_j)_{j \in \mathbb{N}}, \quad \theta_j \in \mathbb{C}, \quad \mathrm{Re}(\theta_j) \in \mathbb{T}, \quad |\mathrm{Im}(\theta_j)| \leqslant \sigma \langle j \rangle^\eta.$$

给定 Banach 空间 $(X, \|\cdot\|_X)$, 由绝对收敛的傅里叶级数 $\mathbb{T}_\sigma^\infty \to X$,

$$u(\theta) = \sum_{\ell \in \mathbb{Z}_*^\infty} \widehat{u}(\ell) \mathrm{e}^{\mathrm{i}\ell \cdot \theta}, \quad \widehat{u}(\ell) \in X,$$

构成的空间记为 $\mathcal{F}$.

定义 1.3 设 $(X, \|\cdot\|_X)$ 是 Banach 空间, $\sigma > 0$, 由实解析函数 $u : \mathbb{T}_\sigma^\infty \to X$ 构成的空间定义为:

$$\mathcal{H}(\mathbb{T}_\sigma^\infty, X) = \Big\{u(\theta) = \sum_{\ell \in \mathbb{Z}_*^\infty} \widehat{u}(\ell) \mathrm{e}^{\mathrm{i}\ell \cdot \theta} \in \mathcal{F}, \|u\|_{\sigma,X} = \sum_{\ell \in \mathbb{Z}_*^\infty} \|\widehat{u}(\ell)\|_X \mathrm{e}^{\sigma|\ell|_\eta} < \infty\Big\}. \tag{1.10}$$

本文特别关心 $X = H^s(\mathbb{T}^{\mathrm{d}}, \mathbb{R}^n)$ 时的情形, 此时 $u \in \mathcal{H}(\mathbb{T}_\sigma^\infty, H^s(\mathbb{T}^{\mathrm{d}}, \mathbb{R}^n))$, 则

$$u = \sum_{\ell \in \mathbb{Z}_*^\infty} \widehat{u}(\ell, x) \mathrm{e}^{\mathrm{i}\ell \cdot \theta} = \sum_{(\ell,n) \in \mathbb{Z}_*^\infty \times \mathbb{Z}^{\mathrm{d}}} \widehat{u}(\ell, n) \mathrm{e}^{\mathrm{i}\ell \cdot \theta} \mathrm{e}^{\mathrm{i}n \cdot x}. \tag{1.11}$$

定义 1.1 中的几乎周期函数就是空间 $\mathcal{H}(\mathbb{T}_\sigma^\infty, H^s\ (\mathbb{T}^{\mathrm{d}}, \mathbb{R}^n))$ 中的函数在 $\theta = \omega t$ 时的情形, 相应的模 $\|\cdot\|_{\sigma,X}$ 可表示为 $\|\cdot\|_{\sigma,s}$.

定理 1.1 令 $\sigma > 0, \rho > 0, s > \frac{d}{2} + 1, \omega \in D_\gamma$, 并设强迫项 $f \in \mathcal{H}(\mathbb{T}_{\sigma+\rho}^\infty, H^s(\mathbb{T}^{\mathrm{d}}, \mathbb{R}^n))$ 满足 (1.4), 则存在充分小的 $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(f, s, d) \in (0,1)$ 和足够大的常数 $C = C(f, \rho, \gamma, s, d) > 0$, 使得对任意的 $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$, 都满足条件

$$\int_{\mathbb{T}^\infty \times \mathbb{T}^d} U(\theta, x) \mathrm{d}\theta \mathrm{d}x = 0, \quad \int_{\mathbb{T}^d} P(\theta, x) \mathrm{d}x = 0, \quad \forall \theta \in \mathbb{T}^\infty$$

的 $U, P \in \mathcal{H}(\mathbb{T}_\sigma^\infty, H^s(\mathbb{T}^{\mathrm{d}}, \mathbb{R}^n))$, 并使得 $(u_\omega(t,x), p_\omega(t,x)) := (U(\omega t, x), P(\omega t, x))$ 是方程 (1.2) 的解, 满足

$$\|U\|_{\sigma,s},\ \|P\|_{\sigma,s} \leqslant C\varepsilon.$$

注 1.2 若强迫项关于 x 均值是零, i.e.

$$\int_{\mathbb{T}^d} f(\theta,x)\mathrm{d}x = 0, \quad \forall \theta \in \mathbb{T}^\infty, \tag{1.12}$$

则对于任意的频率 $\omega \in l^\infty$ 都有同样的结论, 并且 $U(\theta,x)$ 满足

$$\int_{\mathbb{T}^d} U(\theta,x)\mathrm{d}x = 0, \quad \forall \theta \in \mathbb{T}^\infty.$$

§2 函数空间

本节收集了将用于证明主要定理的一些标准的技术引理, 下面是标准的代数引理.

引理 2.1 给定 $s > \frac{\mathrm{d}}{2}, \sigma > 0$, 若 $u, v \in \mathcal{H}(\mathbb{T}_\sigma^\infty, H^s(\mathbb{T}^{\mathrm{d}}, \mathbb{R}^n))$, 则 $uv \in \mathcal{H}(\mathbb{T}_\sigma^\infty, H^s(\mathbb{T}^{\mathrm{d}}, \mathbb{R}^n))$, 并且

$$\|uv\|_{\sigma,s} \leqslant C(s)\|u\|_{\sigma,s}\|v\|_{\sigma,s},$$

其中常数 C 依赖于 s.

证 我们知

$$u(\theta,x)v(\theta,x) = \sum_{\ell,k\in\mathbb{Z}_*^\infty} \widehat{u}(\ell-k,x)\widehat{v}(k,x)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\ell\cdot\theta}.$$

于是

$$\|uv\|_{\sigma,s} \leqslant \sum_{\ell,k\in\mathbb{Z}_*^\infty} \|\widehat{u}(\ell-k,x)\widehat{v}(k,x)\|_s \mathrm{e}^{\sigma|\ell|_\eta} \leqslant C(s)\sum_{\ell,k\in\mathbb{Z}_*^\infty} \|\widehat{u}(\ell-k,x)\|_s\|\widehat{v}(k,x)\|_s \mathrm{e}^{\sigma|\ell|_\eta}.$$

由三角不等式可得 $\mathrm{e}^{\sigma|\ell|_\eta} \leqslant \mathrm{e}^{\sigma|\ell-k|_\eta}\mathrm{e}^{\sigma|k|_\eta}$,

$$\|uv\|_{\sigma,s} \leqslant C(s)\sum_{\ell,k\in\mathbb{Z}_*^\infty} \|\widehat{u}(\ell-k,x)\|_s \mathrm{e}^{\sigma|\ell-k|_\eta}\|\widehat{v}(k,x)\|_s \mathrm{e}^{\sigma|k|_\eta} \leqslant C(s)\|u\|_{\sigma,s}\|v\|_{\sigma,s}. \tag{2.1}$$

引理 2.2 (见 [20, 引理 2.6]) 设 $u \in \mathcal{H}(\mathbb{T}_\sigma^\infty, H^s(\mathbb{T}^{\mathrm{d}}, \mathbb{R}^n))$, 则

$$\int_{\mathbb{T}^\infty} f(\theta)\mathrm{d}\theta = \lim_{\mathrm{N}\to\infty} \frac{1}{(2\pi)^{\mathrm{N}}}\int_{\mathbb{T}^{\mathrm{N}}} \mathrm{u}(\theta)\mathrm{d}\theta_1\cdots\mathrm{d}\theta_{\mathrm{N}} = \widehat{\mathrm{u}}(0). \tag{2.2}$$

此外, 对 $\forall \ell \in \mathbb{Z}_*^\infty \backslash \{0\}$ 都有

$$\widehat{u}(\ell) = \int_{\mathbb{T}^\infty} u(\theta)\mathrm{e}^{\mathrm{i}j\cdot\theta}\mathrm{d}\theta = \lim_{N\to\infty}\frac{1}{(2\pi)^N}\int_{\mathbb{T}^N} u(\theta)\mathrm{e}^{\mathrm{i}j\cdot\theta}\mathrm{d}\theta_1\cdots\mathrm{d}\theta_N. \tag{2.3}$$

对 $\forall u \in L^2(\mathbb{T}^d, \mathbb{R}^n)$, 定义正交投影 π_0 和 $\pi_0^\perp$ 如下:

$$\pi_0 u := \frac{1}{(2\pi)^d}\int_{\mathbb{T}^d} u(x)\mathrm{d}x = \widehat{u}(0) \quad 和 \quad \pi_0^\perp u := u - \pi_0 u. \tag{2.4}$$

于是, 对每个函数 $u \in L^2(\mathbb{T}_\sigma^\infty, L^2(\mathbb{T}^{\mathrm{d}}, \mathbb{R}^n))$ 可分解如下:

$$\begin{aligned} u(\theta,x) &= u_0(\theta) + u_\perp(\theta,x), \quad u_0(\theta) := \pi_0 u(\theta) = \sum_{\ell\in\mathbb{Z}_*^\infty} \widehat{u}(\ell,0)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\ell\cdot\theta}, \\ u_\perp(\theta,x) &:= \pi_0^\perp u(\theta,x) = \sum_{\ell\in\mathbb{Z}_*^\infty}\sum_{j\in\mathbb{Z}^d\backslash\{0\}} \widehat{u}(\ell,j)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\ell\cdot\theta}\mathrm{e}^{\mathrm{i}j\cdot x}. \end{aligned} \tag{2.5}$$

显然, 若 $u\in\mathcal{H}(\mathbb{T}^\infty_\sigma,H^s(\mathbb{T}^{\rm d},\mathbb{R}^n)),s\geqslant 0$, 则

$$\begin{aligned}&u_0\in\mathcal{H}(\mathbb{T}^\infty_\sigma,\mathbb{R}^n)\quad\text{和}\quad\|u_0\|_\sigma\leqslant\|u\|_{\sigma,0}\leqslant\|u\|_{\sigma,s}\ ,\\&u_\perp\in\mathcal{H}(\mathbb{T}^\infty_\sigma,H^s_0(\mathbb{T}^{\rm d},\mathbb{R}^n))\quad\text{和}\quad\|u_\perp\|_{\sigma,s}\leqslant\|u\|_{\sigma,s}\ ,\\&\|u\|_{\sigma,s}=\|u_0\|_\sigma+\|u_\perp\|_{\sigma,s}.\end{aligned}\tag{2.6}$$

§3　Leray 投射算子

引入零散度的向量场空间

$$\mathcal{D}_0(\mathbb{T}^d):=\{u\in L^2(\mathbb{T}^d,\mathbb{R}^d):\mathrm{div}_\Gamma(u)=0\},\tag{3.1}$$

这里散度显然需从分布意义上解释. 在 $L^2(\mathbb{T}^d,\mathbb{R}^d)$ 子空间 $\mathcal{D}_0(\mathbb{T}^d)$ 上的 L^2- 正交投射称为 Leray 投射算子, 其具体表达式如下:

$$\begin{aligned}&\mathfrak{L}:L^2(\mathbb{T}^d,\mathbb{R}^d)\to\mathcal{D}_0(\mathbb{T}^d),\\&\mathfrak{L}(u):=u+\nabla_\Gamma(-\Delta_\Gamma)^{-1}\mathrm{div}_\Gamma(u),\end{aligned}\tag{3.2}$$

其中逆 Laplace 算子 $(-\Delta_\Gamma)^{-1}$(在零均值函数空间上) 定义如下:

$$(-\Delta_\Gamma)^{-1}u(x):=\sum_{\xi\in\mathbb{Z}^d\backslash\{0\}}\frac{1}{\chi_\xi}\cdot\widehat{u}(\xi)\mathrm{e}^{\mathrm{i}x\cdot\xi}.\tag{3.3}$$

通过 Fourier 级数展开, Leray 投射算子 $\mathfrak{L}$ 可化为

$$\mathfrak{L}(u)(x)=u(x)-\sum_{\xi\in\mathbb{Z}^d\backslash\{0\}}\frac{\mathrm{W}\xi}{\chi_\xi}\mathrm{W}\xi\cdot\widehat{u}(\xi)\mathrm{e}^{\mathrm{i}x\cdot\xi}.\tag{3.4}$$

由 (3.2) 后一个公式, 可以立即导出 Leray 投射算子 $\mathfrak{L}$ 的一些基本性质:

$$\int_{\mathbb{T}^d}\mathfrak{L}(u)(x)\mathrm{d}x=\int_{\mathbb{T}^d}u(x)\mathrm{d}x,\quad\forall u\in L^2(\mathbb{T}^d,\mathbb{R}^d),\tag{3.5}$$

且有

$$\begin{aligned}&\|\mathfrak{L}u\|_s\lesssim\|u\|_s,\ \forall u\in H^s(\mathbb{T}^d,\mathbb{R}^d),\\&\|\mathfrak{L}u\|_{\sigma,s}\lesssim\|u\|_{\sigma,s},\ \forall u\in\mathcal{H}(\mathbb{T}^\infty_\sigma,H^s_0(\mathbb{T}^{\rm d},\mathbb{R}^n)).\end{aligned}\tag{3.6}$$

为便于应用, 现在介绍如下引理.

引理 3.1　(i) 设 $u,v\in H^1(\mathbb{T}^d,\mathbb{R}^d)$, 并且 $\mathrm{div}_\Gamma(u)=0$, 则 $u\cdot\nabla_\Gamma v,\mathfrak{L}(u\cdot\nabla_\Gamma v)$ 的均值为零;

(ii) 设 $\sigma>0,s>\frac{d}{2},u\in\mathcal{H}(\mathbb{T}^\infty_\sigma,H^s(\mathbb{T}^{\rm d},\mathbb{R}^n)),v\in\mathcal{H}(\mathbb{T}^\infty_\sigma,H^{s+1}(\mathbb{T}^{\rm d},\mathbb{R}^n))$, 则

$$u\cdot\nabla_\Gamma v\in\mathcal{H}(\mathbb{T}^\infty_\sigma,H^s(\mathbb{T}^{\rm d},\mathbb{R}^n)),$$

且$\|u\cdot\nabla_\Gamma v\|_{\sigma,s}\lesssim_{\sigma,s}\|u\|_{\sigma,s}\|v\|_{\sigma,s+1}$.

证　(i) 由分部积分,

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{T}^d}\mathfrak{L}(u\cdot\nabla_\Gamma v)\mathrm{d}x&\overset{(3.5)}{=}\int_{\mathbb{T}^d}u\cdot\nabla_\Gamma v\mathrm{d}x=\int_{\mathbb{T}^d}u\cdot\mathrm{W}\nabla v\mathrm{d}x\\&=\int_{\mathbb{T}^d}\mathrm{W}^Tu\cdot\nabla v\mathrm{d}x=-\int_{\mathbb{T}^d}\mathrm{div}(\mathrm{W}^Tu)\cdot v\mathrm{d}x\end{aligned}$$

$$= -\int_{\mathbb{T}^d} \operatorname{div}_\Gamma(u) \cdot v \mathrm{d}x = 0. \tag{3.7}$$

(ii) 由于 $u=(u_1,\cdots,u_d), v=(v_1,\cdots,v_d)$, 故向量场

$$u \cdot \nabla_\Gamma v = (u \cdot \nabla_\Gamma v_1, \cdots, u \cdot \nabla_\Gamma v_d) = (u \cdot \mathrm{W}(\nabla v_1), \cdots, u \cdot \mathrm{W}(\nabla v_d)),$$

由代数引理 2.1 即可得证.

§4 构造几乎周期解

寻求方程 (1.2) 的伴有频率 $\omega=(\omega_1,\omega_2,\omega_3,\cdots) \in D_\gamma$ 的几乎周期解 $u_\omega(t,x), p_\omega(t,x)$, 即是求 $u_\omega(t,x):=U(\omega t,x), p_\omega(t,x):=P(\omega t,x)$, 也就是要解如下方程:

$$\begin{cases} \omega \cdot \partial_\theta U - \Delta_\Gamma U + U \cdot \nabla_\Gamma U + \nabla_\Gamma P = \varepsilon f(\theta,x), \\ \operatorname{div}_\Gamma U = 0, \end{cases} \tag{4.1}$$

其中 $U: \mathbb{T}_\sigma^\infty \times \mathbb{T}^d \to \mathbb{R}^n$ 和 $P: \mathbb{T}_\sigma^\infty \times \mathbb{T}^d \to \mathbb{R}$ 是解析的.

对 (4.1) 第一个方程求散度可得

$$\Delta_\Gamma P = \operatorname{div}_\Gamma(\varepsilon f - U \cdot \nabla_\Gamma U), \tag{4.2}$$

并向零散度向量场空间做投影, 由定义 (3.1)–(3.2) 可得关于 U 的闭方程:

$$\omega \cdot \partial_\theta U - \Delta_\Gamma U + \mathfrak{L}(U \cdot \nabla_\Gamma U) = \varepsilon \mathfrak{L}(f), \quad U(\theta,\cdot) \in \mathcal{D}_0(\mathbb{T}^d), \tag{4.3}$$

将投射算子 $\pi_0, \pi_0^\perp$ 作用于方程 (4.3) 可得解耦方程:

$$\omega \cdot \partial_\theta U_0(\theta) = \varepsilon f_0(\theta), \tag{4.4}$$

$$\omega \cdot \partial_\theta U_\perp - \Delta_\Gamma U_\perp + \mathfrak{L}(U_\perp \cdot \nabla_\Gamma U_\perp) = \varepsilon \mathfrak{L}(f_\perp). \tag{4.5}$$

由于 $\omega \in D_\gamma$ 满足 diophantine 条件, 再利用假设 f 时空均值为零, 可得到平均方程 (4.4) 如下形式的解:

$$U_0(\theta) := (\omega \cdot \partial_\theta)^{-1} f_0(\theta) = \sum_{\ell \in \mathbb{Z}_*^\infty \setminus \{0\}} \frac{\widehat{f}(\ell,0)}{\mathrm{i}\omega \cdot \ell} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\ell \cdot \theta}. \tag{4.6}$$

由 (2.6), 可得估计

$$\begin{aligned} \|U_0\|_\sigma &\leqslant \varepsilon \gamma^{-1} \sum_{\ell \in \mathbb{Z}_*^\infty \setminus \{0\}} \prod_{i \in \mathbb{N}} (1+|\ell_i|^2 i^2) |\widehat{f}(\ell,0)| \mathrm{e}^{\sigma|\ell|_\eta} \\ &\leqslant \varepsilon \gamma^{-1} \sup_{\ell \in \mathbb{Z}_*^\infty \setminus \{0\}} (\mathrm{e}^{-\rho|\ell|_\eta} \prod_{i \in \mathbb{N}} (1+|\ell_i|^2 i^2)) \|f_0\|_{\sigma+\rho} \\ &\leqslant \varepsilon \gamma^{-1} \exp\Big(\frac{\tau}{\rho^{\frac{1}{\eta}}} \ln\Big(\frac{\tau}{\rho}\Big)\Big) \|f\|_{\sigma+\rho,0}, \end{aligned} \tag{4.7}$$

其中 $\tau=\tau(\eta)>0$ (见 [12, 引理 A.6]).

现在利用不动点理论来解方程 (4.5) (简单起见, U 代替 $U_\perp$, f 代替 $f_\perp$). 对于 $\sigma, R>0, s \geqslant 0$, 定义

$$\mathcal{B}_{\sigma,s}(R) := \{U \in \mathcal{H}(\mathbb{T}_\sigma^\infty, H_0^s(\mathbb{T}^{\mathrm{d}}, \mathbb{R}^n)) : \operatorname{div}_\Gamma U = 0,\ \|U\|_{\sigma,s} \leqslant R\}, \tag{4.8}$$

并给出非线性算子

$$\Phi(U):=L_\omega\mathfrak{L}(\varepsilon f-U\cdot\nabla_\Gamma U),\quad U\in\mathcal{B}_{\sigma,s}(R),\tag{4.9}$$

其中 L_ω 定义如下:

$$L_\omega u(\theta,x):=(\omega\cdot\partial_\theta-\Delta_\Gamma)^{-1}u(\theta,x)=\sum_{(\ell,j)\in\mathbb{Z}^\infty_*\times(\mathbb{Z}^d\setminus\{0\})}\frac{\widehat{u}(\ell,j)}{\mathrm{i}\omega\cdot\ell+\chi_j}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\ell\cdot\theta}\mathrm{e}^{\mathrm{i}j\cdot x},$$

$u\in\mathcal{H}(\mathbb{T}^\infty_\sigma,H^s_0(\mathbb{T}^d,\mathbb{R}^n))$.

于是, 方程 (4.5) 等价于 $\Phi(U)=U$.

命题 4.1 (压缩映射 Φ) 设 $\sigma>0,s>\frac{d}{2}+1,f\in\mathcal{H}(\mathbb{T}^\infty_\sigma,H^s_0(\mathbb{T}^d,\mathbb{R}^n))$, 则存在充分大的常数 $C_*=C_*(f,s)>0$ 和充分小的 $\varepsilon_0=\varepsilon_0(f,s)\in(0,1)$, 使得对 $\forall\varepsilon\in(0,\varepsilon_0)$, 映射

$$\Phi:\mathcal{B}_{\sigma,s}(C_*\varepsilon)\to\mathcal{B}_{\sigma,s}(C_*\varepsilon)$$

都是压缩映射.

证 令 $U\in\mathcal{B}_{\sigma,s}(C_*\varepsilon)$, 由引理 3.1-(i) 可得

$$\int_{\mathbb{T}^d}\Phi(U)\mathrm{d}x=0,\tag{4.10}$$

从而有

$$\mathrm{div}_\Gamma(\Phi(U))=0.\tag{4.11}$$

另外还有

$$\begin{aligned}\|\Phi(U)\|_{\sigma,s}&=\|L_\omega\mathfrak{L}(\varepsilon f-U\cdot\nabla_\Gamma U)\|_{\sigma,s}\\&=\sum_{\ell\in\mathbb{Z}^\infty_*}\Big(\sum_{j\in\mathbb{Z}^d\setminus\{0\}}\langle j\rangle^{2s}\frac{|(\widehat{\mathfrak{L}}(\varepsilon f-U\cdot\nabla_\Gamma U))(\ell,j)|^2}{|\mathrm{i}\omega\cdot\ell+\chi_j|^2}\Big)^{\frac12}\mathrm{e}^{\sigma|\ell|_\eta}\\&\leqslant\sum_{\ell\in\mathbb{Z}^\infty_*}\Big(\sum_{j\in\mathbb{Z}^d\setminus\{0\}}|j|^{2s}|\chi_j|^{-2}|(\widehat{\mathfrak{L}}(\varepsilon f-U\cdot\nabla_\Gamma U))(\ell,j)|^2\Big)^{\frac12}\mathrm{e}^{\sigma|\ell|_\eta}\\&\lesssim\sum_{\ell\in\mathbb{Z}^\infty_*}\|(\widehat{\mathfrak{L}}(\varepsilon f-U\cdot\nabla_\Gamma U))(\ell)\|_{s-2}\mathrm{e}^{\sigma|\ell|_\eta}\\&=\|\mathfrak{L}(\varepsilon f-U\cdot\nabla_\Gamma U)\|_{\sigma,s-2}\\&\lesssim^{(3.6)}\|\varepsilon f-U\cdot\nabla_\Gamma U\|_{\sigma,s-2}\\&\lesssim\varepsilon\|f\|_{\sigma,s-2}+\|U\cdot\nabla_\Gamma U\|_{\sigma,s-1}.\end{aligned}\tag{4.12}$$

已知 $\sigma>0,s-1>\frac{d}{2}$, 并由引理 3.1-(ii) 可得

$$\|\Phi(U)\|_{\sigma,s}\leqslant C(f,\sigma,s)(\varepsilon+\|U\|_{\sigma,s-1}\|U\|_{\sigma,s})\leqslant C(f,\sigma,s)(\varepsilon+\|U\|^2_{\sigma,s}),$$

其中 $C(f,\sigma,s)>0$. 令 $C_*\geqslant 2C(f,\sigma,s)$ 和 $\varepsilon\leqslant\frac{1}{2C_*C(f,\sigma,s)}$, 由 $\|U\|_{\sigma,s}\leqslant C_*\varepsilon$ 可得

$$\|\Phi(U)\|_{\sigma,s}\leqslant C(f,\sigma,s)(\varepsilon+C_*^2\varepsilon^2)\leqslant C_*\varepsilon,$$

于是有 $\Phi:\mathcal{B}_{\sigma,s}(C_*\varepsilon)\to\mathcal{B}_{\sigma,s}(C_*\varepsilon)$.

若 $U_1,U_2\in\mathcal{B}_{\sigma,s}(C_*\varepsilon)$, 由 (4.12) 中关于 L_ω 的估计可得

$$\begin{aligned}\|\Phi(U_1)-\Phi(U_2)\|_{\sigma,s}&=\|L_\omega\mathfrak{L}(U_1\cdot\nabla_\Gamma U_1-U_2\cdot\nabla_\Gamma U_2)\|_{\sigma,s}\\&\leqslant\|L_\omega\mathfrak{L}((U_1-U_2)\cdot\nabla_\Gamma U_1)\|_{\sigma,s}+\|L_\omega\mathfrak{L}(U_2\cdot\nabla_\Gamma(U_1-U_2))\|_{\sigma,s}\\&\lesssim_{\sigma,s}^{(3.6),\text{引理}3.1}\|U_1-U_2\|_{\sigma,s}\|U_1\|_{\sigma,s}+\|U_1-U_2\|_{\sigma,s}\|U_2\|_{\sigma,s}\\&\leqslant C(\sigma,s)(\|U_1\|_{\sigma,s}+\|U_2\|_{\sigma,s})\|U_1-U_2\|_{\sigma,s},\end{aligned}$$

其中 $C(\sigma,s)>0$.

令 $\varepsilon\leqslant\min\{\frac{1}{4C_*C(\sigma,s)},\frac{1}{2C_*C(f,\sigma,s)}\}$, 则有

$$\|\Phi(U_1)-\Phi(U_2)\|_{\sigma,s}\leqslant 2C(\sigma,s)C_*\varepsilon\|U_1-U_2\|_{\sigma,s}\leqslant\frac{1}{2}\|U_1-U_2\|_{\sigma,s},$$

因此 Φ 是压缩映射.

§5 定理 1.1 的证明

对于 $\sigma>0,s>\frac{d}{2}+1$, 由命题 4.1 和不动点定理可得, 方程 (4.5) 有唯一的时间解析解 $U_\perp\in\mathcal{H}(\mathbb{T}_\sigma^\infty,H_0^s(\mathbb{T}^{\mathrm{d}},\mathbb{R}^n))$, 且 $\|U_\perp\|_{\sigma,s}\leqslant C_*(f,s)\varepsilon$; 同时由 (4.4), (4.6)–(4.7) 可得, 方程 (4.4) 存在时间解析解 U_0, 且有

$$U_0\in\mathcal{H}(\mathbb{T}_\sigma^\infty,\mathbb{R}^n),\quad \|U_0\|_\sigma\leqslant\varepsilon\gamma^{-1}\exp\Big(\frac{\tau}{\rho^{\frac{1}{\eta}}}\ln\Big(\frac{\tau}{\rho}\Big)\Big)\|f\|_{\sigma+\rho,0}.\tag{5.1}$$

于是 $U=U_0+U_\perp\in\mathcal{H}(\mathbb{T}_\sigma^\infty,H_0^s(\mathbb{T}^{\mathrm{d}},\mathbb{R}^n)$ 为零时空均值方程 (4.3) 的时间解析解, 从而零时空均值方程 (4.2) 的唯一解为

$$P:=(-\Delta_\Gamma)^{-1}\mathrm{div}_\Gamma(U\cdot\nabla_\Gamma U-\varepsilon f).$$

因此 $P\in\mathcal{H}(\mathbb{T}_\sigma^\infty,\mathbb{R}^n)$, 并满足不等式

$$\begin{aligned}\|P\|_{\sigma,s}&\lesssim_{\sigma,s}\varepsilon\|f\|_{\sigma,s-1}+\|U\cdot\nabla_\Gamma U\|_{\sigma,s-1}\\&\lesssim_{\sigma,s}\varepsilon\|f\|_{\sigma,s-1}+\|U\|_{\sigma,s}^2\leqslant C(\gamma,s,d,f)\varepsilon.\end{aligned}$$

值得注意的是, 若 f 关于 x 均值为零, 可得

$$f_0(\theta)=\pi_0 f(\theta)=\frac{1}{(2\pi)^d}\int_{\mathbb{T}^d}f(\theta,x)\mathrm{d}x=0,\quad\forall\theta\in\mathbb{T}^\infty.$$

方程 (4.4) 可简化为 $\omega\cdot\partial_\theta U_0=0$, 从而可以选择 $U_0=0$ 作为零空间均值方程 (4.3) 的唯一解. 于是 $U=U_\perp$, 因此定理 1.1 得证.

参 考 文 献

[1] Kuksin S, Pöschel J. Invariant cantor manifolds of quasi-periodic oscillations for a nonlinear Schrödinger equation [J]. *Ann of Math*, 1996, 143(1):149–179.

[2] Wayne C E. Periodic and quasi-periodic solutions of nonlinear wave equations via KAM theory [J]. *Comm Math Phys*, 1990, 127(3):479–528.

[3] Bourgain J. Construction of quasi-periodic solutions for Hamiltonian perturbations of linear equations and applications to nonlinear PDE [J]. *Internat Math Res Notices*, 1994, 11:475–497.

[4] Berti M. KAM for PDEs [J]. *Boll Unione Mat Ital*, 2016, 9(2):115–142.

[5] Pöschel J. On the construction of almost periodic solutions for a nonlinear Schrödinger equation [J]. *Ergodic Theory Dynam Systems*, 2002, 22(5):1537–1549.

[6] Bourgain J. Construction of approximative and almost periodic solutions of perturbed linear Schrödinger and wave equations [J]. *Geom Funct Anal*, 1996, 6(2):201–230.

[7] Cong H, Liu J, Shi Y, et al. The stability of full dimensional KAM tori for nonlinear Schrödinger equation [J]. *J Differential Equations*, 2018, 264(7):4504–4563.

[8] Cong H, Yuan X. The existence of full dimensional invariant tori for 1-dimensional nonlinear wave equation [J]. *Ann Inst H Poincaréc Anal Non Linéaire*, 2021, 38(3):759–786.

[9] Geng J, Xu X. Almost periodic solutions of one dimensional Schrödinger equation with the external parameters [J]. *J Dynam Differential Equations*, 2013, 25(2):435–450.

[10] Biasco L, Massetti J, Procesi M. Almost periodic invariant tori for the NLS on the circle [J]. *Ann Inst H Poincaréc Anal Non Linéaire*, 2021, 38(3):711–758.

[11] Liu S. The existence of almost-periodic solutions for 1-dimensional nonlinear Schrödinger equation with quasi-periodic forcing [J]. *J Math Phys*, 2020, 61(3):031502.

[12] Corsi R, Montalto L, Procesi M. Almost-Periodic response solutions for a forced quasi-linear Airy equation [J]. *J Dynam Differential Equations*, 2021, 33(3):1231–1267.

[13] Liu S, Shi G. The existence of full-dimensional invariant tori for an almost-periodically forced nonlinear beam equation [J]. *J Math Phys*, 2021, 62(2):021509.

[14] Montalto R. The Navier-Stokes equation with time quasi-periodic external force: existence and stability of quasi-periodic solutions [J]. *J Dynam Differential Equations*, 2021, 33(3):1341–1362.

[15] Serrin J. A note on the existence of periodic solutions of the Navier-Stokes equations [J]. *Arch Rational Mech Anal*, 1959, 3:120–122.

[16] Galdi PG. On time-periodic flow of a viscous liquid past a moving cylinder [J]. *Arch Rational Mech Anal*, 2013, 210(2):451–498.

[17] Maremonti P. Existence and stability of time-periodic solutions to the Navier-Stokes equations in the whole space [J]. *Nonlinearity*, 1991, 4(2):503–529.

[18] Kyed M. The existence and regularity of time-periodic solutions to the three-dimensional Navier-Stokes equations in the whole space [J]. *Nonlinearity*, 2014, 27(12):2909–2935.

[19] Bourgain J. On invariant tori of full dimension for 1d periodic NLS [J]. *J Funct Anal*, 2005, 229(1):62–94.

[20] Montalto R, Michela P. Linear Schrödinger equation with an almost periodic potential [J]. *SIAM J Math Anal*, 2021, 53(1):386–434.

Almost Periodic Response Solutions for Forced Navier-Stokes Equation on Flat Tori

LI Hepeng[1]

[1]Department of Mathematics, Sichuan Institute of Arts and Science, Dazhou 635000, Sichuan, China. E-mail: hpli15@fudan.edu.cn

Abstract In this paper, the author prove the existence of small amplitude, time almost-periodic response solutions for the incompressible Navier-Stokes equation on flat tori $\mathbb{T}^d_\Gamma$, with a small, almost periodic in time external force.

Keywords Navier-Stokes equation, Almost-Periodic solutions, Fixed point theorem

2000 MR Subject Classification 37J40, 35Q30, 37C25

The English translation of this paper will be published in
Chinese Journal of Contemporary Mathematics, Vol. 45 No. 2, 2024
by ALLERTON PRESS, INC., USA